Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 38–52
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2017. No. 3. P. 38–52

УДК 517.956.3

МЕТОД КОРРЕКТИРОВКИ ПРОБНЫХ РЕШЕНИЙ ОБЩЕГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ МИНИМАЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ ЕГО ПРАВОЙ ЧАСТИ

Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Предложен метод корректировки пробных классических решений общего неоднородного факторизованного уравнения колебаний полуограниченной струны для наличия минимальных (необходимых) требований гладкости на его правую часть. Идея метода состоит в вычислении поправки к некоторым пробным (испытуемым) классическим решениям, которые могут требовать завышенную гладкость от правой части уравнения. С этой целью ставится и решается корректирующая задача Гурса для канонического вида этого уравнения колебаний струны. Потом в полученном решении анализируется гладкость пробного решения и в случае надобности оно корректируется соответствующим решением однородного уравнения колебаний струны. Найдены новые классические решения и неизвестная ранее необходимая гладкость правой части.

Ключевые слова: метод корректировки решений; необходимая гладкость; корректирующая задача Гурса; пробное решение; коррекция решения; корректирующее решение; скорректированное решение.

CORRECTION METHOD OF TEST SOLUTIONS OF THE GENERAL WAVE EQUATION IN THE FIRST QUARTER OF THE PLANE FOR MINIMAL SMOOTHNESS OF ITS RIGHT-HAND SIDE

F. E. LOMAUTSAU[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

A method is proposed for correcting of test classical solutions of the general inhomogeneous factorized oscillation equation for a semibounded string in order that they have minimal (necessary) smoothness requirements on its right-hand side. The idea of the method is to calculate the correction to some of its trial (test) classical solutions, which may require an overestimated smoothness from the right-hand side of the equation. To this end, the correcting Goursat problem for the canonical form of this oscillation equation of a string is formulated and solved. Then, in the resulting solution, the smoothness of the test solution is analyzed and, if necessary, it is corrected by the corresponding solution of the homogeneous oscillation equation of the string. We find new classical solutions and the previously unknown necessary smoothness of the right-hand side.

Key words: correction method of solutions; necessary smoothness; correcting Goursat problem; test solution; correction of the solution; corrective solution; corrected solution.

Образец цитирования:
Ломовцев Ф. Е. Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 38–52.

For citation:
Lomautsau F. E. Correction method of test solutions of the general wave equation in the first quarter of the plane for minimal smoothness of its right-hand side. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 3. P. 38–52 (in Russ.).

Автор:
Федор Егорович Ломовцев – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры математической кибернетики механико-математического факультета.

Author:
Fiodar E. Lomautsau, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics.
lomovcev@bsu.by

Введение

Настоящая работа посвящена нахождению частного классического решения общего факторизованного уравнения колебаний полуограниченной струны с минимальными (необходимыми) требованиями гладкости на правую часть, т. е. в первой четверти плоскости. Проблема поиска такого решения возникает при выводе необходимых требований гладкости на правую часть этого уравнения и линейных уравнений в частных производных для смешанных (начально-краевых) задач. При наличии некоторого классического решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны нахождение его общего интеграла (множества всех классических решений) в силу линейности уравнения сводится к вычислению общего интеграла соответствующего однородного уравнения. Затем, после его подстановки в краевые условия, выводятся явные формулы классических решений, а также определяются критерии однозначной, устойчивой везде разрешимости смешанных задач в четверти плоскости. Это два этапа известного метода характеристик (распространяющихся волн) для явного решения и исследования корректности смешанных задач [1].

С помощью нового метода (*вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны*) из этих необходимых (обязательных) требований гладкости на правую часть уравнения, формулы единственного классического решения вспомогательных смешанных задач (а также достаточных и дополнительных необходимых требований гладкости на исходные данные и условий согласования) можно найти формулы классических решений и критерии однозначной, устойчивой везде разрешимости смешанных задач для уравнения колебаний ограниченной струны [2]. Данный метод включает три этапа: вспомогательный (решение и исследование корректности вспомогательных смешанных задач), промежуточный (физико-геометрическая интерпретация решений вспомогательных задач) и заключительный (решение и исследование корректности основных смешанных задач для ограниченной струны). Преимущество данного метода, который впервые был применен в [3], перед традиционными состоит в возможности явного решения и вывода критериев однозначной, устойчивой везде разрешимости смешанных задач для уравнения колебаний ограниченной струны без продолжения исходных данных этих задач вне множеств их задания [4].

Постановка задачи корректировки

В первой четверти плоскости для неоднородного одномерного волнового уравнения

$$\left(\partial_t - a_2\partial_x + b_2\right)\left(\partial_t + a_1\partial_x + b_1\right)u\left(x, t\right) = f\left(x, t\right), \ \left(x, t\right) \in G_\infty, \tag{1}$$

где $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$ – первые частные производные; $a_1 > 0$; $a_2 \geq 0$; b_1, b_2 – постоянные вещественные коэффициенты, требуется найти его классическое решение $F = F\left(x, t\right)$, которое имеет минимальные (необходимые) требования гладкости на правую часть $f = f\left(x, t\right)$.

Пусть $C^k\left(\Omega\right)$ – множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве Ω и $C^0\left(\Omega\right) = C\left(\Omega\right)$.

Определение 1. Функция $u = u\left(x, t\right)$ называется *классическим решением* уравнения (1), если $u \in C^2\left(G_\infty\right)$ и удовлетворяет этому уравнению для каждого $\left(x, t\right) \in G_\infty$.

Во-первых, если существует хотя бы одно классическое решение $u \in C^2\left(G_\infty\right)$ неоднородного уравнения второго порядка (1), то очевидно, что его правая часть должна быть непрерывной: $f \in C\left(G_\infty\right)$. Во-вторых, согласно определению 1 функция F должна быть, по крайней мере, дважды непрерывно дифференцируемой, т. е. $F \in C^2\left(G_\infty\right)$. В-третьих, если эта функция окажется не дважды непрерывно дифференцируемой, т. е. $F \notin C^2\left(G_\infty\right)$, то целесообразно провести ее коррекцию некоторой функцией $F_0 \notin C^2\left(G_\infty\right)$ (обобщенным частным решением однородного уравнения (1)) так, чтобы новая функция $F_1\left(x, t\right) = F\left(x, t\right) - F_0\left(x, t\right)$ стала дважды непрерывно дифференцируемой, т. е. $F_1 \in C^2\left(G_\infty\right)$. Дополнительные необходимые требования гладкости на f выводятся из функции F_1.

Предварительно в качестве испытуемой функции F можно брать уже известные решения уравнений или находить их методом Дюамеля и специальными методами (подбора, вычисления в наперед заданном виде и т. д.). Ниже при необходимости мы вносим в функцию поправку посредством корректирующей задачи Гурса.

Замечание 1. В смешанных задачах дифференциальные уравнения задаются, прежде всего, во внутренних точках множеств. В случае надобности эти уравнения и частные производные их решений до второго порядка включительно продолжаются по непрерывности в конечные граничные точки множеств.

Корректирующая задача Гурса

Гладкость решений уравнения (1) в первой четверти плоскости существенно зависит от *критической характеристики* $x = a_1 t$, которая при $a_1 > 0$ делит эту четверть на два множества: $G_- = \{(x, t) : x > a_1 t,\ t > 0\}$ и $G_+ = \{(x, t) : x < a_1 t,\ x > 0\}$.

Теорема 1. *Существует классическое решение неоднородного уравнения (1) в* G_+*:*

$$F_1(x, t) = \frac{e^{Bx - At}}{a_1 + a_2}\left[\int\limits_0^{t_1(x)} \int\limits_{a_1 t - x - a_2\tau}^{x + a_2(t - \tau)} e^{A\tau - Bs} f(s, \tau)\, ds\, d\tau + \int\limits_{t_1(x)}^{t} \int\limits_{x - a_1(t - \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} e^{A\tau - Bs} f(s, \tau)\, ds\, d\tau\right],\ a_1 \ge a_2, \qquad (2)$$

$$F_1(x, t) = \frac{e^{Bx - At}}{a_1 + a_2}\left[\int\limits_0^{t_2(x)} \int\limits_{a_2(t - \tau) - (a_2/a_1)x}^{x + a_2(t - \tau)} e^{A\tau - Bs} f(s, \tau)\, ds\, d\tau + \int\limits_{t_2(x)}^{t} \int\limits_{x - a_1(t - \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} e^{A\tau - Bs} f(s, \tau)\, ds\, d\tau\right],\ 0 < a_1 \le a_2, \qquad (3)$$

где постоянные $A = \dfrac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 + a_2}$, $B = \dfrac{b_2 - b_1}{a_1 + a_2}$, *а пределы интегрирования* $t_1(x) = \dfrac{2(a_1 t - x)}{a_1 + a_2}$ *и* $t_2(x) = t - \dfrac{x}{a_1}$.

Доказательство. Проверим, подойдет ли в качестве искомого классического решения неоднородного уравнения (1) известная функция [5; 6]

$$F(x, t) = \frac{e^{Bx - At}}{a_1 + a_2}\int\limits_0^{t} \int\limits_{x - a_1(t - \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} e^{A\tau - Bs} f(|s|, \tau)\, ds\, d\tau,\ \ (x, t) \in G_\infty. \qquad (4)$$

Нетрудно убедиться в том, что эта функция является классическим решением уравнения (1), например для любой $f \in C^1(G_\infty)$. Можно начать доказательство теоремы 1 с предположения о существовании некоторого классического решения $u \in C^2(G_\infty)$ уравнения (1) на G_∞ или G_+ (на G_- решение приведено ниже – в доказательстве теоремы 3). Тогда, как отмечалось выше, правая часть уравнения (1) должна быть как минимум непрерывной: $f \in C(G_\infty)$. Если в результате доказательства такое классическое решение этого уравнения будет предъявлено (и оно будет предъявлено), то сделанное предположение окажется оправданным.

В силу бесконечной дифференцируемости $e^{Bx - At} \ne 0$ решение уравнения (1) в G_∞ заменой

$$u(x, t) = e^{Bx - At}\hat{u}(x, t) \qquad (5)$$

сводится к решению неоднородного уравнения

$$(\partial_t - a_2\partial_x)(\partial_t + a_1\partial_x)\hat{u}(x, t) = \hat{f}(x, t),\ \ (x, t) \in G_\infty, \qquad (6)$$

с правой частью $\hat{f}(x, t) = e^{At - Bx} f(x, t)$ [7].

Покажем, что в любой точке $(x^{(0)}, t^{(0)})$ из G_+ (из G_- в доказательстве теоремы 3) функция

$$\hat{F}(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2}\int\limits_0^{t} \int\limits_{x - a_1(t - \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} \hat{f}(|s|, \tau)\, ds\, d\tau,\ \ \hat{f}(|s|, \tau) = e^{A\tau - Bs} f(|s|, \tau), \qquad (7)$$

которой становится функция (4) после замены (5), или ее скорректированное выражение с минимальной гладкостью $\hat{f}$ будет классическим решением уравнения (6). Ниже мы увидим, что при $a_1 \ne a_2$

минимальная гладкость правой части $\hat{f}$ теряется функцией $\hat{F}$ на G_+ из-за модуля $|s|$, так как нижний предел интегрирования $x - a_1(t-\tau)$ меняет знак при $\tau = t - \dfrac{x}{a_1}$.

Любая точка $\left(x^{(0)},\ t^{(0)}\right) \in G_+$ находится строго внутри различных ограниченных параллелограммов G_0, содержащихся в G_∞, сторонами которых служат отрезки характеристик:

$$x - a_1 t = \hat{C}_1,\ x + a_2 t = \hat{C}_2,\ \hat{C}_1,\ \hat{C}_2 \in \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[. \tag{8}$$

Уравнение (6) в различных параллелограммах G_0 линейной невырожденной заменой

$$\xi = x + a_2 t,\ \eta = x - a_1 t \tag{9}$$

с якобианом

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \eta_x & \eta_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ 1 & -a_1 \end{vmatrix} = -(a_1 + a_2) \neq 0$$

приводится к уравнению канонического вида

$$\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi,\ \eta) = -\frac{\tilde{f}(\xi,\ \eta)}{(a_1+a_2)^2} = -\frac{\hat{f}\left((a_1\xi + a_2\eta)/(a_1+a_2),\ (\xi-\eta)/(a_1+a_2)\right)}{(a_1+a_2)^2},\ (\xi,\ \eta) \in \tilde{G}_0, \tag{10}$$

в различных прямоугольниках $\tilde{G}_0 = \left\{(\xi,\ \eta) : \xi_0 \le \xi \le \xi_1,\ \eta_0 \le \eta \le \eta_1\right\}$.

Если непрерывна функция $f \in C(G_\infty)$, то в силу линейности и невырожденности замены (9) непрерывна функция $\tilde{f} \in C\left(\tilde{G}_\infty\right)$, где $\tilde{G}_\infty = \left\{(\xi,\ \eta) : \eta < \xi,\ -a_2\eta < a_1\xi,\ \xi > 0\right\}$ – образ первой четверти G_∞ для преобразования (9). Поскольку, по нашему предположению, существует классическое решение $\hat{u} \in C^2(G_\infty)$ уравнения (6), то ввиду этих же свойств замены (9) для уравнения (10) в $\tilde{G}_\infty$ существует классическое решение

$$\tilde{u}(\xi,\ \eta) = \hat{u}\left(\frac{a_1\xi + a_2\eta}{a_1+a_2},\ \frac{\xi-\eta}{a_1+a_2}\right) \in C^2\left(\tilde{G}_\infty\right). \tag{11}$$

Для любой $\tilde{f} \in C\left(\tilde{G}_\infty\right)$ существует последовательность непрерывно дифференцируемых функций $\tilde{f}_n \in C^1\left(\tilde{G}_\infty\right)$, которая равномерно сходится к $\tilde{f}$ на каждом компакте $\bar{\tilde{G}}_0$ при $n \to \infty$. Здесь $\bar{\tilde{G}}_0$ – замыкание образов $\tilde{G}_0$ параллелограммов G_0 в результате замены (9).

В различных прямоугольниках $\tilde{G}_0$ рассматриваем дифференциальное уравнение

$$-(a_1+a_2)^2 (\tilde{u}_n)_{\xi\eta}(\xi,\ \eta) = \tilde{f}_n(\xi,\ \eta),\ (\xi,\ \eta) \in \tilde{G}_0, \tag{12}$$

с согласованными условиями Гурса:

$$\tilde{u}_n(\xi_0,\ \eta) = \tilde{u}(\xi_0,\ \eta),\ \eta \in [\eta_0, \eta_1],\ \tilde{u}_n(\xi,\ \eta_0) = \tilde{u}(\xi,\ \eta_0),\ \xi \in [\xi_0, \xi_1],\ n = 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

Задача Гурса (12), (13) в $\tilde{G}_0$ решается методом характеристик. Общий интеграл уравнения (12) в $C^1\left(\tilde{G}_0\right)$ состоит из непрерывно дифференцируемых функций:

$$\tilde{u}_n(\xi,\ \eta) = g(\xi) + h(\eta) + \tilde{F}_n(\xi,\ \eta), \tag{14}$$

где g, h – любые непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов и функции $\tilde{F}_n$ получаются из функции $\hat{F}_n$ вида (7) с подынтегральными функциями $\hat{f}_n(|s|, \tau)$ вместо $\hat{f}(|s|, \tau)$ в результате замены (9). Для $\tilde{f}_n \in C^1\left(\tilde{G}_\infty\right)$, очевидно, решения $\tilde{F}_n \in C^2\left(\tilde{G}_\infty\right)$. Функции (14) подставляются в условия Гурса (13), и ввиду $\hat{u} \in C^2(G_\infty)$, равенства (5) и невырожденности замены (9) находятся ее единственные классические решения из $C^2\left(\tilde{G}_0\right)$:

$$\tilde{u}_n(\xi,\eta)=\tilde{u}(\xi,\eta_0)+\tilde{u}(\xi_0,\eta)-\tilde{u}(\xi_0,\eta_0)-\tilde{F}_n(\xi,\eta_0)+$$
$$+\tilde{F}_n(\xi_0,\eta_0)+\tilde{F}_n(\xi,\eta)-\tilde{F}_n(\xi_0,\eta),\ n=1,2,\ldots. \tag{15}$$

Определение 2. Задача Гурса (12), (13) называется *корректирующей* краевой задачей частных решений неоднородного уравнения (1), а функция $\hat{F}$ вида (7) (и F вида (4)) – *пробной*.

Пробные функции можно также называть пробными решениями, потому что они являются классическими решениями соответствующего уравнения при более высокой гладкости правой части. Более того, без завышения в них гладкости правой части пробные функции всегда являются если не классическими, то обобщенными решениями этих уравнений [8].

Как разность классических решений функции $\tilde{v}_n(\xi,\eta)=\tilde{u}(\xi,\eta)-\tilde{u}_n(\xi,\eta)$, очевидно, являются классическими решениями задачи Гурса:

$$-(a_1+a_2)^2(\tilde{v}_n)_{\xi\eta}(\xi,\eta)=\tilde{f}(\xi,\eta)-\tilde{f}_n(\xi,\eta),\ (\xi,\eta)\in\tilde{G}_0, \tag{16}$$

$$\tilde{v}_n(\xi_0,\eta)=0,\ \eta\in[\eta_0,\eta_1],\ \tilde{v}_n(\xi,\eta_0)=0,\ \xi\in[\xi_0,\xi_1],\ n=1,2,\ldots. \tag{17}$$

Умножая уравнение (16) на сумму первых частных производных $(\tilde{v}_n)_\xi+(\tilde{v}_n)_\eta$, интегрируя результат умножения по области $]\xi_0,\tau_1[\times]\eta_0,\tau_2[$ с помощью однородных условий Гурса (17), применяя элементарные оценки и беря точную верхнюю грань по $(\tau_1,\tau_2)\in[\xi_0,\xi_1]\times[\eta_0,\eta_1]$ в полученном неравенстве, так же, как в [9], выводим априорную оценку

$$\sup_{\eta_0<\eta<\eta_1}\int_{\xi_0}^{\xi_1}\left(\left|(\tilde{v}_n)_\xi(\xi,\eta)\right|^2+\left|\tilde{v}_n(\xi,\eta)\right|^2\right)d\xi+\sup_{\xi_0<\xi<\xi_1}\int_{\eta_0}^{\eta_1}\left(\left|(\tilde{v}_n)_\eta(\xi,\eta)\right|^2+\left|\tilde{v}_n(\xi,\eta)\right|^2\right)d\eta\le$$
$$\le c_0\iint_{\tilde{G}_0}\left|\tilde{f}_n(\xi,\eta)-\tilde{f}(\xi,\eta)\right|^2d\xi d\eta,\ n=1,2,\ldots, \tag{18}$$

где постоянная $c_0>0$ не зависит от $\tilde{v}_n$, ξ, η и n.

Поскольку в этой априорной оценке правая часть сходится к нулю при $n\to\infty$, то из сходимости его левой части к нулю при $n\to\infty$ заключаем равномерную сходимость на прямоугольниках $\tilde{G}_0$ последовательности $\tilde{v}_n$ к нулю при $n\to\infty$, потому что для пространств Соболева $W_2^1(\Omega)$, $\Omega\subset\mathbb{R}$, справедливы непрерывные вложения пространств $C[\xi_0,\xi_1]\supset W_2^1(\xi_0,\xi_1)$, $C[\eta_0,\eta_1]\supset W_2^1(\eta_0,\eta_1)$ [10]. Это означает равномерную сходимость на прямоугольниках $\tilde{G}_0$ последовательности $\tilde{u}_n$ к $\tilde{u}$ при $n\to\infty$. Поэтому благодаря неравенствам (18) из решений (15) предельным переходом при $n\to\infty$ получаем тождество

$$\tilde{u}(\xi,\eta)=\tilde{u}(\xi,\eta_0)+\tilde{u}(\xi_0,\eta)-\tilde{u}(\xi_0,\eta_0)-\tilde{F}(\xi,\eta_0)+$$
$$+\tilde{F}(\xi_0,\eta_0)+\tilde{F}(\xi,\eta)-\tilde{F}(\xi_0,\eta),\ (\xi,\eta)\in\tilde{G}_0, \tag{19}$$

где функция $\tilde{F}(\xi,\eta)=\hat{F}\left(\dfrac{a_1\xi+a_2\eta}{a_1+a_2},\ \dfrac{\xi-\eta}{a_1+a_2}\right)$ получена из $\hat{F}$ заменой (9).

Проанализируем гладкость слагаемых этого тождества. Слагаемые $\tilde{u}(\xi,\eta_0)$ и $\tilde{u}(\xi_0,\eta)$, очевидно, дважды непрерывно дифференцируемы по ξ и η соответственно, так как $\tilde{u}\in C^2(\tilde{G}_0)$ по совокупности переменных ξ и η. Для того чтобы выявить гладкость остальных слагаемых, воспользуемся геометрическим представлением пробной функции $\hat{F}$ вида (7) через двойной интеграл по характеристическому треугольнику ΔMPQ с вершиной $M(x,t)\in G_+$ и вершинами его основания $P(x-a_1t,0)$, $Q(x+a_2t,0)$:

$$(a_1+a_2)\hat{F}(x,t)=\iint_{\Delta MPQ}\hat{f}(|x|,t)\,dx\,dt=\iint_{\Delta OP'Q'}\hat{f}(x,t)\,dx\,dt+\iint_{OQMQ'}\hat{f}(x,t)\,dx\,dt, \tag{20}$$

где точка $Q'\left(0,\, t-\dfrac{x}{a_1}\right)$ и точка $P'\left(a_1t-x,\, 0\right)$ симметрична точке $P\left(x-a_1t,\, 0\right)$ относительно оси Ot. В равенствах (20) переходим к новым переменным (9) и имеем интегральное представление $\tilde F$ пробной функции:

$$-\left(a_1+a_2\right)^2\tilde F(\xi,\, \eta)=-\left(a_1+a_2\right)^2\hat F\left(\frac{a_1\xi+a_2\eta}{a_1+a_2},\, \frac{\xi-\eta}{a_1+a_2}\right)=$$

$$=\iint\limits_{\Delta\tilde O\tilde P'\tilde Q'}\tilde f(\xi,\, \eta)d\xi d\eta+\iint\limits_{\tilde O\tilde Q\tilde M\tilde Q'}\tilde f(\xi,\, \eta)d\xi d\eta, \tag{21}$$

где точки $\tilde O(0,\, 0)$, $\tilde M(\xi,\, \eta)$, $\tilde Q(\xi,\, \xi)$, $\tilde P'(-\eta,\, -\eta)$ и $\tilde Q'\left(-\dfrac{a_2}{a_1}\eta,\, \eta\right)$, $\eta=x-a_1t<0$, на плоскости $\tilde O\xi\eta$ являются соответственно образами точек $O(0,\, 0)$, $M(x,\, t)$, $Q(x+a_2t,\, 0)$, $P'(a_1t-x,\, 0)$ и $Q'\left(0,\, t-\dfrac{x}{a_1}\right)$ плоскости Oxt для преобразования (9).

В равенстве (21) применяем уравнение (10), двойные интегралы выражаем через повторные интегралы и получаем

$$\tilde F(\xi,\, \eta)=\int\limits_{\eta}^{0}\int\limits_{v_1(\rho)}^{v_2(\rho)}\tilde u_{\nu\rho}(\nu,\, \rho)d\nu d\rho+\int\limits_{0}^{-\eta}\int\limits_{\rho}^{v_2(\rho)}\tilde u_{\nu\rho}(\nu,\, \rho)d\nu d\rho+$$

$$+\int\limits_{\eta}^{0}\int\limits_{v_1(\rho)}^{\xi}\tilde u_{\nu\rho}(\nu,\, \rho)d\nu d\rho+\int\limits_{0}^{\xi}\int\limits_{\rho}^{\xi}\tilde u_{\nu\rho}(\nu,\, \rho)d\nu d\rho, \tag{22}$$

где уравнения прямых $l_1: v_1(\rho)=-\dfrac{a_2}{a_1}\rho$, $l_2: v_2(\rho)=\dfrac{a_1-a_2}{2a_1}\rho-\dfrac{a_1+a_2}{2a_1}\eta$ (рис. 1, *а*).

Вычисляем первые частные производные и исследуем их гладкость:

$$\frac{\partial\tilde F(\xi,\, \eta)}{\partial\xi}=\tilde u_{\nu}(\nu,\, \xi)\Big|_{\nu=\xi}-\tilde u_{\nu}(\nu,\, \eta)\Big|_{\nu=\xi}\in C^1\left(\tilde G_0\right),$$

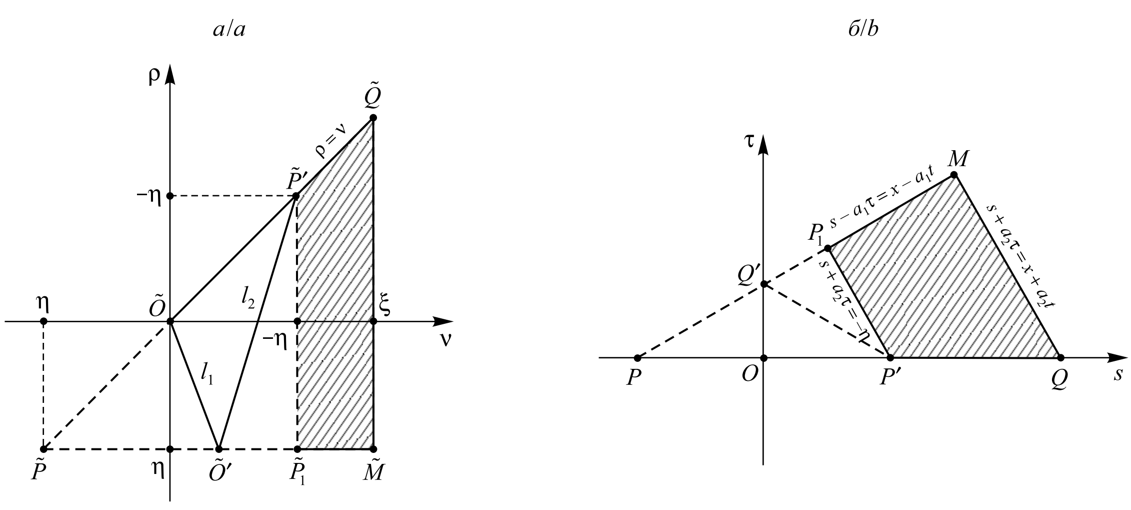


Рис. 1. Область интегрирования при $a_1\ge a_2$ на множестве G_+: *а* – для функции $\tilde F_1$; *б* – для функции $\hat F_1$

Fig. 1. The region of integration at $a_1\ge a_2$ on the set G_+: *a* – for the function $\tilde F_1$; *b* – for the function $\hat F_1$

$$\frac{\partial \tilde{F}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{a_1 + a_2}{2a_1} \int_{\eta}^{-\eta} \tilde{u}_{\nu\rho}(\nu, \rho)\Big|_{\nu = v_2(\rho)} d\rho - \tilde{u}_{\rho}(\xi, \rho)\Big|_{\rho = \eta} + \tilde{u}_{\rho}\left(-\frac{a_2}{a_1}\eta, \rho\right)\Bigg|_{\rho = \eta} \in C\left(\tilde{G}_0\right),$$

так как $\tilde{u} \in C^2\left(\tilde{G}_0\right)$. Нетрудно видеть, что частная производная $\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta}$ непрерывно дифференцируема на $\tilde{G}_0$ только тогда, когда $a_1 = a_2$ и уравнение второй прямой имеет вид $v_2(\rho) = -\dfrac{a_1 + a_2}{2a_1}\eta$. Таким образом, в случае $a_1 \neq a_2$ не все вторые частные производные от функции $\tilde{F}$ на $\tilde{G}_0$ и, следовательно, от пробной функции F вида (4) на G_0 являются непрерывными, потому что функции F на G_0 и $\tilde{F}$ на $\tilde{G}_0$ дважды непрерывно дифференцируемы одновременно. Поэтому для точек $\left(x^{(0)}, t^{(0)}\right) \in G_+$, лежащих строго над критической характеристикой $x = a_1 t$, в общем случае $a_1 \neq a_2$ пробная функция F нуждается в корректировке за счет такого же негладкого вычитаемого $\tilde{F}(\xi_0, \eta)$ благодаря тому, что из тождества (19) следует дважды непрерывная дифференцируемость их разности $\tilde{F}(\xi, \eta) - \tilde{F}(\xi_0, \eta) \in C^2\left(\tilde{G}_0\right)$. Отсюда, в частности, вытекает дважды непрерывная дифференцируемость этой разности в точке $\left(\xi^{(0)}, \eta^{(0)}\right) \in \tilde{G}_0$, в которую отображение (9) взаимно и однозначно переводит точку $\left(x^{(0)}, t^{(0)}\right) \in G_+$.

1. Пусть точка $M(x, t) \in G_+$ и $a_1 \geq a_2$ в уравнении (1). Если в тождестве (19) положить $\xi_0 = -\eta > 0$, тогда согласно равенствам (21) и (22) находим функцию (см. рис. 1, *а*)

$$\tilde{F}(\xi_0, \eta_0) = \tilde{F}(-\eta, \eta_0) = \int_{\eta_0}^{0} \int_{v_1(\rho)}^{v_2(\rho)|_{\eta = \eta_0}} \tilde{u}_{\nu\rho}(\nu, \rho) d\nu d\rho + \int_{0}^{-\eta_0} \int_{\rho}^{v_2(\rho)|_{\eta = \eta_0}} \tilde{u}_{\nu\rho}(\nu, \rho) d\nu d\rho +$$
$$+ \int_{\eta_0}^{0} \int_{v_1(\rho)}^{-\eta} \tilde{u}_{\nu\rho}(\nu, \rho) d\nu d\rho + \int_{0}^{-\eta} \int_{\rho}^{-\eta} \tilde{u}_{\nu\rho}(\nu, \rho) d\nu d\rho. \tag{23}$$

Непрерывно дифференцируема на $\tilde{G}_0$ первая частная производная этой функции:

$$\frac{\partial \tilde{F}(-\eta, \eta_0)}{\partial \eta} = \tilde{u}_{\nu}(\nu, -\eta_0)\big|_{\nu = -\eta} - \tilde{u}_{\nu}(\nu, -\eta)\big|_{\nu = -\eta} \in C^1\left(\tilde{G}_0\right)$$

и в (19), очевидно, дважды непрерывно дифференцируемы на $\tilde{G}_0$ все слагаемые, кроме двух последних. Вычисляем их разность, в двойном интеграле делаем обратную замену переменных к (9) и получаем скорректированную функцию через двойной интеграл:

$$\tilde{F}_1(\xi, \eta) = \tilde{F}(\xi, \eta) - \tilde{F}(-\eta, \eta) = \frac{-1}{(a_1 + a_2)^2} \iint\limits_{\tilde{M}\tilde{P}'\tilde{P}_1\tilde{Q}} \tilde{f}(\xi, \eta) d\xi\, d\eta =$$
$$= \frac{1}{a_1 + a_2} \iint\limits_{MP'P_1Q} \hat{f}(x, t) dx dt = \hat{F}_1(x, t), \tag{24}$$

где трапеция $\tilde{M}\tilde{P}'\tilde{P}_1\tilde{Q}$ с новой вершиной $\tilde{P}_1(-\eta, \eta)$, $\eta < 0$, в плоскости $\tilde{O}\xi\eta$ обратной заменой к (9) переходит в трапецию $MP'P_1Q$ с новой вершиной $P_1\left(\dfrac{a_2 - a_1}{a_1 + a_2}(x - a_1 t), \dfrac{2}{a_1 + a_2}(a_1 t - x)\right)$ плоскости Oxt (рис. 1, *б*). Отрезки $P_1P' \| MQ$ параллельны, так как параллельны отрезки $\tilde{P}_1\tilde{P}' \| \tilde{M}\tilde{Q}$. Разложив последний двойной интеграл через повторные интегралы и использовав формулу (5), можно видеть, что выражение (24) для $a_1 \geq a_2$ равно выражению (2).

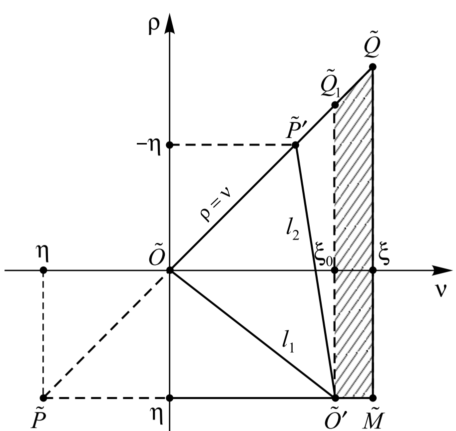
Тот факт, что функция $\tilde{F}_1$ дважды непрерывно дифференцируема в $\tilde{G}_+$ и удовлетворяет неоднородному уравнению (10), т. е. $\tilde{F}_1$ является классическим решением этого уравнения, вытекает из тождества (19), и, следовательно, функция $\hat{F}_1$ есть классическое решение неоднородного уравнения (6) в G_+ на основании тождества (11). В связи с этим (2) является классическим решением неоднородного уравнения (1) на основании представления (5). Обычным способом подстановки эта проверка осуществляется ниже – в доказательстве теоремы 2.

2. Пусть точка $M(x, t) \in G_+$ и $a_1 \leq a_2$ в уравнении (1). В тождестве (19) можно положить $\xi_0 = -\frac{a_2}{a_1}\eta$ (рис. 2, *a*), тогда аналогично равенствам (23) имеем

$$\tilde{F}(\xi_0, \eta_0) = \tilde{F}\left(-\frac{a_2}{a_1}\eta, \eta_0\right) = \int_{\eta_0}^{0} \int_{v_1(\rho)}^{v_2(\rho)|_{\eta=\eta_0}} \tilde{u}_{\nu\rho}(\nu, \rho)\, d\nu d\rho + \int_{0}^{-\eta_0} \int_{\rho}^{v_2(\rho)|_{\eta=\eta_0}} \tilde{u}_{\nu\rho}(\nu, \rho)\, d\nu d\rho +$$

$$+\int_{\eta_0}^{0} \int_{v_1(\rho)}^{-(a_2/a_1)\eta} \tilde{u}_{\nu\rho}(\nu, \rho)\, d\nu d\rho + \int_{0}^{-(a_2/a_1)\eta} \int_{\rho}^{-(a_2/a_1)\eta} \tilde{u}_{\nu\rho}(\nu, \rho)\, d\nu d\rho.$$

a/*a* *б*/*b*



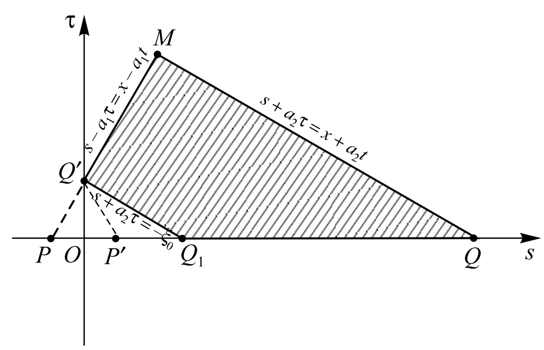


Рис. 2. Область интегрирования при $a_1 \leq a_2$ на множестве G_+: *a* – для функции $\tilde{F}_1$; *б* – для функции $\hat{F}_1$

Fig. 2. The region of integration at $a_1 \leq a_2$ on the set G_+: *a* – for the function $\tilde{F}_1$; *b* – for the function $\hat{F}_1$

Непрерывно дифференцируема на $\tilde{G}_0$ первая частная производная

$$\frac{\partial \tilde{F}\left(-\frac{a_2}{a_1}\eta, \eta_0\right)}{\partial \eta} = \frac{a_2}{a_1}\left[\tilde{u}_\nu(\nu, \eta_0)\Big|_{\nu=-(a_2/a_1)\eta} - \tilde{u}_\nu\left(\nu, -\frac{a_2}{a_1}\eta\right)\Big|_{\nu=-(a_2/a_1)\eta}\right] \in C^1(\tilde{G}_0)$$

и в (19), очевидно, дважды непрерывно дифференцируемы на $\tilde{G}_0$ все слагаемые, кроме двух последних, которые аналогично (24) дают корректировку пробной функции

$$\tilde{F}_1(\xi, \eta) = \tilde{F}(\xi, \eta) - \tilde{F}\left(-\frac{a_2}{a_1}\eta, \eta\right) =$$

$$= \frac{-1}{(a_1 + a_2)^2} \iint_{\tilde{M}\tilde{Q}'\tilde{Q}_1\tilde{Q}} \tilde{f}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \frac{1}{a_1 + a_2} \iint_{MQ'Q_1Q} \hat{f}(x, t)\, dxdt = \hat{F}_1(x, t). \tag{25}$$

Здесь трапеция $\tilde{M}\tilde{Q}'\tilde{Q}_1\tilde{Q}$ с новыми вершинами $\tilde{Q}'\left(-\frac{a_2}{a_1}\eta, \eta\right)$ и $\tilde{Q}_1\left(-\frac{a_2}{a_1}\eta, \frac{a_2}{a_1}\eta\right)$, $\eta < 0$, в плоскости $\tilde{O}\xi\eta$ получается из трапеции $MQ'Q_1Q$ с новыми вершинами $Q'\left(0, t - \frac{x}{a_1}\right)$ и $Q_1\left(a_2t - \frac{a_2}{a_1}x, 0\right)$

плоскости Oxt обратной заменой к (9) (рис. 2, *б*). Отрезки $Q'Q_1 \| MQ$ параллельны, так как параллельны отрезки $\tilde{Q}'\tilde{Q}_1 \| \tilde{M}\tilde{Q}$. Так же, как выше для функции $\hat{F}_1$ вида (24), устанавливается, что функция (25) для $a_1 \le a_2$ совпадает с выражением (3), функция $F_1 \in C^2(G_0)$ и функция (3) являются классическим решением неоднородного уравнения (1). Теорема 1 доказана.

В процессе доказательства теоремы 1 нами подтверждена справедливость известного утверждения [11; 12].

Следствие 1. *Если в уравнении (1) коэффициенты* $a_1 = a_2 = a > 0$, *то функция (4) является его классическим решением на* G_+ *при необходимой гладкости правой части*

$$f \in C(G_\infty), \ \int_0^t f\left(\left|x \pm a(t-\tau)\right|, \tau\right)d\tau \in C^1(G_+).$$

Замечание 2. В начале доказательства теоремы 1 можно было сразу взять функции (2) и (3) вместо функции (4), но тогда было бы непонятно, почему классическое решение (4) предъявляет, а классические решения (2) и (3) не предъявляют завышенную гладкость к f. В решениях (2) и (3) нижние внутренние пределы интегрирования всегда положительны.

Необходимая гладкость правой части

Установленную выше необходимость непрерывности правой части $f \in C(G_\infty)$ дополним необходимыми требованиями гладкости, которые обеспечивают дважды непрерывную дифференцируемость в G_∞ если не пробной функции F, то скорректированной функции F_1.

Теорема 2. *Функция (2) при* $a_1 \ge a_2$ *и функция (3) при* $0 < a_1 \le a_2$ *являются классическими решениями неоднородного уравнения (1) в* G_+ *при необходимой гладкости*

$$f \in C(G_\infty), \ \int_0^t f\left(x + a_2(t-\tau), \tau\right)d\tau \in C^1(G_+), \tag{26}$$

и, соответственно,

$$\int_0^{t_1(x)} f\left(a_1 t - x - a_2\tau, \tau\right)d\tau - \int_{t_1(x)}^t f\left(x - a_1(t-\tau), \tau\right)d\tau \in C^1(G_+), \ a_1 \ge a_2, \tag{27}$$

$$a_2 \int_0^{t_2(x)} f\left(a_2(t-\tau) - \frac{a_2}{a_1}x, \tau\right)d\tau - a_1 \int_{t_2(x)}^t f\left(x - a_1(t-\tau), \tau\right)d\tau \in C^1(G_+), \ 0 < a_1 \le a_2. \tag{28}$$

Доказательство. Сначала покажем, что если правая часть f не зависит от x или t, то функции (2) и (3) являются классическими решениями неоднородного уравнения (1) в G_+ для всех непрерывных $f \in C\,]0, \infty[$ по t или x соответственно.

Пусть коэффициенты $a_1 \ge a_2 > 0$. Проще это проиллюстрировать на примере функции

$$\hat{F}_1(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2}\left[\int_0^{t_1(x)} \int_{a_1 t - x - a_2\tau}^{x + a_2(t-\tau)} \hat{f}(s, \tau)ds d\tau + \int_{t_1(x)}^t \int_{x - a_1(t-\tau)}^{x + a_2(t-\tau)} \hat{f}(s, \tau)ds d\tau\right], \tag{29}$$

аналогичной функции (7), и уравнения (6) с правой частью $\hat{f}$. Если $\hat{f}$ не зависит от x, то эта функция принимает вид

$$\hat{F}_1(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2}\left\{\left[2x + (a_2 - a_1)t\right]\int_0^{t_1(x)} \hat{f}(\tau)d\tau + (a_1 + a_2)\int_{t_1(x)}^t (t-\tau)\hat{f}(\tau)d\tau\right\}. \tag{30}$$

Двукратным дифференцированием и подстановкой функции (30) в уравнение (6) проверяется, что для любой правой части $\hat{f}$, непрерывной по t, она дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (6) на G_+. Из-за равенства $f(x, t) = e^{Bx - At}\hat{f}(t)$ это утверждение не распространяется сразу на функцию (2) и уравнение (1), а для функции (2) и уравнения (1) оно легко устанавливается таким же образом.

Если в (29) правая часть $\hat{f}$ не зависит от t, то ее первая частная производная по t равна

$$\frac{\partial\hat{F}_1(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{a_1+a_2}\left\{\int\limits_0^{t_1(x)}\left[a_2\hat{f}\left(x+a_2(t-\tau)\right)-a_1\hat{f}\left(a_1t-x-a_2\tau\right)\right]d\tau+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{t_1(x)}^{t}\left[a_2\hat{f}\left(x+a_2(t-\tau)\right)+a_1\hat{f}\left(x-a_1(t-\tau)\right)\right]d\tau\right\}.$$

Когда $a_2>0$, тогда в этих интегралах можно перейти к новым переменным: $y=x+a_2(t-\tau)$, $z=a_1t-$ $-x-a_2\tau$, $\omega=x-a_1(t-\tau)$ и получить ее представление

$$\frac{\partial\hat{F}_1(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{a_1+a_2}\left\{\int\limits_{x-a_1(t-t_1(x))}^{x+a_2t}\hat{f}(y)dy+\frac{a_1}{a_2}\int\limits_{a_1t-x}^{a_1t-x-a_2t_1(x)}\hat{f}(z)dz\right\}\in C^1(G_+),$$

которое, очевидно, непрерывно дифференцируемо на G_+ для любой правой части $\hat{f}$, непрерывной по x. С помощью этих же замен переменной интегрирования τ проверяется непрерывная дифференцируемость на G_+ первой частной производной $\dfrac{\partial\hat{F}_1}{\partial x}$ по x от выражения (29) с правой частью $\hat{f}$, непрерывной по x и не зависящей от t. Нетрудно убедиться также в том, что для выражения (29) выполняется уравнение (6) на G_+ для любой прерывной по x и не зависящей от t правой части $\hat{f}$. Для правой части $f(x,t)=e^{Bx-At}\hat{f}(x)$ и уравнения (1) эти доказательства проводятся аналогично правой части $\hat{f}$ и уравнению (6).

При $0<a_1\le a_2$ в случае правой части $\hat{f}=\hat{f}(t)$, не зависящей от x, выражение

$$\hat{F}_1(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left\{\int\limits_0^{t_2(x)}\int\limits_{a_2(t-\tau)-(a_2/a_1)x}^{x+a_2(t-\tau)}\hat{f}(s,\tau)dsd\tau+\int\limits_{t_2(x)}^{t}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)}\hat{f}(s,\tau)dsd\tau\right\},\tag{31}$$

аналогичное выражению (29), становится функцией

$$\hat{F}_1(x,t)=\frac{x}{a_1}\int\limits_0^{t_2(x)}\hat{f}(\tau)d\tau+\int\limits_{t_2(x)}^{t}(t-\tau)\hat{f}(\tau)d\tau.$$

Для любой непрерывной по t правой части $\hat{f}$ эта функция дважды непрерывно дифференцируема на G_+ и удовлетворяет уравнению (6). Таким же способом это свойство проверяется для функции (3) при $0<a_1\le a_2$.

Когда в (31) правая часть $\hat{f}=\hat{f}(x)$ не зависит от t, тогда ее первая производная по t равна

$$\frac{\partial\hat{F}_1(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{a_1+a_2}\left\{\int\limits_0^{t_2(x)}\left[a_2\hat{f}\left(x+a_2(t-\tau)\right)-a_2\hat{f}\left(a_2(t-\tau)-\frac{a_2}{a_1}x\right)\right]d\tau+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{t_2(x)}^{t}\left[a_2\hat{f}\left(x+a_2(t-\tau)\right)+a_1\hat{f}\left(x-a_1(t-\tau)\right)\right]d\tau\right\}.$$

Для $a_2>0$ эта производная использованными выше заменами переменной интегрирования τ приводится к непрерывно дифференцируемому на G_+ выражению

$$\frac{\partial\hat{F}_1(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{a_1+a_2}\left\{\int\limits_x^{x+a_2t}\hat{f}(z)dz+\int\limits_{a_2t_2(x)}^{x}\hat{f}(y)dy\right\}\in C^1(G_+)$$

для любой непрерывной по x и не зависящей от t правой части $\hat{f}$. Точно так же проверяется непрерывная дифференцируемость на G_+ первой частной производной $\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial x}$ по x от выражения (31) в случае непрерывной и зависящей только от x правой части $\hat{f}$. Нетрудно убедиться в том, что выражение (31), где правая часть $\hat{f}$ зависит только от t или x и непрерывна по t или x, удовлетворяет уравнению (6). Для более общей функции (3) при $0 < a_1 \le a_2$ эти свойства обосновываются точно таким же путем.

Теперь пусть $a_1 \ge a_2$ и функция $\hat{f}$ зависит от x и t. Найдем дополнительные необходимые требования гладкости на $\hat{f}$ для классического решения (29) уравнения (6) на G_+. Известно [7], что первые частные производные классических решений уравнения (6) могут терпеть разрыв только на кусках характеристик (8). Дважды непрерывно дифференцируемая на G_0 функция (29) при $a_1 \ge a_2$ должна иметь на G_0 непрерывно дифференцируемые производные вдоль этих характеристик:

$$\frac{\partial \hat{F}_1(x, t)}{\partial t} + a_1 \frac{\partial \hat{F}_1(x, t)}{\partial x} = \int_0^t \hat{f}\big(x + a_2(t - \tau), \tau\big) d\tau \in C^1(G_+), \tag{32}$$

$$\frac{\partial \hat{F}_1(x, t)}{\partial t} - a_2 \frac{\partial \hat{F}_1(x, t)}{\partial x} = -\int_0^{t_1(x)} \hat{f}\big(a_1 t - x + a_2\tau, \tau\big) d\tau + \int_{t_1(x)}^t \hat{f}\big(x - a_1(t - \tau), \tau\big) d\tau \in C^1(G_+). \tag{33}$$

Поскольку в силу равенства (5) решения $\hat{F}_1$ из (29) и F из (4) дважды непрерывно дифференцируемы на G_∞ одновременно и в силу равенства $\hat{f}(x, t) = e^{At - Bx} f(x, t)$ правые части $\hat{f}$ и f имеют на каждом ограниченном множестве первой четверти G_∞ одну и ту же гладкость, в равенствах (32) и (33) заменяем функцию $\hat{f}$ на f и получаем необходимые условия гладкости (26) и (27). Нетрудно проверить, что уравнение (1) выполняется для функции (2) в предположениях гладкости (26) и (27).

В случае решения F_1 вида (3) при $0 < a_1 \le a_2$ вычисляем производные по двум направлениям характеристик (8) уравнения (6) от выражения (31) и имеем значения:

$$\frac{\partial \hat{F}_1(x, t)}{\partial t} + a_1 \frac{\partial \hat{F}_1(x, t)}{\partial x} = \int_0^t \hat{f}\big(x + a_2(t - \tau), \tau\big) d\tau \in C^1(G_+),$$

$$\frac{\partial \hat{F}_1(x, t)}{\partial t} - a_2 \frac{\partial \hat{F}_1(x, t)}{\partial x} = -\frac{a_2}{a_1} \int_0^{t_2(x)} \hat{f}\left(a_2(t - \tau) - \frac{a_2}{a_1} x, \tau\right) d\tau + \int_{t_2(x)}^t \hat{f}\big(x - a_1(t - \tau), \tau\big) d\tau \in C^1(G_+).$$

В этих требованиях гладкости меняем $\hat{f}$ на f и приходим к необходимым условиям из (26) и (28) в дополнение к $f \in C(G_\infty)$. Подстановка функции (3) в уравнение (1) позволяет убедиться в том, что она удовлетворяет ему на G_+ при гладкости (26) и (28). Теорема 2 доказана.

Выше установлена следующая минимальная гладкость правой части.

Следствие 2. *Если правая часть f не зависит от x или t, то функции (2) при $a_1 \ge a_2 > 0$ и (3) при $0 < a_1 \le a_2$ являются классическими решениями неоднородного уравнения (1) в G_+ и f только непрерывна по t или x соответственно.*

Замечание 3. Из доказательств теорем 1 и 2 уже можно сделать вывод о том, что функция (4) является классическим решением уравнения (1) в G_- при $a_1 \ne a_2$ и f имеет минимальную гладкость, указанную ниже в (35), если это уравнение рассматривается в первой четверти G_∞. В случае задачи Коши, т. е. когда уравнение (1) задается в верхней полуплоскости $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, \infty[$, функция (4) сохраняет эти свойства во всех точках верхней полуплоскости.

Теорема 3. *Существуют классические решения уравнения (1) при всех $a_1 > 0$, $a_2 \ge 0$ в G_-:*

$$F_1(x, t) = \frac{e^{Bx - At}}{a_1 + a_2} \left[\int_0^{t_0(x)} \int_{k(x - a_1 t) - a_2\tau}^{x + a_2(t - \tau)} e^{A\tau - Bs} f(s, \tau) ds d\tau + \int_{t_0(x)}^t \int_{x - a_1(t - \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} e^{A\tau - Bs} f(s, \tau) ds d\tau \right], \; k \ge 1, \tag{34}$$

где предел интегрирования $t_0(x) = \dfrac{(k-1)(x-a_1 t)}{a_1+a_2}$, *с необходимой гладкостью*

$$f \in C(G_-),\ \int_0^t f\left(x+(-1)^i a_i(t-\tau),\ \tau\right)d\tau \in C^1(G_-),\ i=1,\,2. \tag{35}$$

Доказательство. Для точек $\left(x^{(0)},\, t^{(0)}\right) \in G_-$, лежащих под критической характеристикой $x = a_1 t$, ввиду (10) пробной функцией является выражение

$$\hat{F}(x,\,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\iint_{\Delta MPQ}\hat{f}(x,\,t)\,dx\,dt = \frac{-1}{(a_1+a_2)^2}\iint_{\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}}\tilde{f}(\xi,\,\eta)\,d\xi\,d\eta = \int_\eta^\xi\int_\rho^\xi \tilde{u}_{\nu\rho}(\nu,\,\rho)\,d\nu\,d\rho = \tilde{F}(\xi,\,\eta).$$

Его первые частные производные непрерывно дифференцируемы в $\tilde{G}_0$:

$$\frac{\partial\tilde{F}(\xi,\,\eta)}{\partial\xi} = \tilde{u}_\nu(\nu,\,\xi)\big|_{\nu=\xi} - \tilde{u}_\nu(\nu,\,\eta)\big|_{\nu=\xi} \in C^1\left(\tilde{G}_0\right),$$

$$\frac{\partial\tilde{F}(\xi,\,\eta)}{\partial\eta} = \tilde{u}_\rho(\eta,\,\rho)\big|_{\rho=\eta} - \tilde{u}_\rho(\xi,\,\rho)\big|_{\rho=\eta} \in C^1\left(\tilde{G}_0\right).$$

В связи с этим пробную функцию $\hat{F}$ вида (7) без модуля $\hat{f}(s,\,\tau)$ для точек $M(x,\,t) \in G_-$ при всех $a_1 > 0$, $a_2 \ge 0$ можно не корректировать в случае первой четверти плоскости G_∞. Обращаем внимание на то, что для точек $(x,\,t) \in G_-$ в замене (9) переменная $\eta = x - a_1 t > 0$.

Если же корректировать решение (7), то для любых $a_1 \ne a_2$ это можно сделать, например, в (19), положив $\xi_0 = k\eta$, где $k \ge 1$, и получив для всевозможных значений $k \ge 1$ сначала несчетную совокупность частных решений уравнения (10):

$$\tilde{F}_1(\xi,\,\eta) = \tilde{F}(\xi,\,\eta) - \tilde{F}(k\eta,\,\eta) = \frac{-1}{(a_1+a_2)^2}\left[\iint_{\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}}\tilde{f}(\xi,\,\eta)\,d\xi\,d\eta - \iint_{\Delta\tilde{M}_0\tilde{P}\tilde{Q}_0}\tilde{f}(\xi,\,\eta)\,d\xi\,d\eta\right] =$$

$$= \frac{-1}{(a_1+a_2)^2}\iint_{\tilde{M}\tilde{M}_0\tilde{Q}_0\tilde{Q}}\tilde{f}(\xi,\,\eta)\,d\xi\,d\eta = \iint_{\tilde{M}\tilde{M}_0\tilde{Q}_0\tilde{Q}}\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi,\,\eta)\,d\xi\,d\eta = \int_{k\eta}^{\xi}\int_\eta^\nu \tilde{u}_{\nu\rho}\,d\nu\,d\rho, \tag{36}$$

где точки $\tilde{M}(\xi,\,\eta)$, $\tilde{P}(\eta,\,\eta)$, $\tilde{Q}(\xi,\,\xi)$, $\tilde{M}_0(k\eta,\,\eta)$, $\tilde{Q}_0(k\eta,\,k\eta)$ находятся на плоскости $\tilde{O}\xi\eta$ (рис. 3, *а*).

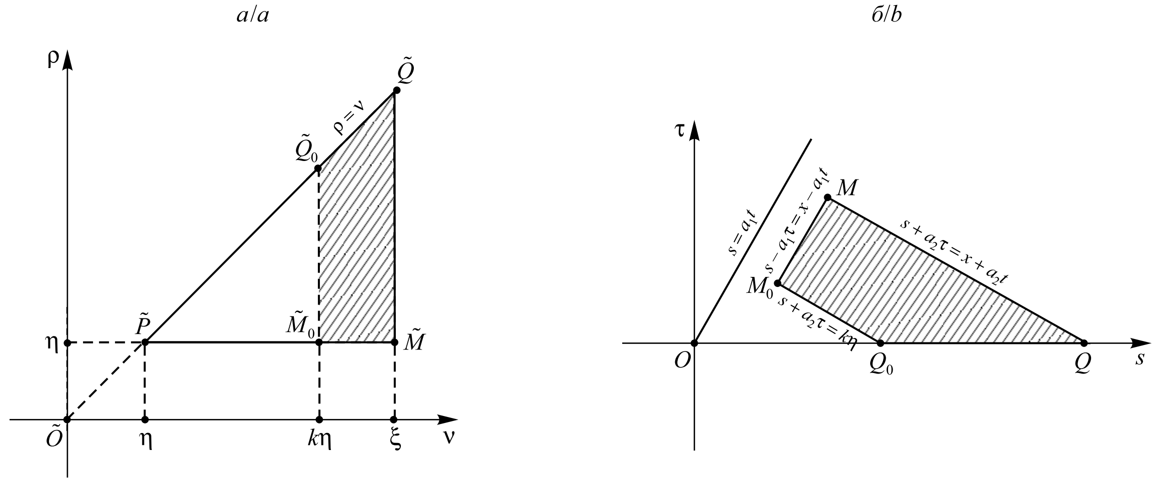


Рис. 3. Область интегрирования при $a_1 \ne a_2$ на множестве G_-: *а* – для функции $\tilde{F}_1$; *б* – для функции $\hat{F}_1$

Fig. 3. The region of integration at $a_1 \ne a_2$ on the set G_-: *a* – for the function $\tilde{F}_1$; *b* – for the function $\hat{F}_1$

Непрерывно дифференцируемы первые частные производные от выражения (36):

$$\frac{\partial \tilde{F}_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \tilde{u}_\nu(\nu, \xi)\Big|_{\nu=\xi} - \tilde{u}_\nu(\nu, \eta)\Big|_{\nu=\xi} \in C^1(\tilde{G}_0),$$

$$\frac{\partial \tilde{F}_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} = k\tilde{u}_\nu(\nu, \eta)\Big|_{\nu=k\eta} - k\tilde{u}_\nu(\nu, k\eta)\Big|_{\nu=k\eta} + \tilde{u}_\rho(k\eta, \rho)\Big|_{\rho=\eta} - \tilde{u}_\rho(\xi, \rho)\Big|_{\rho=\eta} \in C^1(\tilde{G}_0).$$

Обратной невырожденной заменой к (9) указанные чуть выше точки $\tilde{M}$, $\tilde{M}_0$, $\tilde{Q}_0$, $\tilde{Q}$ переходят соответственно в точки $M(x, t)$, $M_0(x_0(t), t_0(x))$, $Q_0(k(x - a_1t), 0)$, $Q(x + a_2t, 0)$ плоскости Oxt, где $x_0(t) = \frac{ka_1 + a_2}{a_1 + a_2}(x - a_1t)$, $t_0(x) = \frac{k-1}{a_1 + a_2}(x - a_1t)$.

Потом обратная замена к (9) в выражении (36) дает несчетную совокупность частных классических решений неоднородного уравнения (6)

$$\hat{F}_1(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2}\left[\int_0^{t_0(x)} \int_{k(x-a_1t)-a_2\tau}^{x+a_2(t-\tau)} \hat{f}(s, \tau)dsd\tau + \int_{t_0(x)}^{t} \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} \hat{f}(s, \tau)dsd\tau\right], \; k \geq 1, \tag{37}$$

равных двойному интегралу от $\hat{f}$ по трапеции MM_0Q_0Q плоскости Oxt с коэффициентом $\frac{1}{a_1 + a_2}$ (см. рис. 3, *б*).

Поскольку решения (7) уравнения (6) для точек $M(x, t) \in G_-$ можно было не корректировать, то классические решения (37) отличаются от классического решения (7) на некоторую функцию $\hat{F}_2 \in C^2(G_-)$. Поэтому мы берем от функции (7) без модуля в $\hat{f}$ производные вдоль характеристик (8) и так же, как в [5; 6; 13], получаем требования (35) с $\hat{f}$ вместо f. Согласно равенствам (5) и $\hat{f}(x, t) = e^{At - Bx} f(x, t)$ решения (37) равны решениям (34) и требования (35) с $\hat{f}$ вместо f эквивалентны требованиям (35). Теорема 3 доказана.

Следствие 3. *Если правая часть f не зависит от x или t, то функции (34) являются классическими решениями неоднородного уравнения (1) на G_- для любых $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ только при необходимом требовании непрерывности f по t или x соответственно.*

Замечание 4. На критической характеристике $x = a_1t$ дважды непрерывная дифференцируемость решений уравнения (1) обеспечивается условиями согласования правой части f с соответствующими данными краевых условий благодаря гладкости приведенных выше решений в окрестности этой критической характеристики, так же как, например, в случае смешанных задач для уравнения (1) при первых косых производных в граничных условиях [13], при факторизованной второй косой производной в граничном условии [6] и при факторизованных вторых косых производных в граничных условиях [14].

Заключение

В работе предложен метод корректировки пробных решений общего уравнения колебаний струны в первой четверти плоскости для того, чтобы они имели минимальную (необходимую) гладкость его правой части. Корректировка данных решений проводится посредством корректирующей задачи Гурса и включает три этапа:

1) постановку и решение корректирующей задачи Гурса для канонического вида неоднородного уравнения колебаний струны в первой четверти плоскости;

2) анализ гладкости слагаемых ее решений и обоснование дважды непрерывной дифференцируемости пробных решений $\tilde{F}$ или их корректировку до классических решений $\tilde{F}_1$ этого неоднородного уравнения канонического вида;

3) вычисление классических решений F_1 неоднородного уравнения колебаний струны в первой четверти плоскости путем обратной невырожденной замены переменных в решениях $\tilde{F}_1$.

Нами фактически доказано важное новое утверждение: неоднородное уравнение (1) при $a_1 \neq a_2$ имеет в первой четверти плоскости явное классическое решение $F_1(x, t) = F(x, t) - F_0(x, t) \in C^2(G_\infty)$, где $F \in C^1(G_\infty)$ и $F_0 \in C^1(G_\infty)$ – пробное и корректирующее решения неоднородного и однородного уравнений колебаний струны соответственно. Скорректированные классические решения неоднородного уравнения (1) указаны в теореме 1 для G_+ и теореме 3 для G_-, а минимальная (необходимая) гладкость на правую часть f – в теореме 2 для G_+ и теореме 3 для G_-. Существуют и другие классические решения этого неоднородного уравнения с минимальной гладкостью правой части f. Ясно, что они могут отличаться от последних зависящими от f частными решениями однородного уравнения (1).

В работе [11] без корректировки с помощью энергетического неравенства (априорной оценки) для второй смешанной задачи доказано утверждение: если u – некоторое классическое решение простейшего уравнения колебаний струны (уравнения (1) при $a_1 = a_2 = a > 0$ и $b_1 = b_2 = 0$) в G_∞, то функция $\widehat{F}$ вида (7), где $a_1 = a_2 = a > 0$, $b_1 = b_2 = 0$ и, следовательно, $A = B = 0$, тоже его классическое решение в G_∞.

В учебной и научной литературе [1; 8; 15–22] не встречаются классические решения (2), (3), (34) общего факторизованного одномерного волнового уравнения (1) при $a_1 \neq a_2$ в первой четверти плоскости.

Библиографические ссылки

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., 2004.
2. *Ломовцев Ф. Е.* Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : материалы Междунар. мат. конф. (Минск, 7–10 дек. 2015 г.) : в 2 ч. Минск, 2015. Ч. 2. С. 74–75.
3. *Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н.* Необходимые и достаточные условия колебаний ограниченной струны при косых производных в граничных условиях // Дифф. уравнения. 2014. Т. 50, № 1. С. 126–129.
4. *Ломовцев Ф. Е.* Решение без продолжения данных смешанной задачи для неоднородного уравнения колебаний струны при граничных косых производных // Дифф. уравнения. 2016. Т. 52, № 8. С. 1128–1132.
5. *Моисеев Е. И., Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н.* Неоднородное факторизованное гиперболическое уравнение второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной второй косой производной в граничном условии // Докл. Акад. наук. 2014. Т. 459, № 5. С. 544–549.
6. *Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н.* Классические решения неоднородного факторизованного гиперболического уравнения второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной второй косой производной в граничном условии // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та імя П. М. Машэрава. 2015. № 4 (88). С. 5–11.
7. *Ломовцев Ф. Е.* О разрывах первых и вторых частных производных решений общего одномерного факторизованного волнового уравнения в четверти плоскости // Вестн. Полоц. гос. ун-та. 2016. № 12. С. 117–124.
8. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М. : Наука, 2003.
9. *Бриш Н. И., Юрчук Н. И.* Задача Гурса для абстрактных линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифф. уравнения. 1971. Т. 7, № 6. С. 1020.
10. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., 1988.
11. *Юрчук Н. И., Новиков Е. Н.* Необходимые условия для существования классических решений колебаний полуограниченной струны // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2016. № 4. С. 116–120.
12. *Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н.* Метод Дюамеля решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с косой производной в нестационарном граничном условии // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2012. № 1. С. 83–86.
13. *Ломовцев Ф. Е., Новик Ю. Ф.* Начально-краевая задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны общего вида с первыми нехарактеристическими косыми производными в нестационарных граничных условиях // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2016. № 1. С. 129–135.
14. *Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н.* Решение смешанной задачи для факторизованного уравнения колебаний ограниченной струны при полунестационарных факторизованных вторых косых производных в граничных условиях // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та імя П. М. Машэрава. 2015. № 2/3 (86/87). С. 15–21.
15. *Корзюк В. И.* Уравнения математической физики. Минск, 2011.
16. *Кожанов А. И.* Задачи с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений // Докл. Акад. наук. 2014. Т. 457, № 2. С. 152–156.
17. *Корзюк В. И., Козловская И. С., Наумовец С. Н.* Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 7–21.
18. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Резольвентный подход к методу Фурье в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения // Изв. Сарат. ун-та. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 403–413.
19. *Корзюк В. И., Мандрик А. А.* Граничные задачи для нестрого гиперболического уравнения третьего порядка // Дифф. уравнения. 2016. Т. 52, № 2. С. 209–219.
20. *Корзюк В. И., Мандрик А. А.* Первая смешанная задача для нестрого гиперболического уравнения третьего порядка в ограниченной области // Дифф. уравнения. 2016. Т. 52, № 6. С. 788–802.
21. *Гаврилов В. С.* Существование и единственность решений гиперболических уравнений дивергентного вида с разными краевыми условиями на разных частях границы // Дифф. уравнения. 2016. Т. 52, № 8. С. 1050–1061.
22. *Корзюк В. И., Столярчук И. И.* Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами // Дифф. уравнения. 2017. Т. 53, № 1. С. 77–88.

References

1. Tikhonov A. N., Samarskiy A. A. [The equations of mathematical physics]. Moscow, 2004 (in Russ.).
2. Lomautsau F. E. [The method of supporting mixed problems for a semi-infinite string]. *Shestye Bogdanovskie chteniya po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* [The Sixth Bogdanov Readings on Ordinary Differential Equations] : mater. Int. math. conf. (Minsk, 7–10 Dec., 2015) : in 2 part. Minsk, 2015. Part 2. P. 74–75 (in Russ.).

3. Lomautsau F. E., Novikov E. N. [Necessary and sufficient conditions for vibrations of a bounded string under oblique derivatives in boundary conditions]. *Differentsial'nye uravn.* [Differ. Equ.]. 2014. Vol. 50, No. 1. P. 126–129 (in Russ.).

4. Lomautsau F. E. [Solution without continuation of the data of the mixed problem for the inhomogeneous oscillation equation of a string with boundary oblique derivatives]. *Differentsial'nye uravn.* [Differ. Equ.]. 2016. Vol. 52, No. 8. P. 1128–1132 (in Russ.).

5. Moiseev E. I., Lomautsau F. E., Novikov E. N. [Non-homogeneous factorized second-order hyperbolic equation in a quarter plane under a semi-nonstationary second oblique derivative in the boundary condition]. *Dokl. Akad. nauk.* 2014. Vol. 459, No. 5. P. 544–549 (in Russ.).

6. Lomautsau F. E., Novikov E. N. [Classic solutions of factorized inhomogeneous second order hyperbolic equation in a quadrant at floor unsteady second directional derivative in the boundary condition]. *Vesnik Vitsebskaga dzyarz. universiteta imya P. M. Masherava.* 2015. No. 4 (88). P. 5–11 (in Russ.).

7. Lomautsau F. E. [Discontinuities of the first and second partial derivatives of the total solution for factorized one-dimensional wave equation in the quarter of the plane]. *Vestnik Polockogo gos. univ.* 2016. No. 12. P. 117–124 (in Russ.).

8. Vladimirov V. S. [The equations of mathematical physics]. Moscow : Nauka, 2003 (in Russ.).

9. Brish N. I., Yurchuk N. I. [The Goursat problem for abstract linear second-order differential equations]. *Differentsial'nye uravn.* [Differ. Equ.]. 1971. Vol. 7, No. 6. P. 1020 (in Russ.).

10. Sobolev S. L. [Application functional analysis in mathematical physics]. Moscow, 1988 (in Russ.).

11. Yurchuk N. I., Novikov E. N. [Necessary conditions for the existence of classical solutions of a semi-infinite string vibration]. *Vesti Nacyjanal'aj Akadjemii navuk Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk.* 2016. No. 4. P. 116–120 (in Russ.).

12. Lomautsau F. E., Novikov E. N. Duhamel's method for solving the inhomogeneous oscillation equation for a semibounded string with oblique derivative in an unsteady boundary condition. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2012. No. 1. P. 83–86 (in Russ.).

13. Lomautsau F. E., Novik Y. F. An initial boundary-value problem for the inhomogeneous oscillation equation for a bounded string of general form with the first non-characteristic oblique derivatives in non-stationary boundary conditions. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2016. No. 1. P. 129–135 (in Russ.).

14. Lomautsau F. E., Novikov E. N. [Resolution of the mixed problem for the factorized oscillation equation of a bounded string under semi-nonstationary factorized second oblique derivatives in the boundary conditions]. *Vesnik Vitsebskaga dzyarz. universiteta imya P. M. Masherava.* 2015. No. 2/3 (86/87). P. 15–21 (in Russ.).

15. Korzyuk V. I. [Equations of mathematical physics]. Minsk, 2011 (in Russ.).

16. Kozhanov A. I. [Problems with integral type conditions for certain classes of non-stationary equations]. *Dokl. Akad. nauk.* 2014. Vol. 457, No. 2. P. 152–156 (in Russ.).

17. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Naumovets S. N. [Classical solution of the first mixed problem of the one-dimensional wave equation with the Cauchy type conditions]. *Vesti Nacyjanal'aj Akadjemii navuk Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk.* 2015. No. 1. P. 7–21 (in Russ.).

18. Kornev V. V., Khromov A. P. [Resolvent approach to the Fourier method in the mixed problem for the inhomogeneous wave equation]. *Izv. Sarat. univ. Ser.: Mat. Meh. Inform.* 2016. Vol. 16, issue 4. P. 403–413 (in Russ.).

19. Korzyuk V. I., Mandrik A. A. [Boundary problem for non-strictly hyperbolic third-order equation]. *Differentsial'nye uravn.* [Differ. Equ.]. 2016. Vol. 52, No. 2. P. 209–219 (in Russ.).

20. Korzyuk V. I., Mandrik A. A. [First mixed problem for non-strictly hyperbolic third-order equation in the limited area]. *Differentsial'nye uravn.* [Differ. Equ.]. 2016. Vol. 52, No. 6. P. 788–802 (in Russ.).

21. Gavrilov V. S. [Existence and uniqueness of solutions of hyperbolic equations of divergence form with different boundary conditions on different parts of the border]. *Differentsial'nye uravn.* [Differ. Equ.]. 2016. Vol. 52, No. 8. P. 1050–1061 (in Russ.).

22. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. [Classical solution of the first mixed problem for a hyperbolic second-order equation in a curvilinear half-strip with variable coefficients]. *Differentsial'nye uravn.* [Differ. Equ.]. 2017. Vol. 53, No. 1. P. 77–88 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 13.06.2017.
Received by editorial board 13.06.2017.