

ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАУСДОРФОВЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ БАСЕЙНОВ ЭРГОДИЧЕСКИХ МЕР В КОДИРУЮЩИХ ПРОСТРАНСТВАХ

П. Н. ВОРОБЕЙ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассмотрены пространства $X^{\mathbb{N}}$ последовательностей элементов конечного алфавита X (кодирующие пространства) и эргодические меры, заданные на них. Изучены бассейны эргодических мер и хаусдорфовы размерности таких бассейнов относительно ультраметрики, определяемой произведением коэффициентов из единичного отрезка $\theta(x)$, $x \in X$. Для вычисления хаусдорфовых размерностей бассейнов применяются методы Биллингсли – Янг, связывающие хаусдорфову размерность множества с поточечной размерностью некоторой меры на этом множестве. Применяются также теорема Шеннона – Макмиллана – Бреймана в целях получения оценки снизу хаусдорфовой размерности бассейна и частичный аналог теоремы Макмиллана для получения оценки сверху. Цель настоящей работы – получение формулы для расчета размерности рассматриваемых бассейнов, выражающей хаусдорфову размерность через энтропию эргодической меры и коэффициент, определяемый заданной ультраметрикой.

Ключевые слова: хаусдорфова размерность; бассейны эргодических мер; энтропия.

Благодарность. Автор выражает благодарность профессору В. И. Бахтину за постановку задачи и плодотворное обсуждение работы.

CALCULATION OF HAUSDORFF DIMENSIONS OF BASINS OF ERGODIC MEASURES IN ENCODING SPACES

P. N. VARABEI^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

In the article we consider spaces $X^{\mathbb{N}}$ of sequences of elements of finite alphabet X (encoding spaces) and ergodic measures on them, basins of ergodic measures and Hausdorff dimensions of such basins with respect to ultrametrics defined by a product of coefficients of unit interval $\theta(x)$, $x \in X$. We call a basin of ergodic measure a set of points of the encoding space which define empiric measures by means of shift map, which limit (in a weak topology generated by continuous functions) is the ergodic measure. The methods of Billingsley and Young are used, which connects Hausdorff dimension and a pointwise dimension of some measure on the space, as well as Shannon – McMillan – Breiman theorem to obtain a lower bound of the dimension of a basin, and a partial analogue of McMillan theorem to obtain the upper bound. The goal of the article is to obtain a formula which can help us to calculate the Hausdorff dimension via entropy of the ergodic measure and a coefficient defined by the ultrametrics.

Key words: Hausdorff dimension; basin of an ergodic measure; entropy.

Acknowledgements. The author would like to thank professor V. I. Bakhtin for the formulation of the problem, constructive criticism and productive discussion of the manuscript.

Образец цитирования:

Воробей П. Н. Вычисление хаусдорфовых размерностей бассейнов эргодических мер в кодирующих пространствах // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 11–18.

For citation:

Varabei P. N. Calculation of Hausdorff dimensions of basins of ergodic measures in encoding spaces. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 3. P. 11–18 (in Russ.).

Автор:

Павел Николаевич Воробей – аспирант кафедры нелинейного анализа и аналитической экономики механико-математического факультета. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор В. И. Бахтин.

Author:

Pavel N. Varabei, postgraduate student at the department of nonlinear analysis and analytical economics, faculty of mechanics and mathematics.
vorobeypn@gmail.com

Для вычисления хаусдорфовых размерностей фракталов обычно используют принцип распределения масс [1–3], а в более сложных случаях применяют теоремы Биллингсли [4; 5] и Янг [6], которые связывают размерность множества с поточечной размерностью некоторой меры на этом множестве. Размерности бассейнов марковских мер вычислялись в работах Биллингсли. В настоящей работе применены методы Биллингсли – Янг для вычисления размерностей бассейнов эргодических мер, заданных на пространстве последовательностей элементов конечного алфавита. Бассейном эргодической меры называется множество точек кодирующего пространства, которые с помощью отображения сдвига определяют эмпирические меры, сходящиеся к этой эргодической мере в слабой топологии, порожденной непрерывными функциями. Основным результатом представляет собой формулу для расчета размерности таких бассейнов и дан в приведенных ниже теоремах 3 и 5.

Хаусдорфова размерность

Пусть произвольное метрическое пространство Ω покрыто конечной или счетной совокупностью множеств $\mathcal{U} = \{U_i\}$. Обозначим через $\text{diam } \mathcal{U}$ диаметр этого покрытия: $\text{diam } \mathcal{U} = \sup \text{diam } U_i$, где $\text{diam } U_i$ – диаметр U_i . Для каждого числа $\alpha > 0$ положим

$$\text{mes}(\mathcal{U}, \alpha) = \sum_i (\text{diam } U_i)^\alpha.$$

Хаусдорфовой мерой (размерности α) метрического пространства Ω называется

$$\text{mes}(\Omega, \alpha) = \lim_{\text{diam } \mathcal{U} \rightarrow 0} \text{mes}(\mathcal{U}, \alpha),$$

где $\mathcal{U}$ – конечное или счетное покрытие Ω . Можно заметить, что при $\beta > \alpha$

$$\text{mes}(\mathcal{U}, \beta) \leq \text{mes}(\mathcal{U}, \alpha) (\text{diam } \mathcal{U})^{\beta - \alpha}.$$

Отсюда вытекает следующее свойство хаусдорфовой меры: если $\text{mes}(\Omega, \alpha) < \infty$ при некотором α , то тогда $\text{mes}(\Omega, \beta) = 0$ при всех $\beta > \alpha$. Хаусдорфовой размерностью пространства Ω называется число $\dim_H \Omega = \inf \{\alpha \mid \text{mes}(\Omega, \alpha) = 0\}$.

Кодирующее пространство, цилиндрическая метрика и θ -метрика

Пусть задано конечное множество $X = \{1, 2, \dots, s\}$. Рассмотрим пространство последовательностей (кодирующее пространство)

$$X^{\mathbb{N}} = \{x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \mid x_i \in X\}.$$

Обозначим через $Z_n(x)$ множество точек $y = (y_1, y_2, y_3, \dots)$, у которых первые n координат совпадают с соответствующими координатами точки x . Будем называть это множество *цилиндром ранга n* . В частности, $Z_0(x) = X^{\mathbb{N}}$. Фиксируем какую-нибудь положительную функцию η на множестве всех цилиндров, обладающую двумя свойствами: если $Z_n(x) \subset Z_m(y)$, то тогда $\eta(Z_n(x)) \leq \eta(Z_m(y))$, и $\eta(Z_n(x)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любой точки $x \in X^{\mathbb{N}}$. Определим на $X^{\mathbb{N}}$ цилиндрическую метрику:

$$d(x, y) = \eta(Z_n(x)),$$

где $n = n(x, y) = \max \{m : Z_m(x) = Z_m(y)\}$.

Если $x = y$, то положим $d(x, y) = 0$. Очевидно, для любых трех последовательностей $x, y, z \in X^{\mathbb{N}}$ выполняется усиленное неравенство треугольника

$$d(x, z) \leq \max \{d(x, y), d(y, z)\}.$$

Метрика, для которой выполняется такое неравенство, называется *ультраметрикой*.

Частным случаем цилиндрической метрики является θ -метрика, определяемая следующим образом. Пусть задан набор чисел $\theta(1), \theta(2), \dots, \theta(s)$ из интервала $(0, 1)$. Функцию η зададим равенством

$$\eta(Z_n(x)) = \prod_{i=1}^n \theta(x_i).$$

Тогда соответствующая метрика $d(x, y)$ имеет вид

$$d(x, y) = \prod_{i=1}^n \theta(x_i),$$

где $n = n(x, y) = \max \{m \mid Z_m(x) = Z_m(y)\}$.

В дальнейшем мы будем работать именно с этой метрикой.

Для вычисления хаусдорфовой размерности подмножеств $X^{\mathbb{N}}$ будет полезна следующая теорема (разные варианты которой были доказаны в [2; 4–7]). Пусть μ – некоторая конечная мера на $X^{\mathbb{N}}$. Функция

$$d_\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(Z_n(x))}{\ln \eta(Z_n(x))}$$

называется *нижней поточечной размерностью меры μ* .

Теорема 1. Если для подмножества $A \subset X^{\mathbb{N}}$ найдется такая конечная борелевская мера μ на $X^{\mathbb{N}}$, что $d_\mu(x) \leq d$ для всех точек $x \in A$, то тогда $\dim_H A \leq d$. Наоборот, если $d_\mu(x) \geq d$ для всех $x \in A$ и при этом внешняя мера $\mu^*(A)$ положительна, то тогда $\dim_H A \geq d$.

Следовательно, если $d_\mu(x) = d$ на всем подмножестве $A \subset X^{\mathbb{N}}$, то его размерность равна d .

Энтропия

Обозначим через σ левый сдвиг на множестве $X^{\mathbb{N}}$:

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Вероятностная мера μ на $X^{\mathbb{N}}$ называется *инвариантной*, если $\mu(\sigma^{-1}(A)) = \mu(A)$ для всех измеримых $A \subset X^{\mathbb{N}}$ (измеримыми будем считать множества, принадлежащие σ -алгебре, порожденной совокупностью всех цилиндров). *Разбиением* множества G называется семейство таких его непересекающихся подмножеств, объединение которых равно G . Обозначим через $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ разбиение, которое включает все множества вида $A \cap B$, где $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$. *Энтропией конечного разбиения $\mathcal{A}$* , состоящего из измеримых множеств, относительно меры μ будем считать величину

$$H(\mu, \mathcal{A}) = - \sum_{A \in \mathcal{A}} \mu(A) \ln \mu(A).$$

Энтропия конечного разбиения обладает свойством монотонности и субаддитивности [8, с. 94]:

$$H(\mu, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \geq H(\mu, \mathcal{A}),$$

$$H(\mu, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \leq H(\mu, \mathcal{A}) + H(\mu, \mathcal{B}).$$

Легко заметить также, что $H(\mu, \mathcal{A})$ вогнуто по отношению к аргументу μ , поскольку функция $x \mapsto x \ln x$ является выпуклой.

Обозначим через $\xi = \xi^1$ разбиение $X^{\mathbb{N}}$ на цилиндры первого ранга и $\xi^n = \bigvee_{i=1}^n \sigma^{-i} \xi$ – разбиение $X^{\mathbb{N}}$ на цилиндры ранга n . *Энтропия инвариантной меры μ на пространстве $X^{\mathbb{N}}$* определяется следующим образом:

$$h(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mu, \xi^n).$$

Предел в определении энтропии существует в силу субаддитивности энтропии конечного разбиения (по лемме Фекете; также доказательство существования этого предела см. в [8, с. 98]).

Инвариантная вероятностная мера μ называется *эргодической*, если для любого измеримого множества A из равенства $\sigma^{-1}(A) = A$ следует, что $\mu(A) = 1$ или $\mu(A) = 0$. Имеет место следующая теорема, доказательство которой можно найти в [8; 10].

Теорема 2 (Шеннона – Макмиллана – Бреймана). Если μ – эргодическая мера на $X^{\mathbb{N}}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mu(Z_n(x)) = -h(\mu) \text{ п. в.}$$

Эмпирические меры и бассейны вероятностных мер

Всем точкам $x \in X^{\mathbb{N}}$ поставим в соответствие последовательность эмпирических мер $\delta_{x,n}$, каждая из которых сосредоточена на множестве $\{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots, \sigma^{n-1}(x)\}$ и приписывает всякой точке из этого множества меру $\frac{1}{n}$. Тогда мера множества $A \subset X^{\mathbb{N}}$

$$\delta_{x,n}(A) = \frac{|\{t = 0, \dots, n-1 \mid \sigma^t(x) \in A\}|}{n}.$$

Для каждой вероятностной меры μ на $X^{\mathbb{N}}$ определим ее бассейн $B(\mu)$ как множество таких точек $x \in X^{\mathbb{N}}$, для которых последовательность эмпирических мер $\delta_{x,n}$ сходится к μ в слабой топологии, порожденной непрерывными функциями. Напомним, что слабая топология на множестве мер задается окрестностями вида

$$O(\mu) = \left\{ \nu : \left| \int_{X^{\mathbb{N}}} f_i d\nu - \int_{X^{\mathbb{N}}} f_i d\mu \right| < \varepsilon, i = 1, \dots, n \right\}, f_i \in C(X^{\mathbb{N}}).$$

Заметим, что $\mu(B(\mu)) = 1$ для эргодических мер μ . Действительно, для любой функции $f \in L^1(X^{\mathbb{N}}, \mu)$ выполняется эргодическая теорема [8]. Значит, для почти всех $x \in X^{\mathbb{N}}$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\sigma^i(x)) \rightarrow \int_{X^{\mathbb{N}}} f d\mu. \quad (1)$$

В силу сепарабельности пространства $C(X^{\mathbb{N}})$ полной является и мера точек, для которых (1) выполняется сразу для всех $f \in C(X^{\mathbb{N}})$.

Пусть на пространстве $X^{\mathbb{N}}$ зафиксирована некоторая θ -метрика. Введем обозначение $Z_1(i) = \{(x_1, x_2, \dots) \in X^{\mathbb{N}} \mid x_1 = i\}$. Следующая теорема дает оценку размерности бассейна эргодической меры снизу.

Теорема 3. Для любой эргодической меры μ на $X^{\mathbb{N}}$

$$\dim_H B(\mu) \geq \frac{-h(\mu)}{\sum_{i=1}^s \mu(Z_1(i)) \ln \theta(i)}.$$

Доказательство. Заметим, что величина $\delta_{x,n}(Z_1(i))$ равна частоте символа i среди первых n координат точки x , поэтому

$$\frac{1}{n} \ln \eta(Z_n(x)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \theta(x_k) = \sum_{i=1}^s \delta_{x,n}(Z_1(i)) \ln \theta(i).$$

С учетом непрерывности характеристических функций цилиндров для всех $x \in B(\mu)$

$$\sum_{i=1}^s \delta_{x,n}(Z_1(i)) \ln \theta(i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^s \mu(Z_1(i)) \ln \theta(i).$$

Пусть $A(\mu)$ – множество меры 1, для которого выполняется теорема Шеннона – Макмиллана – Бреймана

$$A(\mu) = \left\{ x \in X^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mu(Z_n(x)) = -h(\mu) \right\}.$$

Тогда $C = A(\mu) \cap B(\mu)$ имеет полную меру и для любого $x \in C$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(Z_n(x))}{\ln \eta(Z_n(x))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \ln \mu(Z_n(x))}{\frac{1}{n} \ln \eta(Z_n(x))} = \frac{-h(\mu)}{\sum_{i=1}^s \mu(Z_1(i)) \ln \theta(i)}.$$

Поэтому согласно теореме 1

$$\dim_H B(\mu) \geq \dim_H C = \frac{-h(\mu)}{\sum_{i=1}^s \mu(Z_1(i)) \ln \theta(i)}.$$

Теорема доказана.

Для получения оценки размерности бассейна сверху докажем вспомогательную лемму. Ее доказательство во многом повторяет доказательство леммы из [9, с. 223].

Лемма. Для любой инвариантной меры μ на $X^{\mathbb{N}}$ и $\varepsilon > 0$ существует такая слабая окрестность $O(\mu)$, что при всех достаточно больших n для множества

$$E_n(O(\mu)) = \left\{ x \in X^n \mid \exists y \in Z_n(x) : \delta_{y,n} \in O(\mu) \right\}$$

справедлива оценка

$$\ln |E_n(O(\mu))| \leq n(h(\mu) + \varepsilon).$$

Доказательство. Для заданного $\varepsilon > 0$ фиксируем такое большое m , при котором $m^{-1}H(\mu, \xi^m) < h(\mu) + \frac{\varepsilon}{2}$. Очевидно, функция $H(v, \xi^m)$ непрерывно зависит от вероятностной меры v в слабой топологии (в силу непрерывности характеристических функций цилиндров). Выберем такую малую выпуклую слабую окрестность $O(\mu)$, что

$$\frac{1}{m} H(v, \xi^m) < h(\mu) + \frac{\varepsilon}{2} \text{ для всех } v \in O(\mu). \quad (2)$$

Для каждого $x \in E_n(O(\mu))$ фиксируем по одной точке $y \in Z_n(x)$, для которой $\delta_{y,n} \in O(\mu)$, и составим из этих точек множество Y_n . Очевидно, $|E_n(O(\mu))| = |Y_n|$. Определим вероятностную меру v_n формулой

$$v_n = \frac{1}{|Y_n|} \sum_{y \in Y_n} \delta_y.$$

Тогда

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_*^k v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_*^k \left(\frac{1}{|Y_n|} \sum_{y \in Y_n} \delta_y \right) = \frac{1}{|Y_n|} \sum_{y \in Y_n} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\sigma^k(y)} = \frac{1}{|Y_n|} \sum_{y \in Y_n} \delta_{y,n} \in O(\mu) \quad (3)$$

(поскольку $\delta_{y,n} \in O(\mu)$ и $O(\mu)$ выпукло). Каждый цилиндр $Z_n(x)$ содержит не более одной точки из Y_n , поэтому

$$H(v_n, \xi^n) = - \sum_{x \in X^{\mathbb{N}}} v_n(Z_n(x)) \ln v_n(Z_n(x)) = - \sum_{y \in Y_n} \frac{1}{|Y_n|} \ln \frac{1}{|Y_n|} = \ln |Y_n| = \ln |E_n(O(\mu))|.$$

Заметим, что для $i = 0, \dots, m-1$ выполняются неравенства:

$$i + m \cdot \left\lfloor \frac{n-i-1}{m} \right\rfloor < n \leq i + m \cdot \left\lfloor \frac{n-i-1}{m} \right\rfloor + m.$$

Также нетрудно видеть, что

$$\xi^{i+m \cdot \left\lfloor \frac{n-i-1}{m} \right\rfloor + m} = \xi^i \vee \sigma^{-i} \xi^m \vee \sigma^{-i-m} \xi^m \vee \dots \vee \sigma^{-i-m \cdot \left\lfloor \frac{n-i-1}{m} \right\rfloor} \xi^m.$$

Следовательно, в силу монотонности и субаддитивности энтропии

$$\begin{aligned} \ln |E_n(O(\mu))| &\leq \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} H\left(v_n, \xi^{i+m \cdot \left\lfloor \frac{n-i-1}{m} \right\rfloor + m}\right) \leq \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \left(H(v_n, \xi^i) + \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-i-1}{m} \right\rfloor} H(v_n, \sigma^{-i-jm} \xi^m) \right) \leq \\ &\leq H(v_n, \xi^m) + \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{n-1} H(v_n, \sigma^{-k} \xi^m) = H(v_n, \xi^m) + \frac{n}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{n} H(\sigma_*^k v_n, \xi^m). \end{aligned}$$

Далее, используя известную оценку $H(v_n, \xi^m) \leq \ln |\xi^m|$, вогнутость $H(v, \xi^m)$ по отношению к v и неравенства (3) и (2), получаем

$$\ln |E_n(O(\mu))| \leq \ln |\xi^m| + \frac{n}{m} H\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_*^k v_n, \xi^m\right) \leq m \ln |\xi| + n \left(h(\mu) + \frac{\varepsilon}{2} \right) = n \left(h(\mu) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{m \ln |\xi|}{n} \right).$$

При выборе таких больших n , для которых $\frac{m \ln |\xi|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, последнее выражение не превосходит $n(h(\mu) + \varepsilon)$. Таким образом, лемма доказана.

Докажем теперь оценку сверху для размерности бассейнов инвариантных вероятностных (а следовательно, и эргодических) мер.

Теорема 4. Для любой инвариантной вероятностной меры μ и $\varepsilon > 0$ существует такая слабая окрестность $O(\mu)$, что для множества

$$A = \left\{ x \in X^{\mathbb{N}} \mid \forall N \exists n > N \text{ и } y \in Z_n(x) : \delta_{y,n} \in O(\mu) \right\}$$

справедлива оценка его размерности

$$\dim_H A \leq \frac{-h(\mu)}{\sum_{i=1}^s \mu(Z_1(i)) \ln \theta(i)} + \varepsilon.$$

В частности, для бассейна $B(\mu)$ получаем

$$\dim_H B(\mu) \leq \frac{-h(\mu)}{\sum_{i=1}^s \mu(Z_1(i)) \ln \theta(i)}.$$

Доказательство. Фиксируем произвольное $\kappa > 0$. С помощью леммы выберем слабую окрестность $O(\mu)$, удовлетворяющую условиям:

$$\left| \left\{ x \in X^{\mathbb{N}} \mid \exists y \in Z_n(x) : \delta_{y,n} \in O(\mu) \right\} \right| \leq e^{n(h(\mu) + \kappa)}$$

для всех достаточно больших n и

$$\sum_{i=1}^s \delta(Z_1(i)) \ln \theta(i) < \sum_{i=1}^s \mu(Z_1(i)) \ln \theta(i) + \kappa$$

для всех $\delta \in O(\mu)$. Тогда для каждого $x \in X^n$, для которого существует $y \in Z_n(x)$, удовлетворяющее условию $\delta_{y,n} \in O(\mu)$, имеем

$$\begin{aligned} \text{diam}(Z_n(x)) &= \text{diam}(Z_n(y)) = \prod_{i=1}^n \theta(y_i) = \exp\left(\sum_{i=1}^n \ln \theta(y_i)\right) = \\ &= \exp\left(n \sum_{i=1}^s \delta_{y,n}(Z_1(i)) \ln \theta(i)\right) < \exp\left(n \sum_{i=1}^s \mu(Z_1(i)) \ln \theta(i) + n\kappa\right). \end{aligned}$$

При любом N множество A покрывается семейством цилиндров

$$\mathcal{U}_N = \bigcup_{n=N}^{\infty} \{Z_n(x) | \exists y \in Z_n(x) : \delta_{y,n} \in O(\mu)\}.$$

Очевидно, $\text{diam } \mathcal{U}_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Используя лемму, оценим при $N \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \text{mes}(\mathcal{U}_N, \alpha) &= \sum_{Z_n(x) \in \mathcal{U}_N} (\text{diam } Z_n(x))^\alpha \leq \sum_{n=N}^{\infty} e^{n(h(\mu) + \kappa)} \exp\left(\alpha n \sum_{i=1}^s \mu(Z_1(i)) \ln \theta(i) + \alpha n \kappa\right) = \\ &= \sum_{n=N}^{\infty} \exp\left(n\left(h(\mu) + \kappa + \alpha \sum_{i=1}^s \mu(Z_1(i)) \ln \theta(i) + \alpha \kappa\right)\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Если

$$\alpha = \frac{-h(\mu)}{\sum_{i=1}^s \mu(Z_1(i)) \ln \theta(i)} + \varepsilon,$$

то можно выбрать такое малое $\kappa > 0$, что выражение (4) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$, поэтому мера $\text{mes}(A, \alpha)$ равна нулю и $\dim_H A \leq \alpha$. Оценка для $\dim_H B(\mu)$ вытекает из произвольности $\varepsilon > 0$ и включения $B(\mu) \subset A$. Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. Edgar G. Measure, Topology, and Fractal Geometry. New York : Springer, 2008.
2. Falconer K. Fractal Geometry. Mathematical foundations and applications. Chichester : Wiley, 2003.
3. Песин Я. Теория размерности и динамические системы. Современный взгляд и приложения. Минск : Институт компьютерных исследований, 2002.
4. Billingsley P. Hausdorff dimension in probability theory. I // Ill. J. Math. 1960. № 4. P. 187–209.
5. Billingsley P. Hausdorff dimension in probability theory. II // Ill. J. Math. 1961. № 5. P. 291–298.
6. Young L.-S. Dimension, entropy and Lyapunov exponents // Ergod. Theory Dyn. Syst. 1982. № 2. P. 109–124.
7. Bakhtin V. I. The McMillan theorem for colored branching processes and dimensions of random fractals // Entropy. 2014. Vol. 16, № 12. P. 6624–6653.
8. Биллингсли П. Эргодическая теория и информация. М. : Мир, 1969.
9. Brin M., Stuck G. Introduction to dynamical systems. Cambridge : Cambridge University Press, 2002.
10. Algoet P. H., Cover T. M. A sandwich proof of the Shannon – McMillan – Breiman theorem // The Ann. Probab. 1988. Vol. 16, № 2. P. 899–909.

References

1. Edgar G. Measure, Topology, and Fractal Geometry. New York : Springer, 2008.
2. Falconer K. Fractal Geometry. Mathematical foundations and applications. Chichester : Wiley, 2003. DOI: 10.1002/0470013850.

3. Pesin Y. [Dimension theory in dynamical systems. Contemporary views and applications]. Minsk : Institute of Computer Science, 2002 (in Russ.).
4. Billingsley P. Hausdorff dimension in probability theory. I. *Ill. J. Math.* 1960. No. 4. P. 187–209.
5. Billingsley P. Hausdorff dimension in probability theory. II. *Ill. J. Math.* 1961. No. 5. P. 291–298.
6. Young L.-S. Dimension, entropy and Lyapunov exponents. *Ergod. Theory Dyn. Syst.* 1982. No. 2. P. 109–124.
7. Bakhtin V. I. The McMillan theorem for colored branching processes and dimensions of random fractals. *Entropy*. 2014. Vol. 16, No. 12. P. 6624–6653.
8. Billingsley P. [Ergodic theory and information]. Moscow : Mir, 1969 (in Russ.).
9. Brin M., Stuck G. Introduction to dynamical systems. Cambridge : Cambridge University Press, 2002.
10. Algoet P. H., Cover T. M. A sandwich proof of the Shannon – McMillan – Breiman theorem. *The Ann. Probab.* 1988. Vol. 16, No. 2. P. 899–909.

*Статья поступила в редколлегию 30.03.2017.
Received by editorial board 30.03.2017.*