УДК 519.71

РАСШИРЕННЫЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ И АЛГЕБРАИЗАЦИЯ КОНТАКТНЫХ СХЕМ

Ю. Г. ТАРАЗЕВИЧ [1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Над кольцами полиномов с идемпотентными переменными (над произвольными полями) найдены классы расширенных матриц (с одним выделенным столбцом), реализующих булевы функции. В последних классах расширенных матриц (над любыми полями) определена система эквивалентных преобразований (сохраняющих реализуемые матрицами булевы функции), обобщающая известную систему элементарных преобразований (строк и столбцов) обычных многочленных матриц. Доказана полнота этой системы для простейшего (двузначного) случая – в классе расширенных матриц над кольцом полиномов Жегалкина. В частности, дан метод приведения произвольной расширенной матрицы над кольцом полиномов Жегалкина с помощью этой системы преобразований к однозначно определяемому одноэлементному виду. Для того же (двузначного) случая показано, что класс двоичных матриц инциденций контактных схем является, по существу, подклассом класса расширенных матриц над кольцом полиномов Жегалкина. Таким образом, получено простейшее «вполне алгебраическое» расширение класса контактных схем – одного из базовых модельных классов математической теории управляющих систем.

Ключевые слова: полином с идемпотентными переменными; расширенная полиномиальная матрица; полный обратный метаморфоз; алгебраизация контактных схем; контактный гиперграф.

Благодарность. Автор выражает благодарность профессору Ф. Е. Ломовцеву за помощь в подготовке статьи.

Образец цитирования:
Таразевич Ю. Г. Расширенные полиномиальные матрицы и алгебраизация контактных схем // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 85–93.

For citation:
Tarazevich Y. G. Augmented polynomial matrices and algebraization of switching circuits. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 3. P. 85–93 (in Russ.).

Автор:
Юрий Георгиевич Таразевич – кандидат физико-математических наук; старший преподаватель кафедры математической кибернетики механико-математического факультета.

Author:
Yury G. Tarazevich, PhD (physics and mathematics); senior lecturer at the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics.
tarazevichyg@mail.ru

Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 85–93
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2017. No. 3. P. 85–93

AUGMENTED POLYNOMIAL MATRICES AND ALGEBRAIZATION OF SWITCHING CIRCUITS

Y. G. TARAZEVICH [a]

[a] *Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

Over rings of polynomials with idempotent variables (over arbitrary fields) there are defined classes of augmented matrices (with one distinguished column) that realize Boolean functions. In the latter classes of augmented matrices (over any fields) there is defined a system of equivalent transformations (preserving realized Boolean functions) that generalizes the known system of elementary transformations (of rows and columns) of usual polynomial matrices. It is proved the completeness of this system for the simplest (binary) case – in the class of augmented matrices over the ring of Zhegalkin polynomials. In particular, there is given a method for reducing of an arbitrary augmented matrix over the ring of Zhegalkin polynomials by means of this system to a uniquely determined one-element form. For the same (binary) case, it is shown that the class of binary incidence matrixes of switching circuits is, in essence, a subclass of the class of augmented matrices over the ring of Zhegalkin polynomials. This reveals the simplest «completely algebraic» extension of the class of switching circuits – one of the basic model classes of mathematical theory of control systems.

Key words: polynomial with idempotent variables; augmented polynomial matrix; full reverse metamorphosis; algebraization of switching circuits; contact hypergraph.

Acknowledgements. The author expresses his gratitude to full professor F. Y. Lomovtsev for his assistance in the preparation of the article.

В рамках математической теории *управляющих систем* (УС) [1–3] предлагается алгебраизация *класса контактных схем* (КС) [2; 3] (одного из базовых модельных классов теории УС), представляющая матрицы инциденций [4; 5] контактных схем как подкласс специального *класса расширенных матриц над кольцом полиномов Жегалкина* ($\text{РМ}_{\text{ПЖ}}$) [6] и позволяющая в пределах класса $\text{РМ}_{\text{ПЖ}}$ естественным образом расширить класс КС до нового нетривиального *класса контактных гиперграфов* (КГ) [6] с новыми оценками сложности реализации булевых функций.

Интересно отметить, что в классической теории УС [1] эквивалентные преобразования УС рассматриваются обычно отдельно и после изучения вопросов синтеза, а синтез УС в большинстве случаев напоминает процесс «механической сборки» схем из отдельных компонентов. При алгебраическом же подходе к синтезу (в классе КС и его расширениях) эквивалентные преобразования становятся основным «инструментом» синтеза и позволяют «выращивать» схему как единое целое, а не «собирать» ее из «кусков» (подсхем и элементов).

Следует сказать, что класс КС алгебраизируется и нетривиально расширяется не только над кольцом полиномов Жегалкина ($\text{КС} \subset \text{КГ} \subset \text{РМ}_{\text{ПЖ}}$ [6]), но и над кольцами полиномов с идемпотентными переменными над любыми полями (см. замечания 4 и 5). Однако в настоящей работе рассматривается только алгебраизация контактных схем ($\text{КС} \subset \text{РМ}_{\text{ПЖ}}$) без «промежуточных» расширений класса КС, причем для самого простого случая – над *кольцом полиномов Жегалкина* (ПЖ) [3; 7].

Попытки алгебраизации КС предпринимались и ранее. В [8] предложен интересный подход к задачам анализа и синтеза контактных и контактно-вентильных многополюсников на языке алгебраических матриц смежности (над булевой алгеброй), позволяющий, в частности, вычислять все функции проводимостей произвольного многополюсника путем возведения его матрицы смежности в степень, не превышающую размера матрицы. Однако предложенный подход не получил существенного развития в применении к задачам синтеза КС. Кроме того, такой подход не дает никаких обобщений контактных или контактно-вентильных схем.

Расширенные полиномиальные матрицы

Над произвольным полем F рассмотрим обычное (целостное) кольцо полиномов (многочленов) [9; 10], зависящих от произвольного конечного (возможно, пустого) множества переменных $X \subset \subset \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. В этом кольце обычные правила сложения и умножения полиномов дополним условием идемпотентности [10] переменных ($x_i \cdot x_i = x_i$) и выделим подкласс полиномов, степени переменных в которых не превышают единицы. Очевидно, что такой подкласс полиномов образует (нецелостное при $X \neq \varnothing$) ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей [9; 10] с обычной операцией сложения полиномов и операцией умножения, учитывающей идемпотентность переменных. Определенное таким образом кольцо будем называть *кольцом полиномов с идемпотентными переменными над полем* F и обозначать $F[X]$.

Далее, везде под *кольцом* понимается только кольцо полиномов с идемпотентными переменными над некоторым произвольным полем, зависящих от некоторого конечного (возможно, пустого) множества переменных.

Определение 1. *Расширенной матрицей над кольцом* $F[X]$ ($\text{PM}_{F[X]}$-*матрицей*) называется пара $\langle A, F[X]\rangle$, где A – произвольная непустая прямоугольная матрица с одним выделенным столбцом, элементами которой являются произвольные полиномы из кольца $F[X]$. Множество всех $\text{PM}_{F[X]}$-матриц любых размеров будем называть *классом расширенных матриц над кольцом* $F[X]$ и обозначать $\text{PM}_{F[X]}$. Кольцо $F[X]$ будем называть *кольцом скаляров*, а поле F – *полем скаляров* $\text{PM}_{F[X]}$-матрицы (класса $\text{PM}_{F[X]}$). Любой элемент универсального класса $\text{PM} = \bigcup \text{PM}_{F[X]}$, где объединение берется по всем полям F и всем конечным X (включая пустое X), будем называть РМ-*матрицей*. Матрицу A будем называть *расширенной матрицей* РМ-матрицы $\langle A, F[X]\rangle$, ее выделенный столбец – *источниковым столбцом* (ИС), а подматрицу (возможно, пустую), состоящую из неисточниковых столбцов матрицы A, – *основной матрицей* РМ-матрицы $\langle A, F[X]\rangle$.

Определим функционирование РМ-матриц. Обозначим $X^{(n)} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Для любого поля F и любого упорядоченного набора $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, состоящего из нулей и единиц (т. е. идемпотентов [10]) поля F, естественным образом определяется гомоморфизм [9; 10] $\mathsf{H}_F^{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}: F\left[X^{(n)}\right] \to F$, ставящий в соответствие любому полиному $p \in F\left[X^{(n)}\right]$ его значение на этом наборе (идемпотентных) значений (идемпотентных) переменных, т. е. полином-константу $p(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in F$. Соответственно, любой $\text{PM}_{F\left[X^{(n)}\right]}$-матрице $\left\langle A, F\left[X^{(n)}\right]\right\rangle$ гомоморфизм $\mathsf{H}_F^{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}$ ставит в соответствие (константную) PM_F-матрицу $\langle A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), F\rangle$, расширенную матрицу $A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ которой можно рассматривать как расширенную матрицу (над полем F) системы линейных уравнений [9; 11] со столбцом свободных членов – источниковым столбцом. Разница рангов $\Delta_A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ расширенной и основной матриц этой системы (0 или 1) определяется «булевым» набором $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ (в случае пустой основной матрицы ее ранг считается равным нулю). Таким образом, любая $\text{PM}_{F\left[X^{(n)}\right]}$-матрица $\left\langle A, F\left[X^{(n)}\right]\right\rangle$ (при любом F) представляет (реализует) некоторую булеву функцию [3; 7] $f_A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, значение которой на произвольном наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \{0, 1\}^n$ определим следующим образом:

$$f_A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \neg\Delta_A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1 - \Delta_A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

иначе говоря, $f_A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1$, если система линейных уравнений с расширенной матрицей $A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ совместна. В этом случае будем говорить, что $\text{PM}_{F\left[X^{(n)}\right]}$-*матрица* $\left\langle A, F\left[X^{(n)}\right]\right\rangle$ *реализует булеву функцию* $f_A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Замечание 1. Таким образом, любую расширенную матрицу над любым кольцом $F[X]$ можно рассматривать как УС, реализующую булеву функцию, зависящую от переменных X (константу при $X = \varnothing$). В общем случае можно определять многоисточниковые расширенные матрицы (реализующие системы булевых функций). Однако в настоящей работе рассматриваются только одноисточниковые расширенные матрицы (с единственным источниковым столбцом).

Элементарные преобразования РМ-*матриц*

Определим систему *элементарных преобразований* РМ-матриц (из универсального класса $\text{PM} = \bigcup \text{PM}_{F[X]}$) (см. определение 1). Ниже всякое выражение вида $\langle A, F[X]\rangle \to \langle A', F'[X']\rangle$ означает, что РМ-матрица $\langle A, F[X]\rangle$ может быть преобразована в РМ-матрицу $\langle A', F'[X']\rangle$. Кроме того, приведенные ниже элементарные преобразования 1–3 не изменяют кольца скаляров РМ-матрицы. Далее (для удобства), во всякой расширенной матрице A^f (реализующей некоторую булеву функцию f), полученной из обычной полиномиальной матрицы A выделением в ней источникового столбца (ИС), в качестве ИС будем всегда выбирать последний (крайний правый) столбец матрицы A и помечать его (сверху) символом f (см. ниже п. 3).

1. *Преобразования строк*

1.1. Удаление (1.1–) или добавление (1.1+) нулевой строки в расширенной матрице, при этом единственную строку однострочной матрицы удалять нельзя.

1.2. Перестановка строк расширенной матрицы.

1.3. Прибавление к любой строке расширенной матрицы любой другой ее строки, умноженной на любой элемент кольца скаляров.

2. *Преобразования столбцов*

2.1. Удаление (2.1–) или добавление (2.1+) нулевого столбца в основной матрице (ИС удалять нельзя).

2.2. Перестановка столбцов в основной матрице (ИС переставлять нельзя).

2.3. Прибавление любого столбца основной матрицы, умноженного на любой элемент кольца скаляров, к любому другому столбцу расширенной матрицы.

3. *Удаление (3–) или добавление (3+) «компонент связности», не содержащих «источника».* Для любых непустых прямоугольных матриц A и B над одним и тем же кольцом $F[X]$ рассмотрим расширенную матрицу A^f и клеточно-диагональную расширенную матрицу $B \dotplus A^f$, являющуюся прямой суммой [11] матриц B и A^f:

$$A^f = \begin{array}{c} f \\ \boxed{\quad A \quad} \end{array}, \quad B \dotplus A^f = \begin{array}{cc} & f \\ \begin{array}{|c|c|} \hline B & 0 \\ \hline 0 & A \\ \hline \end{array} \end{array}.$$

Тогда (3–) $\langle B \dotplus A^f, F[X]\rangle \to \langle A^f, F[X]\rangle$, (3+) $\langle A^f, F[X]\rangle \to \langle B \dotplus A^f, F[X]\rangle$.

4. *Замена кольца скаляров*

4.1. Замена поля скаляров. Пусть коэффициенты всех полиномов расширенной матрицы A РМ-матрицы $\langle A, F[X]\rangle$ принадлежат некоторому полю F'. Тогда

$$\langle A, F[X]\rangle \to \langle A, F'[X]\rangle.$$

4.2. Замена фиктивных переменных. Пусть переменные всех полиномов расширенной матрицы A РМ-матрицы $\langle A, F[X]\rangle$ принадлежат некоторому конечному (возможно, пустому) множеству X'. Тогда

$$\langle A, F[X]\rangle \to \langle A, F[X']\rangle.$$

Замечание 2. В отличие от «бесполезного функтора» 4.2 («забывающего» и «выдумывающего» фиктивные переменные) «функтор» 4.1 позволяет сводить задачу синтеза расширенной матрицы A над кольцом $F[X]$ к (зачастую существенно более простой) задаче синтеза той же матрицы над кольцом $F'[X]$ с более «мощным» полем F'. При этом задача синтеза последовательности $\text{РМ}_{F[X^{(n)}]}$-матриц ($n = 0, 1, 2, \ldots$) может сводиться к «неэффективной» задаче построения последовательности надполей поля F.

Легко видеть, что преобразования 1, по сути, эквивалентны известной системе элементарных преобразований строк обычных многочленных матриц [11], а преобразования 2 отличаются от обычных преобразований столбцов лишь учетом наличия выделенного (источникового) столбца. При этом очевидно, что любое из преобразований 1–2 не изменяет рангов расширенной и основной матриц для любой (константной) РМ_F-матрицы над любым полем F. Очевидно также, что преобразование 3 изменяет ранги расширенной и основной матриц на одну и ту же величину (для любой РМ_F-матрицы над любым полем F). Ясно также, что «функтор» 4.1 сохраняет ранг любых (константных) матриц над любыми полями.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. Элементарные преобразования 1–3 и 4.1 не изменяют разницы рангов расширенной и основной матриц для любой РМ$_F$-матрицы над любым полем F.

Определение 2. Две РМ-матрицы будем называть *эквивалентными* (*элементарно эквивалентными* соответственно), если одну из них можно преобразовать в другую с помощью конечного числа (не более одного соответственно) применения элементарных преобразований 1–4.

Очевидно следующее утверждение (свойство «обратимости» преобразований 1–4).

Утверждение 2. Для любой пары элементарно эквивалентных РМ-матриц $\left\langle A,\ F\left[X\right]\right\rangle$ и $\left\langle A',\ F'\left[X'\right]\right\rangle$ существуют два элементарных преобразования одного и того же типа (из девяти типов 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2, 2.3, 3, 4.1, 4.2), одно из которых преобразует $\left\langle A,\ F\left[X\right]\right\rangle$ в $\left\langle A',\ F'\left[X'\right]\right\rangle$, а другое – $\left\langle A',\ F'\left[X'\right]\right\rangle$ в $\left\langle A,\ F\left[X\right]\right\rangle$.

Очевидно также, что любой гомоморфизм $\mathsf{H}_F^{(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n)}$ (см. определение функционирования РМ-матриц) любой паре элементарно эквивалентных $\text{РМ}_{F\left[X^{(n)}\right]}$-матриц ставит в соответствие пару элементарно эквивалентных РМ$_F$-матриц.

Из предыдущего очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Утверждение 3. Любые две эквивалентные РМ-матрицы реализуют одну и ту же (с точностью до фиктивных переменных [3; 7]) булеву функцию.

Эквивалентные преобразования в классе РМ$_{\text{ПЖ}}$

Простейшим примером полиномов с идемпотентными переменными (над двухэлементным полем Z_2) являются полиномы Жегалкина. Пусть $P_2^{(n)}$ и $\text{ПЖ}^{(n)} = Z_2\left[X^{(n)}\right]$ – изоморфные кольца [9; 10] булевых функций и полиномов Жегалкина [3; 7], зависящих от множества переменных $X^{(n)} = \left(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n\right)$. Класс РМ-матриц над кольцом $\text{ПЖ}^{(n)}$ обозначим $\text{РМ}_{\text{ПЖ}^{(n)}}$.

Покажем, что любые две $\text{РМ}_{\text{ПЖ}^{(n)}}$-матрицы, реализующие одну и ту же булеву функцию, эквивалентны (в смысле определения 2). Тем самым мы покажем, что элементарные преобразования 1–4 образуют полную систему эквивалентных преобразований [1, с. 87] в классе $\text{РМ}_{\text{ПЖ}^{(n)}}$, как в классе УС (см. замечание 1).

Ниже предлагается один из методов «полного обратного метаморфоза» (ПОМ) в классе $\text{РМ}_{\text{ПЖ}^{(n)}}$ – процедура приведения произвольной $\text{РМ}_{\text{ПЖ}^{(n)}}$-матрицы с помощью элементарных преобразований 1–3 к однозначно определяемому одноэлементному каноническому виду с одновременным вычислением (в виде полинома Жегалкина) реализуемой $\text{РМ}_{\text{ПЖ}^{(n)}}$-матрицей функции. Таким образом, изложенную ниже процедуру (являющуюся, по сути, одной из модификаций метода Гаусса [9; 11]) можно рассматривать как универсальный метод анализа [8] в классе $\text{РМ}_{\text{ПЖ}^{(n)}}$.

Для любой формулы (или выражения) Φ, представляющей некоторую булеву функцию, через $\left[\Phi\right]$ обозначим полином Жегалкина, реализующий эту булеву функцию. Через $\oplus$ и $\cdot$ обозначим операции сложения и умножения в кольце $\text{ПЖ}^{(n)}$.

Рассмотрим произвольную $\text{РМ}_{\text{ПЖ}^{(n)}}$-матрицу $\left\langle A^f,\ \text{ПЖ}^{(n)}\right\rangle$, реализующую некоторую функцию $f \in P_2^{(n)}$. Выделим крайний левый столбец расширенной матрицы A^f:

$$A^f = \begin{array}{|c|c|} \multicolumn{2}{r}{f} \\ \hline p_1 & \\ \cline{1-1} \vdots & \\ \cline{1-1} p_{l-1} & A_1 \\ \cline{1-1} p_l & \\ \hline \end{array}$$

С учетом элементарных преобразований 1.3 к предпоследней строке матрицы A^f прибавим (по модулю два) последнюю строку, умноженную на полином $\left[\overline{p}_{l-1}\right] = p_{l-1} \oplus 1$. После очевидных преобразований $\left(p_{l-1} \oplus p_l \cdot \left(p_{l-1} \oplus 1\right) = p_{l-1} \cdot p_l \oplus p_{l-1} \oplus p_l = \left[p_{l-1} \vee p_l\right]\right)$ получим эквивалентную расширенную матрицу (над тем же кольцом):

$$\begin{array}{c|c|}
 & f \\
\hline
p_1 & \\
\hline
\vdots & \\
\hline
\left[p_{l-1} \vee p_l\right] & A_2 \\
\hline
p_l & \\
\hline
\end{array}$$

Далее, к последней строке полученной матрицы прибавим предпоследнюю строку, умноженную на p_l:

$$\begin{array}{c|c|}
 & f \\
\hline
p_1 & \\
\hline
\vdots & \\
\hline
\left[p_{l-1} \vee p_l\right] & A_3 \\
\hline
0 & \\
\hline
\end{array}$$

Таким же образом «обнулим» предпоследний элемент первого столбца и все остальные его элементы, кроме самого верхнего:

$$\begin{array}{c|c|}
 & f \\
\hline
\left[p_1 \vee \ldots \vee p_l\right] & \\
\hline
0 & \\
\vdots & A' \\
0 & \\
\hline
\end{array}$$

В полученной матрице обозначим $q_1 = \left[p_1 \vee \ldots \vee p_l\right]$ и с учетом (1.1+) добавим сверху нулевую строку. Теперь наша расширенная матрица имеет следующий вид:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\multicolumn{5}{r}{f} \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
q_1 & q_2 & \cdots & q_{m-1} & q_m \\
\hline
0 & \multicolumn{4}{c|}{} \\
\vdots & \multicolumn{4}{c|}{B} \\
0 & \multicolumn{4}{c|}{} \\
\hline
\end{array}$$

К первой (добавленной) строке прибавим вторую, умноженную на $\left[\bar{q}_1\right] = q_1 \oplus 1$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\multicolumn{5}{r}{f} \\
\hline
0 & \left[\bar{q}_1\right] \cdot q_2 & \cdots & \left[\bar{q}_1\right] \cdot q_{m-1} & \left[\bar{q}_1\right] \cdot q_m \\
\hline
q_1 & q_2 & \cdots & q_{m-1} & q_m \\
\hline
0 & \multicolumn{4}{c|}{} \\
\vdots & \multicolumn{4}{c|}{B} \\
0 & \multicolumn{4}{c|}{} \\
\hline
\end{array}$$

Далее, с учетом 2.3 к каждому i-му столбцу ($2 \le i \le m$) прибавим первый столбец, умноженный на q_i, и получим $\left(q_1 \cdot q_i \oplus q_i = \left(q_1 \oplus 1\right) \cdot q_i = \left[\bar{q}_1\right] \cdot q_i\right)$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\multicolumn{5}{r}{f} \\
\hline
0 & \left[\bar{q}_1\right] \cdot q_2 & \cdots & \left[\bar{q}_1\right] \cdot q_{m-1} & \left[\bar{q}_1\right] \cdot q_m \\
\hline
q_1 & \left[\bar{q}_1\right] \cdot q_2 & \cdots & \left[\bar{q}_1\right] \cdot q_{m-1} & \left[\bar{q}_1\right] \cdot q_m \\
\hline
0 & \multicolumn{4}{c|}{} \\
\vdots & \multicolumn{4}{c|}{B} \\
0 & \multicolumn{4}{c|}{} \\
\hline
\end{array}$$

С учетом 1.3 ко второй строке прибавим первую:

				f
0	$[\overline{q}_1]\cdot q_2$	$\cdots$	$[\overline{q}_1]\cdot q_{m-1}$	$[\overline{q}_1]\cdot q_m$
q_1	0	$\cdots$	0	0
0				
$\vdots$		B		
0				

С учетом 1.2 и (3–) удалим одноэлементную «компоненту связности» q_1 (вместе с первым столбцом и второй строкой):

			f
$[\overline{q}_1]\cdot q_2$	...	$[\overline{q}_1]\cdot q_{m-1}$	$[\overline{q}_1]\cdot q_m$
	B		

Таким образом, с помощью преобразований 1–3 произвольная расширенная матрица A^f над кольцом ПЖ$^{(n)}$ преобразована в эквивалентную расширенную матрицу над тем же кольцом, имеющую столько же строк и на один столбец меньше.

Повторяя предыдущую процедуру, можно последовательно «избавиться» от всех столбцов, кроме источникового, и в оставшемся источниковом столбце «обнулить» все элементы, кроме самого верхнего, после чего, удалив (с учетом (1.1–)) из полученной одностолбцовой матрицы лишние нулевые строки, получить одноэлементную расширенную матрицу

$$A_0^f = \begin{array}{c} f \\ \boxed{[\neg f]} \end{array}$$

(с пустой основной матрицей), где $[\neg f]$ – полином из кольца ПЖ$^{(n)}$, реализующий отрицание функции f. Очевидно, что такая *каноническая* РМ$_{\text{ПЖ}^{(n)}}$*-матрица* $\left\langle A_0^f,\ \text{ПЖ}^{(n)} \right\rangle$ для любой функции $f \in P_2^{(n)}$ определяется однозначно.

Тогда с учетом утверждений 2 и 3 и замечания 1 имеет место следующее утверждение.

Утверждение 4. Две РМ$_{\text{ПЖ}^{(n)}}$-матрицы эквивалентны тогда и только тогда, когда они реализуют одну и ту же функцию из $P_2^{(n)}$. При этом система 1–3 является полной системой эквивалентных преобразований в классе РМ$_{\text{ПЖ}^{(n)}}$ (как в классе УС).

Замечание 3. Метод ПОМ показывает, что семь элементарных преобразований 1–3 выводятся из четырех – 1.1, 1.3, 2.3 и 3, – при этом подматрицу B в преобразовании 3 можно считать одноэлементной.

Замечание 4. Метод ПОМ легко обобщается на классы РМ-матриц над кольцами полиномов с идемпотентными переменными над любыми полями. При этом для любого нулевого или простого p система 1–4 оказывается полной системой эквивалентных преобразований в классе $\text{РМ}_p = \bigcup \text{РМ}_{F[X]}$, где объединение берется по всем полям F характеристики p и всем конечным X (включая пустое X).

Алгебраизация класса **КС** *в классе* **РМ$_{\text{ПЖ}}$** [6]

Покажем, что класс КС$^{(n)}$ всех двухполюсных контактных схем [2; 3], построенных из контактов переменных из множества $X^{(n)} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, является, по существу, подклассом класса РМ$_{\text{ПЖ}^{(n)}}$.

Рассмотрим произвольную двухполюсную контактную схему $S \in$ КС$^{(n)}$, дополненную («расширенную») *источниковым ребром*, соединяющим полюсы.

Любой такой «расширенной» схеме (т. е. неориентированному (мульти)графу без петель [4; 5; 7] с одним ребром – «источником» и остальными ребрами – контактами) естественным образом ставится в соответствие двоичная расширенная матрица инциденций [4; 5] A (по две единицы в каждом столбце), каждый столбец которой, кроме одного (источникового), помечен символом замыкающего (x_i) или размыкающего $(\overline{x}_j)$ контакта некоторой переменной из множества $X^{(n)} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Неисточниковые столбцы матриц инциденций контактных схем будем называть *контактными столбцами*.

Поскольку размыкание контакта в схеме S, по сути, эквивалентно умножению на ноль соответствующего контактного столбца матрицы инциденций A схемы S, а замыкание контакта – умножению соответствующего столбца на единицу, то метки x_i и $\overline{x}_j = x_j \oplus 1$ контактных столбцов матрицы инциденций A естественным образом рассматриваются как полиномиальные множители соответствующих двоичных столбцов. Тогда, умножив контактные столбцы двоичной расширенной матрицы A на свои метки (полиномы Жегалкина x_i или $x_j \oplus 1$), получим собственно полиномиальную расширенную матрицу A' (над кольцом ПЖ$^{(n)}$), содержащую по два одинаковых полинома (вида $x_m \oplus \alpha$) в каждом контактном столбце и две единицы в источниковом столбце. Полиномиальную матрицу A' будем называть *расширенной матрицей инциденций схемы S в полиномиальном виде*.

Очевидно следующее утверждение.

Утверждение 5. Имеет место взаимно однозначное соответствие между цепями контактов, соединяющими полюсы в произвольной двухполюсной контактной схеме, дополненной источниковым ребром, и одномерными циклами [4; 5; 7], содержащими источниковое ребро этой контактной схемы, такое, что соответствующий цикл объединяет соответствующую цепь и источниковое ребро.

На каждом двоичном наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ «расширенная» схема S превращается в свой подграф $S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, состоящий из источникового ребра и замкнутых на наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ контактов схемы S. А расширенная полиномиальная матрица инциденций A' схемы S на том же наборе превращается в расширенную двоичную матрицу инциденций $A'(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ подграфа $S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, т. е. в расширенную матрицу над полем Z_2 (нулевые столбцы матрицы инциденций $A'(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ соответствуют «пустым» ребрам подграфа $S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, т. е. разомкнутым на наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ контактам схемы S).

И если в подграфе $S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ существует цикл, состоящий из источникового ребра и какого-то множества замкнутых на наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ контактов, то этот цикл образует эйлеров подграф графа $S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ [4; 5] (с четными степенями всех вершин). И следовательно, сумма (по модулю два) соответствующих столбцов двоичной матрицы инциденций $A'(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ графа $S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ равна нулевому столбцу, т. е. источниковый столбец линейно выражается (по модулю два) через необнулившиеся на наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ контактные столбцы.

И наоборот, если в матрице инциденций $A'(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ графа $S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ источниковый столбец выражается суммой (по модулю два) каких-то ненулевых контактных столбцов, то соответствующие замкнутые контакты и источниковое ребро в графе $S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ образуют подграф с четными степенями всех вершин. Следовательно, источниковое ребро содержится в некотором цикле графа $S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Отсюда следует (с учетом утверждения 5), что булева функция, реализуемая контактной схемой S, совпадает с функцией, реализуемой РМ$_{ПЖ^{(n)}}$-матрицей $\langle A', ПЖ^{(n)} \rangle$, где A' – расширенная матрица инциденций схемы S в полиномиальном виде.

Таким образом, имеем алгебраизацию класса КС$^{(n)}$ как подкласса класса РМ$_{ПЖ^{(n)}}$.

Замечание 5. Аналогично можно показать, что для любого поля F класс КС$^{(n)}$ является, по существу, подклассом класса РМ$_{F[X^{(n)}]}$. При этом если характеристика поля F не равна двум, то алгебраизация КС$^{(n)}$ в классе РМ$_{F[X^{(n)}]}$ осуществляется на основе «троичных» матриц инциденций (в каждом столбце которых ровно два ненулевых элемента: единица и минус единица поля F).

Замечание 6. Метод ПОМ показывает (с учетом утверждения 2 и замечаний 4 и 5), что любая РМ-матрица с заданными свойствами («бабочка»), в том числе любая классическая контактная схема, может быть получена «прямым метаморфозом», т. е. эквивалентными преобразованиями 1–4, из одноэлементной канонической матрицы («эмбрион») или какой-нибудь другой РМ-матрицы с «простой морфологией» («гусеница»). Таким образом, алгебраический подход позволяет синтезировать схему целиком, а не «собирать» ее из «кусков» (подсхем и элементов). Это избавляет от решения многих (в том числе «топологических») вопросов в задачах эквивалентных преобразований, анализа и синтеза контактных и «гиперконтактных» схем.

Библиографические ссылки

1. *Яблонский С. В.* Элементы математической кибернетики. М. : Высшая школа, 2007.
2. *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М. : Издательство МГУ, 1984.
3. *Нигматуллин Р. Г.* Сложность булевых функций. М. : Наука, 1991.
4. *Басакер Р., Саати Т.* Конечные графы и сети. М. : Наука, 1974.
5. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И. и др.* Лекции по теории графов. М. : Наука, 1990.
6. *Таразевич Ю. Г.* Алгебраизация и обобщение контактных схем // Дискретная математика и ее приложения : материалы XII Междунар. семинара им. акад. О. Б. Лупанова (Москва, 20–25 июня 2016 г.). М. : Издательство механико-математического факультета МГУ, 2016. С. 170–172.
7. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М. : Высшая школа, 2003.
8. *Лунц А. Г.* Алгебраические методы анализа и синтеза контактных схем // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1952. Т. 16, вып. 5. С. 405–426.
9. *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. М. : Факториал пресс, 2001.
10. *Зарисский О., Самюэль П.* Коммутативная алгебра : в 2 т. М. : Иностранная литература, 1963. Т. 1.
11. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М. : Наука, 1970.

References

1. Yablonsky S. V. [Elements of mathematical cybernetics]. Moscow : Vysshaya shkola, 2007 (in Russ.).
2. Lupanov O. B. [Asymptotic bounds for the complexity of control systems]. Moscow : Moscow State University, Publ. house, 1984 (in Russ.).
3. Nigmatullin R. G. [Complexity of Boolean functions]. Moscow : Nauka, 1991 (in Russ.).
4. Basaker R., Saaty T. [Finite graphs and networks]. Moscow : Nauka, 1974 (in Russ.).
5. Emelichev V. A., Melnikov O. I., Sarvanov V. I., et al. [Lectures in graph theory]. Moscow : Nauka, 1990 (in Russ.).
6. Tarazevich Y. G. [Algebraization and generalization of switching circuits]. *Diskretnaya matematika i ee prilozheniya* [Discrete mathematics and its applications] : materialy XII Mezhdunar. semin. im. akad. O. B. Lupanova (Moscow, 20–25 June, 2016). Moscow : Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, Publ. house, 2016. P. 170–172 (in Russ.).
7. Jablonski S. V. [Introduction to discrete mathematics]. Moscow : Vysshaya shkola, 2003 (in Russ.).
8. Luntz A. G. [Algebraic methods of analysis and synthesis of switching circuits]. *Izv. Akad. nauk SSSR. Ser. mat.* 1952. Vol. 16, issue 5. P. 405–426 (in Russ.).
9. Vinberg E. B. [Algebra course]. Moscow : Faktorial press, 2001 (in Russ.).
10. Zariski O., Samuel P. [Commutative algebra] : in 2 vol. Moscow : Inostrannaya literatura, 1963. Vol. 1 (in Russ.).
11. Maltsev A. I. [Fundamentals of linear algebra]. Moscow : Nauka, 1970 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 12.06.2017.
Received by editorial board 12.06.2017.