УДК 517.982.4

ОБ УРАВНЕНИЯХ, СОДЕРЖАЩИХ ПРОИЗВОДНУЮ ДЕЛЬТА-ФУНКЦИИ

Е. В. ШКАДИНСКАЯ [1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Выражение $u'' + a\delta' u$, содержащее в качестве коэффициента производную дельта-функции, является формальным и не задает оператор в пространстве $L_2(\mathbf{R})$, так как произведение $\delta' u$ не определено. В связи с этим рассматривается семейство операторов, аппроксимирующее это формальное выражение вида

$$\big(L(\varepsilon, a, \varphi)u\big)(x) = u''(x) + a(\varepsilon)\cdot\Big(\int \psi_\varepsilon(y)u(y)dy \cdot \varphi_\varepsilon(x) + \int \varphi_\varepsilon(y)u(y)dy \cdot \psi_\varepsilon(x)\Big),$$

где $\varphi \in D(\mathbf{R})$; $\varphi(x) \in \mathbf{R}$; $\int \varphi(x)dx = 1$; $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$; коэффициент $a(\varepsilon)$ принимает вещественные ненулевые значения. Цель настоящей работы – нахождение предела этого семейства операторов в смысле резольвентной сходимости. Получены, в зависимости от поведения коэффициента $a(\varepsilon)$ и свойств функции φ, пять различных видов пределов резольвент этого семейства операторов, поэтому формальному выражению $u'' + a\delta' u$ нельзя единственным образом поставить в соответствие оператор в $L_2(\mathbf{R})$. Это является принципиальным отличием от случая выражения $u'' + a\delta u$, для которого предел резольвент не зависит от выбора аппроксимирующего семейства.

Ключевые слова: резольвента; резольвентная сходимость; аппроксимация; фундаментальное решение.

ON EQUATIONS CONTAINING DERIVATIVE OF THE DELTA-FUNCTION

A. V. SHKADZINSKAYA [a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

The expression $u'' + a\delta' u$, which is consisted derivative of delta-function as a coefficient, is a formal expression and doesn't define operator in $L_2(\mathbf{R})$, because a product $\delta' u$ is not defined. So according to these reasons the study investigated the family of operators, which are approximated by the following formal expression

$$\big(L(\varepsilon, a, \varphi)u\big)(x) = u''(x) + a(\varepsilon)\cdot\Big(\int \psi_\varepsilon(y)u(y)dy \cdot \varphi_\varepsilon(x) + \int \varphi_\varepsilon(y)u(y)dy \cdot \psi_\varepsilon(x)\Big),$$

where $\varphi \in D(\mathbf{R})$; $\varphi(x) \in \mathbf{R}$; $\int \varphi(x)dx = 1$; $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$; coefficient $a(\varepsilon)$ could be real-valued and not null. The main results of the study were finding the limit in the family in sense of resolvent convergence. As the result, the five different

Образец цитирования:
Шкадинская Е. В. Об уравнениях, содержащих производную дельта-функции // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 19–26.

For citation:
Shkadzinskaya A. V. On equations containing derivative of the delta-function. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 3. P. 19–26 (in Russ.).

Автор:
Елена Васильевна Шкадинская – аспирантка кафедры функционального анализа механико-математического факультета. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, профессор А. Б. Антоневич.

Author:
Alena V. Shkadzinskaya, postgraduate student at the department of functional analysis, faculty of mechanics and mathematics.
alenzija@gmail.com

kinds of limits of resolvents in this family had been received which are depended on a behavior of coefficient $a(\varepsilon)$ and function φ properties. Therefore the formal expression $u''+a\delta'u$ could not put in accordance to the operator in $L_2(\mathbf{R})$ uniquely. This is the fundamental difference with the case $u''+a\delta u$ expression for which the limit of resolvents doesn't depend on choosing approximated family.

Key words: resolvent; resolvent convergence; approximation; fundamental solution.

Операторы с дельтообразными коэффициентами активно изучались в течение нескольких последних десятилетий. Один из подходов к исследованию таких операторов связан с введением новых объектов – мнемофункций, которые сохраняют основные свойства обобщенных функций и образуют алгебру, т. е. допускают корректно определенную операцию умножения. При этом строятся вложения пространства обобщенных функций в такую алгебру [1; 2]. Этот подход сводит исследование уравнений с дельтообразными коэффициентами к классическим задачам асимптотического анализа уравнений с малым параметром.

Опишем такой подход в случае формального выражения $u''+a\delta u.$ Для этого выражения строится семейство аппроксимирующих операторов в пространстве $L_2(\mathbf{R})$ вида

$$(L_\varepsilon u)(x)=u''(x)+a(\varepsilon)\int\varphi_\varepsilon(y)u(y)dy\cdot\varphi_\varepsilon(x), \tag{1}$$

где $\varphi\in D(\mathbf{R});$ $\varphi(x)\in\mathbf{R};$ $\int\varphi(x)dx=1;$ $\varphi_\varepsilon(x)=\dfrac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right);$ коэффициент $a(\varepsilon)$ принимает вещественные ненулевые значения [3].

Формальный переход к пределу в (1) при $\varepsilon\to 0$ в случае гладких функций приводит к рассматриваемому выражению $u''+a\delta u,$ но в пространстве операторов, действующих в $L_2(\mathbf{R}),$ это семейство не имеет предела. Содержательные результаты заключаются в нахождении предела этого семейства в смысле резольвентной сходимости.

Для семейства (1) известны следующие утверждения [4].

1. Резольвентный предел семейства (1) в пространстве $L_2(\mathbf{R})$ существует тогда и только тогда, когда существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}a(\varepsilon)=a.$

2. Область определения предельного оператора не зависит от выбора аппроксимирующей функции φ, а зависит только от вида величины a, а именно:

- если $a\in\mathbf{R}$, то область определения $D\left(L^{(a)}\right)$ предельного оператора $L^{(a)}$ состоит из функций, которые на левой и правой полупрямых имеют абсолютно непрерывные первые производные и вторые производные из пространства $L_2(\mathbf{R})$, а в точке 0 непрерывны и удовлетворяют условию сопряжения
$$u_0'(+0)-u_0'(-0)=-au(0);$$
- если $a=\infty,$ то область определения $D\left(L^{(\infty)}\right)$ предельного оператора $L^{(\infty)}$ состоит из функций, которые на левой и правой полупрямых имеют абсолютно непрерывные первые производные и вторые производные из пространства $L_2(\mathbf{R})$, а в точке 0 непрерывны и удовлетворяют условию $u(0)=0.$

На функциях из своей области определения оператор $L^{(\alpha)}$ действует как оператор вычисления второй производной в точках, отличных от 0 [4].

Напомним, что пространство, состоящее из функций, определенных на открытом подмножестве Ω на прямой, первые производные которых абсолютно непрерывны, а вторые – из $L_2(\Omega)$, называется пространством Соболева и обозначается $H^2(\Omega)$. Заметим, что пространство $H(\mathbf{R})\subset H^2\left(\mathbf{R}^-\right)\oplus H^2\left(\mathbf{R}^+\right)$, но не совпадает с этой суммой. Пространство Соболева $H^2(\mathbf{R})$ является естественной областью определения оператора вычисления второй производной. Описанная выше область определения оператора принадлежит пространству $H^2\left(\mathbf{R}^-\right)\oplus H^2\left(\mathbf{R}^+\right)$, но не принадлежит пространству $H^2(\mathbf{R})$. Поскольку вторые производные функций из пространства $H^2\left(\mathbf{R}^-\right)\oplus H^2\left(\mathbf{R}^+\right)$ интегрируемы в квадрате, первые производные этих функций и сами функции будут иметь конечные пределы при $x \to +0$ и $x \to -0$. У операторов, которые соответствуют формальным выражениям $u'' + a\delta u$ и $u'' + a\delta' u$, область определения обычно задается как подпространство в $H^2(\mathbf{R}^-) \oplus H^2(\mathbf{R}^+)$, состоящее из функций, удовлетворяющих условиям сопряжения, которые связывают левосторонние и правосторонние пределы функции и ее первой производной. На такой области определения эти операторы действуют как оператор вычисления второй производной в точках, отличных от нуля. Таким образом, рассматриваемые задачи заключаются в нахождении условий сопряжения, соответствующих данному формальному выражению и (или) его аппроксимации.

Аппроксимация выражения $u'' + a\delta' u$

В настоящей работе рассматривается уравнение в пространстве $L_2(\mathbf{R})$, которое символически записывается в виде $u'' + a\delta' u = f$, где δ' – производная дельта-функции Дирака. При интерпретации формального выражения возникают сложности по сравнению со случаем, когда коэффициентом является дельта-функция [5].

Рассмотрим семейство операторов в пространстве $L_2(\mathbf{R})$ вида

$$\big(L(\varepsilon, a, \varphi)\big)u(x) = u''(x) + a(\varepsilon) \cdot \left(\int \psi_\varepsilon(y)u(y)dy \cdot \varphi_\varepsilon(x) + \int \varphi_\varepsilon(y)u(y)dy \cdot \psi_\varepsilon(x)\right), \tag{2}$$

где $\varphi \in D(\mathbf{R})$; $\varphi(x) \in \mathbf{R}$; $\int \varphi(x)dx = 1$; $\varphi_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$; $\psi_\varepsilon(x) = \big(\varphi(x)\big)' = \dfrac{1}{\varepsilon^2}\varphi'\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$; коэффициент $a(\varepsilon)$ принимает вещественные ненулевые значения.

На гладких функциях u предел $L(\varepsilon, a, \varphi)u$ в пространстве обобщенных функций при $\varepsilon \to 0$ есть $u'' + a\delta' u$. С этой точки зрения семейство является аппроксимацией $u'' + a\delta' u$.

Фундаментальным решением для оператора $\Delta u - \lambda u$ называется решение уравнения $(\Delta - \lambda)E_\lambda = \delta$. Спектром оператора $\Delta u = u''$ является отрицательная полупрямая $\mathbf{R}_-$. Если $\lambda \notin \mathbf{R}_-$, то существует фундаментальное решение, принадлежащее пространству $L_2(\mathbf{R})$, и это решение задается формулой $E_\lambda(x) = -\dfrac{1}{2\mu}e^{-\mu|x|}$, где $\mu^2 = \lambda$, $\operatorname{Re}\mu > 0$.

Для оператора $\Delta u = u''$ резольвента $R(\lambda, \Delta) = (u'' - \lambda)^{-1}$ определена при $\lambda \notin \mathbf{R}_-$ и задается как свертка с фундаментальным решением формулой $R(\lambda, \Delta)f(x) = -\dfrac{1}{2\mu}\int e^{-\mu|y-x|}f(y)dy$.

С помощью этой резольвенты строится резольвента семейства аппроксимирующих операторов $L(\varepsilon, a, \varphi)$, которая имеет вид

$$R\big(\lambda, L(\varepsilon, a, \varphi)\big)f = R(\lambda, \Delta)f - \left(\left(A_\varepsilon^{-1} + B_{\varepsilon,\lambda}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_\varepsilon\big(R(\lambda, \Delta)f\big) \\ \Psi_\varepsilon\big(R(\lambda, \Delta)f\big) \end{pmatrix}\right)^T \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_\varepsilon \\ \tilde{\psi}_\varepsilon \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $A_\varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{a(\varepsilon)} \\ \dfrac{1}{a(\varepsilon)} & 0 \end{pmatrix}$; $B_{\varepsilon,\lambda} = \begin{pmatrix} \Phi_\varepsilon(\tilde{\varphi}_\varepsilon) & \Phi_\varepsilon(\tilde{\psi}_\varepsilon) \\ \Psi_\varepsilon(\tilde{\varphi}_\varepsilon) & \Psi_\varepsilon(\tilde{\psi}_\varepsilon) \end{pmatrix}$; $\tilde{\varphi}_\varepsilon = R(\lambda, \Delta)\varphi_\varepsilon(x)$; $\tilde{\psi}_\varepsilon = R(\lambda, \Delta)\psi_\varepsilon(x)$; $\Phi_\varepsilon(u) = \int \psi_\varepsilon(y)u(y)dy \cdot \varphi_\varepsilon(x)$; $\Psi_\varepsilon(u) = \int \varphi_\varepsilon(y)u(y)dy \cdot \psi_\varepsilon(x)$.

Эта резольвента определена при $\varepsilon > 0$, $\lambda \notin \mathbf{R}_-$ и $\det\left(A_\varepsilon^{-1} + B_{\varepsilon,\lambda}\right) \neq 0$.

Исследование выражений, входящих в формулу резольвенты

Известны пределы следующих выражений, входящих в резольвенту (3):

$$\lim_{\varepsilon \to 0} R(\lambda, \Delta)\varphi_\varepsilon(x) = E_\lambda(x);\ \lim_{\varepsilon \to 0} R(\lambda, \Delta)\psi_\varepsilon(x) = E'_\lambda(x);\ \lim_{\varepsilon \to 0} \Phi_\varepsilon\big(R(\lambda, \Delta)f\big) = u_0(0),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Psi_\varepsilon\left(R(\lambda,\,\Delta)f\right)=-u_0'(0);\ \lim_{\varepsilon\to 0}\Phi_\varepsilon\left(R(\lambda,\,\Delta)\varphi_\varepsilon\right)=-\frac{1}{2\mu},$$

где функция u_0, определенная по формуле $u_0(x)=R(\lambda,\,\Delta)f(x),\ \ f\in L_2(\mathbf{R}),$ принадлежит пространству $H^2(\mathbf{R})$ [4].

Опишем поведение при $\varepsilon\to 0$ других величин, входящих в выражение (3):

$$\Phi_\varepsilon\left(R(\lambda,\,\Delta)\psi_\varepsilon\right)=\iint E_\lambda(x-y)\psi_\varepsilon(y)dy\cdot\varphi_\varepsilon(x)dx,$$

$$\Psi_\varepsilon\left(R(\lambda,\,\Delta)\varphi_\varepsilon\right)=\iint E_\lambda(x-y)\varphi_\varepsilon(y)dy\cdot\psi_\varepsilon(x)dx,$$

$$\Psi_\varepsilon\left(R(\lambda,\,\Delta)\psi_\varepsilon\right)=\iint E_\lambda(x-y)\psi_\varepsilon(y)dy\cdot\psi_\varepsilon(x)dx.$$

Ниже показано, что выражения $\Phi_\varepsilon\left(R(\lambda,\,\Delta)\psi_\varepsilon\right)$ и $\Psi_\varepsilon\left(R(\lambda,\,\Delta)\varphi_\varepsilon\right)$ имеют конечные пределы при $\varepsilon\to 0$, которые зависят от выбора аппроксимирующей функции φ, а именно от числа $-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\varphi(t)dt+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\varphi(t)dt.$ Далее, это число будем обозначать $\breve{\varphi}$. Выражение $\Psi_\varepsilon\left(R(\lambda,\,\Delta)\psi_\varepsilon\right)$ не имеет конечного предела, поэтому рассматриваем его разложение по степеням ε, также зависящее от функции φ.

Лемма 1. $\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi_\varepsilon\left(R(\lambda,\,\Delta)\psi_\varepsilon\right)=\breve{\varphi},\ \lim_{\varepsilon\to 0}\Psi_\varepsilon\left(R(\lambda,\,\Delta)\varphi_\varepsilon\right)=-\breve{\varphi}.$

Лемма 2. *Разложение повторного интеграла*

$$\Psi_\varepsilon\left(R(\lambda,\,\Delta)\psi_\varepsilon\right)=\iint E_\lambda(x-y)\psi_\varepsilon(y)dy\cdot\psi_\varepsilon(x)dx$$

по степеням ε *имеет вид*

$$\Psi_\varepsilon\left(R(\lambda,\,\Delta)\psi_\varepsilon\right)=\iint E_\lambda(x-y)\psi_\varepsilon(y)dy\cdot\psi_\varepsilon(x)dx=-\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}+\frac{\mu}{2}+O(\varepsilon).$$

Резольвентная сходимость аппроксимаций выражения $u''+a\delta'u$

Теорема. *Пусть коэффициент* $a(\varepsilon)$ *допускает разложение*

$$a(\varepsilon)=a_{-1}\frac{1}{\varepsilon}+a_0+a_{1/2}\sqrt{\varepsilon}+a_1\varepsilon+o(\varepsilon).$$

У семейства (2) существует предел в смысле резольвентной сходимости, который мы обозначим $L(0,\,a,\,\varphi)$. *Области определения этих операторов могут быть (в зависимости от a и* φ*) пяти различных видов:*

1. Пусть $\varphi(0)\neq 0$. *Если* $a_{-1}\neq 0$ *или* $a_{-1}=0,\ a_0\neq 0,$ *то область определения* $D(L(0))$ *предельного оператора* $L(0)$ *состоит из функций, удовлетворяющих условиям* $u(\pm 0)=0.$

2. Пусть $\varphi(0)\neq 0$. *Если* $a_{-1}=0,\ a_{1/2}\neq 0,$ *то область определения* $D(L(0,\,a,\,\varphi))$ *предельного оператора* $L(0,\,a,\,\varphi)$ *состоит из функций, удовлетворяющих условию сопряжения* $u'(+0)-u'(-0)=a_{1/2}^2\varphi(0)u(0).$

3. Пусть $\varphi(0)=0$ *и* $\breve{\varphi}^2-\frac{1}{a_0^2}-\frac{1}{4}\neq 0.$ *Если* $a_{-1}=0,\ a_0\neq 0,$ *то область определения* $D(L(0,\,a,\,\varphi))$ *предельного оператора* $L(0,\,a,\,\varphi)$ *состоит из функций, удовлетворяющих условиям сопряжения*

$$(-2a_0\breve{\varphi}-a_0-2)u(+0)+(2a_0\breve{\varphi}-a_0+2)u(-0)=0,$$

$$(-2a_0\breve{\varphi}-a_0+2)u'(+0)+(2a_0\breve{\varphi}-a_0-2)u'(-0)=0.$$

4. Пусть $\varphi(0)=0$ *и* $\breve{\varphi}^2-\dfrac{1}{4}\neq 0$. *Если* $a_{-1}\neq 0$, *то область определения* $D\big(L(0,\,a,\,\varphi)\big)$ *предельного оператора* $L(0,\,a,\,\varphi)$ *состоит из функций, удовлетворяющих условиям сопряжения*

$$(-2\breve{\varphi}-1)u(+0)+(2\breve{\varphi}-1)u(-0)=0,$$
$$(-2\breve{\varphi}-1)u'(+0)+(2\breve{\varphi}-1)u'(-0)=0.$$

5. Если $\varphi(0)\neq 0$ *и* $a_{-1}=0$, $a_0=0$, $a_{1/2}=0$, $a_1\neq 0$ *или* $\varphi(0)=0$ *и* $a_{-1}=0$, $a_0=0$, $a_{1/2}\neq 0$, *то область определения предельного оператора есть* $H^2(\mathbf{R})$.

Во всех случаях в своей области определения эти операторы действуют как оператор вычисления второй производной в точках, отличных от нуля.

Доказательство. Рассмотрим поведение матрицы $\left(A_\varepsilon^{-1}+B_{\varepsilon,\lambda}\right)^{-1}$ при $\varepsilon\to 0$, которую далее обозначим $G_{\varepsilon,\lambda}$.

Пусть $\varphi(0)\neq 0$. Поскольку $\Psi_\varepsilon\big(R(\lambda,\Delta)\psi_\varepsilon\big)=-\dfrac{\varphi(0)}{\varepsilon}+O(1)$, получаем

$$G_{\varepsilon,\lambda}=\left(A_\varepsilon^{-1}+B_{\varepsilon,\lambda}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{-1}{2\mu} & \dfrac{1}{a(\varepsilon)}+\breve{\varphi}\\[2ex] \dfrac{1}{a(\varepsilon)}-\breve{\varphi} & -\dfrac{\varphi(0)}{\varepsilon}+O(1)\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$=\frac{1}{\dfrac{\varphi(0)}{2\mu\varepsilon}-\dfrac{1}{a^2(\varepsilon)}+\breve{\varphi}^2+O(1)}\cdot\begin{pmatrix}-\dfrac{\varphi(0)}{\varepsilon}+O(1) & -\dfrac{1}{a(\varepsilon)}-\breve{\varphi}\\[2ex] -\dfrac{1}{a(\varepsilon)}+\breve{\varphi} & \dfrac{-1}{2\mu}\end{pmatrix}.$$

Если $a_{-1}=0$, $a_0\neq 0$, то, переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим $G_{\varepsilon,\lambda}\to\begin{pmatrix}-2\mu & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Таким образом, для предела резольвент (3) получаем выражение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[R\big(\lambda,\,L(\varepsilon,\,a,\,\varphi)\big)f\Big]=\big[R(\lambda,\Delta)f\big](x)-\left(\begin{pmatrix}-2\mu & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\big[R(\lambda,\Delta)f\big](0)\\ -\big[R(\lambda,\Delta)f\big]'(0)\end{pmatrix}\right)^T\cdot\begin{pmatrix}E_\lambda(x)\\ E'_\lambda(x)\end{pmatrix}.$$

Если $a_{-1}\neq 0$, то $G_{\varepsilon,\lambda}\to\begin{pmatrix}-2\mu & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ и получаем тот же самый предел для резольвент.

Поскольку функция $E_\lambda(x)=-\dfrac{1}{2\mu}e^{-\mu|x|}$ непрерывна, а ее первая производная имеет разрыв в точке 0, то любая функция из области определения

$$D\big(L(0,\,a,\,\varphi)\big)=\Big\{u(x)=u_0(x)+2\mu\cdot u_0(0)\cdot E_\lambda(x):u_0=R(\lambda,\Delta)f,\ \ f\in L_2(\mathbf{R})\Big\}$$

непрерывна, ее первая производная может быть разрывной в точке 0, но у нее существуют односторонние пределы в этой точке. Заметим, что в этом случае область определения не зависит от коэффициента a и функции φ, поэтому обозначим этот оператор $L(0)$.

В данной области определения $D\big(L(0)\big)$ оператора $L(0)$ участвует параметр λ, но из свойств резольвентной сходимости следует, что область определения не зависит от λ. Необходимо получить описание области определения, не зависящей от λ.

При данном условии достаточно рассмотреть величину $u(0)$:

$$u(0) = u_0(0) - u_0(0) = 0.$$

Пусть $\varphi(0) \neq 0.$ Если $a_{-1} = 0,\ a_0 = 0$ и $a_{1/2} \neq 0,$ то $G_{\varepsilon,\lambda} \underset{\varepsilon\to 0}{\rightarrow} \begin{pmatrix} \dfrac{2a_{1/2}^2\varphi(0)\mu}{2\mu - a_{1/2}^2\varphi(0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$ Следовательно, для предела резольвент получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[R(\lambda, L(\varepsilon, a, \varphi))f\right] = \left[R(\lambda, \Delta)f\right](x) - \left(\begin{pmatrix} \dfrac{2a_{1/2}^2\varphi(0)\mu}{2\mu - a_{1/2}^2\varphi(0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left[R(\lambda, \Delta)f\right](0) \\ -\left[R(\lambda, \Delta)f\right]'(0) \end{pmatrix}\right)^T \cdot \begin{pmatrix} E_\lambda(x) \\ E_\lambda'(x) \end{pmatrix}.$$

Область определения предельного оператора будет иметь вид

$$D(L(0, a, \varphi)) = \left\{u(x) = u_0(x) - \frac{2a_{1/2}^2\varphi(0)\mu}{2\mu - a_{1/2}^2\varphi(0)} \cdot u_0(0)\cdot E_\lambda(x) : u_0 = R(\lambda, \Delta)f,\ \ f \in L_2(\mathbf{R})\right\}.$$

Рассмотрев величины $u(0),\ u'(+0),\ u'(-0),$ получим условие сопряжения

$$u'(+0) - u'(-0) = a_{1/2}^2\varphi(0)u(0).$$

Пусть $\varphi(0) = 0.$ Тогда $\Psi_\varepsilon(R(\lambda, \Delta)\psi_\varepsilon) = \dfrac{\mu}{2} + O(\varepsilon).$ При таком условии матрица $G_{\varepsilon,\lambda}$ будет иметь вид

$$G_{\varepsilon,\lambda} = \left(A_\varepsilon^{-1} + B_{\varepsilon,\lambda}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{2\mu} & \dfrac{1}{a(\varepsilon)} + \breve{\varphi} \\ \dfrac{1}{a(\varepsilon)} - \breve{\varphi} & \dfrac{\mu}{2} + O(\varepsilon) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{a^2(\varepsilon)} + \breve{\varphi}^2 + O(\varepsilon)} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\mu}{2} + O(\varepsilon) & -\dfrac{1}{a(\varepsilon)} - \breve{\varphi} \\ -\dfrac{1}{a(\varepsilon)} + \breve{\varphi} & \dfrac{-1}{2\mu} \end{pmatrix}.$$

Если $a(\varepsilon)$ имеет конечный предел при $\varepsilon \to 0,$ т. е. $a_{-1} = 0,\ a_0 \neq 0,$ то

$$G_{\varepsilon,\lambda} \underset{\varepsilon\to 0}{\rightarrow} \frac{1}{-\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{a_0^2} + \breve{\varphi}^2} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\mu}{2} & -\dfrac{1}{a_0} - \breve{\varphi} \\ -\dfrac{1}{a_0} + \breve{\varphi} & \dfrac{-1}{2\mu} \end{pmatrix}.$$

А для предела резольвент получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[R(\lambda, L(\varepsilon, a, \varphi))f\right] = \left[R(\lambda, \Delta)f\right](x) -$$

$$- \left(\frac{1}{-\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{a_0^2} + \breve{\varphi}^2} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\mu}{2} & -\dfrac{1}{a_0} - \breve{\varphi} \\ -\dfrac{1}{a_0} + \breve{\varphi} & \dfrac{-1}{2\mu} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left[R(\lambda, \Delta)f\right](0) \\ -\left[R(\lambda, \Delta)f\right]'(0) \end{pmatrix}\right)^T \cdot \begin{pmatrix} E_\lambda(x) \\ E_\lambda'(x) \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Поскольку функции $E_\lambda'(x)$ и $E_\lambda''(x)$ разрывны в точке 0, функции из области определения предельного оператора и их первые производные могут быть разрывны в точке 0. Для получения описания области определения, не зависящей от спектрального параметра, рассмотрим величины $u(+0),\ u(-0),$ $u'(+0),\ u'(-0).$ Из (4) следует, что выполнено равенство

$$\begin{pmatrix} u(+0) \\ u(-0) \\ u'(+0) \\ u'(-0) \end{pmatrix} = A(\mu)\begin{pmatrix} u_0(0) \\ u_0'(0) \end{pmatrix},$$

где матрица $A(\mu)$ размерностью 2 × 4 имеет вид

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{1}{4\left(-\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{a_0^2} + \breve{\varphi}^2\right)} - \dfrac{-\dfrac{1}{a_0} + \breve{\varphi}}{2\left(-\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{a_0^2} + \breve{\varphi}^2\right)} & -\dfrac{1}{4\mu\left(-\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{a_0^2} + \breve{\varphi}^2\right)} - \dfrac{-\dfrac{1}{a_0} - \breve{\varphi}}{2\mu\left(-\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{a_0^2} + \breve{\varphi}^2\right)} \\ 1 + \dfrac{1}{4\left(-\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{a_0^2} + \breve{\varphi}^2\right)} + \dfrac{-\dfrac{1}{a_0} + \breve{\varphi}}{2\left(-\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{a_0^2} + \breve{\varphi}^2\right)} & \dfrac{1}{4\mu\left(-\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{a_0^2} + \breve{\varphi}^2\right)} + \dfrac{-\dfrac{1}{a_0} - \breve{\varphi}}{2\mu\left(-\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{a_0^2} + \breve{\varphi}^2\right)} \\ -\dfrac{\mu}{4\left(-\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{a_0^2} + \breve{\varphi}^2\right)} + \dfrac{\mu\left(-\dfrac{1}{a_0} + \breve{\varphi}\right)}{2\left(-\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{a_0^2} + \breve{\varphi}^2\right)} & 1 + \dfrac{1}{4\left(-\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{a_0^2} + \breve{\varphi}^2\right)} + \dfrac{-\dfrac{1}{a_0} - \breve{\varphi}}{2\mu\left(-\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{a_0^2} + \breve{\varphi}^2\right)} \\ \dfrac{\mu}{4\left(-\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{a_0^2} + \breve{\varphi}^2\right)} + \dfrac{\mu\left(-\dfrac{1}{a_0} + \breve{\varphi}\right)}{2\left(-\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{a_0^2} + \breve{\varphi}^2\right)} & 1 + \dfrac{1}{4\left(-\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{a_0^2} + \breve{\varphi}^2\right)} - \dfrac{-\dfrac{1}{a_0} - \breve{\varphi}}{2\left(-\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{a_0^2} + \breve{\varphi}^2\right)} \end{pmatrix}.$$

Эта система уравнений имеет решение для вектора $\left(u(+0),\, u(-0),\, u'(+0),\, u'(-0)\right)$ тогда и только тогда, когда этот вектор ортогонален к решениям однородной сопряженной системы уравнений $\left(A(\mu)\right)^T \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Векторы

$$\left(-2a_0\breve{\varphi} - a_0 - 2,\ 2a_0\breve{\varphi} - a_0 + 2,\ 0,\ 0\right) \text{ и } \left(0,\ 0,\ -2a_0\breve{\varphi} - a_0 + 2,\ 2a_0\breve{\varphi} - a_0 - 2\right)$$

являются базисом решений этой системы, причем этот базис не зависит от параметра λ. В связи с этим условия ортогональности к элементам базиса также не зависят от λ и являются условиями сопряжения:

$$\left(-2a_0\breve{\varphi} - a_0 - 2\right)u(+0) + \left(2a_0\breve{\varphi} - a_0 + 2\right)u(-0) = 0,$$

$$\left(-2a_0\breve{\varphi} - a_0 + 2\right)u'(+0) + \left(2a_0\breve{\varphi} - a_0 - 2\right)u'(-0) = 0.$$

Пусть $\varphi(0) = 0$. Если $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} a(\varepsilon) = \infty$, т. е. $a_{-1} \neq 0$, то, записав условия сопряжения из теоремы (п. 3) в виде

$$\left(-2\breve{\varphi} - 1 - \frac{2}{a_0}\right)u(+0) + \left(2\breve{\varphi} - 1 + \frac{2}{a_0}\right)u(-0) = 0,$$

$$\left(-2\breve{\varphi}-1+\frac{2}{a_0}\right)u'(+0)+\left(2\breve{\varphi}-1-\frac{2}{a_0}\right)u'(-0)=0$$

и применив к этим условиям предельный переход при $a_0 \to \infty$, получим следующие условия сопряжения:

$$(-2\breve{\varphi}-1)u(+0)+(2\breve{\varphi}-1)u(-0)=0,$$

$$(-2\breve{\varphi}-1)u'(+0)+(2\breve{\varphi}-1)u'(-0)=0.$$

Если $\varphi(0)\neq 0$ и $a_{-1}=0,\ a_0=0,\ a_{1/2}=0,\ a_1\neq 0$ или $\varphi(0)=0$ и $a_{-1}=0,\ a_0=0,\ a_{1/2}\neq 0$, то $G_{\varepsilon,\lambda}\to\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Для предела резольвент получаем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[R(\lambda,\ L(\varepsilon,\ a,\ \varphi))f\right]=\left[R(\lambda,\ \Delta)f\right](x)$.

Библиографические ссылки

1. *Антоневич А. Б., Радыно Я. В.* Об общем методе построения алгебр обобщенных функций // Докл. АН СССР. 1991. Т. 43, № 3. С. 680–684.
2. *Colombeau J. F.* New generalized functions and multiplication of distributions. Amsterdam : North-Holland, 1984.
3. *Gesztesy F., Simon B.* Rank-one pertubations at infinite coupling // J. Funct. Anal. 1995. Vol. 128, issue 1. P. 245–252.
4. *Antonevich A. B., Romanchuk T. A.* On equations with delta-shaped coefficients: the finite-dimensional perturbations approach // Integral transforms Special Funct. 2009. Vol. 3/4. P. 239–246.
5. *Нижник Л. П.* Оператор Шредингера с δ'-взаимодействием // Функц. анализ и его прил. 2003. Т. 37, № 1. С. 85–88.

References

1. Antonevich A. B., Radyno Ya. V. [A general method for constructing algebras of generalized functions]. *Dokl. AN SSSR*. 1991. Vol. 43, No. 3. P. 680–684 (in Russ.).
2. Colombeau J. F. New generalized functions and multiplication of distributions. Amsterdam : North-Holland, 1984.
3. Gesztesy F., Simon B. Rank-one pertubations at infinite coupling. *J. Funct. Anal.* 1995. Vol. 128, issue 1. P. 245–252. DOI: 10.1006/jfan.1995.1030.
4. Antonevich A. B., Romanchuk T. A. On equations with delta-shaped coefficients: the finite-dimensional perturbations approach. *Integral transforms Special Funct.* 2009. Vol. 3/4. P. 239–246.
5. Nizhnik L. P. [A Schrödinger Operator with δ'-Interaction. *Funkts. anal. ego prilozh.* [*Funct. Anal. Its Appl.*]. 2003. Vol. 37, No. 1. P. 85–88 (in Russ.). DOI: https://doi.org/10.4213/faa140.

Статья поступила в редколлегию 12.04.2017.
Received by editorial board 12.04.2017.