УДК 512.644

МЕТОДЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ РАЗРЕЖЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ТРАФИКА ОБОБЩЕННОГО МУЛЬТИГРАФА

Л. А. ПИЛИПЧУК[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Проблема определения местонахождения датчиков в сети для мониторинга потоков стала объектом повышенного интереса в последние несколько лет из-за ее значимости в областях управления и контроля трафика. Основой для моделирования процессов оценки потоков в обобщенной мультисети является разреженная недоопределенная система линейных алгебраических уравнений специального вида. Датчики расположены в узлах мультисети для заданных долей потоков на дугах в пределах соответствующего диапазона. Рассматриваемая проблема местоположения датчиков, как известно, является NP-полной. Разработаны эффективные алгоритмы определения рангов матриц каждой из независимых подсистем, полученных в результате применения теории декомпозиции. Из равенства суммы рангов матриц независимых подсистем и числа неизвестных в независимых подсистемах следуют условия единственности решения специальной разреженной системы линейных алгебраических уравнений. Результаты исследования могут быть также применены для построения оптимальных решений задач математического программирования.

Ключевые слова: мультиграф; разреженная система; ранг; декомпозиция; опора; единственное решение.

Образец цитирования:
Пилипчук Л. А. Методы декомпозиции разреженных систем линейных алгебраических уравнений для оценки трафика обобщенного мультиграфа // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 2. С. 37–43.

For citation:
Pilipchuk L. A. Decomposition methods of sparse systems of linear algebraic equations for estimation of the traffic for the generalized multigraph. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 2. P. 37–43 (in Russ.).

Автор:
Людмила Андреевна Пилипчук – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики.

Author:
Ludmila Pilipchuk, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of computer applications and systems, faculty of applied mathematics and computer sciences.
pilipchuk@bsu.by

DECOMPOSITION METHODS OF SPARSE SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS FOR ESTIMATION OF THE TRAFFIC FOR THE GENERALIZED MULTIGRAPH

L. A. PILIPCHUK [a]

[a]*Belarusian State University, Niezaliežnasci Avenue, 4, 220030, Minsk, Belarus*

The problem of locating sensors on the network to monitor flows has been object of growing interest in the past few years, due to its relevance in the field of traffic management and control. The basis for modeling the processes of estimating flows in generalized multinetwork is a sparse underdetermined system of linear algebraic equations of a special type. Sensors are located in the nodes of the multinetwork for the given traffic levels on arcs within range covered by the sensors, that would permit traffic on any unobserved flows on arcs to be exactly. The problem being addressed, which is referred to in the literature as the Sensor Location Problem (SLP), is known to be NP-complete. In this paper the effective algorithms are developed to determine the ranks of the matrices of each of the independent subsystems obtained as a result of applying the theory of decomposition. From the equality of the sum of the ranks of the matrices of independent subsystems and the number of unknowns in independent subsystems, the uniqueness conditions for the solution of a special sparse system of linear algebraic equations follow. The results of the research can also be applied to constructing optimal solutions to problems of mathematical programming.

Key words: multigraph; sparse system; rank; decomposition; support; unique solution.

Математическое моделирование процессов оценки потоков содержит в себе потенциальную информацию, при исследовании которой можно оценить потоки графа с использованием специальных методов разреженного численного анализа. Чаще всего в большом графе (сети) наблюдение за потоками ведется лишь в малой его части. Комбинаторные аспекты математического моделирования процессов оценки трафика для симметричного ориентированного графа рассмотрены в [1]. Принципы декомпозиции потока применены в [2]. Декомпозиционные методы основаны на использовании структуры системы ограничений задачи, что позволяет заменить решение одной задачи решением серии меньших задач, а также использовать современные технологии построения численных решений разреженных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Задача оптимального расположения датчиков в мультиграфах исследована в работах [3; 4]. Принцип расположения минимального числа датчиков в узлах обобщенного графа приведен в [5]. Для определения условий единственности решения специальной СЛАУ в настоящей работе получены эффективные алгоритмы определения рангов матриц независимых подсистем в задаче оценки трафика обобщенного мультиграфа с использованием специальных методов разреженного численного анализа. Условия единственности решения специальной системы линейных алгебраических уравнений означают, что совокупность узлов, включенных во множество M (наблюдаемые узлы), является допустимой (может быть неоптимальной) для размещения сенсоров в определенных узлах обобщенного мультиграфа в целях наблюдения за потоками.

Если условия единственности решения исследуемой СЛАУ для множества M наблюдаемых узлов не выполняются, то система является недоопределенной. Это означает, что состав множества M наблюдаемых узлов неприемлем для размещения сенсоров в целях наблюдения за потоками обобщенного мультиграфа.

Определение условий единственности решения системы и построение искомого единственного решения исследуемой разреженной СЛАУ являются различными задачами. Нахождение рангов разреженных матриц систем без учета ее теоретико-графовых свойств и построение решений больших систем без использования результатов разреженного матричного и сетевого анализа неприемлемы для решения задач, возникающих на практике.

В настоящей работе решение указанных задач осуществляется следующим образом. В результате применения теории декомпозиции[1] [6–7] исследуемые СЛАУ могут быть представлены в виде независимых подсистем, имеющих различные типы разреженности. Общее решение системы строится на основании исследования теоретико-графовых свойств базиса пространства решений каждой независимой однородной подсистемы и с учетом типа ее разреженности. При этом число операций вычисления каждого вектора базиса пространства решений пропорционально числу его компонент. Разработаны эффективные алгоритмы определения рангов матриц каждой из независимых подсистем, полученных в результате применения теории декомпозиции. Из равенства суммы рангов матриц независимых подсистем и числа неизвестных в независимых подсистемах следуют искомые условия единственности решения специальной разреженной системы линейных алгебраических уравнений.

[1] *Pilipchuk L. A.* Sparse linear systems and their applications. Minsk : BSU, 2013.

Пусть $G = (I, U)$ – связный ориентированный мультиграф (мультисеть) со множеством узлов I и множеством мультидуг U, определенных на $I \times I$, $|I| < \infty$, $|U| < \infty$. Представим мультиграф $G = (I, U)$ в виде множества, состоящего из $|K|$ связных графов $G^k = (I^k, U^k)$, $k \in K = \{1, 2, \dots, |K|\}$, $|K| < \infty$, соответствующих типам потоков $k \in K$. Определим множество $K(i) = \{k \in K : i \in I^k\}$ типов потоков, проходящих через узел $i \in I$, и $K(i, j) = \{k \in K : (i, j)^k \in U^k\}$ – множество типов потоков, проходящих через мультидугу $(i, j) \in U$. Предположим, что граф $G^k = (I^k, U^k)$ является симметричным: если существует дуга $(i, j)^k \in U^k$, то существует и дуга $(j, i)^k \in U^k$, $k \in K$. Дуговой поток x_{ij}^k дуги $(i, j)^k \in U^k$ в общем случае не обязательно совпадает с дуговым потоком x_{ji}^k дуги $(j, i)^k \in U^k$. Для каждой дуги $(i, j)^k \in U^k$ графа $G^k = (I^k, U^k)$, $k \in K$, введем коэффициент $\mu_{ij}^k \in (0, 1]$, отражающий явление преобразования дугового потока x_{ij}^k. Дуговой поток x_{ij}^k исходит из узла i и поступает в узел j в виде $\mu_{ij}^k x_{ij}^k$, при этом преобразование осуществляется непосредственно перед узлом j. Граф $G^k = (I^k, U^k)$ с введенными параметрами преобразования дуговых потоков будем называть *обобщенным графом* (обобщенной сетью). Аналогично мультиграф G, который представлен в виде множества, состоящего из $|K|$ связных обобщенных графов G^k, $k \in K$, с введенными параметрами преобразования дуговых потоков графа G^k, назовем *обобщенным мультиграфом*, или обобщенной мультисетью (в дальнейшем, для краткости, слово «обобщенный» опускается, если из контекста ясно, что речь идет именно об обобщенном мультиграфе).

Основой для моделирования процессов оценки потоков обобщенного мультиграфа $G = (I, U)$ является недоопределенная система линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\sum_{j \in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U^k)} \mu_{ji}^k x_{ji}^k = \begin{cases} x_i^k, \ i \in I_k^*, \\ 0, \ i \in I^k \setminus I_k^*, \end{cases} \quad k \in K, \tag{1}$$

где $I_i^+(U^k) = \{j \in I : (i, j)^k \in U^k\}$; $I_i^-(U^k) = \{j \in I : (j, i)^k \in U^k\}$. В узлах множества $I_k^* \subseteq I^k$ поток создается, если $x_i^k > 0$, или поглощается, если $x_i^k < 0$. Узлы из множества I_k^* назовем узлами с переменной интенсивностью x_i^k, $i \in I_k^*$, $k \in K$. Если для компонент вектора $x = \left(x_{ij}^k, (i, j)^k \in U^k, x_i^k, i \in I_k^*, k \in K\right)$ выполняются ограничения (1), то x является решением системы (1). Компоненты вектора x принимают значения во множестве рациональных чисел. Для каждой дуги $(i, j)^k \in U^k$ обобщенного графа $G^k = (I^k, U^k)$ введем рациональное число p_{ij}^k, которое определяется следующим образом:

$$p_{ij}^k = \frac{x_{ij}^k}{\sum_{j \in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k}, \ 0 < p_{ij}^k \le 1,$$

и является долей суммарного дугового потока, исходящего из узла i и проходящего по дуге $(i, j)^k$. Непосредственно перед входом в узел j поток преобразуется в дуговой поток $\mu_{ij}^k x_{ij}^k$, $k \in K$.

Определение 1. Подмультиграф $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ обобщенного мультиграфа $G = (I, U)$ назовем ненаблюдаемым, если дуговые потоки x_{ij}^k, $(i, j)^k \in \bar{U}^k \subset U^k$, и переменные интенсивности узлов x_i^k, $i \in \bar{I}_k^* \subseteq I_k^*$, не определены, $k \subset \bar{K} \subseteq K$.

Одним из новых приложений исследуемой системы (1) является проблема расположения сенсоров в узлах обобщенного мультиграфа. Задача состоит в определении местоположения наименьшего числа сенсоров в узлах обобщенного мультиграфа $G = (I, U)$ для оценки трафика ненаблюдаемого подмультиграфа $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$. Множество узлов, в которых установлены сенсоры (обозреваемые узлы), обозначим через M:

$$M = \bigcup_{k \in K} M_k,\ \ M_k \subseteq I^k,\ k \in K.$$

Для оптимальной расстановки сенсоров в узлах связного обобщенного мультиграфа $G = (I, U)$ используется следующий критерий оптимизации: *найти наименьшее число $|M|$ обозреваемых узлов обобщенного мультиграфа G, чтобы система (1) с учетом априорной информации об известных значениях дуговых потоков и переменных интенсивностей узлов имела единственное решение, $M \subseteq I$.*

На основании результатов, полученных в [3; 5–7], а также с учетом априорной информации об известных значениях дуговых потоков и переменных интенсивностей узлов однородная система (1) преобразуется к следующему виду:

$$\sum_{j \in I_i^+(\bar{U}^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(\bar{U}^k)} \mu_{ji}^k x_{ji}^k = \begin{cases} a_i^k + x_i^k,\ i \in \bar{I}_k^*, \\ a_i^k,\ i \in \bar{I}^k \setminus \bar{I}_k^*, \end{cases} \ \ k \in \bar{K}; \tag{2}$$

$$\sum_{(i,j) \in \bar{U}} \ \sum_{k \in \bar{K}(i,j)} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^k = \beta_p,\ \ p = \overline{1, q}, \tag{3}$$

где $a_i^k,\ i \in \bar{I}^k \setminus \bar{I}_k^*;\ \beta_p,\ p = \overline{1, q},$ – правые части системы (2), (3); $\lambda_{ij}^{kp},\ (i, j) \in \bar{U},\ k \in \bar{K}(i, j) = \left\{k \in \bar{K} : (i, j)^k \in \in \bar{U}^k\right\}$ – коэффициенты матрицы системы (3), которые определяются следующим образом:

$$\lambda_{ij}^{kp} = 1, \lambda_{iv_i}^{kp} = -\frac{p_{ij}^k}{p_{iv_i}^k},\ \ j \in I_i^+(\bar{U}^k) \setminus \{v_i\},\ \text{если } \left|I_i^+(\bar{U}^k)\right| > 1;$$

$$\lambda_{ij}^{kp} = 0,\ \ j \in I_i^+(\bar{U}^k),\ \text{если } \left|I_i^+(\bar{U}^k)\right| \le 1,\ \ i \in \bar{I}^k,\ k \in \bar{K};\ \beta_p = 0,\ \ p = \overline{1, q}.$$

Следовательно, система (3) имеет следующий вид:

$$x_{ij}^k - \frac{p_{ij}^k}{p_{iv_i}^k} x_{iv_i}^k = 0,\ \ j \in I_i^+(\bar{U}^k) \setminus \{v_i\},\ \left|I_i^+(\bar{U}^k)\right| > 1,\ \ i \in \bar{I}^k,\ k \in \bar{K}, \tag{4}$$

где $x_{iv_i}^k$ – неизвестный дуговой поток произвольно выбранной дуги $(i, v_i)^k$, исходящей из узла i; x_i^k – неизвестная интенсивность узла $i \in \bar{I}_k^*$; q – число уравнений системы (4), связывающих неизвестные дуговые потоки в исследуемой задаче оптимальной расстановки сенсоров в узлах обобщенного ненаблюдаемого мультиграфа $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$. Мультиграф $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ может быть несвязным и несимметричным. Пусть мультиграф $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ состоит из множества, включающего $|\bar{K}|$ графов $\bar{G}^k = (\bar{I}^k, \bar{U}^k)$, соответствующих определенному типу потока $k \in \bar{K}$. В общем случае $\bar{G}^k$ – несвязный граф, $k \in \bar{K}$. Для некоторых компонент связности графа $\bar{G}^k$ множество узлов с переменной интенсивностью $\bar{I}_k^*$ может быть пустым, коэффициенты преобразования для всех дуг могут быть равными 1 (поток не преобразуется). Пусть $\tilde{G} = (\tilde{I}, \tilde{U})$ – любая компонента связности мультиграфа $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$, которая состоит из множества, включающего $|\tilde{K}|$ связных графов $\tilde{G}^k = (\tilde{I}^k, \tilde{U}^k)$, соответствующих определенному типу потока $k \in \tilde{K}$; A^k – подматрица блочно-диагональной матрицы системы (2), соответствующая связному графу $\tilde{G}^k = (\tilde{I}^k, \tilde{U}^k)$ компоненты связности $\tilde{G} = (\tilde{I}, \tilde{U})$, $k \in \tilde{K}$. Обозначим через $\tilde{I}_k^*$ множество узлов с переменной интенсивностью связного графа $\tilde{G}^k = (\tilde{I}^k, \tilde{U}^k)$, $\tilde{I}_k^* \subseteq \tilde{I}^k$, $k \in \tilde{K}$.

Определение 2. Цикл в графе называется невырожденным, если выполняется следующее условие: $T = T_+ - T_- \ne 0$, где T_+ – произведение чисел μ_{ij}^k на прямых дугах цикла; T_- – произведение чисел μ_{ij}^k на обратных дугах цикла. Если все дуги цикла прямые (обратные), то полагаем $T_- = 1\ (T_+ = 1)$.

Теорема 1. *Для связного графа* $\tilde{G}^k = \left(\tilde{I}^k, \tilde{U}^k\right)$ *ранг матрицы* A^k *равен* $\left|\tilde{I}^k\right|$, *если выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

- *граф* $\tilde{G}^k = \left(\tilde{I}^k, \tilde{U}^k\right)$ *содержит хотя бы один невырожденный цикл;*
- *граф* $\tilde{G}^k = \left(\tilde{I}^k, \tilde{U}^k\right)$ *содержит хотя бы один узел с переменной интенсивностью, т. е.* $\tilde{I}_k^* \neq \varnothing$.

Теорема 2. *Для связного графа* $\tilde{G}^k = \left(\tilde{I}^k, \tilde{U}^k\right)$ *ранг матрицы* A^k *равен* $\left|\tilde{I}^k\right| - 1$, *если* A^k *является матрицей инцидентности графа* $\tilde{G}^k$.

Доказательство теорем 1, 2 приведено в работе Л. А. Пилипчук[1].

Определение 3. Максимальная по включению элементов совокупность множеств $R_L = \left\{\tilde{U}_L^k, \tilde{I}_L^{*k} : k \in \tilde{K}\right\}$, $\tilde{U}_L^k \subset \tilde{U}^k$, $\tilde{I}_L^{*k} \subset \tilde{I}_k^*$, называется опорой связного обобщенного мультиграфа $\tilde{G} = \left(\tilde{I}, \tilde{U}\right)$ для системы (2), если система

$$\sum_{j \in I_i^+\left(\tilde{U}_L^k\right)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-\left(\tilde{U}_L^k\right)} \mu_{ji}^k x_{ji}^k = \begin{cases} x_i^k, \ i \in \tilde{I}_L^{*k}, \\ 0, \ i \in \tilde{I}^k \setminus I_L^{*k}, \end{cases} \quad k \in \tilde{K}, \tag{5}$$

имеет только тривиальное решение $x_{ij}^k = 0$, $(i, j)^k \in \tilde{U}_L^k$, $k \in \tilde{K}$; $x_i^k = 0, i \in \tilde{I}_L^{*k}$, $k \in \tilde{K}$.

Теорема 3. *Совокупность множеств* $R_L = \left\{\tilde{U}_L^k, \tilde{I}_L^{*k} : k \in \tilde{K}\right\}$, $\tilde{U}_L^k \subset \tilde{U}^k$, $\tilde{I}_L^{*k} \subset \tilde{I}_k^*$ *является опорой связного мультиграфа* $\tilde{G} = \left(\tilde{I}, \tilde{U}\right)$ *для системы (2) тогда и только тогда, когда для любого* $k \in \tilde{K}$ *граф* $\tilde{G}_L^k = \left(\tilde{I}^k, \tilde{U}_L^k\right)$ *состоит из* m_k *компонент связности* $\tilde{G}_L^{k,t} = \left(I\left(\tilde{U}_L^{k,t}\right), \tilde{U}_L^{k,t}\right)$, $\tilde{I}_L^{*k,t} \subseteq \tilde{I}_L^{*k}$, $t = \overline{1, m_k}$, $\tilde{G}_L^k = \bigcup_{t=1}^{m_k} \tilde{G}_L^{k,t}$, $\tilde{U}_L^k = \bigcup_{t=1}^{m_k} \tilde{U}_L^{k,t}$, $\tilde{I}^k = \bigcup_{t=1}^{m_k} I\left(\tilde{U}_L^{k,t}\right)$, *следующих типов:*

- *компонента связности* $\tilde{G}_L^{k,t} = \left(I\left(\tilde{U}_L^{k,t}\right), \tilde{U}_L^{k,t}\right)$ *содержит единственный невырожденный цикл и* $\tilde{I}_L^{*k,t} = \varnothing$;
- *компонента связности* $\tilde{G}_L^{k,t} = \left(I\left(\tilde{U}_L^{k,t}\right), \tilde{U}_L^{k,t}\right)$ *– остовное дерево графа* $\tilde{G}_L^{k,t}$ *и* $\tilde{I}_L^{*k,t} = \varnothing$. *Матрица* $\tilde{A}^k$, *которая соответствует уравнениям системы (5) для компоненты связности* $\tilde{G}_L^{k,t} = \left(I\left(\tilde{U}_L^{k,t}\right), \tilde{U}_L^{k,t}\right)$, *является матрицей инцидентности графа* $\tilde{G}_L^{k,t}$;
- *компонента связности* $\tilde{G}_L^{k,t} = \left(I\left(\tilde{U}_L^{k,t}\right), \tilde{U}_L^{k,t}\right)$ *– остовное дерево графа* $\tilde{G}_L^{k,t}$, *которое содержит единственный узел из множества* $\tilde{I}_L^{*k} \neq \varnothing$, $\left|\tilde{I}_L^{*k,t} \bigcap \tilde{I}_L^{*k}\right| = 1$.

Ранг матрицы разреженной системы (2) блочно-диагонального вида определяется на основании теорем 1 и 2. Представим системы (2), (3) в виде независимых подсистем, при этом вид разреженности системы (2) и, следовательно, ранг матрицы системы (2) не изменяется[1] [7]. На основании теоремы 3 с учетом типа разреженности каждой независимой подсистемы и ее теоретико-графовых свойств для каждого $k \in \bar{K}$ построим общее решение системы (2) относительно опоры $R_L = \left\{\tilde{U}_L^k, \tilde{I}_L^{*k} : k \in \tilde{K}\right\}$, $\tilde{U}_L^k \subset \tilde{U}^k$, $\tilde{I}_L^{*k} \subset \tilde{I}_k^*$. Общее решение разреженной недоопределенной системы (2) подставим в уравнения системы (3). Получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k \in \bar{K}} \left(\sum_{(\tau,\rho)^k \in \bar{U}^k \setminus \tilde{U}_L^k} \Lambda_{\tau\rho}^{kp} x_{\tau\rho}^k + \sum_{\gamma \in \bar{I}_k^* \setminus \tilde{I}_L^{*k}} \Lambda_\gamma^{kp} x_\gamma^k \right) = -\sum_{k \in \bar{K}} \sum_{(i,j)^k \in \tilde{U}_L^k} \lambda_{ij}^{kp} \tilde{x}_{ij}^k - \sum_{k \in \bar{K}} \sum_{\gamma \in \tilde{I}_L^{*k}} \lambda_\gamma^{kp} \tilde{x}_\gamma^k, \quad p = \overline{1, q}. \tag{6}$$

Вектор-столбцы $\left\{\delta^k(\tau, \rho), (\tau, \rho)^k \in \bar{U}^k \setminus \tilde{U}_L^k;\ \delta^k(\gamma), \gamma \in \bar{I}_k^* \setminus \tilde{I}_L^{*k}, k \in \bar{K}\right\}$ составляют базис пространства решений однородной системы, порожденной системой (2). Числа $\Lambda_{\tau\rho}^{kp}$, Λ_γ^{kp} определены согласно соотношению:

[1] *Pilipchuk L. A.* Sparse linear systems and their applications. Minsk : BSU, 2013.

$$\Lambda_{\tau\rho}^{kp} = \lambda_{\tau\rho}^{kp} + \sum_{(i,\,j) \in \tilde{U}_L^k} \lambda_{ij}^{kp} \delta_{ij}^k(\tau, \rho) + \sum_{i \in \tilde{I}_L^{*k}} \lambda_i^{kp} \delta_i^k(\tau, \rho),\ \Lambda_\gamma^{kp} = \lambda_\gamma^{kp} + \sum_{(i,\,j) \in \tilde{U}_L^k} \lambda_{ij}^{kp} \delta_{ij}^k(\gamma) + \sum_{i \in \tilde{I}_L^{*k}} \lambda_i^{kp} \delta_i^k(\gamma). \tag{7}$$

Частным решением системы (2) является $\tilde{x} = \left(\tilde{x}_{ij}^k,\ (i, j) \in \bar{U}^k;\ \tilde{x}_i^k,\ i \in \bar{I}_k^*,\ k \in \bar{K}\right);\ \ \tilde{x}_{ij}^k = 0,\ (i, j)^k \in \bar{U}^k \setminus \tilde{U}_L^k,$ $\tilde{x}_i^k = 0,\ i \in \bar{I}_k^* \setminus \tilde{I}_L^{*k}.$ Поскольку исследуемая система (3) есть разреженная система специального вида (4), то соотношения (7) имеют вид

$$\Lambda_{\tau\rho}^{kp} = \lambda_{\tau\rho}^{kp} + \sum_{(i,\,j) \in \tilde{U}_L^k} \lambda_{ij}^{kp} \delta_{ij}^k(\tau, \rho),\ \Lambda_\gamma^{kp} = \lambda_\gamma^{kp} + \sum_{(i,\,j) \in \tilde{U}_L^k} \lambda_{ij}^{kp} \delta_{ij}^k(\gamma). \tag{8}$$

Таким образом, система (2), (6) включает следующие независимые системы линейных алгебраических уравнений:

• систему (2) блочно-диагонального вида, состоящую из $\left|\bar{K}\right|$ независимых недоопределенных разреженных систем с различными типами разреженности;

• систему общего вида (6).

Для определения ранга матрицы системы (6) найдем в ней невырожденную подматрицу D максимального порядка $m \le q$, $\det D \ne 0$, которая состоит из чисел (8):

$$D = \begin{pmatrix} \Lambda_{\tau\rho}^{kp},\ (\tau, \rho)^k \in \tilde{U}_B^k;\ \Lambda_\gamma^{kp},\ \gamma \in \tilde{I}_B^{*k} \\ p = \overline{1, m} \end{pmatrix},\ \tilde{U}_B^k \subseteq \bar{U}^k \setminus \tilde{U}_L^k,\ \tilde{I}_B^{*k} \subseteq \bar{I}_k^* \setminus \tilde{I}_L^{*k},\ k \in \bar{K}. \tag{9}$$

Если в системе (6) будет найдена подматрица D максимального порядка m с диагональным преобладанием, то $\det D \ne 0$. Когда известна некоторая опора[1] мультиграфа $\bar{G} = \left(\bar{I}, \bar{U}\right)$ для системы (2), (6), то матрица D вида (9) является невырожденной. Итак, если n – сумма рангов матриц независимых подсистем системы (2) (теоремы 1, 2) и m – ранг матрицы системы (6), то ранг матрицы системы (2), (6) равен $n + m$.

Таким образом, на основе применения теории декомпозиции построены эффективные алгоритмы вычисления ранга матрицы системы (2), (6). Сформулируем условия единственности решения системы (2), (6): *если для заданного множества M обозреваемых узлов обобщенного мультиграфа G ранг матрицы системы (2), (6) равен числу ее неизвестных, то система (2), (6) имеет единственное решение.*

Замечание 1. Вычисление каждого элемента $\Lambda_{\tau\rho}^{kp},\ (\tau, \rho)^k \in \tilde{U}_B^k,$ или $\Lambda_\gamma^{kp},\ \gamma \in \tilde{I}_B^{*k},$ (8) матрицы D осуществляется на основе комбинаторных свойств опоры $R_L = \left\{\tilde{U}_L^k,\ \tilde{I}_L^{*k} : k \in \tilde{K}\right\},\ \ \tilde{U}_L^k \subset \tilde{U}^k,\ \ \tilde{I}_L^{*k} \subset \tilde{I}_k^*,$ (теорема 3) по аналогии с вычислением соответствующего вектора $\delta^k(\tau, \rho),\ (\tau, \rho)^k \in \bar{U}^k \setminus \tilde{U}_L^k,$ или $\delta^k(\gamma),\ \gamma \in \bar{I}_k^* \setminus \tilde{I}_L^{*k},$ базиса пространства решений однородной системы, порожденной системой (2), $k \in \bar{K}.$ Для построения матрицы D могут быть использованы вычисления в параллельной среде.

Замечание 2. Рассмотренные в работе конструктивные методы декомпозиции, направленные на вычисление рангов матриц независимых подсистем, могут быть применены для создания эффективных алгоритмов вычисления потенциалов, подходящего направления изменения мультипотока, приращения целевой функции при создании опорных методов решения задач линейного и дробно-линейного потокового программирования. Кроме этого, при создании методов решения задач указанных классов используются современные вычислительные технологии[1] [6–7], основанные на теории декомпозиции и комбинаторных свойствах базисов (опор).

В целях установления того факта, что совокупность узлов, включенных в множество M наблюдаемых узлов, является допустимой (может быть неоптимальной) для размещения сенсоров, необходимо:

• вычислить сумму n рангов матриц независимых подсистем системы (2) (теоремы 1, 2);

• на основе комбинаторных свойств опоры (теорема 3) вычислить согласно (8) элементы матрицы D и определить m – ранг матрицы D системы (6);

• если ранг матрицы системы (2), (6), равный $n + m$, не совпадает с числом неизвестных системы (2), (6), то система (2), (6) является *недоопределенной* или *переопределенной* системой линейных

[1] *Pilipchuk L. A.* Sparse linear systems and their applications. Minsk : BSU, 2013.

алгебраических уравнений. Следовательно, совокупность узлов, включенных в множество *M*, является неприемлемой для оценки потоков на ненаблюдаемой части обобщенного графа. Если ранг матрицы системы (2), (6) равен числу ее неизвестных, то система (2), (6) имеет единственное решение, которое позволяет оценить дуговые потоки и переменные интенсивности узлов на ненаблюдаемой части обобщенного мультиграфа *G*.

В настоящей работе предложены конструктивная теория и эффективные методы определения рангов матриц независимых подсистем. Условия единственности решения специальной разреженной системы линейных алгебраических уравнений следуют из равенства суммы рангов матриц независимых подсистем и числа неизвестных в независимых подсистемах. Определение единственного решения системы (2), (6) основано также на применении конструктивных методов декомпозиции с учетом структуры системы уравнений, типов ее разреженности, что позволяет использовать современные технологии построения численных решений разреженных систем линейных алгебраических уравнений и результаты разреженного матричного анализа[1]. Следует отметить, что данный подход может использоваться для вычислений в параллельной среде.

Библиографические ссылки

1. *Bianco L., Confessore G., Gentili M.* Combinatorial aspects of the sensor location problem // Ann. Oper. Res. Vol. 144, issue 1. 2006. P. 201–234.
2. *Пилипчук Л. А.* Разреженные недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений. Минск, 2012.
3. *Pilipchuk L. A., Vishnevetskaya T. S., Pesheva Y. H.* Sensor location problem for a multigraph // Math. Balk. New Ser. Vol. 27. Fasc. 1–2. 2013. P. 65–75.
4. *Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. S., Ramanouski Y. V.* Optimal location of sensors on a multigraph with zero split ratios of some arc flows // AIP Conf. Proc. 2014. Vol. 1631. P. 350–353.
5. *Пилипчук А. С.* Расположение минимального числа обозреваемых узлов в обобщенном графе для оценки трафика его ненаблюдаемой части // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2015. № 1. С. 108–111.
6. *Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. S.* Sparse linear systems: theory of decomposition, methods, technology, applications and implementation in Wolfram Mathematica // AIP Conf. Proc. 2015. Vol. 1690, issue 1.
7. *Pilipchuk L. A., German O. V., Pilipchuk A. S.* The general solutions of sparse systems with rectangular matrices in the problem of sensors optimal location in the nodes of a generalized graph // Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform. 2015. № 2. P. 91–96.

References

1. Bianco L., Confessore G., Gentili M. Combinatorial aspects of the sensor location problem. *Ann. Oper. Res.* Vol. 144, issue 1. 2006. P. 201–234. DOI: 10.1007/s10479-006-0016-9.
2. Pilipchuk L. A. [Sparse underdetermined systems of linear algebraic equations]. Minsk, 2012 (in Russ.).
3. Pilipchuk L. A., Vishnevetskaya T. S., Pesheva Y. H. Sensor location problem for a multigraph. *Math. Balk. New Ser.* Vol. 27. Fasc. 1–2. 2013. P. 65–75.
4. Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. S., Ramanouski Y. V. Optimal location of sensors on a multigraph with zero split ratios of some arc flows. *AIP Conf. Proc.* 2014. Vol. 1631. P. 350–353. DOI: 10.1063/1.4902497.
5. Pilipchuk A. S. The location of the minimum number of monitored nodes in the generalized graph for estimating traffic its unobservable part. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2015. No. 1. P. 108–111 (in Russ.).
6. Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. S. Sparse linear systems: theory of decomposition, methods, technology, applications and implementation in Wolfram Mathematica. *AIP Conf. Proc.* 2015. Vol. 1690, issue 1. DOI: 10.1063/1.4936744.
7. Pilipchuk L. A., German O. V., Pilipchuk A. S. The general solutions of sparse systems with rectangular matrices in the problem of sensors optimal location in the nodes of a generalized graph. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2015. No. 2. P. 91–96.

Статья поступила в редколлегию 15.05.2015.
Received by editorial board 15.05.2015.

[1] *Pilipchuk L. A.* Sparse linear systems and their applications. Minsk : BSU, 2013.