Дифференциальные уравнения и оптимальное управление

Differential equations and optimal control

УДК 517.925+517.938

РАДИКАЛ ИДЕАЛА ФОКУСНЫХ ВЕЛИЧИН КОМПЛЕКСНОЙ СИСТЕМЫ КУКЛЕСА

А. П. САДОВСКИЙ[1], ***Т. В. МАКОВЕЦКАЯ***[1], ***Д. Н. ЧЕРГИНЕЦ***[1]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

На примере исследования вопроса о существовании комплексного центра для комплексной системы Куклеса $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3$ представлено применение нового метода получения необходимых и достаточных условий центра, разработанного А. П. Садовским и основанного на методе нормальных форм. Вместо изучения многообразия идеала фокусных величин предлагается исследовать многообразие идеала, базисом которого являются полиномы, полученные новым методом. При поиске радикала такого идеала исследование разбивается на две части: $BN = 0$ и $BN \neq 0$. При $BN = 0$ найдены пять серий условий комплексного центра, в частности, четыре серии условий вещественного центра. В случае $BN \neq 0$ можно считать, что в системе Куклеса

Образец цитирования:
Садовский А. П., Маковецкая Т. В., Чергинец Д. Н. Радикал идеала фокусных величин комплексной системы Куклеса // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 2. С. 4–11.

For citation:
Sadovskii A. P., Makavetskaya T. V., Cherginets D. N. The radical of the focal values ideal of the complex Kukles system. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 2. P. 4–11 (in Russ.).

Авторы:
Антон Павлович Садовский – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета.
Татьяна Витальевна Маковецкая – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры аналитической экономики и эконометрики экономического факультета.
Дмитрий Николаевич Чергинец – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета.

Authors:
Anton Sadovskii, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of differential equations and systems analysis, faculty of mechanics and mathematics.
sadovskii@bsu.by
Tatsiana Makavetskaya, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of analytical economics and econometrics, faculty of economics.
shcheglovskaya@tut.by
Dmitry Cherginets, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of differential equations and systems analysis, faculty of mechanics and mathematics.
cherginetsdn@gmail.com

$B = N$, а это значительно упрощает его дальнейшее изучение (получены три серии существования комплексного центра, в частности, две серии – вещественного центра). В результате исследования в работе определены необходимые и достаточные условия существования комплексного и вещественного центров для комплексной и вещественной систем Куклеса соответственно.

Ключевые слова: проблема центра и фокуса; система Куклеса; многообразие комплексного центра; фокусные величины; нормальные формы; радикал идеала.

THE RADICAL OF THE FOCAL VALUES IDEAL OF THE COMPLEX KUKLES SYSTEM

A. P. SADOVSKII [a]***, T. V. MAKAVETSKAYA*** [a]***, D. N. CHERGINETS*** [a]

[a] *Belarusian State University, Niezaliežnasci Avenue, 4, 220030, Minsk, Belarus*

Corresponding author: D. N. Cherginets (cherginetsdn@gmail.com)

In the article it is considered the center-focus problem for complex Kukles system $\dot{x} = y,\ \dot{y} = -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3$. The problem is solved by the new method, obtained by A. P. Sadovski and based on the method of normal forms. Instead of investigating the variety of ideal of focal values it is proposed to study the variety of ideal with the basis – polynomials obtained by a new method. The study of the radical of such ideal is divided into two parts: the trivial case where $BN = 0$, and the case of $BN \neq 0$. If $BN = 0$ it is obtained five series of center conditions for the complex system, in particular, four series of center conditions for the real system. In the case of $BN \neq 0$ it can be assumed $B = N$ in the Kukles' system. This assumption simplifies the further study of this case (it is obtained three series of the existence of the complex center, in particular, two series of the existence of the real center). Thus, as a result of research in the present paper it is presented the necessary and sufficient conditions for the complex and real centers existence for the complex and real Kukles' systems respectively.

Key words: center-focus problem; Kukles system; complex center variety; focal values; normal forms; radical of ideal.

Рассматриваемую систему Куклеса

$$\dot{x} = y,\ \ \dot{y} = -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3, \tag{1}$$

где $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A, B, C, K, L, M, N \in \mathbb{R}$ будем называть *вещественной*, а в случае $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $A, B, C, K, L, M, N \in \mathbb{C}$ – *комплексной*.

Впервые проблема центра и фокуса для системы (1) исследовалась И. С. Куклесом. В работе [1] на основании проведенного анализа фокусных величин высказана гипотеза о том, что при $N \neq 0$ для системы (1) необходимы и достаточны следующие условия вещественного центра:

$$AB + BC + L + N = 0,\ 2B^3 - ABC + 2BK + CL + BM - 2AN = 0;$$

$$6B^2L - ACL - ABM - BCK + KL + LM + A^2N - 2KN = 0;$$

$$6BL^2 - CKL - BKM - ALM + 2AKN = 0,\ 2L^3 - KLM + K^2N = 0.$$

В [2] была доказана справедливость этой гипотезы и тем самым разрешена проблема центра и фокуса для вещественной системы (1). В работе [3] было приведено решение проблемы центра и фокуса на основании исследования фокусных величин. Проблема центра и фокуса для этой системы изучалась в [4; 5].

Новый метод получения необходимых и достаточных условий существования центра (комплексного центра) в $O(0, 0)$ представлен в [6]. В настоящей работе с помощью этого метода будут получены необходимые и достаточные условия существования центра для комплексной системы (1).

Из [6, теорема 1] вытекает следующее утверждение.

Утверждение 1. *Существует единственное аналитическое преобразование*

$$x = u + \sum_{i=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{i} f_{j,\, i-j} u^j v^{i-j} \equiv x(u, v),\ \ y = v + \sum_{i=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{i} g_{j,\, i-j} u^j v^{i-j} \equiv y(u, v), \tag{2}$$

приводящее вещественную систему (1) к системе

$$\dot{u} = \left(v + \sum_{k=2}^{+\infty} c_k u^k\right)\left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} d_k u^k\right) \equiv \varphi(u, v), \;\; \dot{v} = -u\left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} d_k u^k\right) \equiv \psi(u, v). \tag{3}$$

$O(0, 0)$ *системы (1) является центром тогда и только тогда, когда* $c_{2k-1} = 0$.

Семейство отображений (2) формирует группу, где в качестве умножения рассматривается композиция отображений. В утверждении 1 для отображения (2) обратное отображение имеет такой же вид.

Замечание 1. Утверждение 1 справедливо как для вещественной системы вида (1), так и для комплексной.

Таким образом, соотношения $c_{2k-1} = 0$, $k = \overline{2, +\infty}$, представляют собой необходимые и достаточные условия существования центра (комплексного центра) для системы (1).

Опишем механизм поиска величин c_{2k-1}. Используя системы (1), (3) и замену (2), составим следующие выражения:

$$\frac{\partial x(u, v)}{\partial u}\varphi(u, v) + \frac{\partial x(u, v)}{\partial v}\psi(u, v) - y \equiv \sum_{k=2}^{+\infty} p_k(u, v);$$

$$\frac{\partial y(u, v)}{\partial u}\varphi(u, v) + \frac{\partial y(u, v)}{\partial v}\psi(u, v) -$$
$$-\left(-x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3\right)\Big|_{x = x(u, v),\; y = y(u, v)} \equiv \sum_{k=2}^{+\infty} q_k(u, v),$$

где p_k, q_k – однородные полиномы степени k. Тогда величины c_{2k-1} будем получать последовательно из соотношений

$$\sum_{k=2}^{+\infty} p_k(u, v) \equiv 0, \;\; \sum_{k=2}^{+\infty} q_k(u, v) \equiv 0.$$

Так, на первом шаге из системы уравнений $p_2(u, v) \equiv 0$, $q_2(u, v) \equiv 0$ единственным образом определяем величины $f_{2,0}$; $f_{1,1}$; $g_{2,0}$; $g_{1,1}$; c_2; d_1. Имеем

$$f_{2,0} = \frac{A + 2C}{3}; \;\; f_{1,1} = 0; \;\; g_{2,0} = \frac{3B}{2}; \;\; g_{1,1} = C; \;\; c_2 = \frac{3B}{2}; \;\; d_1 = -\frac{2A + C}{3}.$$

Подставляя полученные величины в систему $p_3(u, v) \equiv 0$, $q_3(u, v) \equiv 0$, на втором шаге единственным образом определяем величины $f_{3,0}$; $f_{2,1}$; $f_{1,2}$; $g_{3,0}$; $g_{2,1}$; $g_{1,2}$; c_3; d_2. Получаем

$$f_{3,0} = \frac{2\left(5A^2 + 11AC + 11C^2\right) + 9(K + M)}{36}; \;\; f_{2,1} = \frac{N}{2}; \;\; f_{1,2} = 0;$$

$$g_{3,0} = \frac{B(2A + 5C) + 2L + N}{2}; \;\; g_{2,1} = \frac{2AC + 7C^2 + 3M}{6}; \;\; g_{1,2} = N;$$

$$c_3 = B(A + C) + L + N; \;\; d_2 = \frac{-2\left(7A^2 + 7AC + 4C^2\right) - 9(3K + M)}{36}.$$

Пройдя $i - 1$ шаг, на i-м шаге из системы уравнений

$$p_{i+1}(u, v) \equiv 0, \;\; q_{i+1}(u, v) \equiv 0$$

единственным образом определяем величины $f_{j,\, i+1-j}$; $g_{j,\, i+1-j}$; c_{i+1}; d_i, где $j = \overline{1, i}$.

Рассмотрим систему из первых семи необходимых условий:

$$c_{2k-1} = 0, \;\; k = \overline{2, 8}, \tag{4}$$

где для получения значений $c_{2k-1} = 0$, $k = \overline{2, 8}$, проделываем 14 шагов, используя описанный выше механизм. В результате

$$c_{2k-1} = \alpha_{k-1}\tilde{c}_{k-1},\ k = \overline{2, 8},$$

где $\alpha_{k-1} \in \mathbb{Q}$; $\tilde{c}_1 = AB + BC + L + N$; $\tilde{c}_2$ содержит 19 слагаемых, $\tilde{c}_3$ – 60, $\tilde{c}_4$ – 149, $\tilde{c}_5$ – 321, $\tilde{c}_6$ – 523, $\tilde{c}_7$ – 1122.

Следовательно, система (4) эквивалентна системе

$$\tilde{c}_i = 0,\ i = \overline{1, 7}. \qquad (5)$$

Используя алгоритм деления, преобразуем систему (5). Для этого определим остатки от деления полинома $\tilde{c}_i$ (для каждого $i = \overline{2, 7}$) на набор полиномов $\{\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_{i-1}\}$, взятых в указанном порядке. Используем лексикографическое упорядочение $L > M > K > N > B > C > A$. Получаем

$$r_1 = \tilde{c}_1,\ \tilde{c}_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{j,i}\tilde{c}_j + \beta_i r_i,\ i = \overline{2, 7},$$

где $\beta_i \in \mathbb{Q}$; $\alpha_{j,i} \in \mathbb{Q}[A, B, C, K, L, M, N]$.

Тогда система уравнений (5) эквивалентна системе уравнений

$$r_i = 0,\ i = \overline{1, 7}. \qquad (6)$$

В системе (6) $r_1 = \tilde{c}_1 = AB + BC + L + N$; r_2 содержит 13 слагаемых, r_3 – 41, r_4 – 99, r_5 – 201, r_6 – 382, r_7 – 660.

Далее проводим аналогичную процедуру. Меняя порядок переменных на $B > L > M > K > N > C > A$, имеем

$$e_1 = r_1,\ r_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{j,i} r_j + \gamma_i e_i,\ i = \overline{2, 7},$$

где $\gamma_i \in \mathbb{Q}$; $b_{j,i} \in \mathbb{Q}[A, B, C, K, L, M, N]$.

Получаем новую систему, эквивалентную системам (4), (5) и (6):

$$e_i = 0,\ i = \overline{1, 7},$$

где $e_1 = r_1 = \tilde{c}_1 = AB + BC + L + N$; $e_2 = AB(-K + M) + 2L(2K + M) + 6B^2N + (7K + 3M)N + (5A + 3C) \times (-CL + AN)$; $e_3 = -6(3K^2 - M^2)AB + 12(6K^2 + M^2)L + (135A^2 + 176C^2 + 310AC)KL - (15A^2 - 58C^2 + 4AC)LM + (390A^2 + 608C^2 + 1021AC)KN - (6A^2 - 222C^2 - 193AC + 72K)MN + 6ABN(35L + 29N) + (A + C)(135A^2 + 222C^2 + 415AC)(-CL + AN) - 12N(5L^2 - 37N^2 - 29LN)$; e_4 содержит 83 слагаемых, e_5 – 178, e_6 – 334, e_7 – 578.

Многообразие комплексного центра для системы (1) в случае $BN = 0$ представлено в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть V – многообразие комплексного центра системы (1). Тогда*

$$V \bigcap \mathbb{V}(BN) = \bigcap_{k=1}^{5} \mathbb{V}(J_k),$$

где $J_1 = \langle A, C, L, N\rangle$; $J_2 = \langle N, C(A+C) - K, C^2(A+C) + M(A+2C), B(A+C) + L\rangle$; $J_3 = \langle B, N, L\rangle$; $J_4 = \langle 2A + C, B, A^4 - 18N^2, A^2 + 3K, M, L + N\rangle$; $J_5 = \langle A, B, C, K^2 + N^2, 3K + M, L + N\rangle$.

Доказательство. Используя методы компьютерной алгебры [7; 8], определяем радикалы идеалов $\langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, N\rangle$ и $\langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, B\rangle$. При вычислении базисов Гребнера будем использовать лексикографическое упорядочение $L > M > K > N > B > C > A$. Получим

$$\sqrt{\langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, N\rangle} = \bigcap_{k=1}^{3} J_k;\ \sqrt{\langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, B\rangle} = \bigcap_{k=3}^{5} J_k.$$

Введем вектор $p = (A, B, C, K, L, M, N)$. При $p \in \mathbb{V}(J_1)$ траектории системы (1) симметричны относительно оси Oy. Значит, $O(0, 0)$ – центр системы (1).

Для доказательства справедливости включений $\mathbb{V}(J_k) \subset V \bigcap \mathbb{V}(BN)$, $k = \overline{2, 5}$, преобразуем систему (1) к системе Льенара.

Подстановка $(u, v) \mapsto \dfrac{\tilde{u}, \left(1 - A\tilde{u} - K\tilde{u}^2\right)\tilde{v}}{1 + \left(B + L\tilde{u}\right)\tilde{v}}$ [9] приводит (1) к виду

$$\dot{\tilde{u}} = P_0(\tilde{u})\tilde{v}, \ \ \dot{\tilde{v}} = -\tilde{u} + P_2(\tilde{u})\tilde{v}^2 + P_3(\tilde{u})\tilde{v}^3,$$

где $P_0(\tilde{u}) = 1 - A\tilde{u} - K\tilde{u}^2$; $P_2(\tilde{u}) = A + C + \left(3B^2 - AC + 2K + M\right)\tilde{u} + (6BL - CK - AM)\tilde{u}^2 + \left(3L^2 - KM\right)\tilde{u}^3$; $P_3(\tilde{u}) = B(A + C) + L + N + \left(CL + B\left(2B^2 - AC + 2K + M\right) - 2AN\right)\tilde{u} + \left(L\left(6B^2 - AC + K + M\right) - B(CK + {}\right.$ $\left.{} + AM) + \left(A^2 - 2K\right)N\right)\tilde{u}^2 - \left(L(CK - 6BL + AM) + K(BM - 2AN)\right)\tilde{u}^3 + \left(2L^3 - KLM + K^2N\right)\tilde{u}^4$.

Введем функции

$$Q(\tilde{u}) = \frac{P_3(\tilde{u})}{\tilde{u}}; \ \ R(\tilde{u}) = \frac{Q'(\tilde{u})P_0(\tilde{u}) + 3Q(\tilde{u})P_2(\tilde{u})}{\tilde{u}}.$$

Поскольку при $p \in \mathbb{V}(J_2)$ выполняется тождество $Q(\tilde{u}) \equiv 0$, а при $p \in \bigcup\limits_{k=3}^{5} \mathbb{V}(J_k)$ – тождество $\dfrac{R^3(\tilde{u})}{Q^5(\tilde{u})} \equiv \mathrm{const}$, то по комплексной теореме Черкаса [10] особая точка $O(0, 0)$ – центр системы (1).

Теорема доказана.

Из [11, теорема 1] имеем следующее следствие.

Следствие 1. *Пусть W – многообразие центра вещественной системы (1). Тогда*

$$W \bigcap \mathbb{V}(BN) = \bigcup_{k=1}^{4} \mathbb{V}(J_k).$$

Замечание 2. При $A, B, C, K, L, M, N \in \mathbb{R}$ имеет место включение $\mathbb{V}(J_5) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{4} \mathbb{V}(J_k)$.

Далее будем искать многообразие комплексного центра для системы (1) в случае $BN \neq 0$. Поскольку $BN \neq 0$, то в системе (1) можно считать $N = B$ [3]. Для упрощения вычислений введем замены:

$$N = B; \ C = U - A, \tag{7}$$

где U – новый параметр.

Подставим замену (7) в уравнения $e_i = 0$, $i = \overline{1, 7}$, учитывая $BN \neq 0$. Получаем эквивалентную систему

$$z_i = 0, \tag{8}$$

где $z_1 = L + B(1 + U)$; $z_2 = B\left(6B^2 + 3U^3 + U^2(3 - A) + 2U(1 - A)A + (3 - 4U - A)K + (1 - 2U + A)M\right)$; z_3 содержит 29 слагаемых, z_4 – 82, z_5 – 177, z_6 – 333, z_7 – 577.

Определим остатки от деления полинома z_i (для каждого $i = \overline{2, 7}$) на набор полиномов $\left\{z_1, \ldots, z_{i-1}\right\}$, взятых в указанном порядке. Используем лексикографическое упорядочение $L > B > M > K > A > U$. Получаем

$$w_1 = z_1; \ \ z_i = \sum_{j=1}^{i-1} m_{j,\,i}\, z_j + \mu_i w_i, \ \ i = \overline{2, 7},$$

где $\mu_i \in \mathbb{Q}$; $m_{j,\,i} \in \mathbb{Q}[A, B, C, K, L, M, N]$.

Получаем новую систему, эквивалентную (8):

$$w_i = 0, \ i = \overline{1, 7}, \tag{9}$$

где $w_1 = z_1$; $w_2 = z_2$; w_3 содержит 31 слагаемое, w_4 – 84, w_5 – 179, w_6 – 335, w_7 – 579.

Аналогичную процедуру повторяем еще четыре раза. Получаем систему уравнений, эквивалентную (9):

$$v_i = 0, \ i = \overline{1, 7},$$

где $v_1 = w_1$; $v_2 = w_2 = z_2$; $v_3 = M^2(2+2U-A) + 3K^2(4+4U+A) - U(1+U-A)\big(2A^2 - 3U + 2A^2U + 39U^2 + 42U^3 - 2A + 29UA + 16U^2A\big) + \big(3 + 5A^2 - 43U + 6A^2U - 25U^2 + 36U^3 - 4A + 25UA + 18U^2A\big)K + \big(1 + 3A^2 - 15U + 2A^2U - 3U^2 + 13U^3 + 5UA - 10U^2A + 12K\big)M$; v_4 содержит 85 слагаемых, v_5 – 173, v_6 – 311, v_7 – 495.

Введем следующие обозначения:

$$\eta_1 = K + (A - U - 1)(1+U);\ \ \eta_2 = A^2 + 4U^2(1+U)^2 + AU(1+U)(5+U);$$

$$\eta_3 = A - U(1+U)(5+U);\ \ \eta_4 = A^2 - AU(1+U)(5+U) + U^2(1+U)^2(3+U)(7+U).$$

Теорема 2. *Система уравнений* $v_i = 0,\ i = \overline{3,7}$, *эквивалентна системе уравнений* $h_i = 0,\ i = \overline{1,5}$, *где* $h_1 = U\eta_1\eta_2$; $h_2 = \eta_1 U\big(K + (1+U)(A + U + U^2)\big)$; $h_3 = \eta_1\big(3K^2 + A^2U(1+3U) + U^2(1+U)^2(7 + 29U + 33U^2) + AU(1+U)(7 + 31U + 44U^2 + 9U^3) + K(A(2-3U) + 3U(2+U))\big)$; $h_4 = 3K^2 - 3U^2(1+U)^2 \times (2+U) + A^2U(4+3U) - AU(1+U)(4 - 3U - 3U^2) + M(A - 2U - 2) - K\big(6 + 7U - 3U^2(1+U) - A(5 + 6U)\big)$; $h_5 = A(A-U-1)U(1+U) + M\big(K + (1+U)^2\big) - K\big(2A - (1+U)(3+U)\big)$.
При этом

$$\langle h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\rangle = \bigcap_{j=1}^{4} I_j,$$

где $I_1 = \big\langle (1+U)(1+U-A) - K,\ (1+U-A)\big((2+U)A - (1+U)(3+U)\big) - (2+2U-A)M\big\rangle$; $I_2 = \big\langle A^2 + 4 \times (1+U)^2U^2 + U(1+U)(5+U)A,\ (1+U)(U + U^2 + A) + K,\ 3U(1+U) + (3+U)A - M\big\rangle$; $I_3 = \langle U,\ 2A + 3K,\ 2A - M\rangle$; $I_4 = \langle U, K, M\rangle$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя алгоритм деления, убеждаемся, что каждая величина v_i, $i = \overline{3,7}$, принадлежит идеалу $\langle h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\rangle$. Например,

$$v_3 = h_1p_{1,1} + h_2p_{1,2} + h_3p_{1,3} + h_4p_{1,4} + h_5p_{1,5},$$

где $p_{1,1} = -37 - 45U$; $p_{1,2} = 2(2 + 21A + 9K) + 3U(5 + 3A + 17U + 3U^2)$; $p_{1,3} = 5$; $p_{1,4} = 6 - M + 3A(1+U)^2 + K(5+6U) + U(19 + 74 + 12U^2 + 3U^3)$; $p_{1,5} = 13 + 3K + 3U(1+U)(3+U)$,
или

$$v_4 = h_1p_{2,1} + h_2p_{2,2} + h_3p_{2,3} + h_4p_{2,4} + h_5p_{2,5},$$

где $p_{2,1} = 277 + 2A + 18K + 64(37 + 8U + 3U^2)$; $p_{2,2} = -14 - 3K(-77 + 12U) + A(-313 + 135U - 150U^2 - 18U^3) - U(-325 + 1176U + 180U^2 + 72U^3)$; $p_{2,3} = -22 + 2A$; $p_{2,4} = -2A^2(1+U) + K(-38 - 2A + 61A - 12U^2) - 3A(4 + 5U - 25U^2 + 4U^3) + 2(-13 + 26U + 93U^2 - 169U^3 + 2U^4)$; $p_{2,5} = -56 + 12K + 243U - 189U^2 + 7U^3 + M(12 + 6U)$.
Аналогично можно определить разложения полиномов v_i, $i = \overline{5,7}$.

Таким образом,

$$\langle v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\rangle \subset \langle h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\rangle.$$

Вычислим базис Гребнера для идеала $\langle v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\rangle$ с порядком переменных $M > K > A > U$. Получаем

$$\langle v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\rangle = \langle g_1, g_2, g_3, \ldots, g_{27}\rangle,$$

где $g_1 = U^{12}\eta_1\eta_2$; $g_2 = U^{11}\eta_1\eta_2\eta_3$; $g_3 = U^{10}\eta_1\eta_2\eta_4$; $g_i \in \mathbb{Q}[M, K, A, U]$, $i = \overline{4, 27}$.

Поскольку

$$h_1^7 = \sum_{i=1}^{27}\tilde{\alpha}_i g_i;\ h_2^7 = \sum_{i=1}^{27}\tilde{\beta}_i g_i;\ h_3^7 = \sum_{i=1}^{27}\tilde{\gamma}_i g_i;\ h_4^5 = \sum_{i=1}^{27}\tilde{\delta}_i g_i;\ h_5^7 = \sum_{i=1}^{27}\tilde{\mu}_i g_i,$$

где $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}_i, \tilde{\delta}_i, \tilde{\mu}_i \in \mathbb{Q}[M, K, A, U]$, то

$$\langle h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\rangle \subset \langle v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\rangle.$$

Теорема доказана.

Ввиду того, что идеалы I_k, $k = \overline{1, 4}$, радикальные, имеет место следствие.

Следствие 2. *Справедливо равенство* $\sqrt{\langle v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\rangle} = \bigcup_{j=1}^{4} I_j$.

Замечание 3. Если подсчитывать базис Гребнера идеала $\langle v_3, v_4, v_5, v_6\rangle$, то получим идеал, состоящий из 28 элементов. Все полиномы со 2-го по 28-й содержат от 668 до 1030 слагаемых, но коэффициенты (начиная с четвертого) представляют собой целые числа, содержащие не менее 10^4 цифр.

Впервые вычисление базиса Гребнера идеала фокусных величин полиномиальной динамической системы (1) с использованием компьютерного пакета *Mathematica 6.0* было осуществлено А. Е. Руденком [8, с. 138–142].

Теорема 3. *Комплексная система (1), где $BN \neq 0$, имеет комплексный центр в $O(0, 0)$ тогда и только тогда, когда $BN \neq 0$, и выполняется одна из следующих серий условий:*

1) $(1+C)^3 + B^2(2A + 4(1+C)) = 0,\ A(1+C) + (1+C)^2 - K = 0,\ 2B^2 + (1+C)(2+C) + M = 0,\ B(1 + A + C) + L = 0,\ B - N = 0$;

2) $5A^4 + 4C^2(1+C)^2 + AC(1+C)(13+17C) + A^3(14+19C) + A^2(10+27C^2+36C) = 0,\ 2A^3 - 2B^2 + 2C^2(1+C) + 2A^2(1+3C) + AC(5+6C) = 0,\ A^3 + 3A^2(1+C) + C(1+C)^2 + A(1+C)(2+3C) + K = 0,$ $4A^2 + A(6+7C) + 3C(1+C) - M = 0,\ B(1+A+C) + L = 0,\ B - N = 0$;

3) $A + C = 0,\ 4A^2 + 9B^2 = 0,\ 2A + 3K = 0,\ 2A - M = 0,\ B + L = 0,\ B - N = 0.$

Доказательство. Используя идеалы из теоремы 2, условия $B = N$; $C = U - A$; $v_1 = 0$; $\tilde{v}_2 = 0$, где $\tilde{v}_2 = \dfrac{v_2}{B}$ – полином, а также вычисляя базис Гребнера с порядком переменных $N > L > M > K > B > C > A$, получаем идеалы J_k:

$$J_k = I_k + \langle B + N,\ A + C - U,\ v_1,\ \tilde{v}_2\rangle \cap \mathbb{C}[A, B, C, K, L, M, N],\ k = \overline{1, 3},$$

где элементами идеала J_1 являются полиномы из серии условий 1) теоремы 3, элементами идеала J_2 – полиномы из серии 2) теоремы 3, элементами идеала J_3 – полиномы из серии условий 3) теоремы 3.

Рассматривая элементы базиса идеала I_4 из теоремы 3 наряду с условиями $B = N$; $C = U - A$; $v_1 = 0$; $\tilde{v}_2 = 0$, новых условий центра не получаем, так как в этом случае $B = 0$.

Из [3, теорема 1] получаем, что при выполнении одной из серий условий 1), 2) замена

$$(u, v) \mapsto \frac{\tilde{u}, \left(1 - A\tilde{u} - K\tilde{u}^2\right)\tilde{v}}{1 + (B + L\tilde{u})\tilde{v}}$$

приводит (1) к системе, траектории которой симметричны относительно одной из координатных осей. Следовательно, в этих случаях $O(0, 0)$ – центр системы (1).

При выполнении соотношений из серии условий 3) получаем систему с комплексным центром в $O(0, 0)$, так как в этом случае система (1) имеет интегрирующий множитель вида

$$\mu = \left(-3B - w + 4B\left(x + iy\right)\right)^{\frac{3(B-w)}{2w}} \left(-3B + w + 4B\left(x + iy\right)\right)^{-\frac{3(B+w)}{2w}},$$

где $w^2 + 16iB - B^2 = 0$. Теорема доказана.

Следствие 3. *Вещественная система (1), где $BN \neq 0$, имеет центр в $O(0, 0)$ тогда и только тогда, когда $BN \neq 0$ и выполняется одна из серий условий 1), 2) из теоремы 3.*

Таким образом, в настоящей работе с использованием нового метода поиска необходимых и достаточных условий центра получены необходимые и достаточные условия существования комплексного и вещественного центров комплексной и вещественной систем Куклеса соответственно.

Библиографические ссылки

1. *Lloyd N. G., Pearson J. M.* Computing centre conditions for certain cubuc systems // J. Comput. Appl. Math. 1992. Vol. 40, issue 3. P. 323–336.
2. *Садовский А. П.* Решение проблемы центра и фокуса для кубической системы нелинейных колебаний // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 2. С. 236–244.
3. *Садовский А. П.* Кубические системы нелинейных колебаний с семью предельными циклами // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 4. С. 472–481.
4. *Lloyd N. G., Pearson J. M.* Bifurcations of limit cycles and integrability of planar dynamical systems in complex form // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. Vol. 32, № 10. P. 1973–1984.
5. *Pearson J. M., Lloyd N. G.* Kukles revisited: Advances in computing techniques // Comput. Math. with Appl. 2010. Vol. 60, issue 10. P. 2797–2805.
6. *Садовский А. П.* Центры и их изохронность // XII Белорусская математическая конференция : материалы Междунар. науч. конф. (Минск, 5–10 сент. 2016 г.) : в 5 ч. Минск, 2016. Ч. 2. С. 52.
7. *Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д.* Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. М., 2000.
8. *Садовский А. П.* Полиномиальные идеалы и многообразия. Минск, 2008.
9. *Садовский А. П.* К условиям центра и фокуса для уравнений нелинейных колебаний // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 9. С. 1716–1719.
10. *Садовский А. П., Щеглова Т. В.* Система Льенара с комплексными коэффициентами и метод Черкаса // Весн. Гродн. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і ўпраўленне. 2014. № 1(170). С. 21–33.
11. *Садовский А. П., Щеглова Т. В.* Многообразие комплексного и вещественного центра двумерных автономных полиномиальных дифференциальных систем // Доклады НАН Беларуси. 2015. Т. 59, № 4. С. 34–40.

References

1. Lloyd N. G., Pearson J. M. Computing centre conditions for certain cubuc systems. *J. Comput. Appl. Math.* 1992. Vol. 40, issue 3. P. 323–336. DOI: 10.1016/0377-0427(92)90188-4.
2. Sadovskii A. P. [Solution of the center-focus problem for a cubic system of nonlinear oscillations]. *Differenatsial'nye uravn.* [*Differ. Equ.*]. 1997. Vol. 33, No. 2. P. 236–244 (in Russ.).
3. Sadovskii A. P. [Cubic systems of nonlinear oscillations with seven limit cycles]. *Differenatsial'nye uravn.* [*Differ. Equ.*]. 2003. Vol. 39, No. 4. P. 472–481 (in Russ.).
4. Lloyd N. G., Pearson J. M. Bifurcations of limit cycles and integrability of planar dynamical systems in complex form. *J. Phys. A: Math. Gen.* 1999. Vol. 32, No. 10. P. 1973–1984. DOI: 10.1088/0305-4470/32/10/014.
5. Pearson J. M., Lloyd N. G. Kukles revisited: Advances in computing techniques. *Comput. Math. with Appl.* 2010. Vol. 60, issue 10. P. 2797–2805. DOI: 10.1016/j.camwa.2010.09.034.
6. Sadovskii A. P. [Centers and their isochronous]. *XII Belorusskaya matematicheskaya konferentsiya* : materialy Mezhdunar. nauchn. konf. (Minsk, 5–10 Sept., 2016) : in 5 parts. Minsk, 2016. Part 2. P. 52 (in Russ.).
7. Cox D., Little J., O'Shi D. Idealy, mnogoobraziya i algoritmy. Vvedenie v vychislitel'nye aspekty algebraicheskoi geometrii i kommutativnoi algebry [Ideals, varieties and algorithms. Introduction to computational aspects of algebraric geometry and commutative algebra]. Moscow, 2000 (in Russ.).
8. Sadovskii A. P. [Polynomial ideals and varieties: tutorial for students]. Minsk, 2008 (in Russ.).
9. Sadovskii A. P. [On the center-focus conditions for equations of nonlinear oscillations]. *Differenatsial'nye uravn.* [*Differ. Equ.*]. 1979. Vol. 15, No. 9. P. 1716–1719 (in Russ.).
10. Sadovskii A. P., Shcheglova T. V. [Lienard system with complex parameters and Cherkas's method]. *Vesnik Grodzenkaga Dzjarzhawnaga universitjeta imja Janki Kupaly. Ser. 2, Matjematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naja tjehnika i wprawlenne.* 2014. No. 1(170). P. 21–33 (in Russ.).
11. Sadovskii A. P., Shcheglova T. V. [Center varieties of complex and real two-dimensional autonomous polynomial differential systems]. *Doklady Natsional'noi akad. nauk Belarusi.* 2015. Vol. 59, No. 4. P. 34–40 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 19.12.2016.
Received by editorial board 19.12.2016.