УДК 517.925

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Б. С. КАЛИТИН [1)]

[1)]*Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Исследуется задача устойчивости равновесия нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений методом знакопостоянных функций Ляпунова. Выделены типы нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка общего вида, для которых выбор знакопостоянной функции не представляет сложностей. Для таких уравнений получены достаточные условия свойств устойчивости и асимптотической устойчивости (локальной и глобальной). Результаты об асимптотической устойчивости равновесия совпадают с необходимыми и достаточными условиями в соответствующем линейном случае. Следовательно, они отвечают общепринятым требованиям. Проведенные исследования показывают, что использование знакоположительных функций может дать преимущества по сравнению с классическим методом применения определенно-положительных функций Ляпунова.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение; равновесие; устойчивость; знакопостоянная функция Ляпунова.

ON THE STABILITY OF THIRD ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

B. S. KALITINE [a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

In this paper, we study the problem of stability of the equilibrium of nonlinear ordinary differential equations by the method of semi-definite Lyapunov's functions. We have identified nonlinear third order differential equations of general form for which the choice of a semi-definite function does not present difficulties. For such equations, sufficient conditions of stability and asymptotic stability (local and global) are obtained. The results of asymptotic stability of the equilibrium coincide with necessary and sufficient conditions in the corresponding linear case. Consequently, they meet generally accepted requirements. The conducted studies show that the use of semi-defined positive functions can give advantages in comparison with the classical method of application of Lyapunov's definite positive functions.

Key words: differential equation; equilibrium; stability; semi-definite Lyapunov's function.

Образец цитирования:
Калитин БС. Об устойчивости дифференциальных уравнений третьего порядка. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;2:25–33.

For citation:
Kalitine BS. On the stability of third order differential equations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;2:25–33. Russian.

Автор:
Борис Сергеевич Калитин – кандидат физико-математических наук; профессор кафедры аналитической экономики и эконометрики экономического факультета.

Author:
Boris S. Kalitine, PhD (physics and mathematics); professor at the department of analytical economics and econometrics, faculty of economy.
kalitine@yandex.by

Введение

Задача об устойчивости нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка вида $\dddot{x} + F(x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0$ рассматривалась многими авторами [1–8]. Подробное изложение результатов дано в монографии Е. А. Барбашина [9]. В указанных работах решается задача об устойчивости в целом (глобальная асимптотическая устойчивость) равновесия $x = \dot{x} = \ddot{x} = 0$ с использованием прямого метода А. М. Ляпунова [10], подразумевающего построение определенно-положительной функции V с неположительной производной по времени $\dot{V}$. Критерием качества полученных достаточных условий устойчивости в целом (а именно оценка близости достаточных условий к необходимым) служит тот факт, что в соответствующем линейном случае дифференциального уравнения $\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0,$ $a, b, c \in \mathbb{R},$ такие условия являются необходимыми и достаточными для асимптотической устойчивости.

Начиная с 1978 г. [11; 12] и по настоящее время [13–25] разрабатывается теория второго метода Ляпунова с привлечением знакопостоянных функций, которая расширяет область применения прямого метода Ляпунова в решении задач устойчивости движения. Возможность использования знакоположительных функций вместо определенно-положительных обосновывается специально разработанными методами качественной теории динамических процессов.

Цель настоящей статьи – проиллюстрировать применение знакопостоянных функций в решении проблем устойчивости равновесия на примере некоторых классов дифференциальных уравнений третьего порядка.

Для полноты изложения кратко описаны основные результаты обобщенного прямого метода Ляпунова для автономных дифференциальных уравнений.

Метод знакопостоянных функций

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), x \in G \subset \mathbb{R}^n, f(0) = 0, \tag{1}$$

где G – открытая связная окрестность начала координат; $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, удовлетворяющая условиям, обеспечивающим единственность решений в G.

Таким образом, можно считать, что в области G задана динамическая система, определяемая решениями $x(x_0, t),$ $x(x_0, 0) = x_0,$ $t \geq 0.$ Уравнение (1) имеет решение $x = 0$ (состояние равновесия).

Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное n-мерное евклидово пространство с нормой $\| \cdot \|$, Y – связное замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$, содержащее начало координат, и $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \|x\| < \varepsilon\}$ для $\varepsilon > 0$. Напомним следующие понятия и определения теории устойчивости [9; 10; 26].

Решение $x = 0$ системы (1) является:

• Y-устойчивым, если $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x_0 \in B_\delta \cap Y) \Rightarrow \|x(x_0, t)\| < \varepsilon \ \forall t \geq 0;$

• Y-притягивающим, если $(\forall \sigma > 0)(\forall \alpha > 0)(\exists T > 0)(\forall x_0 \in B_\sigma \cap Y) \Rightarrow \|x(x_0, t)\| < \alpha \ \forall t \geq T;$

• Y-асимптотически устойчивым, если оно Y-устойчиво и Y-притягивающее;

• B-устойчивым относительно Y [18, с. 194], если оно Y-устойчиво и для любой окрестности U начала координат существует компактное, положительно инвариантное, Y-асимптотически устойчивое множество K, содержащее точку $x = 0$;

• глобально Y-притягивающим, если $\forall x_0 \in Y$ решение $x(x_0, t) \to 0$ при $t \to +\infty$;

• глобально Y-асимптотически устойчивым, если оно Y-асимптотически устойчиво и глобально Y-притягивающее.

Отметим, что Y-асимптотическая устойчивость влечет B-устойчивость относительно Y. При $Y = \mathbb{R}^n$ из приведенных определений получаем общепринятые свойства устойчивости, притяжения и асимптотической устойчивости [26, с. 18–20].

Пусть $\mathbb{R}^+$ – множество неотрицательных действительных чисел, U – подмножество $\mathbb{R}^n$, $\overline{U}$ – замыкание U, $C^1(U, \mathbb{R}^+)$ – множество непрерывно дифференцируемых функций $V : U \to \mathbb{R}^+$.

Теорема 1 [14–16]. *Пусть существуют окрестность U точки $x = 0$ и функция $V \in C^1(U, \mathbb{R}^+)$ такая, что:*

1) $V(x) \geq 0 \ \forall x \in U,$ $V(0) = 0$;

2) $\dot{V}(x) \leq 0 \ \forall x \in U$;

3) решение $x = 0$ системы (1) B-устойчиво относительно $Y_0 = \{x \in \overline{U} : V(x) = 0\}$.

Тогда нулевое решение системы (1) устойчиво.

Теорема 2 [11; 19, с. 66; 20, с. 239]. *Пусть существуют окрестность U точки $x = 0$ и функция $V \in C^1\left(U, \mathbb{R}^+\right)$ такая, что:*

1) $V(x) \geq 0 \;\; \forall x \in U, \; V(0) = 0$;

2) $\dot{V}(x) \leq 0 \;\; \forall x \in U$;

3) решение $x = 0$ системы (1) Y-асимптотически устойчиво для $Y = \left\{x \in \overline{U} : \dot{V}(x) = 0\right\}$.

Тогда начало координат системы (1) асимптотически устойчиво.

Теорема 3 [11; 19, с. 66; 20, с. 207]. *Пусть* $G = \mathbb{R}^n$. *Предположим, что для системы (1) существует непрерывно дифференцируемая функция* $V \in C^1\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+\right)$ *такая, что:*

1) $V(x) \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n, \; V(0) = 0$;

2) $\dot{V}(x) \leq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n$;

3) $x = 0$ глобально Y_∞-асимптотически устойчиво для $Y_\infty = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\right\}$;

4) все решения системы (1) ограничены при $t \geq 0$.

Тогда решение $x = 0$ системы (1) глобально асимптотически устойчиво.

Замечание 1. Использование знакопостоянной функции Ляпунова со свойствами $V(x) \geq 0, \; V(0) = 0$, $\dot{V}(x) \leq 0$ в теоремах 1–3 дает дополнительную информацию о наличии положительно инвариантного множества $Y_0 = \left\{x \in \overline{U} : V(x) = 0\right\}$, т. е. $\forall x_0 \in Y_0 \;\; x(x_0, t) \in Y_0$ для всех $t > 0$. Следовательно, в конкретном случае использования знакоположительной функции Ляпунова со знакоотрицательной производной по времени неустойчивость равновесия относительно множества Y_0 влечет его неустойчивость относительно всего фазового пространства.

Уравнения третьего порядка

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dddot{x} + a(x, \dot{x})\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0, \;\; x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где функции $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывны и обеспечивают единственность решений. Пусть $f(0, 0) = 0$, т. е. уравнение обладает нулевым решением $x = \dot{x} = \ddot{x} = 0$.

Предположим, что существуют непрерывно дифференцируемая функция $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha(0, 0) = 0$, и число $h > 0$ такое, что выполнено тождество

$$f(x, y) = \alpha'_x y + \alpha(x, y)\left(a(x, y) - \alpha'_y\right) \text{ для всех } \|(x, y)\| < h. \tag{3}$$

Здесь положено $\alpha'_x = \dfrac{\partial \alpha(x, y)}{\partial x}$, $\alpha'_y = \dfrac{\partial \alpha(x, y)}{\partial y}$.

От уравнения (2) перейдем к системе уравнений, используя замену переменных

$$y = \dot{x}, \;\; z = \ddot{x} + \alpha(x, y).$$

Для координаты z последовательно получаем

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \dddot{x} + \alpha'_x \dot{x} + \alpha'_y \dot{y} = -a(x, y)\ddot{x} - f(x, y) + \alpha'_x \dot{x} + \alpha'_y \dot{y} = \\
&= -a(x, y)\left(z - \alpha(x, y)\right) - f(x, y) + \alpha'_x y + \alpha'_y \ddot{x} = \\
&= -a(x, y)\left(z - \alpha(x, y)\right) - f(x, y) + \alpha'_x y + \alpha'_y\left(z - \alpha(x, y)\right) = \\
&= -f(x, y) - \left(a(x, y) - \alpha'_y\right)\left(z - \alpha(x, y)\right) + \alpha'_x y.
\end{aligned}$$

Заменив функцию $f(x, y)$ ее представлением (3), приходим к системе уравнений

$$\dot{x} = y, \;\; \dot{y} = z - \alpha(x, y), \;\; \dot{z} = -\left(a(x, y) - \alpha'_y(x, y)\right)z. \tag{4}$$

Поясним тождество (3) для линейного случая, когда уравнение (2) имеет вид

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0, \;\; a, b, c \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Из предполагаемого равенства (3) выводим

$$cx + by = \alpha'_x(x, y)\, y + \alpha(x, y)\left(a - \alpha'_y(x, y)\right). \tag{6}$$

Если уравнению (6) удовлетворяет линейная функция $\alpha(x, y) = \alpha x + \beta y,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},$ то, подставляя ее в тождество (3), приходим к равенствам

$$c = \alpha(a - \beta),\ b = \alpha + \beta(a - \beta). \tag{7}$$

Отсюда $c = \left(b - \beta(a - \beta)\right)(a - \beta),$ или $c = \left(\beta^2 - \beta a + b\right)(a - \beta).$ Поэтому число β является корнем кубического уравнения

$$\beta^3 - 2a\beta^2 + \left(a^2 + b\right)\beta + c - ab = 0. \tag{8}$$

Как известно, вещественный корень $\beta \in \mathbb{R}$ уравнения (8) всегда существует. Определяя таким образом β, из первого уравнения (7) имеем: $\alpha = \dfrac{c}{a - \beta},\ \beta \neq a.$

В результате анализа проведенных рассуждений можно сделать вывод о том, что в линейном случае для задачи об асимптотической устойчивости всегда существует функция $\alpha(x, y),$ удовлетворяющая равенству (3). Отметим, что вырожденный случай $\beta = a$ дает $c = 0$. Следовательно, нулевое решение линейного уравнения (5) не может быть асимптотически устойчивым.

С учетом равенств (7) характеристическое уравнение для (5) записывается в виде

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + \left(\alpha + \beta(a - \beta)\right)\lambda + \alpha(a - \beta) = 0,\ \text{т. е.}\ \left(\lambda^2 + \beta\lambda + \alpha\right)(\lambda + a - \beta) = 0.$$

Для асимптотической устойчивости нулевого решения (5) корни характеристического уравнения должны иметь отрицательные вещественные части. Последнее будет выполнено при условиях

$$a > \beta > 0,\ \alpha > 0.$$

Возьмем знакопостоянную в пространстве $\mathbb{R}^3$ функцию

$$V(x, y, z) = 0{,}5z^2. \tag{9}$$

Ее производная по времени в силу системы (4) равна

$$\dot{V}(x, y, z) = -\left(a(x, y) - \alpha'_y(x, y)\right)z^2. \tag{10}$$

Производная будет неположительной в h-окрестности равновесия $x = y = z = 0$ системы (4), если

$$a(x, y) \geq \alpha'_y(x, y)\ \text{для}\ \left\|(x, y)\right\| < h. \tag{11}$$

Устойчивость. Воспользуемся теоремой 1. Заметим, что множество $Y_0,$ на котором $V(x, y, z) = 0,$ определяется равенством $z = 0$. Это множество положительно инвариантно, и на нем система (4) переходит в систему второго порядка

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -\alpha(x, y). \tag{12}$$

Согласно теореме 1 при наличии знакоположительной функции V со знакоотрицательной производной по времени $\dot{V}$ асимптотическая устойчивость решения $x = y = 0$ системы (12) (а значит, и B-устойчивость) влечет устойчивость решения $x = y = z = 0$ системы уравнений (5). Напомним, что система (12) изучена в работе [27]. Приемлемые условия асимптотической устойчивости такой системы отмечены следующими соотношениями [9, с. 84]:

$$\alpha(x, 0)x > 0, 0 < |x| < h;\ y\left(\alpha(x, y) - \alpha(x, 0)\right) > 0,\ y \neq 0. \tag{13}$$

Таким образом, устойчивость решения $x = y = z = 0$ системы (4) будет обеспечена, если существует непрерывно дифференцируемая функция $\alpha(x, y),$ удовлетворяющая тождеству (3) и неравенству (11), а также выполнены условия (13).

Требование асимптотической устойчивости системы (12) можно ослабить, заменив его согласно теореме 1 требованием B-устойчивости нулевого решения указанной системы. Это будет выполнено, например, если начало координат системы (12) имеет тип «центро-фокус» [28, с. 86] с функцией

$$\alpha(x, y) = y\sin^2\left(\frac{\pi}{x^2 + y^2}\right) + x,\ x^2 + y^2 > 0.$$

Для данного случая усиление результата состоит в том, что на множестве, где $V(x, y, z) = 0$, вместо Y_0-асимптотической устойчивости имеет место ситуация с неасимптотической устойчивостью.

Асимптотическая устойчивость. Пусть выполняются условия (13). Тогда из второго условия с учетом непрерывной дифференцируемости функции $\alpha(x, y)$ следует, что в достаточно малой окрестности точки $x = y = 0$ необходимо выполняется неравенство $\alpha'_y(x, y) > 0$. В этом легко убедиться, воспользовавшись формулой Тейлора для функции $\alpha(x, y)$.

При исследовании задачи об асимптотической устойчивости снова воспользуемся знакопостоянной функцией (9) с производной по времени (10), но с той лишь разницей, что теперь потребуем выполнение условий более жестких, чем (11), а именно:

$$a(x, y) > \alpha'_y(x, y) > 0, \ \|(x, y)\| < h. \tag{14}$$

Тогда множества Y_0 и Y, где соответственно $V(x, y, z) = 0$ и $\dot{V}(x, y, z) = 0$, совпадают. Следовательно, имеют место все условия теоремы 2. Таким образом, если существует функция $\alpha(x, y)$, удовлетворяющая тождеству (3) и неравенствам (13) и (14), то нулевое решение $x = y = z = 0$ системы дифференциальных уравнений (4) будет асимптотически устойчивым.

Отметим, что указанные достаточные условия асимптотической устойчивости являются необходимыми и достаточными в линейном случае уравнения (5) с условиями (7).

Глобальная асимптотическая устойчивость. Для того чтобы применить теорему 3, необходимо во всех требованиях предыдущего подраздела положить (формально) $h = +\infty$ и доказать при этом ограниченность всякого решения $(x(t), y(t), z(t))$ системы (4).

Глобальная асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (12) будет иметь место при следующих условиях [9, с. 84]:

$$\alpha(x, 0)x > 0, x \neq 0; \ y(\alpha(x, y) - \alpha(x, 0)) > 0, \ y \neq 0; \ \int_0^x \alpha(x, 0)dx \to +\infty \text{ при } |x| \to \infty. \tag{15}$$

Считая, что требования (15) выполнены, рассмотрим определенно положительную функцию

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x \alpha(x, 0)dx + \frac{c}{2}z^2, \quad c > 0.$$

Ее производную по времени в силу системы (4) можно преобразовать следующим образом:

$$\dot{V}(x, y, z) = yz - y\alpha(x, y) + y\alpha(x, 0) - c\left(a(x, y) - \alpha'_y(x, y)\right)z^2 =$$

$$= -c\left(a(x, y) - \alpha'_y(x, y)\right)\left(z - \frac{y}{2c\left(a(x, y) - \alpha'_y(x, y)\right)}\right)^2 - y\left(\alpha(x, y) - \alpha(x, 0)\right) + \frac{y^2}{4c\left(a(x, y) - \alpha'_y(x, y)\right)}.$$

Потребуем выполнение условий

$$\begin{gathered} a(x, y) > \alpha'_y(x, y) > 0 \ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ \frac{\alpha(x, y) - \alpha(x, 0)}{y} > \frac{1}{4c\left(a(x, y) - \alpha'_y(x, y)\right)}, \ \ y \neq 0, \end{gathered} \tag{16}$$

которые обеспечивают знакоотрицательность производной. Отметим, что во втором неравенстве (16) число $c > 0$ можно взять как угодно большим.

Таким образом, условия глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения системы (4) сводятся к выполнению требований (15) и (16) при достаточно большом $c > 0$.

Теорема 4. *Предположим, что для дифференциального уравнения* (*2*) *существует непрерывно дифференцируемая функция* $\alpha(x, y)$, *удовлетворяющая тождеству (3) и неравенству (11). Тогда решение* $x = \dot{x} = \ddot{x} = 0$ *уравнения (2) будет:*

- *устойчивым, если выполнены условия (13);*
- *асимптотически устойчивым, если выполнены условия (13) и (14);*
- *глобально асимптотически устойчивым, если выполнены условия (15) и условия (16) при достаточно большом* $c > 0$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение третьего порядка

$$\dddot{x} + a(x, \dot{x})\ddot{x} + \alpha^2\dot{x} + (\alpha^2 x + 2\alpha\dot{x})(a(x, \dot{x}) - 2\alpha) = 0, \tag{17}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ – постоянный параметр, а функция $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и обеспечивает единственность решений. Положив для уравнения (17)

$$\alpha(x, y) = \alpha^2 x + 2\alpha y, \;\; f(x, y) = \alpha^2 y + (\alpha^2 x + 2\alpha y)(a(x, y) - 2\alpha),$$

легко проверить, что выполняются тождества (3). В данном случае система (12) линейна, ее характеристическое уравнение есть $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \alpha^2 = 0,$ т. е. имеется единственный корень $\lambda = -\alpha.$

Согласно теореме 4 решение $x = \dot{x} = \ddot{x} = 0$ уравнения (17) будет устойчивым, если найдется такое $h > 0$, что

$$a(x, \dot{x}) \geq 2\alpha > 0 \;\text{ для }\; \|(x, \dot{x})\| < h,$$

асимптотически устойчивым, когда

$$a(x, \dot{x}) > 2\alpha > 0 \;\text{ для }\; \|(x, \dot{x})\| < h.$$

Нулевое решение уравнения (18) будет глобально асимптотически устойчивым, когда для некоторого достаточно большого числа $c > 0$ выполняется неравенство

$$a(x, \dot{x}) > 2\alpha + \frac{1}{8c\alpha} \;\; \forall (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2.$$

Замечание 2. Полученные в примере условия глобальной асимптотической устойчивости не требуют предположений о существовании частных производных функции $a(x, \dot{x}),$ которые присутствуют в каждом из утверждений [9, гл. V, § 1] для скалярных дифференциальных уравнений третьего порядка. Таким образом, теорема 4 выделяет новый класс дифференциальных уравнений, для которых сформулированы достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости.

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\dddot{x} + (f(x, \dot{x}) + \alpha)\ddot{x} + (\alpha f(x, \dot{x}) + c)\dot{x} + \alpha c x = 0, \tag{18}$$

где α и c – постоянные величины; функция $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и обеспечивает условия единственности решений. От уравнения (18) перейдем к системе уравнений, используя обозначения $y = \dot{x} + \alpha x,\; z = \dot{y}.$ Тогда для переменной z будем иметь

$$\dot{z} = \ddot{y} = \dddot{x} + \alpha\ddot{x} = -(f(x, \dot{x}) + \alpha)\ddot{x} - (\alpha f(x, \dot{x}) + c)\dot{x} - \alpha c x + \alpha\ddot{x} =$$
$$= -f(x, \dot{x})(\ddot{x} + \alpha\dot{x}) - c(\dot{x} + \alpha x) = -f(x, \dot{x})\dot{y} - cy = -f(x, y - \alpha x)z - cy.$$

В результате получим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -\alpha x + y, \;\; \dot{y} = z, \;\; \dot{z} = -cy - \varphi(x, y)z, \tag{19}$$

где положено $\varphi(x, y) = f(x, y - \alpha x)$. Предположим, что $c > 0$, и рассмотрим знакопостоянную функцию

$$V(x, y, z) = 0{,}5(cy^2 + z^2) \geq 0. \tag{20}$$

Ее производная по времени в силу (19) есть $\dot{V}(x, y, z) = -\varphi(x, y)z^2.$ Для знакоотрицательности производной потребуем, чтобы для некоторого числа $h > 0$ выполнялось

$$\varphi(x, y) \geq 0 \;\text{ при }\; \|(x, y)\| < h. \tag{21}$$

Устойчивость. Укажем условия, обеспечивающие требования теоремы 1. Заметим, что множество $Y_0,$ на котором $V(x, y, z) = 0,$ определяется равенствами $y = z = 0$. Это множество положительно инвариантно и на нем система (19) переходит в скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = -\alpha x. \tag{22}$$

Согласно теореме 1 при наличии функции $V(x, y, z) \geq 0$ для $c > 0$ с производной $\dot{V}(x, y, z) \leq 0$ асимптотическая устойчивость решения $x = 0$ уравнения (22) (а значит, и B-устойчивость) влечет устойчивость решения $x = y = z = 0$ системы уравнений (19). Очевидно, что при $\alpha > 0$ нулевое решение уравнения (22) асимптотически устойчиво. Следовательно, решение $x = y = z = 0$ системы (19) будет устойчивым, если $c > 0$, $\alpha > 0$ и при некотором $h > 0$ выполнено условие (21).

Асимптотическая устойчивость. Потребуем выполнение строгих неравенств:

$$\varphi(x, y) > 0,\ \|(x, y)\| < h;\ \ c > 0,\ \alpha > 0. \tag{23}$$

Для того чтобы воспользоваться теоремой 2, рассмотрим множество, где $\dot{V} = 0.$ Оно определяется равенством $z = 0$. На этом множестве система (19) упрощается, а именно: с учетом неравенства $c > 0$ она сводится к скалярному дифференциальному уравнению (22), нулевое решение которого асимптотически устойчиво при $\alpha > 0$. Следовательно, по теореме 2 решение $x = y = z = 0$ системы (19) будет асимптотически устойчивым, если имеют место неравенства (23).

Глобальная асимптотическая устойчивость. Согласно теореме 3 укажем условия, которые наряду с (23) при всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ обеспечивают ограниченность любого решения $(x(t), y(t), z(t))$ системы (19) при $t \geq 0.$ Заметим, что наличие знакопостоянной функции (20) при $c > 0$ со знакоотрицательной производной в силу указанной системы означает ограниченность компонент $y(t)$ и $z(t)$ в том смысле, что можно указать числа $A > 0$ и $B > 0$, для которых $|y(t)| < A,\ |z(t)| < B\ \ \forall t > 0.$

Рассмотрим еще одну функцию Ляпунова $V_1(x) = 0{,}5x^2.$ Ее производная по времени в силу (19) есть $\dot{V}_1(x) = -\alpha x^2 + xy.$ Поскольку компонента $y(t)$ всякого решения $(x(t),\ y(t),\ z(t))$ системы (19) ограничена при $t \geq 0,$ а $\alpha > 0$, то для достаточно больших значений $|x(t)|$ выполняется $\dot{V}_1(x) < 0.$ Это и означает ограниченность компоненты $|x(t)|$ при $t \geq 0.$

В результате приходим к следующей теореме.

Теорема 5. *Предположим, что $c > 0$, $\alpha > 0$. Тогда решение $x = \dot{x} = \ddot{x} = 0$ уравнения (18) будет:*

- *устойчивым, если при некотором $h > 0$ $f(x, \dot{x} - \alpha x) \geq 0$ для $\|(x, \dot{x})\| < h;$*
- *асимптотически устойчивым, если при некотором $h > 0$ $f(x, \dot{x} - \alpha x) > 0$ для $\|(x, \dot{x})\| < h;$*
- *глобально асимптотически устойчивым, если $f(x, \dot{x} - \alpha x) > 0$ для $(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2.$*

Нетрудно проверить, что условия асимптотической устойчивости теоремы 5 совпадают с аналогичными условиями в линейном случае, когда для уравнения (18) $f(x, \dot{x}) = a = \text{const}.$

Заключение

Отметим следующие свойства полученных результатов, вытекающие из проведенных исследований устойчивости равновесия.

Во-первых, в каждом из рассмотренных случаев построение знакоположительной функции V оказывается достаточно простым, в то время как совершенно не очевидно, что поиск знакоопределенной функции Ляпунова, соответствующей классической теории устойчивости, приведет к положительному результату.

Во-вторых, нетрудно убедиться в том, что требования теорем 4 и 5 относительно глобальной асимптотической устойчивости не совпадают с соответствующими требованиями в утверждениях (изложенных в [9]) для скалярного дифференциального уравнения вида (2).

Библиографические ссылки

1. Барбашин ЕА. Об устойчивости решения одного уравнения третьего порядка. *Прикладная математика и механика*. 1952;16(3):629–632.

2. Шиманов СН. Об устойчивости в целом одной нелинейной системы уравнений. *Успехи математических наук*. 1953;8(6):155–157.

3. Плисс ВА. Исследование одного нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка. *Доклады АН СССР*. 1956;111(6):1078–1180.

4. Железнов ЕИ. Об устойчивости в целом одной нелинейной системы трех уравнений. *Труды Уральского политехнического института*. 1958;74:41–45.

5. Огурцов АИ. Об устойчивости в целом решений нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. *Известия вузов. Математика*. 1958;1(2):124–129.

6. Огурцов АИ. Об устойчивости решений двух нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. *Прикладная математика и механика*. 1959;23(1):179–181.

7. Огурцов АИ. Об устойчивости решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. *Известия вузов. Математика*. 1959;3:200–209.

8. Ezeilo JOC. On the stability of the solutions of a certain differential equations of the third order. *The Quarterly Journal of Mathematics*. 1960:11(1):64–69. DOI: 10.1093/qmath/11.1.64.
9. Барбашин ЕА. *Функции Ляпунова*. Москва: Наука; 1970.
10. Ляпунов АМ. *Общая задача об устойчивости движения*. Москва, Ленинград: Гостехиздат; 1950.
11. Булгаков НГ, Калитин БС. Обобщение теорем второго метода Ляпунова. 1. Теория. *Известия АН БССР. Серия физико-математических наук*. 1978;3(3):32–36.
12. Булгаков НГ, Калитин БС. Обобщение теорем второго метода Ляпунова. 2. Примеры. *Известия АН БССР. Серия физико-математических наук*. 1979;1(1):70–74.
13. Kalitine B. Sur la stabilité des ensembles compacts positivement invariants des systèmes dynamiques. *RAIRO Automatique/Systems Analysis and Control*. 1982;16(3):275–286.
14. Калитин БС. К устойчивости компактных множеств. *Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Механика.* 1984; 3:61–62.
15. Калитин БС. *B*-устойчивость и проблема Флорио – Сейберта. *Дифференциальные уравнения*. 1999;35(4):453–463.
16. Kalitine B. Sur le théorème de la stabilité non asymptotique dans la méthode directe de Lyapunov. *Comptes Rendus Mathematique.* 2004;338(2):163–166. DOI: 10.1016/j.crma.2003.11.026.
17. Андреев АС. *Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений*. Ульяновск: Издательство УлГУ, 2005.
18. Павликов СВ. *Метод функционалов Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации*. Набережные Челны: Издательство Института управления; 2010.
19. Калитин БС. *Устойчивость дифференциальных уравнений (Метод знакопостоянных функций Ляпунова)*. Саарбрюккен: LAP; 2012.
20. Калитин БС. *Устойчивость неавтономных дифференциальных уравнений*. Минск: БГУ; 2013.
21. Калитин БС. *О проблемах устойчивости неавтономных дифференциальных уравнений (Метод знакопостоянных функций Ляпунова)*. Саарбрюккен: LAP; 2015.
22. Калитин БС. О решении задач устойчивости прямым методом Ляпунова. *Дифференциальные уравнения.* 2016;52(6):839–840.
23. Калитин БС. К прямому методу Ляпунова для полудинамических систем. *Математические заметки*. 2016;100(4):531–543. DOI: 10.4213/mzm11007.
24. Калитин БС. О решении задач устойчивости прямым методом Ляпунова. *Известия вузов. Математика*. 2017;6:33–43.
25. Седова НО. Глобальная асимптотическая устойчивость и стабилизация в нелинейной каскадной системе с запаздыванием. *Известия вузов. Математика*. 2008;11:68–79.
26. Rouche N, Habets P, Laloy M [Stability Theory Liapunov's Direct Method]. New York: Springer; 1977. DOI: 10.1007/978-1-4684-9362-1. (Applied Mathematical Sciences; volume 22).
27. Amerio L. Studio asintotico del moto di un punto su una linea chinsa per azione di forze indipendenti dal tempo. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e serie*. 1950;3(1–4):19–57.
28. Bhatia NP, Szegö G. *Stability theory of Dynamical systems*. Berlin, Heidelberg: Springer; 1970.

References

1. Barbashin EA. On the stability of the solution of a third-order equation. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1952;16(3): 629–632. Russian.
2. Shimanov SN. On the stability of the solution of a non-linear system of equations. *Uspekhi matematicheskikh nauk*. 1953;8(6): 155–157. Russian.
3. Pliss VA. Investigation of a third-order non-linear differential equation. *Doklady AN SSSR*. 1956;111(6):1078–1180. Russian.
4. Zheleznov EI. On the stability in the large of a non-linear system of three equations. *Trudy Ural'skogo polytechnical institute*. 1958;74:41–45. Russian.
5. Ogurtsov AI. On the stability in general of solutions of third-order and fourth-order non-linear differential equations. *Izvestiya vuzov. Mathematika*. 1958;1(2):124–129. Russian.
6. Ogurtsov AI. On the stability of solutions of two non-linear differential equations of the third and fourth orders. *Applied Mathematics and Mechanics*. 1959;23(1):179–181. Russian.
7. Ogurtsov AI. On the stability of solutions of certain third-order and fourth-order non-linear differential equations. *Izvestiya vuzov. Mathematika*. 1959;3:200–209. Russian.
8. Ezeilo JOC. On the stability of the solutions of a certain differential equations of the third order. *The Quarterly Journal of Mathematics*. 1960:11(1):64–69. DOI: 10.1093/qmath/11.1.64.
9. Barbashin EA. *Funktsii Lyapunova* [Lyapunov functions]. Moscow: Nauka; 1970. Russian.
10. Lyapunov AM. *Obshchaya zadacha ob ustoichivosti dvizheniya* [The general problem of the stability of motion]. Moscow, Leningrad: Gostekhizdat; 1950. Russian.
11. Bulgakov NG, Kalitin BS. Generalization of the theorems of the second Lyapunov method. 1. Theory. *Izvestiya Academii nauk BSSR. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk*. 1978;3(3):32–36. Russian.
12. Bulgakov NG, Kalitin BS. Generalization of the theorems of the second Lyapunov method. 2. Examples. *Izvestiya Academii nauk BSSR. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk*. 1979;1(1):70–74. Russian.
13. Kalitine B. Sur la stabilité des ensembles compacts positivement invariants des systèmes dynamiques. *RAIRO Automatique/Systems Analysis and Control*. 1982;16(3):275–286.
14. Kalitine BS. On the stability of compact sets. *Vestnik BGU. Seriya 1, Fizika. Matematika. Mekhanika*. 1984;3:61–62. Russian.
15. Kalitine BS. *B*-stability and the Florio – Seibert problem. *Differential Equations*. 1999;35(4):453–463. Russian.
16. Kalitine B. On the theorem for nonasymptotic stability in the direct Lyapunov's method. *Comptes Rendus Mathematique.* 2004;338(2):163–166. DOI: 10.1016/j.crma.2003.11.026.
17. Andreev AS. *Ustoichivost' neavtonomnykh funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii* [Stability of non-autonomous functional-differential equations]. Ulyanovsk: Izdatel'stvo UlGU; 2005. Russian.

18. Pavlikov SV. *Metod funktsionalov Lyapunova v zadachakh ustoichivosti i stabilizatsii* [Method of Lyapunov functionals in problems of stability and stabilization]. Naberezhnye Chelny: Izdatel'stvo Instituta upravleniya; 2010. Russian.

19. Kalitine BS. *Ustoichivost' differentsial'nykh uravnenii (Metod znakopostoyannykh funktsii Lyapunova)* [Stability of differential equations (Lyapunov's method of constant-valued functions)]. Saarbrücken: LAP; 2012. Russian.

20. Kalitine BS. *Ustoichivost' neavtonomnykh differentsial'nykh uravnenii* [Stability of non-autonomous differential equations]. Minsk: Belarusian State University; 2013. Russian.

21. Kalitine BS. *O problemakh ustoichivosti neavtonomnykh differentsial'nykh uravnenii (Metod znakopostoyannykh funktsii Lyapunova)* [On stability problems of non-autonomous differential equations (Lyapunov's method of constant-valued functions)]. Saarbrücken: LAP; 2015. Russian.

22. Kalitine BS. On the solution of stability problems by the direct Lyapunov method. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika*. 2017;6:33–43. Russian.

23. Kalitine BS. K pryamomu metodu Lyapunova dlya poludinamicheskikh sistem [To the direct Lyapunov method for semi-dynamical systems]. *Matematicheskie zametki*. 2016;100(4):531–543. Russian. DOI: 10.4213/mzm11007.

24. Kalitine BS. O reshenii zadach ustoichivosti pryamym metodom Lyapunova [On the solution of stability problems by the direct Lyapunov method]. *Izvestiya vuzov. Mathematika*. 2017;6:33–43. Russian.

25. Sedova NO. The Global asymptotic stability and stabilization in nonlinear cascade system with delay. *Izvestiya vuzov. Mathematika*. 2008;11:68–79. Russian.

26. Rouche N, Habets P, Laloy M [Stability Theory Liapunov's Direct Method]. New York: Springer; 1977. DOI: 10.1007/978-1-4684-9362-1. (Applied Mathematical Sciences; volume 22).

27. Amerio L. Studio asintotico del moto di un punto su una linea chinsa per azione di forze indipendenti dal tempo. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e serie*. 1950;3(3):19–57. Italian.

28. Bhatia NP, Szegö G. *Stability theory of Dynamical systems*. Berlin, Heidelberg: Springer; 1970.

Статья поступила в редколлегию 26.10.2017.
Received by editorial board 26.10.2017.