Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 94–99
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2017. No. 3. P. 94–99

УДК 519.1

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ И РАСПОЗНАВАНИЕ ГРАФОВ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ РЕБЕР 3-ХРОМАТИЧЕСКИХ ГИПЕРГРАФОВ КРАТНОСТИ НЕ ВЫШЕ ДВУХ В КЛАССЕ РАСЩЕПЛЯЕМЫХ ГРАФОВ

***Т. В. ЛУБАШЕВА*[1)], *Ю. М. МЕТЕЛЬСКИЙ*[2)]**

[1)]*Белорусский государственный экономический университет, пр. Партизанский, 26, 220070, г. Минск, Беларусь*
[2)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Пусть $L^m(k)$ обозначает класс графов пересечений ребер k-хроматических гиперграфов кратности не выше m. Известно, что задача распознавания графов из $L^1(k)$ полиномиально разрешима при $k = 2$ и является NP-полной при $k = 3$. Также известно, что для любого $k \geq 2$ графы из $L^1(k)$ характеризуются конечным списком запрещенных порожденных подграфов в классе расщепляемых графов. Вопрос о сложности распознавания графов из $L^m(k)$ при фиксированных $k \geq 2$ и $m \geq 2$ в настоящее время остается открытым. Здесь доказано, что для графов из $L^2(3)$ существует конечная характеризация в терминах запрещенных порожденных подграфов в классе расщепляемых графов. Отсюда, в частности, вытекает полиномиальная разрешимость задачи распознавания $G \in L^2(3)$ в классе расщепляемых графов. Результаты получены на основе доказанной в работе характеризации графов из $L^2(3)$ в терминах степеней вершин в одном из подклассов расщепляемых графов. В свою очередь, указанная характеризация получена с помощью известного описания графов из $L^m(k)$ в терминах покрытий кликами, а также доказанной в работе леммы о большой клике, уточняющей взаимное расположение клик в графе из $L^m(k)$.

Ключевые слова: граф пересечений ребер гиперграфа; запрещенный порожденный подграф; характеризация; расщепляемый граф.

CHARACTERIZATION AND RECOGNITION OF EDGE INTERSECTION GRAPHS OF 3-CHROMATIC HYPERGRAPHS WITH MULTIPLICITY AT MOST THAN TWO IN THE CLASS OF SPLIT GRAPHS

***T. V. LUBASHEVA*[a], *Y. M. METELSKY*[b]**

[a]*Belarus State Economic University, 26 Partyzanski Avenue, Minsk 220070, Belarus*
[b]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: Y. M. Metelsky (metelsky@bsu.by)

Let $L^m(k)$ denote the class of edge intersection graphs of k-chromatic hypergraphs with multiplicity at most m. It is known that the problem of recognizing graphs from $L^1(k)$ is polynomially solvable if $k = 2$ and is NP-complete if $k = 3$. It is also known that for any $k \geq 2$ the graphs from $L^1(k)$ can be characterized by a finite list of forbidden induced

Образец цитирования:
Лубашева Т. В., Метельский Ю. М. Характеризация и распознавание графов пересечений ребер 3-хроматических гиперграфов кратности не выше двух в классе расщепляемых графов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 94–99.

For citation:
Lubasheva T. V., Metelsky Y. M. Characterization and recognition of edge intersection graphs of 3-chromatic hypergraphs with multiplicity at most than two in the class of split graphs. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 3. P. 94–99 (in Russ.).

Авторы:
Татьяна Владимировна Лубашева – ассистент кафедры экономической информатики факультета менеджмента.
Юрий Михайлович Метельский – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры математической кибернетики механико-математического факультета.

Authors:
Tatiana V. Lubasheva, assistant at the department of economic informatics, faculty of management.
lubasheva_t@mail.ru
Yury M. Metelsky, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics.
metelsky@bsu.by

subgraphs in the class of split graphs. The question of the complexity of recognizing graphs from $L^m(k)$ for fixed $k \geq 2$ and $m \geq 2$ remains open. Here it is proved that there exists a finite characterization in terms of forbidden induced subgraphs for the graphs from $L^2(3)$ in the class of split graphs. In particular, it follows that the problem of recognizing graphs from $L^2(3)$ is polynomially solvable in the class of split graphs. The results are obtained on the basis of proven here characterization of the graphs from $L^2(3)$ in terms of vertex degrees in one of the subclasses of split graphs. In turn, this characterization is obtained using the well-known description of graphs from $L^m(k)$ by means of clique coverings and proven here Lemma on large clique, specifying the mutual location of cliques in the graph from $L^m(k)$.

Key words: edge intersection graph of hypergraph; forbidden induced subgraph; characterization; split graph.

Рассматриваем конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Обозначим множество вершин и множество (семейство) ребер графа (гиперграфа) G через $V(G)$ и $E(G)$ соответственно. Если $N(v) = N_G(v)$ – окружение вершины v в графе G, то $\deg(v) = \deg_G(v) = |N(v)|$ – степень вершины v. Будем считать, что $E_G(v)$ – множество ребер графа G, инцидентных v. Если $X \subseteq V(G)$, то $G(X)$ – подграф, порожденный множеством X, $\deg_X(v) = |N(v) \cap X|$ – степень вершины v относительно X.

Пусть t – натуральное число. Тогда произвольные функции $\varphi : V(G) \to \{1, 2, \ldots, t\}$ и $\psi : E(G) \to \to \{1, 2, \ldots, t\}$ называются соответственно *вершинной и реберной t-раскрасками* графа G. Если любые две смежные вершины графа имеют в вершинной t-раскраске различные образы, то такая раскраска называется *правильной*. Далее, $\chi(G)$ обозначает хроматическое число графа G, т. е. минимальное t, при котором существует правильная вершинная t-раскраска этого графа.

Граф $\Omega(F)$ *пересечений семейства* $F = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$ непустых множеств определяется условиями:

1) $V(\Omega(F)) = F$;

2) вершины S_i и S_j, $i \neq j$, смежны в $\Omega(F)$, если и только если $S_i \cap S_j \neq \varnothing$.

Граф $L(H)$ *пересечений ребер гиперграфа* H определяется как граф пересечений $\Omega(E(H))$. Другими словами, вершины графа $L(H)$ биективно соответствуют ребрам гиперграфа H и две вершины в графе $L(H)$ смежны тогда и только тогда, когда соответствующие ребра гиперграфа H пересекаются. Известно, что каждый граф является графом пересечений ребер некоторого гиперграфа [1].

Гиперграф H называется *k-хроматическим*, если существует разбиение $V(H) = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_l$ множества его вершин на $l \leq k$ цветных классов V_i такое, что каждое ребро гиперграфа содержит не более одной вершины из каждого цветного класса. В [2] класс графов пересечений ребер 2-хроматических гиперграфов охарактеризован посредством бесконечного списка запрещенных порожденных подграфов. Существование полиномиального алгоритма распознавания графов из этого класса доказано в [3]. Там же доказано, что задача распознавания графов пересечений ребер 3-хроматических гиперграфов является NP-полной.

Кратность пары вершин гиперграфа определяется как число его ребер, содержащих обе вершины пары. *Кратность* гиперграфа – это максимальная кратность пар его вершин. Класс графов пересечений ребер k-хроматических гиперграфов кратности не выше m обозначим через $L^m(k)$. В [4] класс $L^1(2)$ охарактеризован посредством бесконечного списка запрещенных порожденных подграфов. Известно, что задача распознавания графов из $L^1(k)$ полиномиально разрешима при $k = 2$ и является NP-полной при $k = 3$ [3]. Вопрос о сложности распознавания графов из класса $L^m(k)$ при фиксированных $k \geq 2$ и $m \geq 2$ на данный момент остается открытым.

Множество попарно смежных вершин графа называется *кликой*; *максимальная клика* максимальна относительно включения. Граф G называется *расщепляемым*, если существует разбиение множества его вершин $V(G) = C \cup S$ на клику C и независимое множество S (*полярное разбиение* (C, S)). Расщепляемый граф G с фиксированным полярным разбиением (C, S) назовем *расщепленным графом* и обозначим $G(C, S)$. В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что в полярном разбиении (C, S) расщепляемого графа клика C является максимальной. Удалив из расщепленного графа $G(C, S)$ все ребра, содержащиеся в клике C, получим двудольный граф H с разбиением на доли (C, S), который назовем *графом, ассоциированным с* $G(C, S)$, и обозначим как $H(C, S)$.

Известно, что для любого k класс $L^1(k)$ может быть охарактеризован посредством конечного списка запрещенных порожденных подграфов в классе расщепляемых графов [5].

В настоящей работе доказано, что для класса $L^2(3)$ существует конечная характеризация в терминах запрещенных порожденных подграфов в классе расщепляемых графов. Отсюда, в частности, вытекает полиномиальная разрешимость задачи распознавания графов из $L^2(3)$ в классе расщепляемых графов.

Характеризация и распознавание графов из $L^2(3)$ в классе расщепляемых графов

Конечное семейство $Q = (C_i : i \in I)$ – клик графа G – называется *покрытием* этого графа, если каждая вершина и каждое ребро (как пара вершин) графа G содержатся в некоторой C_i; клики C_i – *кластеры* покрытия Q. Покрытие Q графа G называется *k-хроматическим*, если $\chi(\Omega(Q)) \le k$, и *m-ограниченным*, если никакие два его кластера не имеют более чем m общих вершин. Далее, считаем, не ограничивая общности, что в k-хроматическом m-ограниченном покрытии Q никакой кластер не является подмножеством другого. В частности, одновершинный кластер в Q можно образовать лишь изолированной вершиной графа.

Лемма 1 [1]. *Граф G принадлежит классу $L^m(k)$ тогда и только тогда, когда существует k-хроматическое m-ограниченное покрытие этого графа.*

Клику K графа назовем (k, m)-кликой, если $|K| \ge m(k-1)^2 + 1$.

Лемма 2 (о большой клике). *Любая максимальная (k, m)-клика графа G является кластером каждого его k-хроматического m-ограниченного покрытия.*

Доказательство. Пусть $G \in L^m(k)$, а K – некоторая максимальная клика графа G, не являющаяся кластером некоторого k-хроматического m-ограниченного покрытия Q этого графа. Пусть далее $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ – кластеры покрытия Q, которые имеют непустое пересечение с кликой K. Тогда семейство $A = (A_1, A_2, \ldots, A_t)$, где $A_i = Q_i \cap K$, $i = 1, 2, \ldots, t$, является k-хроматическим m-ограниченным покрытием полного графа $G(K)$. Согласно высказанному выше предположению считаем, что покрытие A не содержит двух кластеров, один из которых является подмножеством другого, т. е. $A_i \setminus A_j \ne \varnothing$ для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, t\}$ таких, что $i \ne j$. Поскольку K – максимальная клика, то $K \ne A_i$ для любого $i = 1, 2, \ldots, t$.

Рассмотрим произвольный кластер A_j, $j \in \{1, 2, \ldots, t\}$, и вершину $v \in K \setminus A_j$. Поскольку K – клика, то вершина v смежна со всеми вершинами x кластера A_j в $G(K)$. В связи с тем что A – k-хроматическое m-ограниченное покрытие графа $G(K)$, ребра вида vx, где $x \in A_j$, покрываются не более чем $k-1$ кластерами, отличными от A_j, каждый из которых имеет с A_j не более чем m общих вершин. Таким образом, $|A_j| \le m(k-1)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, t$.

Далее, рассмотрим пару кластеров A_i и A_j покрытия A таких, что $A_i \cap A_j \ne \varnothing$. Для любой вершины $u \in A_i \setminus A_j$ ребра ux, где $x \in A_j \setminus A_i$, если таковые существуют, не принадлежат кластерам A_i и A_j. Поскольку A – k-хроматическое m-ограниченное покрытие графа $G(K)$, то ребра вида ux, где $x \in A_j \setminus A_i$, покрываются не более чем $k-2$ кластерами из A. Каждый из этих кластеров пересекается с A_j не более чем по m вершинам. Отсюда получаем следующую оценку: $|A_j \setminus A_i| \le m(k-2)$.

И наконец, рассмотрим произвольную вершину $w \in K$. Считаем, не ограничивая общности, что она принадлежит $s \le k$ кластерам $A_1, A_2, \ldots, A_s$ покрытия A. Из вышесказанного вытекает следующая цепочка соотношений: $|K| = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s| = |A_1| + |A_2 \setminus A_1| + |A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)| + \ldots + |A_s \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{s-1})| \le$

$\le m(k-1) + (s-1)m(k-2) \le m(k-1) + (k-1)m(k-2) = m(k-1)(1 + (k-2)) = m(k-1)^2$.

Таким образом, $|K| \le m(k-1)^2$. Следовательно, K не является (k, m)-кликой, что и доказывает лемму.

Далее, рассмотрим класс $L^2(3)$, а 3-хроматическое 2-ограниченное покрытие для краткости будем называть (3, 2)-*покрытием*.

Теорема 1. *Пусть G – расщепляемый граф с полярным разбиением (C, S), $|C| \ge 9$. Тогда $G \in L^2(3)$, если и только если выполнены условия:*

1) $\deg_S(v) \le 2$ *для любой вершины* $v \in C$;

2) $\deg(v) \le 4$ *для любой вершины* $v \in S$.

Доказательство. Пусть G – расщепляемый граф с полярным разбиением (C, S), $|C| \ge 9$. Не ограничивая общности, можно считать граф G связным.

Пусть $G \in L^2(3)$. Тогда в силу леммы 1 существует (3, 2)-покрытие Q графа G. Поскольку C есть (3, 2)-клика, то по лемме 2 имеем $C \in Q$. Из определения (3, 2)-покрытия вытекает, что кластерами покрытия Q, отличными от C, являются либо ребра, соединяющие вершины из C с вершинами из S, либо треугольники, в которых одна вершина принадлежит S, а две других – C. Кроме того, каждая вершина графа G входит не более чем в два кластера из Q, отличных от C. Отсюда вытекает выполнение условий 1) и 2) теоремы 1.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть G удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 1. Согласно лемме 1 достаточно доказать, что существует (3, 2)-покрытие этого графа.

По графу G построим граф G': для каждой вершины v графа G, принадлежащей S и удовлетворяющей неравенству $\deg(v) < 4$, добавим в клику C ровно $4 - \deg(v)$ новых вершин и соединим их с v. Полученный в результате расщепляемый граф G' с полярным разбиением (C', S) удовлетворяет следующим условиям:

1′) $\deg_S(v) \le 2$ *для любой вершины* $v \in C'$;

2′) $\deg(v) = 4$ *для любой вершины* $v \in S$.

Легко показать, что G и G' одновременно либо принадлежат, либо не принадлежат к классу $L^2(3)$. Поэтому далее, не ограничивая общности, считаем, что G удовлетворяет условиям 1′) и 2′).

Очевидно следующее утверждение.

Утверждение 1. Для расщепленного графа $G(C, S)$, где $|C| \ge 9$, удовлетворяющего условиям 1′) и 2′), существует (3, 2)-покрытие, если и только если для ассоциированного с ним двудольного графа $H(C, S)$ существует реберная 2-раскраска, удовлетворяющая условиям:

а) каждая вершина из S инцидентна двум ребрам одного цвета и двум – другого;

б) каждая вершина степени 2 из C инцидентна ребрам разного цвета.

Реберную 2-раскраску двудольного графа H с фиксированным разбиением на доли (C, S) назовем *сбалансированной*, если она удовлетворяет условиям а) и б) утверждения 1. Осталось доказать следующее утверждение.

Утверждение 2. Если двудольный граф H с разбиением на доли (C, S) удовлетворяет условиям:

1) $\deg(v) \le 2$ для любой вершины $v \in C$;

2) $\deg(v) = 4$ для любой вершины $v \in S$,

то для него существует сбалансированная реберная 2-раскраска.

Доказательство проведем методом математической индукции относительно числа вершин в доле S. Существование сбалансированной реберной 2-раскраски для графа H очевидно, если $|S| = 1$. Далее, считаем, что $|S| \ge 2$. Зафиксируем произвольную вершину $v \in S$ и возьмем некоторую сбалансированную реберную 2-раскраску $\varphi : E(H - v) \to \{1, 2\}$ графа $H - v$. Заметим, что если среди ребер графа $H - v$, смежных с ребрами из $E_H(v)$, есть не более двух ребер каждого цвета относительно φ, то раскраска φ может быть распространена на ребра из $E_H(v)$ до сбалансированной реберной 2-раскраски графа H.

Пусть среди ребер, смежных с ребрами из $E_H(v)$, есть три ребра одного цвета (считаем для определенности, что это цвет 2) и одно ребро другого (цвет 1). Распространим раскраску φ на ребра из $E_H(v)$ так, чтобы каждая вершина из $N_H(v)$ была инцидентна ребрам разного цвета. Тогда из четырех ребер множества $E_H(v)$ три получат цвет 1 и одно – цвет 2.

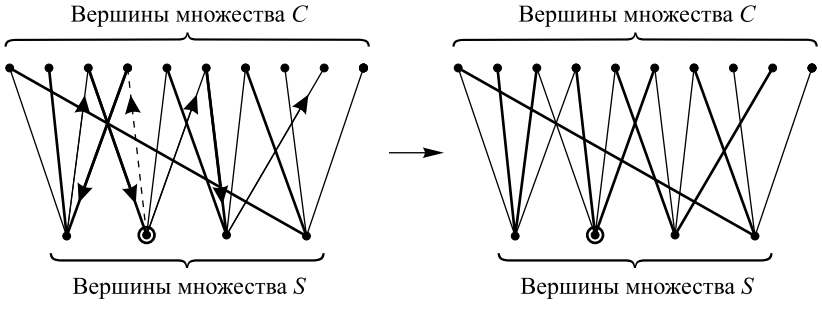
Построим в графе H цепь P, начинающуюся в вершине v, руководствуясь следующими правилами: в качестве первого ребра цепи выберем ребро цвета 1; каждое последующее ребро цепи будем выбирать цвета, отличного от предыдущего ребра; процесс построения цепи продолжается, пока возможно выбрать следующее ребро.

Процесс построения цепи P обязательно завершится, поскольку на каждом его шаге к текущей цепи добавляется новое ребро, а число ребер графа H конечно. Пронумеруем ребра цепи в порядке их добавления. Тогда каждое ребро цепи с нечетным номером имеет цвет 1, а с четным – цвет 2. По этой причине цепь P не может завершиться в вершине из $S \setminus \{v\}$, так как каждая такая вершина имеет степень 4 и ей инцидентно по два ребра каждого цвета. Эта цепь не может завершиться и в вершине v, поскольку в множестве $E_H(v)$ имеется единственное ребро цвета 2, и, следовательно, в случае (единственного) возврата в вершину v остается возможность продолжить цепь за счет одного из двух оставшихся ребер цвета 1 из $E_H(v)$.

Итак, построенная цепь P имеет нечетную длину, поскольку завершится в вершине из C. При этом последняя вершина цепи является висячей в графе H. (Висячая вершина в графе H обязательно существует, так как ребер, имеющих цвет 1, в этом графе больше, чем ребер, имеющих цвет 2.)

На ребрах построенной цепи P поменяем местами цвета 1 и 2. Цвета остальных ребер оставим без изменения. Обозначим полученную реберную 2-раскраску графа H через ψ. Ясно, что сужение раскраски ψ на ребра графа $H - v$ остается сбалансированной реберной 2-раскраской этого графа, при этом первое ребро цепи P, принадлежащее $E_H(v)$, уже получит цвет 2 относительно ψ. Следовательно, ψ является сбалансированной реберной 2-раскраской графа H.

Пример, иллюстрирующий процесс построения описанной цепи и изменения раскраски вдоль нее, приведен на рисунке. Снизу располагаются вершины из S, сверху – из C. Выделенная вершина – вершина v. Ребра цвета 1 изображены обычными линиями, цвета 2 – жирными. Последовательность построения ребер цепи показана с помощью ориентированных ребер, пунктиром обозначено первое ребро цепи.



Построение сбалансированной раскраски
Construction of a balanced coloring of bipartite graph

Остается случай, когда имеются ровно четыре ребра, смежных с ребрами из $E_H(v)$, одинакового цвета (например, цвет 2) относительно φ. В этом случае после распространения раскраски φ на ребра из $E_H(v)$ так, чтобы каждая вершина из $N_H(v)$ была инцидентна ребрам разного цвета, каждое из четырех ребер множества $E_H(v)$ получит цвет 1. Аналогично предыдущему случаю с помощью построения начинающейся в вершине v цепи с чередующимися цветами ребер можно последовательно дважды трансформировать реберную 2-раскраску φ графа H. После этого два ребра из $E_H(v)$ получат цвет 2 и будет построена сбалансированная реберная 2-раскраска графа H.

Утверждение 2 и, следовательно, теорема 1 доказаны.

Теорема 2. *В классе расщепляемых графов существует конечная характеризация графов из* $L^2(3)$ *в терминах запрещенных порожденных подграфов.*

Доказательство. Обозначим через F_i, $i = 1, 2, 3, 4$, граф, состоящий из полного графа K_9 и вершины, смежной с $i+4$ вершины из K_9. Используя леммы 1 и 2, легко убедиться в том, что расщепляемые графы $K_{1,4}$, F_1, F_2, F_3 и F_4 не принадлежат классу $L^2(3)$, а значит, являются запрещенными порожденными подграфами для графов из этого класса.

Пусть G – связный расщепляемый граф с полярным разбиением (C, S), где $|C| \le 10$. Поскольку звезда $K_{1,4}$ является для G запрещенным порожденным подграфом, то для любой вершины $v \in C$ выполняется неравенство $|N_S(v)| \le 3$. Отсюда следует, что $|S| \le 3|C|$ и $|G| = |C| + |S| \le |C| + 3|C| = 4|C| \le 40$. Обозначим через Γ множество связных расщепляемых графов не выше 40, не принадлежащих классу $L^2(3)$.

Если $|C| \geq 11$, то запрещение порожденных подграфов $K_{1,4}$, F_1, F_2, F_3 и F_4 обеспечивает выполнение условий теоремы 1. Таким образом, список запрещенных порожденных подграфов, определяющих принадлежность расщепляемого графа G классу $L^2(3)$, полностью исчерпывается графами из множества $\Gamma \cup \{K_{1,4}, F_1, F_2, F_3, F_4\}$ и, следовательно, является конечным. Что и требовалось доказать.

Следствие. *Задача распознавания графов из класса* $L^2(3)$ *полиномиально разрешима в классе расщепляемых графов.*

Библиографические ссылки

1. *Berge C.* Hypergraphs. Combinatorics of finite sets. Amsterdam : North-Holland, 1989.
2. *Тышкевич Р. И., Урбанович О. П.* Графы с матроидным числом 2 // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1989. № 3. С. 13–17.
3. *Метельский Ю. М., Тышкевич Р. И.* Пересечения матроидов и реберные гиперграфы // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2005. Т. 13, № 2. С. 44–54.
4. *Harary F., Holzmann C.* Line graphs of bipartite graphs // Rev. Soc. Mat. Chile. 1974. Vol. 1. P. 19–20.
5. *Бабайцев А. Ю., Тышкевич Р. И.* Линейная размерность расщепляемых графов // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1999. № 1. С. 112–115.

References

1. Berge C. Hypergraphs. Combinatorics of finite sets. Amsterdam : North-Holland, 1989.
2. Tyshkevich R. I., Urbanovich O. P. [Graphs with matroidal number 2]. *Vesti Akadjemii navuk BSSR. Ser. fiz.-mat. navuk.* 1989. No. 3. P. 13–17 (in Russ.).
3. Metelsky Yu. M., Tyshkevich R. I. [Matroid intersections and line hypergraphs]. *Tr. Inst. mat. Natsional'noi Akad. nauk Belarusi*. 2005. Vol. 13, No. 2. P. 44–54 (in Russ.).
4. Harary F., Holzmann C. Line graphs of bipartite graphs. *Rev. Soc. Mat. Chile.* 1974. Vol. 1. P. 19–20.
5. Babaitsev A. Yu., Tyshkevich R. I. [Linear dimension of split graphs]. *Vesti Nacyjanal'aj Akadjemii navuk Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk.* 1999. No. 1. P. 112–115 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 18.05.2017.
Received by editorial board 18.05.2017.