

УДК 539.3:517.53

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЖЕСТКОГО ДИСКА И ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ВЫРЕЗОМ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. С. КРАВЧУК¹⁾, А. И. КРАВЧУК¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

С помощью метода аналитических функций приближенно решена контактная задача теории упругости для жесткого недеформируемого диска и упругой плоскости с круглым вырезом без использования сингулярных уравнений. Сделано предположение, что в области контакта распределение напряжений представлено в виде ряда Фурье. Коэффициенты разложений в ряд аналитических функций выражаются через коэффициенты ряда Фурье контактных напряжений. В конце решения ряд Фурье и, соответственно, ряды аналитических функций усекаются до минимально возможного количества членов. В качестве краевого условия по перемещениям в области контакта используется известное выражение Левиной – Решетова. Впервые получены квадратурные формулы, позволяющие инженерам выполнять расчеты сопряжений типа вал – втулка с учетом простого теоретически обоснованного распределения напряжений в области контакта. Констатируется, что предлагаемая методика позволяет разработать прикладную теорию износостойкости подшипников скольжения с учетом микрогеометрических параметров их поверхностей.

Ключевые слова: сопряжение вал – втулка; напряженное состояние; аналитические функции; формулы Колова – Мусхелишвили; комплексные числа; упругая плоскость с отверстием; ряд Фурье.

AN APPROXIMATE SOLUTION OF THE CONTACT PROBLEM FOR THE HARD DISK AND PLANE WITH A CIRCULAR HOLE WITHOUT APPLICATION OF SINGULAR EQUATIONS

A. S. KRAVCHUK^a, A. I. KRAVCHUK^a

^aBelarusian State University, Niezaliežnasci Avenue, 4, 220030, Minsk, Belarus

Corresponding author: A. S. Kravchuk (ask_belarus@inbox.ru)

For the first time the contact problem of elasticity theory for the rigid (not deformable) disk and elastic plane with a hole was approximately solved using the method of analytic functions without the application of singular equations. It is assumed that the stress distribution in the area of contact is represented by the Fourier series. The coefficients of the series expansion of analytic functions are expressed in terms of the coefficients of the Fourier series of contact stress. At the end of the solution the Fourier series and, respectively, series of analytic functions is truncated to the lowest possible number of members. The familiar Lewin-Reshetova expression for the contact displacements was used as a boundary condition

Образец цитирования:

Кравчук А. С., Кравчук А. И. Приближенное решение контактной задачи для жесткого диска и плоскости с круговым вырезом без использования сингулярных уравнений // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 2. С. 59–64.

For citation:

Kravchuk A. S., Kravchuk A. I. An approximate solution of the contact problem for the hard disk and plane with a circular hole without application of singular equations. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 2. P. 59–64 (in Russ.).

Авторы:

Александр Степанович Кравчук – доктор физико-математических наук, доцент; профессор кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета.

Анжелика Ивановна Кравчук – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.

Authors:

Alexander Kravchuk, doctor of science (physics and mathematics), docent; professor at the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.

ask_belarus@inbox.ru

Anzhelika Kravchuk, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of web technologies and computer modeling, faculty of mechanics and mathematics.
anzhelika.kravchuk@gmail.com

for this problem. The quadrature formula of solution allowing engineers to perform calculations of interfaces such as shaft – bush was obtained. The proposed method allows authors to develop the applied theory of wear resistance of sliding bearings taking into consideration microgeometrical parameters of their surfaces.

Key words: conjugation shaft sleeve; the state of stress; analytic functions; formulas Kolosov – Muskhelishvili; complex numbers; elastic plane with a hole; a Fourier series.

Введение

При решении плоских контактных задач в научной литературе традиционно используются интегралы типа Коши, с помощью которых такая задача сводится к сингулярному интегральному уравнению [1, с. 412; 2, с. 145]. Однако его решение во многих случаях представляет довольно сложную проблему. Кроме того, построенные таким образом решения невозможно применить на практике при инженерных расчетах.

Цель настоящей статьи – разработка методики решения контактной задачи с помощью усеченных рядов аналитических функций без промежуточного использования интегралов типа Коши, что обеспечивает достаточную простоту получаемых уравнений распределения напряжений в области контакта и определения полуугла области контакта в зависимости от величины приложенной силы.

Общие формулы для плоскости с круглым вырезом в случае отсутствия трения на границе отверстия

Формулы Колосова – Мусхелишвили в декартовых координатах [1, с. 404; 2, с. 123–124] имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}], \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \\ 2\mu(u_x + iu_y) &= \kappa \cdot \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)},\end{aligned}\quad (1)$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – функции, голоморфные в S^- (плоскости с отверстием) (см. рисунок, а); $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; κ – константа, определяемая видом напряженного состояния:

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{– при плоской деформации,} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{– при плоском напряженном состоянии.} \end{cases}$$

Компоненты перемещений (u_r, u_θ) в полярной системе координат с перемещениями в декартовой системе координат (u_x, u_y) связаны уравнением [1, с. 133]:

$$u_r + iu_\theta = (u_x + iu_y)e^{-i\theta}. \quad (2)$$

В полярной системе координат для напряжений $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}$ можно получить уравнение [1, с. 447]:

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - z\varphi''(z) - \frac{z}{z}\psi'(z). \quad (3)$$

Учитывая, что напряжения в плоскости с вырезом исчезают на бесконечности, примем, что при ненулевом главном векторе сил $((F_x, F_y) \neq 0$, где F_x, F_y – проекции главного вектора сил в декартовой системе координат) функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ приобретают вид, указанный в [2, с. 127] (см. рисунок):

$$\varphi(z) = -\frac{F_x + iF_y}{2\pi(1+\kappa)} \ln(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}, \quad \psi(z) = \kappa \frac{F_x - iF_y}{2\pi(1+\kappa)} \ln(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}, \quad (4)$$

где $a_k, b_k, k = \overline{1, \infty}$, – комплексные коэффициенты, определяемые из краевых условий.

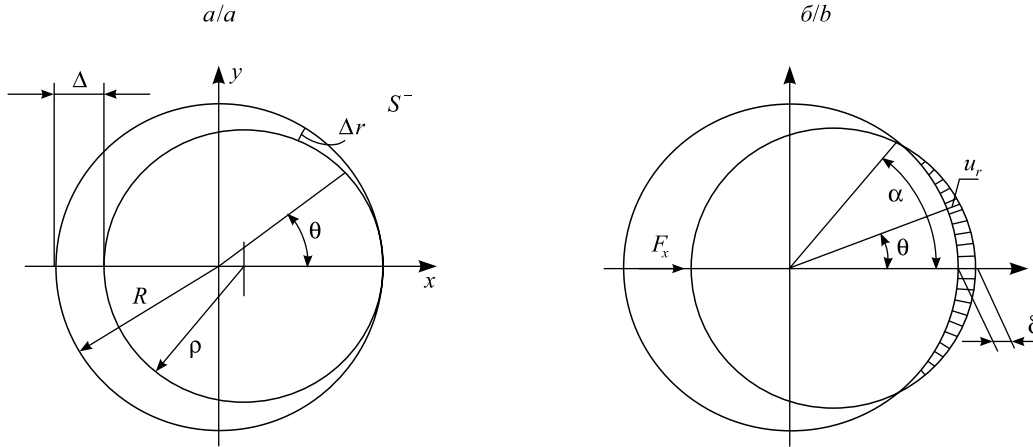


Схема взаимного расположения жесткого диска и упругой плоскости с круговым вырезом:

a – при касании жесткого диска кругового отверстия;

б – при внедрении жесткого диска в плоскость с круговым вырезом

Diagram of the relative position of the hard disk and the classic plane with circular hole:

a – a hard disk is touched to the circular hole;

b – a hard disk is penetrated into the circular hole

При нулевых касательных напряжениях на контуре отверстия $\sigma_{r\theta}|_{r=R} = 0$ справедливо уравнение:

$$F_x + iF_y = -R \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{rr}|_{r=R} \cdot e^{i\theta} d\theta, \quad (5)$$

где $L = R \cdot e^{i\theta}$ – граница отверстия, $\theta \in [0, 2\pi]$; R – радиус отверстия.

Вычисляя необходимые для уравнения (3) производные от аналитических функций $\phi(z)$ и $\psi(z)$, получаем

$$\begin{aligned} \phi'(z) &= -\frac{F_x + iF_y}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a_k}{z^{k+1}}, \quad \phi''(z) = \frac{F_x + iF_y}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \frac{a_k}{z^{k+2}}; \\ \psi'(z) &= \kappa \frac{F_x - iF_y}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{b_k}{z^{k+1}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Постановка задачи в напряжениях

Рассмотрим упругую плоскость с отверстием радиусом R (см. рисунок). Будем считать, что в отверстие в плоскости вставляется круговой недеформируемый диск радиусом ρ (см. рисунок). Наиболее общим условием для определения $\sigma_{rr}|_{r=R} = \sigma_{rr}(R, \theta)$ в области контакта $\theta \in [-\alpha, \alpha]$ является его задание с помощью ряда Фурье (см. рисунок). При условии отсутствия трения ($\sigma_{r\theta}|_{r=R} = \sigma_{r\theta}(R, \theta) = 0$) на границе отверстия распределение контактных напряжений $\sigma_{rr}(R, \theta)$ есть четная относительно θ функция. Тогда

$$\sigma_{rr}(R, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos(j \cdot \theta), \quad (7)$$

где A_j – вещественные коэффициенты ряда Фурье, для которых выполнено

$$A_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{rr}(R, \theta) \cos(j \cdot \theta) d\theta, \quad j = \overline{0, \infty}.$$

Используя (5) и (7), можно определить, что главный вектор сил направлен вдоль оси Ox ($F_y = 0$), а проекция F_x определяется уравнением

$$\begin{aligned}
 F_x &= -R \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{rr}|_{r=R} \cdot e^{i\theta} d\theta = -R \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos(j \cdot \theta) \right) (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) d\theta = \\
 &= -R A_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta)^2 d\theta = -R A_1 \pi.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, для построения приближенного решения контактной задачи будем считать, что основными коэффициентами, обуславливающими силовое взаимодействие в области контакта при $\theta \in [-\alpha, \alpha]$, являются A_0 и A_1 , т. е.

$$\sigma_{rr}(R, \theta) \approx \begin{cases} \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\theta), & \theta \in [-\alpha, \alpha], \\ 0, & \theta \notin [-\alpha, \alpha]. \end{cases} \tag{9}$$

Остальные коэффициенты, определяющие перераспределение напряжений с учетом перемещений в области контакта, с достаточной точностью равны нулю:

$$A_{j, j=2, \infty} \approx 0. \tag{10}$$

Подставляя (6) в (3) и заменяя $z = r e^{i\theta}$, с учетом (8) получаем

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} &= -\frac{F_x}{2\pi(1+\kappa)} \frac{e^{-i\theta}}{r} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a_k e^{-i(k+1)\theta}}{r^{k+1}} - \\
 &- \frac{F_x}{2\pi(1+\kappa)} \frac{e^{i\theta}}{r} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\overline{a_k} e^{i(k+1)\theta}}{r^{k+1}} - \\
 &- \frac{F_x}{2\pi(1+\kappa)} \frac{e^{-i\theta}}{r} - \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \frac{a_k e^{-i(k+1)\theta}}{r^{k+1}} - \\
 &- \kappa \frac{F_x}{2\pi(1+\kappa)} \frac{e^{i\theta}}{r} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{b_k e^{-i(k-1)\theta}}{r^{k+1}}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Переходя к пределу $r \rightarrow R$ в (11), разделяя вещественную и мнимую части и подставляя краевое условие (9) для $\sigma_{rr}(R, \theta)$ и $\sigma_{r\theta}(R, \theta) = 0$, вычислим коэффициенты разложений аналитических функций (4).

Исходя из четырех систем уравнений (11) отдельно для вещественных и мнимых частей, при гипотезе (5) получаем, что главный вектор сил, приложенных к контуру отверстия, действует в направлении оси Ox , т. е. все мнимые части коэффициентов a_k, b_k ($k = \overline{1, \infty}$) равны нулю:

$$\text{Im}(a_k) = \text{Im}(b_k) = 0. \tag{12}$$

Тогда из (11), (12) и краевого условия получаем:

$$b_1 = -\frac{A_0}{2} R^2, \quad b_2 = -(3+\kappa) \frac{F_x}{4\pi(1+\kappa)} - \frac{A_1}{2} R, \quad b_2 = -(1-\kappa) \frac{F_x}{4\pi(1+\kappa)} R^2. \tag{13}$$

Система (13) является непротиворечивой с учетом равенства (8) для A_1 . Для любых $j \geq 2$ можно получить систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 -(j+2)(j-1)a_{j-1} - (j+1)b_{j+1} &= A_j R^j, \\
 (j-1)j a_{j-1} + (j+1)b_{j+1} &= 0.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Исходя из условия (10) и системы (14), получаем, что $a_{j-1} = b_{j+1} = 0$ для любого $j \geq 2$. Таким образом, из (4) для уравнений (1) получаем, что с принятыми гипотезами контактную задачу решают аналитические функции в виде

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= -\frac{F_x}{2\pi(1+\kappa)} \ln(z), \quad \varphi'(z) = -\frac{F_x}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{z}; \\ \psi(z) &= \kappa \frac{F_x}{2\pi(1+\kappa)} \ln(z) - \frac{A_0}{2} \frac{R^2}{z} - (1-\kappa) \frac{F_x}{4\pi(1+\kappa)} \frac{R^2}{z^2}.\end{aligned}\quad (15)$$

Очевидно, что в (15) остается неопределенной только одна константа A_0 .

Краевое условие по перемещениям

В литературе самым распространенным и простым является краевое условие из работы [3, с. 52] (см. рисунок).

При внутреннем касании круга радиусом ρ и отверстия в плоскости радиусом R радиальный зазор под углом θ

$$\Delta_r = (R - \rho)(1 - \cos(\theta)). \quad (16)$$

Упругое радиальное перемещение диска относительно втулки под углом θ

$$u_r = \delta \cos(\theta) - \Delta_r, \quad (17)$$

где δ – глубина максимального внедрения диска в плоскость с отверстием.

Подставляя (16) в (17), получаем уравнение в случае малой разности радиусов ($\frac{R - \rho}{R}$ – малая величина), которое можно вывести и иным способом [4, с. 20]:

$$u_r(\theta) = (\delta + (R - \rho)) \cos(\theta) - (R - \rho). \quad (18)$$

Дважды дифференцируя (18) по θ и складывая результат с исходным уравнением (18), получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 u_r(\theta)}{d\theta^2} + u_r(\theta) = -(R - \rho). \quad (19)$$

Использование уравнения (19) вместо (18) позволит освободиться от логарифмических членов при подстановке (15) в (1). Для нормальных радиальных перемещений из (1), (2) и (15) на границе отверстия получаем

$$\begin{aligned}2\mu u_r &= \operatorname{Re} \left[\kappa \varphi(R \cdot e^{i\theta}) e^{-i\theta} - R \overline{\varphi'(R \cdot e^{i\theta})} - \overline{\psi(R \cdot e^{i\theta})} \cdot e^{-i\theta} \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[-\kappa \frac{F_x}{\pi(1+\kappa)} \ln(R) \cdot e^{-i\theta} + \frac{(3-\kappa)F_x}{4\pi(1+\kappa)} e^{i\theta} + \frac{A_0}{2} R \right] = \\ &= \left(\frac{(3-\kappa)F_x}{4\pi(1+\kappa)} - \kappa \frac{F_x}{\pi(1+\kappa)} \ln(R) \right) \cos(\theta) + \frac{A_0}{2} R.\end{aligned}\quad (20)$$

Дифференцируя (20) дважды по θ и складывая результат с (20), получаем

$$2\mu \frac{d^2 u_r}{d\theta^2} + 2\mu u_r = \frac{A_0}{2} R. \quad (21)$$

Приближенное распределение напряжений

Сравнивая (19) и (21), получаем, что

$$A_0 = -4\mu \frac{(R - \rho)}{R}. \quad (22)$$

При подстановке (22) в (9)

$$\sigma_{rr}(R, \theta) \approx \begin{cases} -\frac{E}{(1+\nu)} \frac{(R-\rho)}{R} - \frac{F_x}{R\pi} \cos(\theta), & \theta \in [-\alpha, \alpha], \\ 0, & \theta \notin [-\alpha, \alpha]. \end{cases} \quad (23)$$

Последним действием является определение размеров области контакта по величине действующей силы. Подставляя (23) в (5), получаем

$$\begin{aligned} F_x &= R \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\frac{E}{(1+\nu)} \frac{(R-\rho)}{R} + \frac{F_x}{R\pi} \cos(\theta) \right) \cos(\theta) d\theta = \\ &= 2 \frac{E}{(1+\nu)} (R-\rho) \sin(\alpha) + \frac{F_x}{\pi} (\alpha + \cos(\alpha) \sin(\alpha)). \end{aligned} \quad (24)$$

Из (24) можно получить

$$F_x = 2\pi \frac{E}{(1+\nu)} \frac{(R-\rho) \sin(\alpha)}{(\pi - \alpha - \cos(\alpha) \sin(\alpha))}. \quad (25)$$

Заключение

С помощью метода аналитических функций приближенно решена контактная задача теории упругости для жесткого недеформируемого диска и упругой плоскости с вырезом.

Впервые получены квадратурные формулы (23) и (25), позволяющие инженерам выполнять расчеты сопряжений вал – втулка с учетом простого теоретически обоснованного распределения напряжений в области контакта.

Предлагаемая методика позволяет разработать прикладную теорию износостойкости подшипников скольжения с учетом микрогеометрических параметров их поверхностей.

Библиографические ссылки

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
2. Амензаде Ю. А. Теория упругости. М., 1976.
3. Левина З. М., Решетов Д. Н. Контактная жесткость машин. М., 1971.
4. Кравчук А. С., Чигарев А. В. Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами. Минск, 2000.

References

1. Muskhelishvili N. I. [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Moscow, 1966 (in Russ.).
2. Amenzade Yu. A. [Theory of elasticity]. Moscow, 1976 (in Russ.).
3. Levina Z. M., Reshetov D. N. [Contact stiffness of machines]. Moscow, 1971 (in Russ.).
4. Kravchuk A. S., Chigarev A. V. [Contact mechanics of bodies with circular boundaries]. Minsk, 2000 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 01.06.2016.
Received by editorial board 01.06.2016.