УДК 517.95

О МНОЖЕСТВЕ РАЗРУШЕНИЯ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

***А. Л. ГЛАДКОВ*[1]*, А. И. НИКИТИН*[2]**

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*
[2]*Витебский государственный университет им. П. М. Машерова, Московский проспект, 33, 210038, г. Витебск, Беларусь*

Рассматривается система полулинейных параболических уравнений $u_t = \Delta u + c_1(x, t)v^p,\ v_t = \Delta v + c_2(x, t)u^q,$ $(x, t) \in \Omega \times (0, +\infty),$ с нелинейными нелокальными граничными условиями $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \int_\Omega k_1(x, y, t)u^m(y, t)dy,$ $\frac{\partial v}{\partial \eta} = \int_\Omega k_2(x, y, t)v^n(y, t)dy,$ $(x, t) \in \partial\Omega \times (0, +\infty),$ и начальными данными $u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x),$ $x \in \Omega,$ где p, q, m, n – положительные постоянные, Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ с гладкой границей $\partial\Omega,$ η – единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega.$ Неотрицательные функции $c_i(x, t), i = 1, 2,$ определены при $x \in \bar{\Omega},$ $t \geq 0,$ и локально непрерывны по Гёльдеру; неотрицательные непрерывные функции $k_i(x, y, t), i = 1, 2,$

Образец цитирования:
Гладков АЛ, Никитин АИ. О множестве разрушения решений начально-краевой задачи для системы параболических уравнений с нелокальными граничными условиями. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;2:17–24.

For citation:
Gladkov AL, Nikitin AI. On blow-up set of solutions of initial boundary value problem for a system of parabolic equations with nonlocal boundary conditions. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;2:17–24. Russian.

Авторы:
Александр Львович Гладков – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой математической кибернетики механико-математического факультета.
Александр Игоревич Никитин – преподаватель кафедры прикладного и системного программирования факультета математики и информационных технологий.

Authors:
Alexander L. Gladkov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics.
gladkoval@bsu.by
Alexandr I. Nikitin, lecturer at the department of applied and system programming, faculty of mathematics and IT.
ip.alexnikitin@gmail.com

определены при $x \in \partial\Omega$, $y \in \bar{\Omega}$, $t \geq 0$; неотрицательные непрерывные функции $u_0(x), v_0(x)$ определены при $x \in \bar{\Omega}$ и удовлетворяют условиям $\frac{\partial u_0(x)}{\partial \eta} = \int\limits_{\Omega} k_1(x, y, 0) u_0^m(y) dy$, $\frac{\partial v_0(x)}{\partial \eta} = \int\limits_{\Omega} k_2(x, y, 0) v_0^n(y) dy$ при $x \in \partial\Omega$. В работе исследуется множество разрушения классических решений. Для $\max(p, q) \leq 1$, $\max(m, n) > 1$ и при выполнении определенных условий для коэффициентов $k_i(x, y, t)$, $i = 1, 2$, установлено, что решение задачи может разрушаться только на границе $\partial\Omega$.

Ключевые слова: система полулинейных параболических уравнений; нелокальные граничные условия; множество разрушения.

ON BLOW-UP SET OF SOLUTIONS OF INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF PARABOLIC EQUATIONS WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

A. L. GLADKOV [a], ***A. I. NIKITIN*** [b]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
[b]*Vitebsk State University named after P. M. Masherov, 33 Maskoŭski Avenue, Vitebsk 210038, Belarus*
Corresponding author: A. I. Nikitin (ip.alexnikitin@gmail.com)

We consider a system of semilinear parabolic equations $u_t = \Delta u + c_1(x, t) v^p$, $v_t = \Delta v + c_2(x, t) u^q$, $(x, t) \in \Omega \times (0, +\infty)$ with nonlinear nonlocal boundary conditions $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \int\limits_{\Omega} k_1(x, y, t) u^m(y, t) dy$, $\frac{\partial v}{\partial \eta} = \int\limits_{\Omega} k_2(x, y, t) v^n(y, t) dy$, $(x, t) \in \partial\Omega \times (0, +\infty)$, and initial data $u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x)$, $x \in \Omega$, where p, q, m, n are positive constants, Ω is bounded domain in $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ with a smooth boundary $\partial\Omega$, η is unit outward normal on $\partial\Omega$. Nonnegative locally Hölder continuous functions $c_i(x, t)$, $i = 1, 2$ are defined for $x \in \bar{\Omega}$, $t \geq 0$; nonnegative continuous functions $k_i(x, y, t)$, $i = 1, 2$ are defined for $x \in \partial\Omega$, $y \in \bar{\Omega}$, $t \geq 0$; nonnegative continuous functions $u_0(x), v_0(x)$ are defined for $x \in \bar{\Omega}$ and satisfy the conditions $\frac{\partial u_0(x)}{\partial \eta} = \int\limits_{\Omega} k_1(x, y, 0) u_0^m(y) dy$, $\frac{\partial v_0(x)}{\partial \eta} = \int\limits_{\Omega} k_2(x, y, 0) v_0^n(y) dy$ for $x \in \partial\Omega$. In the paper blow-up set of classical solutions is investigated. It is established that blow-up of the solutions can occur only on the boundary $\partial\Omega$ if $\max(p, q) \leq 1$, $\max(m, n) > 1$ and under certain conditions for the coefficients $k_i(x, y, t)$, $i = 1, 2$.

Key words: system of semilinear parabolic equations; nonlocal boundary conditions; blow-up set.

Введение

Рассматривается начально-краевая задача для системы полулинейных параболических уравнений с нелокальными граничными условиями

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c_1(x, t) v^p, \ v_t = \Delta v + c_2(x, t) u^q, x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \int\limits_{\Omega} k_1(x, y, t) u^m(y, t) dy, x \in \partial\Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = \int\limits_{\Omega} k_2(x, y, t) v^n(y, t) dy, x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \ v(x, 0) = v_0(x), x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

где p, q, m, n – положительные постоянные, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ с гладкой границей $\partial\Omega$, η – единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Будем предполагать, что для задачи (1) выполнено следующее:

$$\begin{aligned}
&c_i(x,t)\in C^{\alpha}_{\mathrm{loc}}\left(\overline{\Omega}\times[0,+\infty)\right),\ 0<\alpha<1,\ c_i(x,t)\geq 0,\ i=1,2,\\
&k_i(x,y,t)\in C\left(\partial\Omega\times\overline{\Omega}\times[0,+\infty)\right),\ k_i(x,y,t)\geq 0,\ i=1,2,\\
&u_0(x),\ v_0(x)\in C^1\left(\overline{\Omega}\right),\ u_0(x)\geq 0,\ v_0(x)\geq 0 \text{ в } \Omega,\\
&\frac{\partial u_0(x)}{\partial\eta}=\int_\Omega k_1(x,y,0)u_0^m(y)\,dy,\ \frac{\partial v_0(x)}{\partial\eta}=\int_\Omega k_2(x,y,0)v_0^n(y)\,dy \text{ на } \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{2}$$

Пусть $Q_T=\Omega\times(0,T)$, $S_T=\partial\Omega\times(0,T)$.

Определение. Точку $x_0\in\overline{\Omega}$ будем называть точкой разрушения решения (u,v) задачи при $t=T$, если существует такая последовательность $\{(x_n,t_n)\}$, что $x_n\in\Omega$, $t_n<T$, $(x_n,t_n)\to(x_0,T)$ при $n\to\infty$ и

$$\lim_{n\to\infty}\left(u(x_n,t_n)+v(x_n,t_n)\right)=\infty.$$

Множеством разрушения решения называется множество всех точек разрушения.

Начально-краевые задачи для нелинейных параболических уравнений и систем уравнений с нелокальными граничными условиями исследовались многими авторами [1–17]. В [14; 15] рассматривалась начально-краевая задача с нелокальными граничными условиями Неймана для полулинейного параболического уравнения с переменным коэффициентом

$$\begin{cases}
u_t=\Delta u+c(x,t)u^p,\ x\in\Omega,\ t>0,\\
\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=\displaystyle\int_\Omega k(x,y,t)u^l(y,t)\,dy,\ x\in\partial\Omega,\ t>0,\\
u(x,0)=u_0(x),\ x\in\Omega,
\end{cases}$$

где p, l – положительные постоянные, функции $c(x,t)$, $k(x,y,t)$, $u_0(x)$ удовлетворяют условиям, аналогичным условиям (2). Получен ряд утверждений о единственности решения, существовании и отсутствии глобальных решений, множестве разрушения решений. В [16; 17] для задачи (1) доказано существование локального классического решения, найдены достаточные условия существования и отсутствия глобальных решений.

В настоящей работе устанавливаются условия, при которых классические решения задачи (1) разрушаются на границе области.

Разрушение решений на границе

При доказательстве разрушения решений задачи (1) на границе будем использовать некоторые рассуждения из [14; 20; 21]. Введем обозначения

$$J_1(t)=\int_0^t\int_\Omega u^m(x,\tau)\,dx\,d\tau, \tag{3}$$

$$J_2(t)=\int_0^t\int_\Omega v^n(x,\tau)\,dx\,d\tau. \tag{4}$$

Для $m>1$ положим $\beta=0$, если $m^2-m-q\geq 0$, и $\beta=\dfrac{q+m-m^2}{m^2-m}$, если $m^2-m-q<0$. Далее через $s_i\ (i\in\mathbb{N})$ будут обозначаться положительные постоянные.

Лемма 1. *Пусть решение* (u,v) *задачи разрушается при* $t=T$, $m>1$ *и* $\inf\limits_{\partial\Omega\times Q_T}k_1(x,y,t)>0$. *Тогда для* $t\in[0,T)$

$$J_1(t)\leq s_1(T-t)^{-\frac{1}{m-1}}. \tag{5}$$

Если дополнительно $n\leq 1$ *и* $q\leq m$, *то для* $t\in[0,T)$

$$J_2(t)\leq s_2(T-t)^{-\beta}. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала неравенство (5). Пусть $G(x, y; t)$ – функция Грина для уравнения теплопроводности с однородными граничными условиями Неймана. Будем использовать следующие свойства функции Грина [18; 19]:

$$G(x, y; t-\tau) \geq 0,\ x,\ y \in \Omega, 0 \leq \tau < t < T, \tag{7}$$

$$\int_{\Omega} G(x,\ y;\ t-\tau)\,dy = 1, x \in \Omega, 0 \leq \tau < t < T, \tag{8}$$

$$\int_{\Omega} G(x,\ y;\ t-\tau)\,dx = 1, y \in \Omega, 0 \leq \tau < t < T, \tag{9}$$

$$\int_{\partial\Omega} G(x,\ \xi;\ t-\tau)\,dS_{\xi} \geq s_3, x \in \overline{\Omega}, 0 \leq \tau < t < T. \tag{10}$$

Как известно, пара функций (u, v) является решением (1) тогда и только тогда, когда выполнены равенства

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\Omega} G(x,\ y;\ t)u_0(y)\,dy + \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x,\ \xi;\ t-\tau)\int_{\Omega} k_1(\xi, y, \tau)u^m(y, \tau)\,dy\,dS_{\xi}\,d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} G(x,\ y;\ t-\tau)c_1(y, \tau)v^p(y, \tau)\,dy\,d\tau, \\ v(x, t) &= \int_{\Omega} G(x,\ y;\ t)v_0(y)\,dy + \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x,\ \xi;\ t-\tau)\int_{\Omega} k_2(\xi, y, \tau)v^n(y, \tau)\,dy\,dS_{\xi}\,d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} G(x,\ y;\ t-\tau)c_2(y, \tau)u^q(y, \tau)\,dy\,d\tau. \end{aligned} \tag{11}$$

Используя (3), (7), (10), (11) и неравенство Йенсена, имеем

$$\begin{aligned} J_1'(t) &= \int_{\Omega} u^m(x, t)\,dx \geq k^m \int_{\Omega}\left(\int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x,\ \xi;\ t-\tau)\int_{\Omega} u^m(y, \tau)\,dy\,dS_{\xi}\,d\tau\right)^m dx \geq \\ &\geq k^m |\Omega|^{1-m}\left(\int_{\Omega}\int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x,\ \xi;\ t-\tau)\int_{\Omega} u^m(y, \tau)\,dy\,dS_{\xi}\,d\tau\,dx\right)^m \geq (s_3 k)^m |\Omega| J_1^m(t), \end{aligned}$$

где $k = \inf\limits_{\partial\Omega\times Q_T} k_1(x, y, t)$. Отсюда следует, что

$$J_1'(t) \geq s_4 J_1^m(t). \tag{12}$$

Интегрируя неравенство (12) по интервалу (t, T), получим (5).

Установим теперь справедливость неравенства (6). В силу непрерывности функций $c_2(x, y)$, $k_2(x, y, t)$ существует такая положительная постоянная M, что $c_2(x, y) \leq M$, $k_2(x, y, t) \leq M$ в Q_T и $\partial\Omega \times Q_T$ соответственно. Используя (3), (4), (9), (11) и неравенство Йенсена, имеем

$$\begin{aligned} J_2' &= \int_{\Omega} v^n(x, t)\,dx \leq \int_{\Omega}\left(1 + v(x, t)\right)dx \leq |\Omega| + \int_{\Omega} v_0(y)\,dy + M|\partial\Omega|\int_0^t \int_{\Omega} v^n(y, \tau)\,dy\,d\tau + \\ &+ M\int_0^t \int_{\Omega} u^q(y, \tau)\,dy\,d\tau \leq s_5 + M|\partial\Omega| J_2(t) + M|\Omega|^{1-\frac{q}{m}} t^{1-\frac{q}{m}} J_1^{\frac{q}{m}}(t). \end{aligned}$$

Учитывая (5), получим

$$J_2'(t) \leq s_6 J_2(t) + s_7 (T-t)^{-\frac{q}{m(m-1)}} \tag{13}$$

для $t \in [0, T)$. Используя лемму Гронуолла для неравенства (13), имеем

$$J_2(t) \le s_7 \exp(s_6 t) \int_0^t (T-\tau)^{-\frac{q}{m(m-1)}} d\tau.$$

Таким образом, для $t \in [0, T)$

$$J_2(t) \le s_2,$$

если $m^2 - m - q \ge 0$, и

$$J_2(t) \le s_2 (T-t)^{-\frac{q+m-m^2}{m(m-1)}},$$

если $m^2 - m - q < 0.$ Лемма доказана.

Для $n > 1$ положим $\alpha = 0,$ если $n^2 - n - p \ge 0,$ и $\alpha = \dfrac{p + n - n^2}{n^2 - n},$ если $n^2 - n - p < 0.$ Аналогично лемме 1 доказывается следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть решение* (u, v) *задачи (1) разрушается при* $t = T,$ $n > 1,$ *и* $\inf\limits_{\partial\Omega\times Q_T} k_2(x, y, t) > 0.$ *Тогда для* $t \in [0, T)$

$$J_2(t) \le s_8 (T-t)^{-\frac{1}{n-1}}. \tag{14}$$

Если дополнительно $m \le 1$ *и* $p \le n,$ *то для* $t \in [0, T)$

$$J_1(t) \le s_9 (T-t)^{-\alpha}.$$

Теорема. *Пусть* $\max(p, q) \le 1,$ $\max(m, n) > 1.$ *Предположим, что* $\inf\limits_{\partial\Omega\times Q_T} k_1(x, y, t) > 0,$ *если* $m > 1,$ *и* $\inf\limits_{\partial\Omega\times Q_T} k_2(x, y, t) > 0,$ *если* $n > 1.$ *Тогда решение задачи (1) может разрушаться только на границе* $\partial\Omega.$

Доказательство. Допустим, что решение задачи (1) разрушается при $t = T$. Рассмотрим случай, когда $\min(m, n) > 1.$ Пусть $u(x, t) = \exp(ct) f(x, t),$ $v(x, t) = \exp(ct) g(x, t),$ где

$$c = \max\left(\sup_{Q_T} c_1(x, t),\ \sup_{Q_T} c_2(x, t)\right).$$

Нетрудно заметить, что (f, g) является решением задачи

$$\begin{cases} f_t = \Delta f + \exp(-(1-p)ct) c_1(x, t) g^p - cf, (x, t) \in Q_T, \\ g_t = \Delta g + \exp(-(1-q)ct) c_2(x, t) f^q - cg, (x, t) \in Q_T, \\ \dfrac{\partial f(x, t)}{\partial \eta} = \exp[(m-1)ct] \displaystyle\int_\Omega k_1(x, y, t) f^m(y, t) dy, (x, t) \in S_T, \\ \dfrac{\partial g(x, t)}{\partial \eta} = \exp[(n-1)ct] \displaystyle\int_\Omega k_2(x, y, t) g^n(y, t) dy, (x, t) \in S_T, \\ f(x, 0) = u_0(x), g(x, 0) = v_0(x), x \in \Omega. \end{cases}$$

Тогда (f, g) удовлетворяет следующим равенствам:

$$f(x, t) = \int_\Omega G(x, y; t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x, \xi; t-\tau) \int_\Omega \exp[(m-1)c\tau] k_1(\xi, y, \tau) f^m(y, \tau) dy dS_\xi d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega G(x, y; t-\tau) \left(\exp[-(1-p)c\tau] c_1(y, \tau) g^p(y, \tau) - cf(y, \tau)\right) dy d\tau,$$

$$g(x, t) = \int_\Omega G(x, y; t) v_0(y) dy + \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x, \xi; t-\tau) \int_\Omega \exp[(n-1)c\tau] k_2(\xi, y, \tau) g^n(y, \tau) dy dS_\xi d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega G(x, y; t-\tau) \left(\exp[-(1-q)c\tau] c_2(y, \tau) f^q(y, \tau) - cg(y, \tau)\right) dy d\tau \ - \tag{15}$$

для $(x, t) \in Q_T$. Возьмем произвольную область $\Omega' \subset\subset \Omega$ с границей $\partial\Omega' \in C^2$ такую, что $\mathrm{dist}(\partial\Omega, \Omega') = \varepsilon > 0$. Как известно (см., например, [19]),

$$0 < G(x, y; t-\tau) \le c_\varepsilon, x \in \Omega', y \in \Omega, 0 < \tau < t < T, \tag{16}$$

где c_ε – положительная постоянная, зависящая от ε. В силу непрерывности функций $k_i(x, y, t), i = 1, 2,$ существует такая положительная постоянная M, что $k_i(x, y, t) \le M$, $i = 1, 2,$ в $\partial\Omega \times Q_T$. Используя (5), (7), (8), (14)–(16), получим

$$\sup_{\Omega'}\left(f(x,t)+g(x,t)\right) \le \sup_{\Omega}\left(u_0(x)+v_0(x)\right) + c_\varepsilon |\partial\Omega| M \left(J_1(t)+J_2(t)\right) +$$

$$+ 2c\int_0^t\int_\Omega G(x, y; t-\tau)\,dy\,d\tau \le s_{10}\left[(T-t)^{-\frac{1}{m-1}} + (T-t)^{-\frac{1}{n-1}}\right] \le s_{11}(T-t)^{-\frac{1}{l-1}}, \tag{17}$$

где $l = \min(m, n)$. Следовательно,

$$\sup_{\Omega'} u(x, t) \le s_{12}(T-t)^{-\frac{1}{l-1}}, \quad \sup_{\Omega'} v(x, t) \le s_{12}(T-t)^{-\frac{1}{l-1}}. \tag{18}$$

Как показано в [21], существует такая функция $s(x) \in C^2\left(\overline{\Omega'}\right)$, что

$$\Delta s - \frac{l}{l-1}\frac{|\nabla s|^2}{s} \ge -s_{13} \text{ в } \Omega', s(x) = 0 \text{ на } \partial\Omega'. \tag{19}$$

Введем вспомогательные функции

$$w_1(x, t) = w_2(x, t) = s_{14}\exp(\mu t)\left(s(x) + s_{13}(T-t)\right)^{-\frac{1}{l-1}}, \tag{20}$$

где

$$s_{14} > \max\left(s_{13}^{\frac{1}{l-1}} s_{12},\ \sup_{\Omega} u_0(x)\left[\sup_{\Omega'} s(x) + s_{13}T\right]^{\frac{1}{l-1}},\ \sup_{\Omega} v_0(x)\left[\sup_{\Omega'} s(x) + s_{13}T\right]^{\frac{1}{l-1}}\right),$$

$$\mu \ge c\max\left(\left[\frac{\left(\sup_{\Omega'} s(x) + s_{13}T\right)^{\frac{1}{l-1}}}{s_{14}}\right]^{1-p}, \left[\frac{\left(\sup_{\Omega'} s(x) + s_{13}T\right)^{\frac{1}{l-1}}}{s_{14}}\right]^{1-q}\right).$$

Используя (19), (20), для $x \in \Omega'$ и $t \in [0, T)$. получим

$$w_{1t} - \Delta w_1 - c_1(x, t) w_2^p = \mu w_1 - c_1(x, t) w_1^p +$$

$$+\frac{w_1}{(l-1)\left[s(x) + s_{13}(T-t)\right]}\left(s_{13} + \Delta s - \frac{l|\nabla s|^2}{(l-1)\left[s(x) + s_{13}(T-t)\right]}\right) \ge 0.$$

Очевидно, что также $w_{2t} - \Delta w_2 - c_2(x, t) w_1^q \ge 0$ для $x \in \Omega'$ и $t \in [0, T)$. Тогда в силу (18), неравенств $w_1(x, 0) \ge u(x, 0)$ и $w_2(x, 0) \ge u(x, 0)$ по принципу сравнения имеем

$$u(x, t) \le w_1(x, t), v(x, t) \le w_2(x, t) \text{ в } \overline{\Omega'} \times [0, T).$$

Следовательно, (u, v) не может иметь точек разрушения в области $\Omega' \times [0, T]$. Поскольку Ω' – произвольное подмножество Ω, то решение задачи (1) разрушается только на границе $\partial\Omega$.

Теперь предположим, что $n \le 1$, $m > 1$. Тогда, как и в предыдущем случае, введем функции $f(x, t)$ и $g(x, t)$. Используя (5)–(8), (15), (16) и рассуждая таким же образом, как при выводе (17), получим

$$\sup_{\Omega'}\left(f(x,t)+g(x,t)\right) \le s_{15}\left[(T-t)^{-\frac{1}{m-1}} + (T-t)^{-\beta}\right] \le s_{16}(T-t)^{-\frac{1}{l-1}},$$

так как $\beta < \dfrac{1}{m-1}$. Дальнейшее доказательство такое же, как и выше. Доказательство теоремы для $m \le 1,\ n > 1$ проводится аналогично.

Библиографические ссылки

1. Cui Z, Yang Z. Roles of weight functions to a nonlinear porous medium equation with nonlocal source and nonlocal boundary condition. *Journal of Mathematical Analysis Applications*. 2008;342(1):559–570. DOI: 10.1016/j.jmaa.2007.11.055.

2. Cui Z, Yang Z, Zhang R. Blow-up of solutions for nonlinear parabolic equation with nonlocal source and nonlocal boundary condition. *Applied of Mathematics and Computation*. 2013;224:1–8. DOI: 10.1016/j.amc.2013.08.044.

3. Deng K, Dong Z. Blow-up for the equation with a general memory boundary condition. *Communications on Pure and Applied Analysis*. 2012;11:2147–2156.

4. Fang ZB, Zhang J. Global existence and blow-up of solutions for p-Laplacian evolution equation with nonlinear memory term and nonlocal boundary condition. *Boundary Value Problem*. 2014;2014(1):8. DOI: 10.1186/1687-2770-2014-8.

5. Gao Y, Gao W. Existence and blow-up of solutions for a porous medium equation with nonlocal boundary condition. *Applicable Analysis*. 2011;90(5):799–809.

6. Gladkov A, Guedda M. Blow-up problem for semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition. *Nonlinear Analysis*. 2011;74(13):4573–4580. DOI: 10.1016/j.na.2011.04.027.

7. Gladkov A, Kim KI. Blow-up of solutions for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2008;338(1):264–273. DOI: 10.1016/j.jmaa.2007.05.028.

8. Pao CV. Asimptotic behavior of solutions of reaction-diffusion equations with nonlocal boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1998;88(1):225–238. DOI: 10.1016/S0377-0427(97)00215-X.

9. Wang Y, Mu C, Xiang Z. Blowup of solutions to a porous medium equation with nonlocal boundary condition. *Applied of Mathematics and Computation*. 2007;192(2):579–585. DOI: 10.1076/j.amc.2007.03.036.

10. Yang L, Fan C. Global existence and blow-up of solutions to a degenerate parabolic system with nonlocal sources and nonlocal boundaries. *Monatshefte für Mathematik*. 2014;174:493–510.

11. Ye Z, Xu X. Global existence and blow-up for a porous medium system with nonlocal boundary conditions and nonlocal sources. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. 2013;82:115–126. DOI: 10.1016/j.na.2013.01.004.

12. Yin HM. On a class of parabolic equations with nonlocal boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2004;294(2):712–728. DOI: 10.1016/j.jmaa.2004.03.021.

13. Zheng S, Kong I. Roles of weight functions in a nonlinear nonlocal parabolic system. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. 2008;68(8):2406–2416. DOI: 10.1016/j.na.2007.01.067.

14. Gladkov A, Kavitova T. Blow-up problem for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition. *Applicable Analysis*. 2016;95(9):1974–1988. DOI: 10.1080/00036811.2015.1080353.

15. Gladkov A, Kavitova T. Initial boundary value problem for a semilinear parabolic equation with nonlinear nonlocal boundary conditions. *Ukrainian Mathematics Journal*. 2016;68(2):179–192. DOI: 10.1007/s11253-016-1217-2.

16. Никитин АИ. Локальное существование решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями. *Веснік ВДУ*. 2015;5:14–19.

17. Гладков АЛ, Никитин АИ. О глобальном существовании решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями Неймана. *Дифференциальные уравнения*. 2018;54(1):88–107. DOI: 10.1134/S0374064118010089.

18. Kahane CS. On the asymptotic behavior of solutions of parabolic equations. *Czechoslovak Mathematics Journal*. 1983;33(2): 262–285.

19. Hu B, Yin HM. Critical exponents for a system of heat equations coupled in a non-linear boundary condition. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 1996;19(14):1099–1120. DOI: 10.1002/(SICI)1099-1476(19960925)19:14<1099::AID-MMA780> 3.0.CO;2-J.

20. Deng K, Zhao CL. Blow-up for a parabolic system coupled in an equation and a boundary condition. *Proceedings of the Royal Society of Edinburg Section A*. 2001;131(6):1345–1355. DOI: 10.1017/S0308210500001426.

21. Hu B, Yin HM. The profile near blowup time for solution of the heat equation with a nonlinear boundary condition. *Transactions American Mathematical Society*. 1994;346(1):117–135. DOI: 10.1090/S0002-9947-1994-1270664-3.

References

1. Cui Z, Yang Z. Roles of weight functions to a nonlinear porous medium equation with nonlocal source and nonlocal boundary condition. *Journal of Mathematical Analysis Applications*. 2008;342(1):559–570. DOI: 10.1016/j.jmaa.2007.11.055.

2. Cui Z, Yang Z, Zhang R. Blow-up of solutions for nonlinear parabolic equation with nonlocal source and nonlocal boundary condition. *Applied of Mathematics and Computation*. 2013;224:1–8. DOI: 10.1016/j.amc.2013.08.044.

3. Deng K, Dong Z. Blow-up for the equation with a general memory boundary condition. *Communications on Pure and Applied Analysis*. 2012;11:2147–2156.

4. Fang ZB, Zhang J. Global existence and blow-up of solutions for *p*-Laplacian evolution equation with nonlinear memory term and nonlocal boundary condition. *Boundary Value Problem*. 2014;2014(1):8. DOI: 10.1186/1687-2770-2014-8.

5. Gao Y, Gao W. Existence and blow-up of solutions for a porous medium equation with nonlocal boundary condition. *Applicable Analysis*. 2011;90(5):799–809.

6. Gladkov A, Guedda M. Blow-up problem for semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition. *Nonlinear Analysis*. 2011;74(13):4573–4580. DOI: 10.1016/j.na.2011.04.027.

7. Gladkov A, Kim KI. Blow-up of solutions for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2008;338(1):264–273. DOI: 10.1016/j.jmaa.2007.05.028.

8. Pao CV. Asimptotic behavior of solutions of reaction-diffusion equations with nonlocal boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1998;88(1):225–238. DOI: 10.1016/S0377-0427(97)00215-X.

9. Wang Y, Mu C, Xiang Z. Blowup of solutions to a porous medium equation with nonlocal boundary condition. *Applied of Mathematics and Computation.* 2007;192(2):579–585. DOI: 10.1076/j.amc.2007.03.036.

10. Yang L, Fan C. Global existence and blow-up of solutions to a degenerate parabolic system with nonlocal sources and nonlocal boundaries. *Monatshefte für Mathematik*. 2014;174:493–510.

11. Ye Z, Xu X. Global existence and blow-up for a porous medium system with nonlocal boundary conditions and nonlocal sources. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. 2013;82:115–126. DOI: 10.1016/j.na.2013.01.004.

12. Yin HM. On a class of parabolic equations with nonlocal boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2004;294(2):712–728. DOI: 10.1016/j.jmaa.2004.03.021.

13. Zheng S, Kong I. Roles of weight functions in a nonlinear nonlocal parabolic system. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications.* 2008;68(8):2406–2416. DOI: 10.1016/j.na.2007.01.067.

14. Gladkov A, Kavitova T. Blow-up problem for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition. *Applicable Analysis*. 2016;95(9):1974–1988. DOI: 10.1080/00036811.2015.1080353.

15. Gladkov A, Kavitova T. Initial boundary value problem for a semilinear parabolic equation with nonlinear nonlocal boundary conditions. *Ukrainian Mathematics Journal*. 2016;68(2):179–192. DOI: 10.1007/s11253-016-1217-2.

16. Nikitin AI. Local existence of solutions of the initial-boundary value problem for the system of semilinear parabolic equations with nonlinear nonlocal boundary conditions. *Vesnik VDU.* 2015;5:14–19. Russian.

17. Gladkov AL, Nikitin AI. On global existence of solutions of initial boundary value problem for a system of semilinear parabolic equations with nonlinear nonlocal Neumann boundary conditions. *Differentsial'nye uravneniya.* 2018;54(1):88–107. DOI: 10.1134/S0374064118010089. Russian.

18. Kahane CS. On the asymptotic behavior of solutions of parabolic equations. *Czechoslovak Mathematics Journal*. 1983;33(2):262–285.

19. Hu B, Yin HM. Critical exponents for a system of heat equations coupled in a non-linear boundary condition. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 1996;19(14):1099–1120. DOI: 10.1002/(SICI)1099-1476(19960925)19:14<1099::AID-MMA780>3.0.CO;2-J.

20. Deng K, Zhao CL. Blow-up for a parabolic system coupled in an equation and a boundary condition. *Proceedings of the Royal Society of Edinburg Section A*. 2001;131(6):1345–1355. DOI: 10.1017/S0308210500001426.

21. Hu B, Yin HM. The profile near blowup time for solution of the heat equation with a nonlinear boundary condition. *Transactions American Mathematical Society*. 1994;346(1):117–135. DOI: 10.1090/S0002-9947-1994-1270664-3.

Статья поступила в редколлегию 20.03.2018.
Received by editorial board 20.03.2018.