УДК 519.21

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ГРУПП СИММЕТРИЙ ЛИ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ДОХОДНОСТИ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК С НЕЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ДРЕЙФА И КВАДРАТА ВОЛАТИЛЬНОСТИ

Д. А. ПАВЛИВ[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Одной из центральных задач финансового анализа является изучение поведения динамики процентных ставок. Наиболее известные аффинные модели не способны описать реальные кривые доходности с необходимой точностью, поэтому все чаще исследователи пытаются построить более сложные и, как считается, правдоподобные неаффинные модели временной структуры доходности процентных ставок. Одной из главных проблем такого построения является решение параболического дифференциального уравнения в частных производных, задающего стоимость бескупонной облигации: для исследования свойств моделей удобно иметь решение в аналитическом виде. В данной работе рассматривается обобщенная модель с нелинейными функциями дрейфа и квадрата волатильности, которая включает в себя большинство уже известных моделей. Для решения параболического уравнения, связанного с такой моделью, используется теория групп Ли, позволяющая систематизировать и полностью алгоритмизировать подход к построению решений. В результате найдены решения некоторых частных случаев

Образец цитирования:
Павлив ДА. Об использовании групп симметрий Ли для моделей временной структуры доходности процентных ставок с нелинейными функциями дрейфа и квадрата волатильности. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;2:34–46.

For citation:
Pauliu DA. On the usage of the Lie group symmetries for term structure models with nonlinear drift and squared volatility functions. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;2:34–46. Russian.

Автор:
Дмитрий Александрович Павлив – аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Г. А. Медведев.

Author:
Dzmitry A. Pauliu, postgraduate student at the department of probability theory and mathematical statistics, faculty of applied mathematics and computer science.
375293325768@yandex.ru

моделей, как новых, не встречавшихся ранее автору, так и уже известных. Также для неаффинной модели Ана – Гао получено более общее по сравнению с оригинальным решение. В завершение проведен численный эксперимент с использованием реальных данных Европейского центрального банка.

Ключевые слова: группы симметрий Ли; инфинитезимальный генератор; процентные ставки; кривая доходности; форвардная кривая; бескупонные облигации.

ON THE USAGE OF THE LIE GROUP SYMMETRIES FOR TERM STRUCTURE MODELS WITH NONLINEAR DRIFT AND SQUARED VOLATILITY FUNCTIONS

D. A. PAULIU [a]

[a] *Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

One of the central tasks of financial analysis is the study of the behavior of the dynamics of interest rates. The most well-known affine models are not able to describe real yield curves with the necessary accuracy, so more and more often researchers are trying to build more complex and, it is believed, likelihood non-affinity models of the term structure of interest rate yields. One of the main problems of constructing such models is the solution of a parabolic differential equation in partial derivatives, which sets the cost of a zero-coupon bond – in order to study the properties of models it is convenient to have such a solution in an analytical form. In this paper, we consider a generalized model with nonlinear drift and squared volatility functions, which includes most of the already known models. To solve a parabolic equation associated with such a model, we use the theory of Lie groups, which makes it possible to systematize and completely algorithmize the approach to constructing solutions. On the basis of this approach, solutions are found for some particular cases of models, both new ones that have not been previously encountered by the author, and those that already known. Also for the non-affine Ana – Gao model, a more general solution is found in comparison with the original one. In the end, a numerical experiment was carried out using real data from the European Central Bank.

Key words: Lie group symmetries; infinitesimal generator; interest rates; yield curve; forward rate; zero-coupon bonds.

Введение

Одной из ключевых задач в современном финансовом анализе является изучение поведения мгновенной процентной ставки. Большинство существующих математических моделей описывают процесс мгновенной процентной ставки $r(t)$ с помощью диффузионного уравнения вида

$$\mathrm{d}r(t) = \mu(t, r)dt + \sigma(t, r)\mathrm{d}W(t), \tag{1}$$

где $\mu(t, r)$ и $\sigma(t, r)$ – функции дрейфа и волатильности; $W(t)$ – винеровский процесс.

В зависимости от вида функций дрейфа и квадрата волатильности можно разделить модели на два класса: аффинные, для которых указанные функции линейны, и неаффинные. Аффинные модели просты и хорошо изучены, но, как показывает практика, не способны с необходимой точностью описать поведение реальных данных. Например, в [1] на основе анализа исторических сведений было показано, что реальные данные предполагают нелинейные дрейф и волатильность. Поэтому изучение неаффинных моделей становится все более популярным в последнее время.

Один из основных этапов построения и анализа моделей вида (1) – решение связанного с ним дифференциального уравнения в частных производных относительно стоимости бескупонной облигации $P(t, r; T)$, где T – срок до погашения ценной бумаги:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, r)\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \mu(t, r)\frac{\partial P}{\partial r} - rP = 0,\ P(T, r; T) = 1. \tag{2}$$

Самый распространенный подход при решении уравнения (2) – априорное знание «удачной» замены переменных, основанное на опыте исследователя. Однако такой подход является алгоритмически несистематизированным и трудно программируемым. В качестве примера можно привести аффинные модели, где необходимо заранее знать вид решения, или, например, модель Ана – Гао [2], где используется метод функционального разделения переменных путем их неочевидной замены.

В своей работе [3] норвежский математик Софус Ли описывает систематизированную теорию построения групп симметрий дифференциальных уравнений, определяющих инвариантные (относительно структуры уравнения) преобразования. Позже эта теория получила свое развитие в работах Н. Х. Ибрагимова (например, [4]). Оказывается, что большинство известных методов решения дифференциальных уравнений, таких как замена переменных, метод понижения порядка уравнения, метод разделения переменных, метод функционального разделения переменных и др., являются частными случаями теории Ли.

В данной работе на основе теории групп симметрий Ли рассматривается решение уравнений временной структуры для моделей временной доходности процентных ставок с нелинейным дрейфом, которая объединяет в себе, как частные случаи, новые и хорошо известные существующие модели.

Основные определения и подходы теории групп Ли

Для формального описания методологии теории групп Ли рассмотрим в качестве примера параболическое дифференциальное уравнение в частных производных относительно функции $P(r, \tau)$

$$\Delta = P_\tau - F(\tau, r, P, P_r, P_{rr}) = 0 \tag{3}$$

вместе с обратимыми трансформациями переменных τ, r, P:

$$\overline{\tau} = f(\tau, t, P, a),\ \ \overline{r} = g(\tau, t, P, a),\ \ \overline{P} = g(\tau, t, P, a), \tag{4}$$

зависящими от параметра a. Если трансформация (4) переводит решение уравнения (3) в решение того же уравнения, то она называется симметрией. Множество всех симметрий G уравнения (3) образует группу и называется группой симметрий Ли.

В [3] показано, что поиск симметрий уравнения (3) эквивалентен поиску инфинитезимальных функций μ, ξ, η, определяемых как

$$\overline{\tau} \approx \tau + a\mu(\tau, r, P),\ \ \overline{r} \approx r + a\xi(\tau, r, P),\ \ \overline{P} \approx P + a\eta(\tau, r, P).$$

Для удобства выкладок и анализа было предложено использовать следующий оператор инфинитезимальных трансформаций:

$$X = \mu(\tau, r, P)\frac{\partial}{\partial\tau} + \xi(\tau, r, P)\frac{\partial}{\partial r} + \eta(\tau, r, P)\frac{\partial}{\partial P}, \tag{5}$$

известный в литературе как инфинитезимальный оператор или генератор группы G.

Поиск симметрий уравнения (3) сводится к решению уравнения, называемого уравнением симметрии,

$$X^{(2)}(\Delta)\Big|_{\Delta = 0} = 0 \tag{6}$$

на границе (3), где $X^{(2)}$ – вторая пролонгация оператора (5), определяемая как

$$\begin{gathered} X^{(2)} = \mu(\tau, r, P)\frac{\partial}{\partial\tau} + \xi(\tau, r, P)\frac{\partial}{\partial r} + \eta(\tau, r, P)\frac{\partial}{\partial P} + \\ + \vartheta(\tau, r, P, P_\tau, P_r)\frac{\partial}{\partial P_\tau} + \rho(\tau, r, P, P_\tau, P_r)\frac{\partial}{\partial P_r} + \zeta(\tau, r, P, P_\tau, P_r, P_{r\tau}, P_{rr})\frac{\partial}{\partial P_{rr}}, \end{gathered} \tag{7}$$

где

$$\begin{gathered} \vartheta(\tau, r, P, P_\tau, P_r) = \eta_\tau - \xi_\tau P_r + (\eta_P - \mu_\tau)P_\tau - \xi_P P_\tau P_r - \mu_P P_\tau^2, \\ \rho(\tau, r, P, P_\tau, P_r) = \eta_r + (\eta_P - \xi_r)P_r - \mu_r P_\tau - \xi_P P_r^2 - \mu_P P_\tau P_r, \\ \zeta(\tau, r, P, P_\tau, P_r, P_{r\tau}, P_{rr}) = \eta_{rr} + (2\eta_{rP} - \xi_{rr})P_r - \mu_{rr}P_\tau + (\eta_{PP} - 2\xi_{rP})P_r^2 - \\ - 2\mu_{rP}P_\tau P_r - \xi_{PP}P_r^3 - \mu_{PP}P_r^2 P_\tau + (\eta_P - 2\xi_r)P_{rr} - \\ - 2\mu_r P_{r\tau} - 3\xi_P P_r P_{rr} - \mu_P P_\tau P_{rr} - 2\mu_P P_r P_{r\tau}. \end{gathered}$$

Следует обратить внимание на то, что пролонгация (7) рассматривает τ, ρ, зависимую переменную P и ее производные как независимые переменные. Уравнение (6) решается относительно функций μ, ξ, η.

Несмотря на свою громоздкость, обычно уравнение (6) решается просто, путем «зануления» коэффициентов при независимых переменных, а результат выглядит следующим образом:

$$\mu(\tau, r, P) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i(\tau, r, P),\ \xi(\tau, r, P) = \sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i(\tau, r, P),\ \eta(\tau, r, P) = \sum_{i=1}^{n} c_i \eta_i(\tau, r, P),\ n > 0,$$

что задает n-мерное пространство инфинитезимальных операторов

$$X_i = \mu_i(\tau, r, P)\frac{\partial}{\partial \tau} + \xi_i(\tau, r, P)\frac{\partial}{\partial r} + \eta_i(\tau, r, P)\frac{\partial}{\partial P}, \quad i = \overline{1, n},$$

и соответствующих трансформаций (4) как решение системы

$$\frac{\partial \overline{\tau}}{\partial a_i} = \mu_i\left(\overline{\tau}, \overline{r}, \overline{P}\right),\ \frac{\partial \overline{r}}{\partial a_i} = \xi_i\left(\overline{\tau}, \overline{r}, \overline{P}\right),\ \frac{\partial \overline{P}}{\partial a_i} = \eta_i\left(\overline{\tau}, \overline{r}, \overline{P}\right),\ i = \overline{1, n}. \tag{8}$$

Трансформации, определяемые как решение (8), в силу своих свойств (они переводят решение уравнения в решение) позволяют искать новые решения исходного уравнения (3) на основе известных. Так, воспользовавшись простейшими или даже тривиальными решениями, иногда можно построить более сложные решения.

В тех случаях, когда неизвестно ни одного решения уравнения (3), ищут инвариантные относительно трансформаций решения. Данная техника заключается в поиске симметрий специального вида, переводящих решение уравнения в само себя.

Описание модели

В работе [1] показано, что реальные данные финансового рынка свидетельствуют о нелинейном поведении как функции дрейфа, так и квадрата волатильности процесса краткосрочной процентной ставки. В частности, эмпирически установлено, что оптимальная форма функции волатильности моделей временной доходности процентных ставок должна быть пропорциональна $r^{\frac{3}{2}}$. В работе [2] описана (опираясь на результаты [1]) неаффинная модель, удовлетворяющая указанным выше свойствам. Здесь будет предложена более общая модель с неаффинными функциями дрейфа и волатильности, включающая в себя большинство известных моделей временной структуры как частные случаи.

Рассмотрим неаффинную модель вида

$$\mathrm{d}r = \left(ar^p + b(t)r^q\right)\mathrm{d}t + cr^k\mathrm{d}W, \tag{9}$$

где a, c, p, q, k – некоторые константы; $b(t)$ – произвольная функция. Диффузионное уравнение (9) соответствует следующему уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{1}{2}c^2 r^{2k}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \left(ar^p + b(\tau)r^q\right)\frac{\partial P}{\partial r} - rP,\ P(0, r) = 1, \tag{10}$$

где $\tau = T - \tau$ есть время до погашения бескупонной облигации.

Найдем классические симметрии Ли для (1). Уравнение симметрии после перегруппировки принимает вид

$$c^2r^{2k}\mu_P P_r P_{r\tau} + c^2 r^{2k}\mu_r P_{r\tau} + \frac{1}{2}c^2r^{2k}\left(\left(ar^p + b(\tau)r^q\right)\mu_{PP} + \xi_{PP}\right)P_r^3 + \frac{1}{4}c^4r^{4k}\mu_{PP}P_r^2P_{rr} -$$
$$-\frac{1}{2}c^2r^{2k}\left(\eta_{PP} + rP\mu_{PP} - 2\left(\left(ar^p + b(\tau)r^q\right)\mu_{rP} + \xi_{rP}\right) - 2k(\theta - r)\mu_{rP}\right)P_r^2 +$$
$$+\frac{1}{2}c^2r^{2k}\left(2\xi_P + c^2r^{2k}\mu_{rP}\right)P_rP_{rr} +$$
$$+\frac{1}{4}c^2r^{2k-1}\left(-4k\xi + r\left(2rP\mu_P + 2\left(ar^p + b(\tau)r^q\right)\mu_r + 4\xi_r + c^2r^{2k}\mu_{rr} - 2\mu_\tau\right)\right)P_{rr} -$$
$$-P_r\left(apr^{p-1} + qr^{q-1}b(\tau)\right)\xi + rPP_r\left(ar^p + r^qb(\tau)\right)\mu_P + rPP_r\xi_P +$$
$$+c^2r^{2k}P_r\left(-2\eta_{rP} - 2rP\mu_{rP} + \left(ar^p + b(\tau)r^q\right)\mu_{rr} + \xi_{rr}\right) +$$
$$+P_r\left(ar^p + b(\tau)r^q\right)\left(\left(ar^p + b(\tau)r^q\right)\mu_r + \xi_r - \mu_\tau\right) - 2\xi_\tau - r^qP_rb_\tau\mu +$$
$$+r\eta + P\xi - r^2P^2\mu_P - \left(ar^p + r^qb(\tau)\right)\eta_r - rP\left(ar^p + r^qb(\tau)\right)\mu_r -$$
$$-\frac{1}{2}c^2r^{2k}\left(\eta_{rr} + rP\mu_{rr}\right) + \eta_\tau + rP\left(-\eta_P + \mu_\tau\right) = 0,$$

что эквивалентно системе уравнений

$$\mu_P = 0, \tag{11}$$

$$\mu_r = 0, \tag{12}$$

$$\left(ar^p + b(\tau)r^q\right)\mu_{PP} + \xi_{PP} = 0, \tag{13}$$

$$\eta_{PP} + rP\mu_{PP} - 2\left(\left(ar^p + b(\tau)r^q\right)\mu_{rP} + \xi_{rP}\right) - 2k(\theta - r)\mu_{rP} = 0, \tag{14}$$

$$\mu_{PP} = 0, \tag{15}$$

$$2\xi_P + c^2 r^{2k}\mu_{rP} = 0, \tag{16}$$

$$-4k\xi + r\left(2rP\mu_P + 2\left(ar^p + b(\tau)r^q\right)\mu_r + 4\xi_r + c^2 r^{2k}\mu_{rr} - 2\mu_\tau\right) = 0, \tag{17}$$

$$\begin{gathered} -2\left(apr^p + qr^q b(\tau)\right)\xi + r\left(2rP\left(ar^p + r^q b(\tau)\right)\mu_P + 2rP\xi_P + \right. \\ + c^2 r^{2k}\left(-2\eta_{rP} - 2rP\mu_{rP} + \left(ar^p + b(\tau)r^q\right)\mu_{rr} + \xi_{rr}\right) + \\ \left. + 2\left(ar^p + b(\tau)r^q\right)\left(\left(ar^p + b(\tau)r^q\right)\mu_r + \xi_r - \mu_\tau\right) - 2\xi_\tau\right) - 2r^{q+1}b_\tau\mu = 0, \end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered} r\eta + P\xi - r^2P^2\mu_P - \left(ar^p + r^q b(\tau)\right)\eta_r - rP\left(ar^p + r^q b(\tau)\right)\mu_r - \\ - \frac{1}{2}c^2 r^{2k}\left(\eta_{rr} + rP\mu_{rr}\right) + \eta_\tau + rP\left(-\eta_P + \mu_\tau\right) = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Из (11), (12) и (15) можно заключить, что

$$\mu = A(\tau), \tag{20}$$

где $A(\tau)$ – некоторая пока неизвестная функция. Из уравнений (13), (16) и (17) с учетом (20) получим

$$\xi = \begin{cases} re(\tau) + \dfrac{A'(\tau)r\ln r}{2}, & k = 1, \\ r^k e(\tau) + \dfrac{rA'(\tau)}{2(1-k)}, & k \neq 1, \end{cases} \tag{21}$$

где $e(\tau)$ – функция, подлежащая определению. После подстановки (20) и (21) в уравнение (14) имеем

$$\eta = G(\tau, r)P + d(\tau, r),$$

где $G(\tau, r)$ и $d(\tau, r)$ – неизвестные функции. Подставляя найденные значения в (18), находим значение функции $G(\tau, r)$:

$$G(\tau, r) = \begin{cases} h(\tau) - \dfrac{ae(\tau)}{c^2}r^{p-1} - \dfrac{aA_\tau}{2c^2}r^{p-1}\ln r - \dfrac{b(\tau)A_\tau}{2c^2}r^{q-1}\ln r - \\ -\dfrac{1}{c^2}\left(b(\tau)e(\tau) + \dfrac{b_\tau A(\tau)}{q-1}\right)r^{q-1} + \left(\dfrac{A_\tau}{4} - \dfrac{e_\tau}{c^2}\right)\ln r - \\ -\dfrac{A_{\tau\tau}}{4c^2}\ln^2 r, \quad k = 1, \\ h(\tau) + \dfrac{k}{2}e(\tau)r^{k-1} - \dfrac{a}{c^2}e(\tau)r^{p-k} + \dfrac{aA_\tau}{2c^2(k-1)}r^{p-2k+1} - \\ -\dfrac{b(\tau)e(\tau)}{c^2}r^{q-k} + \left(\dfrac{b(\tau)A_\tau}{2c^2(k-1)} - \dfrac{b_\tau A(\tau)}{c^2(1-2k+q)}\right)r^{q-2k+1} + \\ +\dfrac{e_\tau}{c^2(k-1)}r^{1-k} - \dfrac{A_{\tau\tau}}{4c^2(k-1)^2}r^{2(1-k)}, \quad k \neq 1. \end{cases}$$

С учетом найденных функций уравнение (19) примет вид

$$z(\tau, r)P + \left(d_\tau - \frac{1}{2}c^2 r^{2\gamma} d_{rr} - \left(ar^p + b(\tau)r^q\right)d_r + rd\right) = 0, \tag{22}$$

где

$$z(\tau, r) = \begin{cases} r\left(e(\tau) + A_\tau\right) + \frac{1}{2}a(p-2)\left((p-1)e(\tau) + A_\tau\right)r^{p-1} + \frac{a^2}{2c^2}\left(2(p-1)e(\tau) + A_\tau\right)r^{2(p-1)} + \\ + \left(\frac{q-2}{2}b(\tau)\left((q-1)e(\tau) + A_\tau\right) + \left(\frac{q-2}{2}A(\tau) - \frac{e(\tau)}{c^2} - \frac{A_\tau}{c^2(q-1)}\right)b_\tau - \frac{A(\tau)b_{\tau\tau}}{c^2(q-1)}\right)r^{q-1} + \\ + \frac{a\left(b(\tau)\left((p+q-2)e(\tau) + A_\tau\right) + A(\tau)b_\tau\right)}{c^2}r^{q+p-2} + \\ + \frac{1}{8}c^2 A_\tau + \frac{1}{2}A_\tau r\ln r + \frac{a}{4}(p-2)(p-1)A_\tau r^{p-1}\ln r + \\ + \frac{a^2(p-1)A_\tau}{2c^2}r^{2(p-1)}\ln r + \frac{A_\tau\left(c^2(q-1)(q-2)b(\tau) - 2b_\tau\right)}{4c^2}r^{q-1}\ln r + \\ + \frac{a(q+p-2)}{2c^2}b(\tau)A_\tau r^{p+q-2}\ln r + \frac{(q-1)b^2(\tau)A_\tau}{2c^2}r^{2(q-1)}\ln r - \\ - \frac{e_\tau}{2} + h_\tau + \frac{A_{\tau\tau}}{4} - \frac{e_{\tau\tau}}{c^2}\ln r - \frac{A_{\tau\tau\tau}}{4c^2}\ln^2 r, \quad k = 1, \\ -\frac{1}{4}c^2(k-1)(k-2)ke(\tau)r^{3(k-1)} - \frac{1}{2}a^2c^2(2k-p)(p-1)e(\tau)r^{k+p-2} + \\ + \frac{1}{2}(q-1)(q-2k)e(\tau)b(\tau)r^{k+q-2} - \frac{a^2(k-p)}{c^2}e(\tau)r^{2p-k+1} - \\ - \frac{a(2k-q-p)}{c^2}e(\tau)b(\tau)r^{p+q-k-1} - \frac{k-q}{c^2}e(\tau)b^2(\tau)r^{2q-k-1} - \\ - \frac{a^2(2k-p-1)(2k-p)}{4(k-1)}A_\tau r^{p-1} - (2k-q)\left(\frac{2k-q-1}{4(k-1)}b(\tau)A_\tau + \frac{1}{2}A(\tau)b_\tau\right)r^{q-1} - \\ - a\frac{c^2(1-2k-p)}{2c^2(k-1)}A_\tau r^{2p-2k} + a\left(\frac{4k-p-q-2}{2c^2(k-1)}b(\tau)A_\tau + \frac{A(\tau)b_\tau}{c^2}\right)r^{p+q-2k} + \\ + b(\tau)\left(\frac{2k-q-1}{2c^2(k-1)}b(\tau)A_\tau + \frac{A(\tau)b_\tau}{c^2}\right)r^{2q-2k} + e(\tau)r^k - \frac{1}{c^2}e(\tau)b_\tau r^{q-k} + h_\tau + \\ + \frac{2k-1}{4(k-1)}A_{\tau\tau} + \frac{2k-3}{2(k-1)}A_\tau r + \frac{(4k-q-3)A_\tau b_\tau + 2(k-1)A(\tau)b_{\tau\tau}}{2c^2(k-1)(2k-q-1)}r^{q-2k+1} + \\ + \frac{1}{c^2(k-1)}e_{\tau\tau}r^{1-k} - \frac{A_{\tau\tau\tau}}{4c^2(k-1)^2}r^{-2(k-1)}, \quad k \neq 1, \end{cases} \tag{23}$$

где в качестве значения функции d следует выбирать любое решение φ исходного уравнения.

В силу линейной независимости функций r, r^h, $\ln r$, $\ln^m r$, где h и m – некоторые константы, для решения уравнения (22) с учетом (23) достаточно приравнять к нулю коэффициенты уравнения $z(\tau, r) = 0$ при различных степенях r, $\ln r$. Случай $k = 1$ и общий случай $k \neq 1$ приводят к следующим значениям:

$$\mu = c_1,\ \xi = 0,\ \eta = c_2 P + \varphi(\tau, r),$$

где c_1 и c_2 – некоторые константы. Данному решению соответствует следующее векторное пространство инфинитезимальных генераторов, порождаемых базисными векторами,

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial \tau},\ X_P = P\frac{\partial}{\partial P},\ X_\varphi = \varphi\frac{\partial}{\partial P}.$$

Такие генераторы соответствуют элементарным преобразованиям – сдвигу по времени, масштабированию и аддитивности решений:

$$X_1 : \overline{\tau} = \tau + a_1,\ \overline{r} = r,\ \overline{P} = P,$$
$$X_P : \overline{\tau} = \tau,\ \overline{r} = r,\ \overline{P} = a_P P,$$
$$X_\varphi : \overline{\tau} = \tau,\ \ \overline{r} = r,\ \overline{P} = P + \varphi(r, \tau).$$

Указанные преобразования не представляют интереса с точки зрения поиска новых решений уравнения (10) и не позволяют построить инвариантные решения. Поэтому более привлекательными являются частные случаи, когда параметры p, q, k и функция $b(\tau)$ выбираются таким образом, чтобы приравнять значения степеней r при различных слагаемых в (23), например полагая $k + p - 1 = q - 2k + 1$.

Рассмотрим случай, когда $k = \frac{3}{2}$, $p = 2$, $q = 3$. Тогда функция $z(\tau, r)$ примет вид

$$z(\tau, r) = \frac{3b^2(\tau)e(\tau)}{2c^2}r^{\frac{7}{2}} + \frac{b(\tau)\big(A(\tau)b_\tau - b(\tau)A_\tau\big)}{c^2}r^3 + \frac{2ab(\tau)e(\tau)}{c^2}r^{\frac{5}{2}} +$$
$$+\frac{e(\tau)\big(16a^2 - 16(a-2)c^2 + 3c^4 - 32b_\tau\big)}{32c^2}r^{\frac{3}{2}} + \frac{a\big(A(\tau)b_\tau - b(\tau)A_\tau\big)}{c^2}r^2 -$$
$$-\frac{A(\tau)b_{\tau\tau}}{c^2}r + \frac{2e_{\tau\tau}}{c^2}r^{-\frac{1}{2}} - \frac{A_{\tau\tau\tau}}{c^2}r^{-1} + h_\tau + A_{\tau\tau}.$$

Решая уравнение $z(\tau, r) = 0$, находим

$$A(\tau) = c_1 + c_2\tau,\ b(\tau) = c_4(c_1 + c_2\tau),\ e(\tau) = 0,\ h(\tau) = c_3,$$

что в итоге приводит к следующему векторному пространству инфинитезимальных операторов исходного уравнения:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial \tau},\ X_2 = \tau\frac{\partial}{\partial \tau} - r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{a}{c^2}P\frac{\partial}{\partial P},\ X_3 = P\frac{\partial}{\partial P},\ X_\varphi = \varphi\frac{\partial}{\partial P}. \tag{24}$$

Будем искать решение уравнения (10) с учетом начального условия, используя пространство симметрий (24). Для этого найдем подалгебру симметрий, инвариантную относительно начального условия. Согласно [5] это можно сделать путем решения системы уравнений

$$\begin{cases} Y(\tau)_{|\tau=0} = 0, \\ Y(P-1)_{|P=1} = 0, \end{cases} \tag{25}$$

где

$$Y = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i.$$

Система (25) после подстановки генераторов (24) преобразуется к виду

$$c_1 = 0,\ c_2 = 1,\ c_3 = -c_2\frac{a}{c^2}.$$

Тогда инфинитезимальный оператор можно записать как

$$Y = \tau\frac{\partial}{\partial \tau} - r\frac{\partial}{\partial r},$$

что дает следующую систему на характеристической поверхности:

$$\begin{cases} \eta - \xi P_r - \mu P_\tau = 0, \\ \dfrac{\partial P}{\partial \tau} = \dfrac{1}{2}c^2 r^3\dfrac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \left(ar^2 + \tau r^3\right)\dfrac{\partial P}{\partial r} - rP. \end{cases} \tag{26}$$

Решение первого уравнения системы (26) может быть найдено с помощью метода характеристик:

$$P(\tau,\, r) = \psi(z),\;\; z = \tau r.$$

Тогда, подставляя данное решение в (26), имеем

$$0 = \frac{1}{2}c^2 z^2 \psi'' + \left(az + z^2 - 1\right)\psi' - \psi. \tag{27}$$

В общем случае разрешить уравнение (27) не удается, однако если положить $a = 0$ и $c^2 = 2$, то решение может быть найдено:

$$\psi(z) = \mathrm{e}^{-z}\left(C_1 + C_2\int\limits_1^z \exp\left(u - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u\right),$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы. Окончательно можно записать

$$P(\tau,\, r) = \mathrm{e}^{-\tau r}\left(C_1 + C_2\int\limits_1^{\tau r} \exp\left(u - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u\right). \tag{28}$$

Таким образом, для модели

$$\mathrm{d}r = (\gamma - t)r^3\mathrm{d}t + \sqrt{2}r^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}W,$$

где γ – некоторый параметр, стоимость бескупонной облигации может быть найдена в частном случае, когда время погашения T в точности совпадает с параметром γ, по формуле

$$P(t,\, r) = \mathrm{e}^{-(\gamma - t)r}\left(C_1 + C_2\int\limits_1^{(\gamma - t)r} \exp\left(u - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u\right) \Leftrightarrow\; T = \gamma.$$

Другим частным случаем может служить модель со следующим набором параметров: $k = \frac{3}{2}$, $p = 2$, $q = 0$, $b(\tau) = 0$, что соответствует диффузионному уравнению

$$\mathrm{d}r = \alpha r^2\mathrm{d}t + cr^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}W.$$

Тогда функция $z(\tau,\, r)$ примет вид

$$z(\tau,\, r) = \frac{1}{32}\left(32 - 16a + \frac{16a^2}{c^2} + 3c^2\right)e(\tau)r^{\frac{3}{2}} + h_\tau + A_{\tau\tau} + \frac{2e_{\tau\tau}}{c^2\sqrt{r}} - \frac{A_{\tau\tau\tau}}{c^2 r} = 0.$$

Решая уравнение $z(\tau,\, r) = 0$, находим

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} e(\tau) = 0, \\ A(\tau) = c_1\tau^2 + c_2\tau + c_3, \quad c \neq 2\sqrt{\dfrac{2a - 4 + \sqrt{a^2 - 16a + 16}}{3}}; \\ h(\tau) = -2c_1\tau + c_4, \end{cases} \\ \begin{cases} e(\tau) = c_1\tau + c_2, \\ A(\tau) = c_3\tau^2 + c_4\tau + c_5, \quad c = 2\sqrt{\dfrac{2a - 4 + \sqrt{a^2 - 16a + 16}}{3}}. \\ h(\tau) = -2c_3\tau + c_6, \end{cases} \end{array}\right. \tag{29}$$

Рассмотрим первое решение из (29). Оно приводит к системе

$$X_1 = \tau^2\frac{\partial}{\partial\tau} - 2r\tau\frac{\partial}{\partial r} + 2\frac{r\tau\left(a - c^2\right) - 1}{c^2 r}P\frac{\partial}{\partial P},$$

$$X_2 = \tau\frac{\partial}{\partial\tau} - r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{a}{c^2}P\frac{\partial}{\partial P},$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial\tau},\;\; X_4 = P\frac{\partial}{\partial P},\;\; X_\varphi = \varphi\frac{\partial}{\partial P},$$

что после нахождения инвариантной подалгебры инфинитезимальных генераторов дает решение:

$$P(\tau, r) = c_1\left(\frac{2}{c^2 r\tau}\right)^{-\frac{1}{2}+\frac{a}{c^2}-\vartheta} {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}+\frac{a}{c^2}-\vartheta, 1-2\vartheta, -\frac{2}{c^2 r\tau}\right)+$$
$$+c_2\left(\frac{2}{c^2 r\tau}\right)^{-\frac{1}{2}+\frac{a}{c^2}+\vartheta} {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}+\frac{a}{c^2}+\vartheta, 1+2\vartheta, -\frac{2}{c^2 r\tau}\right), \tag{30}$$
$$\vartheta = \frac{\sqrt{8c^2+\left(c^2-2a\right)^2}}{2c^2},$$

где ${}_1F_1$ – конфлюэнтная гипергеометрическая функция Куммера, а коэффициенты c_1 и c_2 выбираются таким образом, чтобы выполнялось начальное условие

$$c_1\frac{\Gamma(1-2\vartheta)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{a}{c^2}-\vartheta\right)}+c_2\frac{\Gamma(1+2\vartheta)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{a}{c^2}+\vartheta\right)}=1. \tag{31}$$

Второе решение из (29) приводит к системе генераторов

$$X_1 = r^{\frac{3}{2}}\tau\frac{\partial}{\partial r}+\frac{8-4ar\tau+3c^2r\tau}{4c^2\sqrt{r}}P\frac{\partial}{\partial P},$$
$$X_2 = r^{\frac{3}{2}}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{3c^2-4a}{4c^2}\sqrt{r}P\frac{\partial}{\partial P},$$
$$X_3 = \tau^2\frac{\partial}{\partial\tau}-2r\tau\frac{\partial}{\partial r}+2\frac{\left(a-c^2\right)r\tau-1}{c^2r}P\frac{\partial}{\partial P},$$
$$X_4 = \tau\frac{\partial}{\partial\tau}-r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{a}{c^2}P\frac{\partial}{\partial P},$$
$$X_5 = \frac{\partial}{\partial\tau},\quad X_6 = P\frac{\partial}{\partial P},\ X_\varphi = \varphi\frac{\partial}{\partial P},$$

что, в свою очередь, позволяет найти решение исходного уравнения, которое в точности совпадает с (30).

В качестве еще одного примера можно рассмотреть модель с набором параметров: $k = 2$, $p = 2$, $q = 0$, $b(\tau) = 0$, что соответствует диффузионному уравнению

$$\mathrm{d}r = \alpha r^2\mathrm{d}t + cr^2\mathrm{d}W.$$

Тогда функцию $z(\tau, r)$ можно записать как

$$z(\tau, r) = -(\alpha-1)e(\tau)r^2+\frac{\alpha^2A_\tau}{2c^2}-\frac{1}{2}(\alpha-1)rA_\tau+h_\tau+\frac{3}{4}A_{\tau\tau}+\frac{e_{\tau\tau}}{c^2r}-\frac{A_{\tau\tau\tau}}{4c^2r^2}=0.$$

Уравнение $z(\tau, r) = 0$ имеет два решения:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}e(\tau)=0,\\ A(\tau)=c_1,\\ h(\tau)=c_2,\ \alpha\neq 1,\end{cases}\\ \begin{cases}e(\tau)=c_4\tau+c_5,\\ A(\tau)=c_1\tau^2+c_2\tau+c_3,\\ h(\tau)=-\dfrac{3c^2c_1\tau+c_2\tau+c_1\tau^2}{2c^2}+c_6,\ \alpha=1.\end{cases}\end{array}\right. \tag{32}$$

Первое решение из (32) порождает только простейшие генераторы, поэтому не представляет интереса для дальнейшего исследования. Второе решение приводит к системе генераторов

$$X_1=\tau^2\frac{\partial}{\partial\tau}-r\tau\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1+r\tau\left(r\tau+3c^2r-2\right)}{2c^2r^2}P\frac{\partial}{\partial P},$$
$$X_2=\tau\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1-r\tau}{2c^2r}P\frac{\partial}{\partial P},\ X_3=\frac{\partial}{\partial\tau},$$
$$X_4=r^2\tau\frac{\partial}{\partial r}+\left(\frac{1-r\tau}{c^2r}+r\tau\right)P\frac{\partial}{\partial P},$$
$$X_5=r^2\frac{\partial}{\partial r}+\left(r-\frac{1}{c^2}\right)P\frac{\partial}{\partial P},\ X_6=P\frac{\partial}{\partial P},\ X_\varphi=\varphi\frac{\partial}{\partial P},$$

что после нахождения инвариантной подалгебры генераторов позволяет решить исходное уравнение,

$$P(\tau,\,r)=1-r\tau. \tag{33}$$

Следует отметить, что решение (33) не зависит от параметров модели. Также оно не удовлетворяет условиям, вытекающим из экономического смысла стоимости бескупонной облигации, т. е. для $r>0$: $P(\infty,\,r)=0,\ P(\tau,\,r)>0.$

Модель (9) включает в себя большинство известных моделей. Рассмотрим, например, случай $k=\frac{3}{2}$, $p=2$, $q=1$, $b(\tau)=b,$ соответствующий модели Ана – Гао [2]. Тогда функция $z(\tau,\,r)$ примет вид

$$z(\tau,\,r)=\frac{1}{32}\left(32-16a+\frac{16a^2}{c^2}+3c^2\right)e(\tau)r^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{a}{c^2}-1\right)bA_\tau+$$
$$+h_\tau+A_{\tau\tau}-\frac{b^2e(\tau)-4e_{\tau\tau}}{2c^2\sqrt{r}}+\frac{b^2A_\tau-A_{\tau\tau\tau}}{c^2r}=0,$$

что после решения уравнения $z(\tau,\,r)=0$ дает

$$A(\tau)=c_1\frac{\mathrm{e}^{b\tau}}{b}-c_2\frac{\mathrm{e}^{-b\tau}}{b}+c_3,\ e(\tau)=0,\ h(\tau)=-c_2\frac{2c^2-a}{c^2}\mathrm{e}^{-b\tau}-c_1\frac{a}{c^2}\mathrm{e}^{b\tau}+c_4,$$

откуда можно найти векторное пространство инфинитезимальных операторов исходного уравнения

$$X_1=\frac{\mathrm{e}^{b\tau}}{b}\frac{\partial}{\partial\tau}-r\mathrm{e}^{b\tau}\frac{\partial}{\partial r},\ X_2=-\frac{\mathrm{e}^{-b\tau}}{b}\frac{\partial}{\partial\tau}-r\mathrm{e}^{-b\tau}\frac{\partial}{\partial r}+2\mathrm{e}^{-b\tau}\left(\frac{a}{c^2}+\frac{b}{rc^2}-1\right)P\frac{\partial}{\partial P},$$
$$X_3=\frac{\partial}{\partial\tau},\ X_4=P\frac{\partial}{\partial P},\ X_\varphi=\varphi\frac{\partial}{\partial P},$$

и окончательно прийти к решению

$$P(\tau,\,r)=c_1\left(\frac{2b}{c^2r\left(1-\mathrm{e}^{b\tau}\right)}\right)^{-\frac{1}{2}+\frac{a}{c^2}-\vartheta}{}_1F_1\left(-\frac{1}{2}+\frac{a}{c^2}-\vartheta,1-2\vartheta,-\frac{2b}{c^2r\left(1-\mathrm{e}^{b\tau}\right)}\right)+$$
$$+c_2\left(\frac{2b}{c^2r\left(1-\mathrm{e}^{b\tau}\right)}\right)^{-\frac{1}{2}+\frac{a}{c^2}+\vartheta}{}_1F_1\left(-\frac{1}{2}+\frac{a}{c^2}+\vartheta,1+2\vartheta,-\frac{2b}{c^2r\left(1-\mathrm{e}^{b\tau}\right)}\right),\quad \vartheta=\frac{\sqrt{8c^2+\left(c^2-2a\right)^2}}{2c^2},$$

где коэффициенты c_1 и c_2 выбираются таким образом, чтобы выполнялось начальное условие (31).

$$c_1\frac{\Gamma(1-2\vartheta)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{a}{c^2}-\vartheta\right)}+c_2\frac{\Gamma(1+2\vartheta)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{a}{c^2}+\vartheta\right)}=1.$$

Заметим, что известное решение уравнения модели Ана – Гао, полученное авторами в [2], является частным случаем найденного здесь решения.

Нетрудно показать, что (9) включает в себя и другие известные модели как частные случаи, например модель Васичека [6] с решением

$$P(\tau, r) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4k}B^2(\tau) + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2}\right)(B(\tau) - \tau)\right)e^{-rB(\tau)}, \quad B(\tau) = \frac{1 - e^{-k\tau}}{k},$$

и модель CIR [7] –

$$P(\tau, r) = \exp\left(-\frac{2k\theta}{\sigma^2}\left(\frac{\varepsilon - k}{2}\tau - \ln\left(1 + \frac{\varepsilon - k}{2}B(\tau)\right)\right) - rB(\tau)\right),$$

$$\varepsilon = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}, \quad B(\tau) = \left(\frac{\varepsilon + k}{2} + \frac{\varepsilon}{\exp(\varepsilon\tau) - 1}\right)^{-1}.$$

Кроме рассмотренных выше, существуют другие различные комбинации параметров p, q и k, которые могут порождать новые нетривиальные симметрии рассмотренного уравнения.

Эмпирический анализ

Проиллюстрируем вычисление временной структуры доходности на примере кривой доходности $y(\tau, X)$ и форвардной кривой $f(\tau, X)$, которые по определению имеют вид

$$y(\tau, r) = -\frac{\ln P(\tau, r)}{\tau}, \quad f(\tau, r) = -\frac{\partial \ln P(\tau, r)}{\partial \tau}.$$

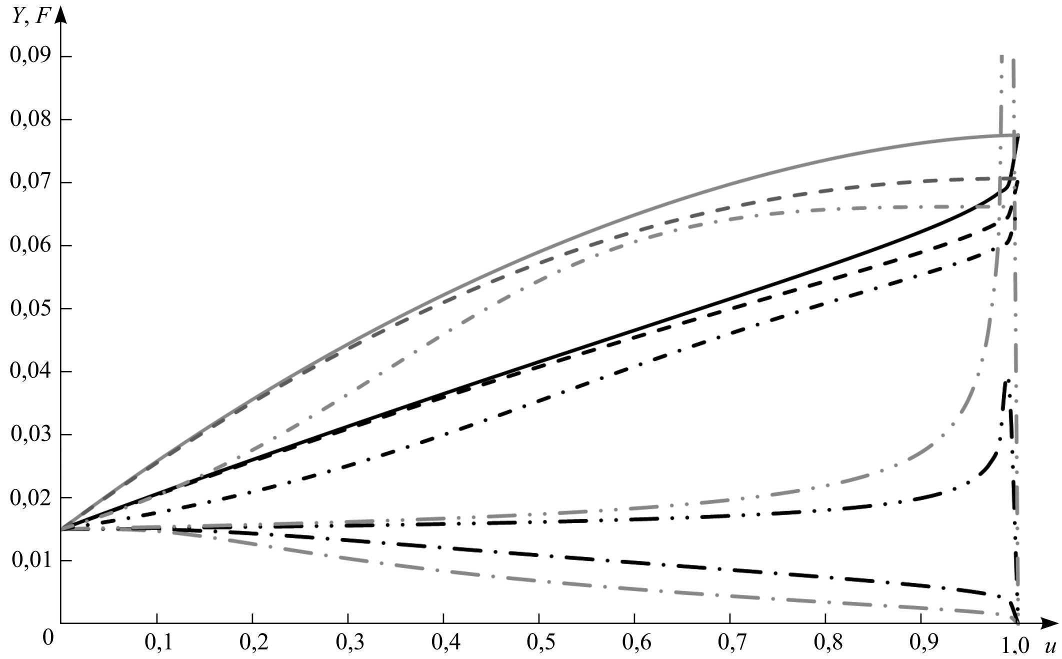
На практике для использования описанных выше моделей необходимо знание их параметров и значений мгновенной процентной ставки. В качестве аппроксимации последней можно принять ставку с наименьшим доступным на рынке сроком конвертации. Обычно таковой является одномесячная либо трехмесячная ставка. Здесь будем использовать данные Европейского центрального банка по трехмесячным процентным ставкам на 24.08.2014 г. Для оценки параметров применим метод моментов, а вероятностные характеристики моделей можно найти способом, описанным в [8]. Все модели рассматриваются в риск-нейтральной постановке. Результаты оценки неизвестных параметров моделей приведены в таблице.

Оценки неизвестных параметров

Estimated values of unknown parameters

№ п/п	Модель	Оценки параметров	Математическое ожидание	Дисперсия
1	Модель Васичека	$k = 0{,}1283$; $\theta = 0{,}0827$; $\sigma = 0{,}0133$	0,0827	0,0006
2	Модель CIR	$k = 0{,}1343$; $\theta = 0{,}0781$; $\sigma = 0{,}0657$	0,0781	0,0012
3	Модель Ана – Гао	$k = 3{,}4387$; $\theta = 0{,}0828$; $\sigma = 1{,}1920$	0,0686	0,0009
4	Модель с нелинейным дрейфом: $k = \frac{3}{2}$, $p = 2$, $q = 0$, $b(\tau) = 0$	$\alpha = -0{,}025$; $c = 4{,}7683$	0,0019	0,0009
5	Модель с нелинейным дрейфом: $k = 2$, $p = 2$, $q = 0$, $b(\tau) = 0$	$\alpha = 22{,}5206$; $c = 16{,}6005$	0,08172	0,0067

На рисунке изображены кривая доходности и форвардная кривая для моделей из таблицы. Чтобы представить данные кривые «целиком» для всего интервала значений сроков до погашения $\tau \in (0, \infty)$, использовано нелинейное преобразование этих сроков $u = 1 - e^{-\rho\tau}$ [9], которое отображает положительную полуось $(0, \infty)$ в единичный интервал $(0, 1)$. Принятое при расчетах численное значение $\rho = \frac{\ln 10}{30} = 0{,}07675$ соответствует тому, что сроки до погашения от 0 до 30 отображаются в интервал $(0; 0{,}9)$, так что $Y(u) = y(\tau, X)$, $F(u) = f(\tau, X)$, где $\tau = \frac{-\ln(1-u)}{\rho}$. Значение мгновенной процентной ставки $r = 0{,}015$.



Кривые доходности (черные) и форвардные кривые (серые) для моделей:
№ 1 – сплошные; № 2 – пунктир; № 3 – штрихпунктир; № 4 – длинный штрихпунктир; № 5 – двойной штрихпунктир

Yield curve (black) – and forward rate curve (gray), model:
No. 1 – solid; No. 2 – dotted line; No. 3 – dash-dotted; No. 4 – long dash-dotted; No. 5 – double dash-dotted

Как видно из рисунка, кривые для моделей № 4 и 5 стремятся к нулю при $\tau \to \infty$ $(u \to 1)$. Действительно, такое поведение кривых для данных моделей справедливо в риск-нейтральной постановке и не зависит от параметров моделей и уровня процентных ставок. Следует отметить, что указанные кривые демонстрируют различное поведение, и конкретный выбор модели в том или ином случае должен сопровождаться дополнительным анализом.

Заключение

В работе представлены примеры конкретных моделей (как новых, не встречавшихся автору в открытых источниках, так и хорошо изученных), описываемых общим уравнением с нелинейными функциями дрейфа и волатильности (9), а также для них найдены выражения стоимости бескупонной облигации в аналитическом виде. Для модели Ана – Гао получено более общее решение, чем найденное в оригинальной работе [2]. Многие из построенных моделей содержат $r^{\frac{3}{2}}$ в функции волатильности, что соответствует результатам, представленным в работе Я. Айт-Сахала (Y. Aït-Sahalia) [1], где на основе реальных данных показано, что такое значение является наиболее предпочтительным. Полученные результаты могут быть полезны как для дальнейших теоретических исследований, так и для применения на практике при анализе временной структуры доходности процентных ставок на финансовом рынке.

Библиографические ссылки

1. Aït-Sahalia Y. Testing continuous-time models of the spot interest rate. *The Review of Financial Studies*. 1996;9(2):385–426.

2. Ahn D, Gao B. A parametric nonlinear model of term structure dynamics. *The Review of Financial Studies*. 1999;12(4):721–762. DOI: 10.1093/rfs/12.4.721.

3. Lie S. On integration of a class of linear partial differential equations by means of definite integrals, Archiv der Mathematik VI(3), 328–368, 1881 [in German]. Reprinted in S. Lie, Gesammelte Abhandlundgen, Volume 3, paper XXXV. (English translation published in CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Volume 2, Ibragimov NH, editor. Boca Raton, FL: CRC Press; 1995.)

4. Ibragimov NH, Gazizov RK. Lie sdymmetry analysis of differential equations in finance. *Nonlinear Dynamics*. 1998;17(4): 387–407. DOI: 10.1023/A:1008304132308.

5. Sinkala W, Leach PGL, O'Hara JG. Zero-coupon bond prices in the Vasicek and CIR models: Their computation as group-invariant solutions. *Mathematical methods in the Applied Sciences*. 2008;31(6):665–678. DOI: 10.1002/mma.935.

6. Медведев ГА. О временной структуре доходности. 1. Модель Васичека. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2012;1(18):102–111.

7. Медведев ГА. О временной структуре доходности. 2. Модель Кокса – Ингерсолла – Росса. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика.* 2012;2(19):102–111.

8. Медведев ГА. Плотности вероятностей процессов процентных ставок доходности. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика.* 2016;3(36):35–48.

9. Медведев ГА. О временной структуре доходности. 7. Новая версия. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2013;4(25):61–70.

References

1. Aït-Sahalia Y. Testing continuous-time models of the spot interest rate. *The Review of Financial Studies*. 1996;9(2):385–426.

2. Ahn D, Gao B. A parametric nonlinear model of term structure dynamics. *The Review of Financial Studies*. 1999;12(4):721–762. DOI: 10.1093/rfs/12.4.721.

3. Lie S. On integration of a class of linear partial differential equations by means of definite integrals, Archiv der Mathematik VI(3), 328–368, 1881 [in German]. Reprinted in S. Lie, Gesammelte Abhandlundgen, Volume 3, paper XXXV. (English translation published in CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Volume 2, Ibragimov NH, editor. Boca Raton, FL: CRC Press; 1995.)

4. Ibragimov NH, Gazizov RK. Lie sdymmetry analysis of differential equations in finance. *Nonlinear Dynamics*. 1998;17(4): 387–407. DOI: 10.1023/A:1008304132308.

5. Sinkala W, Leach PGL, O'Hara JG. Zero-coupon bond prices in the Vasicek and CIR models: Their computation as group-invariant solutions. *Mathematical methods in the Applied Sciences*. 2008;31(6):665–678. DOI: 10.1002/mma.935.

6. Medvedev GA. On term structure of yield rates. 1. Vasiček model. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika.* 2012;1(18):102–111. Russian.

7. Medvedev GA. On term structure of yield rates. 2. The Cox Ingersoll Ross model. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika*. 2012;2(19):102–111. Russian.

8. Medvedev GA. The probability density of the processes of yield interest rates. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika.* 2016;3(36):35–48. Russian.

9. Medvedev GA. On term structure of yield rates. 7. The New Version. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika*. 2013;4(25):61–70. Russian.

Статья поступила в редколлегию 07.02.2018.
Received by editorial board 07.02.2018.