УДК 539.3

РАСЧЕТ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕРМОСИЛОВОГО ИЗГИБА ВРАЩАЮЩЕГОСЯ В ТЕПЛОВОМ ПОЛЕ ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНОГО ДИСКА ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРЫ ВТОРОГО РОДА

В. В. КОРОЛЕВИЧ [1]***, Д. Г. МЕДВЕДЕВ*** [2]

[1]*Филиал Национального педагогического университета им. М. Драгоманова, ул. Язельская, 266/10, 16000, г. Прага, Чехия*
[2]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

С помощью линейного интегрального уравнения Вольтерры второго рода в общем виде решается задача осесимметричного изгиба полярно-ортотропного кольцевого диска переменной толщины, который вращается вокруг нормальной оси с постоянной угловой скоростью ω_0 в неоднородном тепловом поле. Под действием центробежных сил и теплового поля диск будет испытывать растяжение в своей плоскости. Воздействие осесимметричного потока раскаленного газа или пара, направленного нормально к срединной плоскости диска, а также краевых моментов и поперечных сил вызовет осесимметричный изгиб. Таким образом, диск одновременно будет испытывать растяжение и изгиб. Предполагается, что температурное поле в диске известно и оно осесимметричное. Упругие постоянные – модули Юнга и модуль сдвига – линейно зависят от температуры, а коэффициенты Пуассона считаются постоянными величинами. Расчет изгиба тонкого анизотропного диска ведется по классической

Образец цитирования:
Королевич В. В., Медведев Д. Г. Расчет осесимметричного термосилового изгиба вращающегося в тепловом поле полярно-ортотропного диска переменной толщины методом интегрального уравнения Вольтерры второго рода // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 2. С. 44–51.

For citation:
Karalevich U. V., Medvedev D. G. Calculation of the axisimmetric thermopower bending problem of rotating in the thermal field of the polar-orthotropic disc with variable thickness by Volterra integral equation of the second kind. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 2. P. 44–51 (in Russ.).

Авторы:
Владимир Васильевич Королевич – преподаватель.
Дмитрий Георгиевич Медведев – кандидат физико-математических наук, доцент; декан механико-математического факультета.

Authors:
Uladzimir Karalevich, lecturer.
v.korolevich@mail.ru
Dmitrij Medvedev, PhD (physics and mathematics), docent; dean of the faculty of mechanics and mathematics.
medvedev@bsu.by

теории изгиба тонких пластин, основанной на гипотезах Кирхгофа. Задача осесимметричного изгиба полярно-ортотропного кольцевого диска переменной толщины приводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами для угла поворота нормального элемента к срединной плоскости диска. Полученное дифференциальное уравнение сводится к линейному интегральному уравнению Вольтерры второго рода. Общее решение интегрального уравнения записывается с помощью резольвенты. Указаны условия, при которых интегральное уравнение имеет единственное непрерывное решение. Приводятся расчетные формулы для изгибающих радиального и тангенциального моментов, поперечного радиального усилия и функции прогиба через разрешающую функцию. Приведены формулы для компонент радиального, тангенциального и касательных напряжений, учитывающих одновременное растяжение и изгиб анизотропного кольцевого диска переменной толщины под действием приложенных нагрузок.

Ключевые слова: полярно-ортотропный диск; неоднородное тепловое поле; температура; радиальное, тангенциальное и поперечное усилия; изгибающие радиальный и тангенциальный моменты; функция прогиба; угол поворота нормали; дифференциальные и интегральные уравнения; резольвента; радиальная, тангенциальная и касательные компоненты напряжений.

CALCULATION OF THE AXISIMMETRIC THERMOPOWER BENDING PROBLEM OF ROTATING IN THE THERMAL FIELD OF THE POLAR-ORTHOTROPIC DISC WITH VARIABLE THICKNESS BY VOLTERRA INTEGRAL EQUATION OF THE SECOND KIND

U. V. KARALEVICH [a], ***D. G. MEDVEDEV*** [b]

[a] *Branch office National Pedagogical University M. Dragomanov, Jaziel'skaja Street, 266/10, 16000, Praha, Czech Republic*
[b] *Belarusian State University, Niezaliežnasci Avenue, 4, 220030, Minsk, Belarus*

Corresponding author: U. V. Karalevich (v.korolevich@mail.ru)

With the help of linear Volterra integral equation of the second kind the problem of the axisymmetric bending polar orthotropic annular disk of variable thickness, rotating around the normal axis with constant angular velocity ω_0 in a inhomogeneous thermal field is solved in the general form. Under the influence of centrifugal forces and thermal field the disk will experience stretch on its plane. The effect of the axisymmetric flow of incandescent gas or steam, directed normal by to the median plane of the disk, as well as the boundary moments and shear forces cause axisymmetric bending. Thus, the disc will experience the stretch and flexural bending at the same time. It is assumed that the temperature field in the disk is known and it is axisymmetric. The elastic constants – Young's modulus and shear modulus – are linearly temperature dependent, and Poisson's coefficient are considered to be constant. Calculation of bending of the anisotropic thin disk is carried out according to the classical theory of bending of thin plates, based on Kirchhoff hypothesis. The problem of the axisymmetric bending polar-orthotropic annular disc of variable thickness is reduced to the integration of the ordinary differential equation of second order with variable coefficients for a rotation angle of a normal cell to the median plane of the disk. The resulting differential equation is reduced to a linear integral Volterra equation of the second kind. The general solution of the integral equation is written down the resolvent is used for this purpose. The conditions under which the integral equation has a unique continuous solution are given. Calculation formulas are given for the radial and tangential bending moments, transverse radial forces and radial deflection function through resolution function. Formula for the components of the radial, tangential and shear stresses, taking into account the simultaneous stretching and bending of anisotropic annular disc of variable thickness under the influence of applied loads is written.

Key words: polar-orthotropic disc; inhomogeneous thermal field; temperature; radial, tangential and shear forces; the radial and tangential bending moments; deflection function; the rotation angle of the normal; differential and integral equations; resolvent; radial, tangential and shear stress components.

С помощью линейного интегрального уравнения Вольтерры второго рода решается в общем случае задача осесимметричного изгиба полярно-ортотропного диска, вращающегося вокруг нормальной оси с постоянной угловой скоростью ω_0 в неоднородном тепловом поле.

Постановка задачи

Пусть раскаленный поток газа или пара направлен перпендикулярно к срединной плоскости вращающегося анизотропного диска. В результате действия центробежных сил и теплового поля диск будет испытывать растягивающие усилия в его плоскости. Воздействие осесимметричного потока газа интенсивностью $q_z(r)$, направленного нормально к срединной плоскости диска, а также краевых моментов и поперечных сил вызовет осесимметричный изгиб. Таким образом, полярно-ортотропный кольцевой диск переменной толщины будет одновременно испытывать растяжение и изгиб под действием приложенных нагрузок [1].

Предполагается, что известно распределение температуры T в анизотропном диске и оно осесимметричное, т. е. зависит только от радиуса r. Пусть на внутреннем контуре (при $r = r_0$) диска поддерживается постоянная температура T_0^*, а на внешнем контуре (при $r = R$) – T_1^*. Упругие постоянные – модули Юнга E_r, E_θ и модуль сдвига $G_{r\theta}$ – линейно зависят от температуры [2]:

$$E_r(T) = E_r^{(0)}\left[1 - \gamma T(r)\right];$$

$$E_\theta(T) = E_\theta^{(0)}\left[1 - \gamma T(r)\right];$$

$$G_{r\theta}(T) = G_{r\theta}^{(0)}\left[1 - \gamma T(r)\right],$$

где $E_r^{(0)}$, $E_\theta^{(0)}$, $G_{r\theta}^{(0)}$ – значения упругих постоянных при начальной температуре T_0; γ – параметр. Коэффициенты Пуассона $\nu_{r\theta}$, $\nu_{\theta r}$ будем считать постоянными величинами.

Диск изготовлен из материала, обладающего цилиндрической анизотропией, причем ось анизотропии совпадает с геометрической осью диска, и в каждой точке тела имеются три взаимно ортогональные плоскости упругой симметрии. Внутренний радиус кольцевого диска обозначим r_0, а внешний – R; p_0, p_1 – давление на внутреннем и внешнем контурах диска соответственно. Толщина диска $h(r)$ меняется вдоль радиуса r по заданному закону и на внутреннем контуре равна h_0, а на внешнем – h_1.

Решение задачи

Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z, поместив начало в точке пересечения оси анизотропии со срединной плоскостью диска и направив ось z вертикально вниз. Ось вращения диска совпадает с осью анизотропии.

Расчет изгиба анизотропного кольцевого диска будем вести в рамках классической теории изгиба тонких пластин, основанной на гипотезах Кирхгофа.

Обозначим перемещения точек срединной поверхности диска в направлении оси z через $w(r)$ и далее будем называть ее функцией прогиба.

Выделим из диска с двумя меридиональными плоскостями, образующими с координатной плоскостью rz углы θ и $\theta + d\theta$, и с двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами r и $r + dr$, нормальными к срединной плоскости, бесконечно малый элемент диска толщиной dz. Запишем уравнения равновесия этого элемента в усилиях и моментах для случая осесимметричной деформации [3]:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_r(r)}{dr} + \dfrac{\left[N_r(r) - N_\theta(r)\right]}{r} + h(r)\rho\omega_0^2 r = 0, \\ \dfrac{d}{dr}\left(rQ_r(r)\right) - \dfrac{d}{dr}\left(rN_r(r)\vartheta_r(r)\right) + q_z(r)r = 0, \\ \dfrac{d}{dr}\left(rM_r(r)\right) - M_\theta(r) - rQ_r(r) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $N_r(r) = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_r(r)dz$ – радиальное усилие; $N_\theta(r) = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta(r)dz$ – тангенциальное усилие; $Q_r(r) = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz}(r)dz$ – поперечное радиальное усилие; $M_r(r) = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_r(r)zdz$ – изгибающий радиальный момент; $M_\theta(r) = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta(r)zdz$ – изгибающий тангенциальный момент; $\vartheta_r(r) = -\dfrac{dw(r)}{dr}$ – малый угол поворота нормали к срединной плоскости вокруг оси θ; ρ – плотность композитного материала диска.

Все внутренние силовые факторы – усилия N_r, N_θ, Q_r и моменты M_r, M_θ – действуют в срединной поверхности диска.

Зададим граничные условия. Пусть диск с натягом посажен на вал так, что отсутствуют перемещения его по вертикали и повороты сечения в радиальном направлении. На внешнем контуре диска приложено постоянное радиальное усилие, краевые – изгибающий момент M_0 и поперечная сила Q_0. Таким образом, граничные условия примут вид:

$$\begin{aligned} &N_r(r_0) = -h_0 p_0, \; w(r_0) = 0, \; \vartheta_r(r_0) = 0; \\ &N_r(R) = h_1 p_1, \; M_r(R) = M_0, \; Q_r(R) = Q_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Отметим, что граничные условия можно задавать и в других видах (что не влияет на ход решения задачи) и они используются только на конечном этапе для определения неизвестных постоянных.

Выразим из последнего уравнения системы (1) поперечное усилие $Q_r(r)$ через изгибающие моменты $M_r(r)$, $M_\theta(r)$:

$$Q_r(r) = \frac{dM_r(r)}{dr} + \frac{\left[M_r(r) - M_\theta(r)\right]}{r}. \tag{3}$$

Проинтегрируем второе уравнение системы (1):

$$rQ_r(r) - rN_r(r)\vartheta_r(r) = C_1 - \int_{r_0}^{r} s q_z(s)\,ds, \tag{4}$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Подставляя в уравнение (4) выражение для поперечного усилия $Q_r(r)$ из (3), получим уравнение для изгибающих моментов:

$$\frac{dM_r(r)}{dr} + \frac{\left[M_r(r) - M_\theta(r)\right]}{r} - N_r(r)\vartheta_r(r) = \frac{C_1}{r} - \frac{1}{r}\int_{r_0}^{r} s q_z(s)\,ds. \tag{5}$$

Радиальное $N_r(r)$ и тангенциальное $N_\theta(r)$ усилия и радиальное перемещение $u(r)$ во вращающемся в неоднородном тепловом поле полярно-ортотропном кольцевом диске переменной толщины приводятся в работе [4] и рассчитываются по следующим формулам:

$$N_r(r) = \frac{1}{r}\left\{\int_{r_0}^{r}(r-s)\varphi_T(s)\,ds + N_\theta(r_0)\cdot(r-r_0) + N_r(r_0)r_0 - h_0\rho\omega_0^2 r_0^2(r-r_0)\right\},$$

$$N_\theta(r) = \left[\int_{r_0}^{r}\varphi_T(s)\,ds + N_\theta(r_0) + h(r)\rho\omega_0^2 r^2 - h_0\rho\omega_0^2 r_0^2\right],$$

$$\begin{aligned} u(r) = \frac{1}{E_\theta(T)h(r)}&\left\{\int_{r_0}^{r}\left[(1-\nu_{\theta r})r + \nu_{\theta r}s\right]\varphi_T(s)\,ds + (1-\nu_{\theta r})N_\theta(r_0)r + \nu_{\theta r}r_0\left[N_\theta(r_0) - N_r(r_0)\right] + \right. \\ &\left. + h(r)\rho\omega_0^2 r^3 - \left[(1-\nu_{\theta r})r + \nu_{\theta r}r_0\right]h_0\rho\omega_0^2 r_0^2\right\} + r\alpha_\theta(T)\left(T(r) - T_0\right). \end{aligned}$$

В этих формулах неизвестные постоянные $N_r(r_0)$, $N_\theta(r_0)$ определяются из граничных условий (2); α_θ – тангенциальный коэффициент температурного расширения.

Разрешающая функция $\varphi_T(r)$ удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерры второго рода:

$$\varphi_T(r) = \lambda\int_{r_0}^{r} K^{(T)}(r, s)\varphi_T(s)\,ds + f_T(r),$$

где числовой параметр $\lambda = -1$; $f_T(r) = \dfrac{\partial K^{(T)}(r, s)}{\partial s} r_0 h(r_0)\sigma_r(r_0) - K^{(T)}(r, r_0)h(r_0)\sigma_\theta(r_0) + K^{(T)}(r, r_0) \times$ $\times\, h(r_0)\rho\omega_0^2 r_0^2 - \left[(3 + \nu_{\theta r}) + r\dfrac{\gamma^*}{E_\theta(T)}\dfrac{dT}{dr}\right] h(r)\rho\omega_0^2 r - E_\theta(T)h(r)\left[\dfrac{d\Theta_\theta}{dr} + \dfrac{(\Theta_\theta(r) - \Theta_r(r))}{r}\right]$ – свободный член интегрального уравнения; $K^{(T)}(r, s) = \left\{\left[\dfrac{1}{r} - \dfrac{h'(r)}{h(r)} + \dfrac{\gamma^*}{E_\theta(T)}\dfrac{dT}{dr}\right] + \left[\dfrac{\nu_{\theta r}}{r}\left(\dfrac{h'(r)}{h(r)} - \dfrac{\gamma^*}{E_\theta(T)}\dfrac{dT}{dr}\right) - \right.\right.$ $\left.\left. - \dfrac{k^2(T)}{r^2}\right](r - s)\right\}$ – ядро интегрального уравнения; $\gamma^* = \gamma E_\theta^{(0)}$.

Выразим изгибающие моменты $M_r(r)$, $M_\theta(r)$ и поперечное усилие $Q_r(r)$ через функцию прогиба $w(r)$ [3]:

$$M_r(r) = -D_{11}^{(T)}(r)\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu_{\theta r}}{r}\frac{dw}{dr}\right);\; M_\theta(r) = -D_{11}^{(T)}(r)\left(\nu_{\theta r}\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{k_0^2}{r}\frac{dw}{dr}\right);$$
$$Q_r(r) = -D_{11}^{(T)}(r)\left[\frac{d^3w}{dr^3} + \left(\frac{\dot{D}_{11}^{(T)}(r)}{D_{11}^{(T)}(r)} + \frac{1}{r}\right)\frac{d^2w}{dr^2} + \left(\nu_{\theta r}\frac{\dot{D}_{11}^{(T)}(r)}{D_{11}^{(T)}(r)} - \frac{k_0^2}{r}\right)\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right], \tag{6}$$

где $D_{11}^{(T)}(r) = \dfrac{E_\theta(T)h^3(r)}{12\left(k_0^2 - \nu_{\theta r}^2\right)}$ – цилиндрическая жесткость изгиба полярно-ортотропной пластины в тепловом поле; $k_0^2 = \dfrac{E_\theta^{(0)}}{E_r^{(0)}}$.

Подставляя выражения (6) в уравнение (5), получим *основное дифференциальное уравнение осесимметричного изгиба вращающегося в неоднородном тепловом поле полярно-ортотропного кольцевого диска переменной толщины:*

$$\frac{d^3w}{dr^3} + \left(\frac{\dot{D}_{11}^{(T)}(r)}{D_{11}^{(T)}(r)} + \frac{1}{r}\right)\frac{d^2w}{dr^2} + \left(\frac{\nu_{\theta r}}{r}\frac{\dot{D}_{11}^{(T)}(r)}{D_{11}^{(T)}(r)} - \frac{k_0^2}{r^2} - \frac{N_r(r)}{D_{11}^{(T)}(r)}\right)\frac{dw}{dr} = \frac{1}{rD_{11}^{(T)}(r)}\int_{r_0}^{r} sq_z(s)ds - \frac{C_1}{rD_{11}^{(T)}(r)}. \tag{7}$$

Порядок дифференциального уравнения (7) можно понизить на единицу, если вместо функции прогиба $w(r)$ рассматривать угол поворота нормали $\vartheta_r(r) = -\dfrac{dw(r)}{dr}$. Получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2\vartheta_r}{dr^2} + \left(\frac{\dot{D}_{11}^{(T)}(r)}{D_{11}^{(T)}(r)} + \frac{1}{r}\right)\frac{d\vartheta_r}{dr} + \left(\frac{\nu_{\theta r}}{r}\frac{\dot{D}_{11}^{(T)}(r)}{D_{11}^{(T)}(r)} - \frac{k_0^2}{r^2} - \frac{N_r(r)}{D_{11}^{(T)}(r)}\right)\vartheta_r(r) = \frac{C_1}{rD_{11}^{(T)}(r)} - \frac{1}{rD_{11}^{(T)}(r)}\int_{r_0}^{r} sq_z(s)ds. \tag{8}$$

Приведем дифференциальное уравнение (8) к соответствующему линейному интегральному уравнению Вольтерры второго рода [5].

Полагаем, что

$$\frac{d^2\vartheta_r}{dr^2} = \chi_T(r). \tag{9}$$

Последовательно интегрируя выражение (9), получим

$$\frac{d\vartheta_r}{dr} = \int_{r_0}^{r}\chi_T(s)ds + \vartheta_r'(r_0);\; \vartheta_r(r) = \int_{r_0}^{r}(r - s)\chi_T(s)ds + \vartheta_r'(r_0)\cdot(r - r_0) + \vartheta_r(r_0). \tag{10}$$

Здесь использовалась формула Дирихле

$$\underbrace{\int_{r_0}^{r} dr_1 \int_{r_0}^{r_1} dr_2 \ldots \int_{r_0}^{r_{n-1}} \varphi_T(r_n)\, dr_n}_{n\text{-раз}} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{r_0}^{r} (r-s)^{n-1} \varphi_T(s)\, ds.$$

Подставляя в уравнение (8) вместо угла поворота нормали $\vartheta_r(r)$ и его производных правые части выражений (9), (10), получим искомое линейное интегральное уравнение Вольтерры второго рода:

$$\chi_T(r) = \lambda \int_{r_0}^{r} K_w^{(T)}(r, s)\chi_T(s)\, ds + g_T(r), \tag{11}$$

где числовой параметр $\lambda = -1$; $K_w^{(T)}(r, s) = \left\{ \left[\frac{\dot{D}_{11}^{(T)}(r)}{D_{11}^{(T)}(r)} + \frac{1}{r} \right] + \left[\frac{\nu_{\theta r}}{r} \frac{\dot{D}_{11}^{(T)}(r)}{D_{11}^{(T)}(r)} - \frac{k_0^2}{r^2} - \frac{N_r(r)}{D_{11}^{(T)}(r)} \right](r-s) \right\}$ – ядро интегрального уравнения; $g_T(r) = \frac{\partial K_w^{(T)}(r, s)}{\partial s} \vartheta_r(r_0) - K_w^{(T)}(r, r_0)\vartheta'_r(r_0) + \frac{C_1}{rD_{11}^{(T)}(r)} - \frac{1}{rD_{11}^{(T)}(r)} \int_{r_0}^{r} sq_z(s)\, ds$ – свободный член интегрального уравнения.

Значения угла поворота нормали $\vartheta_r(r_0)$ и его производной $\vartheta'_r(r_0)$ на внутреннем контуре диска определяются из граничных условий.

Общее решение линейного интегрального уравнения Вольтерры второго рода (11) записывается с помощью резольвенты $R_w^{(T)}(r, s; \lambda)$ в виде [5]

$$\chi_T(r) = \lambda \int_{r_0}^{r} R_w^{(T)}(r, s; \lambda) g_T(s)\, ds + g_T(r), \tag{12}$$

где функция $R_w^{(T)}(r, s; \lambda)$ определяется функциональным рядом:

$$R_w^{(T)}(r, s; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_{w,\, m+1}^{(T)}(r, s),$$

который для непрерывных ядер $K_{w,\, m}^{(T)}(r, s)$ сходится абсолютно и равномерно.

Повторяющиеся, или итерированные, ядра $K_{w,\, m}^{(T)}(r, s)$ определяются по следующим рекуррентным формулам:

$$K_{w,\, 1}^{(T)}(r, s) = K_w^{(T)}(r, s),$$

$$K_{w,\, 2}^{(T)}(r, s) = \int_{s}^{r} K_w^{(T)}(r, t) K_{w,\, 1}^{(T)}(t, s)\, dt,$$

……………………………………..

$$K_{w,\, m}^{(T)}(r, s) = \int_{s}^{r} K_w^{(T)}(r, t) K_{w,\, m-1}^{(T)}(t, s)\, dt.$$

Если свободный член $g_T(r)$ непрерывен в $[r_0, R]$, а ядро $K_w^{(T)}(r, s)$ непрерывно при $r_0 \le r \le R$, $r_0 \le s \le r$, то линейное интегральное уравнение Вольтерры второго рода (11) имеет при любом параметре λ ($\lambda \ne 0$) единственное непрерывное решение, определяемое формулой (12).

Отметим, что интегральные уравнения Вольтерры второго рода можно решать и другими аналитическими и численными методами, указанными, например, в работе [6].

Выразим изгибающие моменты $M_r(r)$, $M_\theta(r)$, поперечное усилие $Q_r(r)$ и прогиб $w(r)$ через разрешающую функцию $\chi_T(r)$:

$$M_r(r) = D_{11}^{(T)}(r)\left[\int_{r_0}^{r} K_{M_r}(r, s)\chi_T(s)ds + K_{M_r}(r, r_0)\vartheta_r'(r_0) - \frac{\partial K_{M_r}(r, s)}{\partial s}\vartheta_r(r_0)\right],$$

$$M_\theta(r) = D_{11}^{(T)}(r)\left[\int_{r_0}^{r} K_{M_\theta}(r, s)\chi_T(s)ds + K_{M_\theta}(r, r_0)\vartheta_r'(r_0) - \frac{\partial K_{M_\theta}(r, s)}{\partial s}\vartheta_r(r_0)\right],$$

$$Q_r(r) = D_{11}^{(T)}(r)\left[\chi_T(r) + \int_{r_0}^{r} K_{Q_r}(r, s)\chi_T(s)ds + K_{Q_r}(r, r_0)\vartheta_r'(r_0) - \frac{\partial K_{Q_r}(r, s)}{\partial s}\vartheta_r(r_0)\right],$$

$$w(r) = -\left[\frac{1}{2}\int_{r_0}^{r}(r-s)^2\chi_T(s)ds + \frac{1}{2}(r-r_0)^2\vartheta_r'(r_0) + (r-r_0)\vartheta_r(r_0)\right] + w(r_0),$$

где передаточные (весовые) функции имеют вид:

$$K_{M_r}(r, s) = \left[(1+\nu_{\theta r}) - \frac{\nu_{\theta r}}{r}s\right],\ K_{M_\theta}(r, s) = \left[(k_0^2 + \nu_{\theta r}) - \frac{k_0^2}{r}s\right],$$

$$K_{Q_r}(r, s) = \left[\left(\frac{\dot{D}_{11}^{(T)}(r)}{D_{11}^{(T)}(r)} + \frac{1}{r}\right) + \left(\frac{\nu_{\theta r}}{r}\frac{\dot{D}_{11}^{(T)}(r)}{D_{11}^{(T)}(r)} - \frac{k_0^2}{r^2}\right)(r-s)\right].$$

Радиальная $\sigma_r(r, z)$, тангенциальная $\sigma_\theta(r, z)$ и касательные $\tau_{rz}(r)$ компоненты напряжений, возникающие в профилированном полярно-ортотропном диске, вращающемся в неоднородном тепловом поле и нагруженном осесимметричной распределенной поперечной нагрузкой $q_z(r)$, а также краевыми силами и моментами, рассчитываются по формулам [7]:

$$\sigma_r(r, z) = \frac{N_r(r)}{h(r)} + z\frac{12M_r(r)}{h^3(r)},\quad \sigma_\theta(r, z) = \frac{N_\theta(r)}{h(r)} + z\frac{12M_\theta(r)}{h^3(r)},\quad \tau_{rz}(r) = \frac{Q_r(r)}{h(r)}.$$

Максимум нормальных напряжений достигается на внешних сторонах диска при $z = \pm\frac{h}{2}$.

Библиографические ссылки

1. *Воробей В. В., Морозов Е. В., Татарников О. В.* Расчет термонапряженных конструкций из композиционных материалов. М., 1992.
2. *Дургарьян С. М.* Температурный расчет ортотропной слоистой пластинки при упругих постоянных и коэффициенте температурного расширения, зависящих от температуры // Изв. Акад. наук Арм. ССР. Физ.-мат. науки. 1960. Т. XIII, № 2. С. 73–88.
3. *Королевич В. В., Медведев Д. Г.* Интегральные уравнения Вольтерры второго рода в задачах изгиба вращающихся полярно-ортотропных дисков переменной толщины // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2012. № 3. С. 108–116.
4. *Королевич В. В., Медведев Д. Г.* Решение осесимметричной плоской задачи термоупругости для вращающегося в тепловом поле полярно-ортотропного диска переменной толщины методом интегрального уравнения Вольтерры второго рода // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 1. С. 47–52.
5. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями. М., 2007.
6. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев, 1986.
7. *Бояршинов С. В.* Основы строительной механики машин. М., 1973.

References

1. Vorobei V. V., Morozov E. V., Tatarnikov O. V. [Calculation of termostressed structure from composite materials]. Moscow, 1992 (in Russ.).
2. Durgar'yan S. M. [Temperature calculation of the orthotropic layered plate with depending on the temperature the elastic constants and thermal expansion coefficient]. *Izv. Akad. nauk Arm. SSR. Fiz.-mat. nauki.* 1960. Vol. XIII, No. 2. P. 73–88 (in Russ.).

3. Karalevich U. V., Medvedev D. G. Integral equations by Volterra of the second kind for the sums of curving rotating polar-orthotropic discs of variable thickness. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2012. No. 3. P. 108–116 (in Russ.)
4. Karalevich U. V., Medvedev D. G. Solution of the axisymmetric plane thermoelasticity problem for a polar-orthotropic disc of variable thickness in the rotating thermal field by Volterra integral equation of the second kind. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 1. P. 47–52 (in Russ.).
5. Krasnov M. L., Kiselev A. I., Makarenko G. I. [Integral equations: problems and examples with detailed solutions]. Moscow, 2007 (in Russ.).
6. Verlan' A. F., Sizikov V. S. [Integral equations: methods, algorithms, programs]. Kiev, 1986 (in Russ.).
7. Boyarshinov S. V. [Fundamentals of structural mechanics of machines]. Moscow, 1973 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 07.12.2016.
Received by editorial board 07.12.2016.