УДК 519.2

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ БИНОМИАЛЬНОЙ УСЛОВНО АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ ДАННЫХ

М. К. ДОЛГАЛЁВА[1]***, Ю. С. ХАРИН***[1), 2)]

[1)]*НИИ прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*
[2)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Рассматривается биномиальная условно авторегрессионная модель дискретных пространственно-временных данных, которая является многомерной неоднородной цепью Маркова с конечным пространством состояний. Для этой модели найдены условия, при которых она удовлетворяет эргодическому принципу в случае, когда экзогенные факторы зависят от времени. Для статистического оценивания параметров модели используется метод максимального правдоподобия. Доказано, что построенная оценка максимального правдоподобия является состоятельной и асимптотически нормально распределенной при любых ограниченных значениях параметров модели и ограниченных значениях экзогенного фактора при условии статистической идентифицируемости параметров модели. Представлены результаты компьютерных экспериментов на модельных данных, иллюстрирующие состоятельность оценок максимального правдоподобия.

Ключевые слова: пространственно-временные данные; неоднородная цепь Маркова; эргодический принцип; оценка максимального правдоподобия; состоятельность; асимптотическая нормальность.

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF STATISTICAL ESTIMATORS OF PARAMETERS FOR BINOMIAL CONDITIONALLY AUTOREGRESSIVE MODEL OF SPATIO-TEMPORAL DATA

M. K. DAUHALIOVA[a]***, Yu. S. KHARIN***[a, b]

[a]*Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
[b]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: M. K. Dauhaliova (mzhurak@gmail.com)

The binomial conditionally autoregressive model of discrete spatio-temporal data is considered in this paper. This model is a multidimensional inhomogeneous Markov chain with a finite state space. Conditions, under which the bino-

Образец цитирования:
Долгалёва МК, Харин ЮС. Асимптотический анализ статистических оценок параметров биномиальной условно авторегрессионной модели пространственно-временных данных. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;2:47–57.

For citation:
Dauhaliova MK, Kharin YuS. Asymptotic analysis of statistical estimators of parameters for binomial conditionally autoregressive model of spatio-temporal data. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;2:47–57. Russian.

Авторы:
Марина Константиновна Долгалёва – младший научный сотрудник.
Юрий Семенович Харин – член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук; директор[1)]; профессор кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики[2)].

Authors:
Maryna K. Dauhaliova, junior researcher.
mzhurak@gmail.com
Yuriy S. Kharin, corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus, doctor of science (physics and mathematics); director[a]; professor at the department of mathematical modeling and data analysis, faculty of applied mathematics and informatics[b].
kharin@bsu.by

mial conditionally autoregressive model satisfies the ergodic principle, are found in case when exogenous factors depend on time. The maximum likelihood approach is used for statistical estimation of model parameters. It is proved that the constructed maximum likelihood estimators are consistent and asymptotically normal distributed for any bounded values of the model parameters and any bounded values of the exogenous factor in case of statistical identifiability of model parameters. Results of computer experiments on simulated data illustrate consistency of maximum likelihood estimators.

Key words: spatio-temporal data; inhomogeneous Markov chain; ergodic principle; maximum likelihood estimator; consistency of estimator; asymptotic normality.

Введение

На практике регистрируемые статистические данные часто содержат информацию об изменении реального процесса во времени и в пространстве одновременно [1; 3]. Такие данные возникают при решении прикладных задач в медицине, экономике, метеорологии [4]. Приведем краткий обзор литературы, иллюстрирующий актуальность исследования моделей пространственно-временных данных. В [5] изучены зависимости между уровнями тяжести дорожно-транспортных происшествий с учетом одновременно пространственных и временных корреляций, проанализированы дорожно-транспортные происшествия в Англии в период 2005–2013 гг. В [6] предложена новая пространственно-временная модель с пространственным сглаживанием для исследования болезней, которая применялась для анализа риска респираторных и сердечно-сосудистых заболеваний в различных административных районах Англии. В [7] рассмотрена байесовская биномиальная геостатистическая модель для распределения плотности локализации малярийных комаров.

В данной статье исследуется биномиальная условно авторегрессионная модель дискретных пространственно-временных данных, которая построена в [8]. Она является многомерной цепью Маркова с конечным пространством состояний. Ранее установлены условия эргодичности исследуемой модели [8], а также построены оценки максимального правдоподобия, которые состоятельные и асимптотически нормально распределенные [9] в случае однородной цепи Маркова. Нами рассматривается случай, когда модель содержит экзогенные факторы, зависящие от времени, и цепь Маркова не является однородной.

Биномиальная условно авторегрессионная модель

Введем обозначения: $(\Omega, F, \mathbf{P})$ – основное вероятностное пространство; $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел; $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел; $s \in S = \{1, 2, \ldots, n\}$ – индексная переменная, кодирующая пространственные координаты географических регионов (условимся далее их называть сайтами), на которые разбита изучаемая пространственная область; n – число сайтов; $t \in \mathbb{Z}$ – дискретное время; $x_{s,t} \in A = \{0, 1, \ldots, N\}$ – дискретная случайная величина наблюдения в момент времени t в сайте s, принимающая значения из множества A; $F_{\bar{s}, <t} = \sigma\{x_{u,\tau} : u \in S, \tau < t\} \subset F$ – σ-алгебра, порожденная указанными в скобках случайными величинами; $z_{j,s,t} \in \mathbb{R}^1$, $j = 1, \ldots, m$, – наблюдаемый (известный) набор значений m внешних (экзогенных) факторов (переменных) в момент времени t в сайте s; $X_t = (x_{1,t}, \ldots, x_{n,t})' \in A^n$ – вектор-столбец, задающий временной срез исследуемого явления по всем n сайтам в момент времени $t \in \mathbb{Z}$; $Z_{s,t} = (z_{1,s,t}, z_{2,s,t}, \ldots, z_{m,s,t})' \in \mathbb{R}^m$ – вектор-столбец, задающий значения m внешних факторов в момент времени t в сайте s; $L\{\xi\}$ – закон распределения вероятностей случайной величины ξ; $\mathbf{E}\{\cdot\}$, $\mathbf{D}\{\cdot\}$, $\mathbf{cov}\{\cdot\}$, $\mathbf{corr}\{\cdot\}$ – символы математического ожидания, дисперсии, ковариации и коэффициента корреляции случайных величин соответственно; $N_n(\mu, \Sigma)$ – n-мерный нормальный закон распределения вероятностей с математическим ожиданием $\mu \in \mathbb{R}^n$, ковариационной матрицей $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $I\{A\}$ – индикаторная функция события A.

Определение 1 [8]. Биномиальная условно авторегрессионная модель пространственно-временных наблюдений определяется тремя модельными предположениями:

1) при фиксированной предыстории $\{X_1, \ldots, X_{t-1}\}$ случайные величины $x_{1,t}, x_{2,t}, \ldots, x_{n,t}$ условно независимы;

2) условное распределение вероятностей $x_{s,t}$ является биномиальным с параметром $p_{s,t} \in [0, 1]$, $s \in S$, $t \in \mathbb{Z}$:

$$\mathbf{P}\left\{x_{s,t}=l \mid F_{\bar{s},<t}\right\}=C_N^l p_{s,t}^l\left(1-p_{s,t}\right)^{N-l},\ l\in A,\ C_N^l=\frac{N!}{(N-l)!l!}; \tag{1}$$

3) параметр $p_{s,t}$ определяется соотношением

$$\ln\frac{p_{s,t}}{1-p_{s,t}}=\sum_{i=1}^{n}a_{s,i}\,x_{i,t-1}+\sum_{j=1}^{m}b_{s,j}z_{j,s,t},\ s\in S,\ t\in\mathbb{Z}, \tag{2}$$

где $a_s=\left(a_{s,1},\ \ldots,\ a_{s,n}\right)'\in\mathbb{R}^n$ – вектор-столбец авторегрессионных коэффициентов, $b_s=\left(b_{s,1},\ \ldots,\ b_{s,m}\right)'\in\mathbb{R}^m$ – вектор-столбец регрессионных коэффициентов.

Пусть $\theta_s=\left(a_s',\ b_s'\right)'\in\mathbb{R}^{n+m},\ s\in S,\ \theta=\left(\theta_1',\ \ldots,\ \theta_n'\right)'\in\Theta\subset\mathbb{R}^D$ – составной вектор-столбец $D=n(n+m)$ параметров модели; Θ – множество допустимых значений параметров модели, являющееся компактом в $\mathbb{R}^D$; штрих обозначает транспонирование. В силу (2) справедливо следующее выражение для вычисления вероятности $p_{s,t}$:

$$p_{s,t}=p_s\left(X_{t-1},\ Z_{s,t}\right)::=\exp\left(\theta_s'Y_{s,t}\right)\left(1+\exp\left(\theta_s'Y_{s,t}\right)\right)^{-1},\ s\in S,\ t\in\mathbb{Z},$$

где $Y_{s,t}=\left(X_{t-1}',\ Z_{s,t}'\right)'\in A^n\times\mathbb{R}^m$ – составной вектор-столбец «предопределенных» к моменту t переменных.

Обозначим $L=\left\{l_j=\left(l_{1,j},\ \ldots,\ l_{n,j}\right)'\in A^n:\ j=0,\ 1,\ \ldots,\nu\right\},\ \ \nu=|L|=(N+1)^n$ – лексикографически упорядоченное множество ν всевозможных значений вектора X_t. Например, множество L может быть упорядочено следующим образом:

$$L=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots\right\}.$$

Здесь при упорядочении сначала идет нулевой вектор, затем – векторы всевозможных комбинаций 0 и 1, затем – комбинации из 0, 1 и 2 и т. д.

Вероятностные свойства биномиальной условно авторегрессионной модели

Для биномиальной условно авторегрессионной модели (1), (2) доказано [8], что наблюдаемый векторный временной ряд X_t является неоднородной n-мерной векторной цепью Маркова с конечным пространством состояний L и матрицей вероятностей одношаговых переходов $Q=Q(t;\theta)=\left(q_{I,J}(t;\theta)\right)\in[0,1]^{\nu\times\nu}$, $I=\left(i_s\right),\ J=\left(j_s\right)\in L$:

$$q_{I,J}(t;\theta)=\prod_{s=1}^{n}C_N^{j_s}\left(\exp\left(a_s'I+b_s'Z_{s,t}\right)\right)^{j_s}\left(1+\exp\left(a_s'I+b_s'Z_{s,t}\right)\right)^{-N},\ t\in\mathbb{N}, \tag{3}$$

и начальным распределением вероятностей $p(\theta)=\left(p_J(\theta)\right)'\in[0,1]^{\nu}$:

$$p_J(\theta)::=\mathbf{P}\left\{X_1=J\right\}=\prod_{s=1}^{n}C_N^{j_s}\left(\exp\left(b_s'Z_{s,1}\right)\right)^{j_s}\left(1+\exp\left(b_s'Z_{s,1}\right)\right)^{-N},\ J\in L.$$

Матрица условных вероятностей переходов

$$H\left(t_1,\ t_2;\theta\right)=\left(h_{I,J}\left(t_1,\ t_2;\theta\right)\right),\ h_{I,J}\left(t_1,\ t_2;\theta\right)=\mathbf{P}_\theta\left\{X_{t_2}=J\mid X_{t_1}=I\right\},I,J\in L,$$

цепи Маркова X_t за t_2-t_1 шагов от момента времени t_1 до момента t_2 $\left(t_1<t_2,\ t_1,\ t_2\in\mathbb{N}\right)$ имеет вид [8]: $H\left(t_1,\ t_2;\theta\right)=Q\left(t_1+1;\theta\right)Q\left(t_1+2;\theta\right)\ldots Q\left(t_2;\theta\right)$, где $\mathbf{P}_\theta\{\cdot\}$ обозначает распределение вероятностей для модели (1), (2), когда истинное значение параметра есть $\theta\in\Theta$.

Текущее распределение вероятностей $p(t;\theta)=\left(p_J(t;\theta)\right)'\in[0,1]^{\nu}$ в момент времени t определяется соотношением

$$p_J(t;\theta) ::= \mathbf{P}_\theta\{X_t = J\} = \sum_{I \in L} p_I(\theta) h_{I,J}(1, t; \theta),\ J \in L,\ t \in \mathbb{N}.$$

Если для модели (1), (2) вектор внешних факторов $Z_{s,t} = (z_{1,s,t}, \ldots, z_{m,s,t})' \equiv Z_s \in \mathbb{R}^m$ не зависит от t, то n-мерная векторная цепь Маркова X_t является однородной и для нее существует [8] единственное стационарное распределение $\pi = (\pi_I) \in [0,1]^{\nu\times\nu}$, являющееся решением системы уравнений

$$Q'\pi = \pi,\ \sum_{I \in L} \pi_I = 1.$$

Исследуем вероятностные свойства биномиальной условно авторегрессионной модели (1), (2) в случае, когда $Z_{s,t} \in \mathbb{R}^m$ зависит от времени t и X_t является неоднородной n-мерной векторной цепью Маркова. Воспользуемся вспомогательными понятиями из [10; 11].

Определение 2 [10]. Неоднородная цепь Маркова подчиняется эргодическому принципу, если имеет место соотношение

$$\left| h_{I,J}(t_1, t_2; \theta) - h_{I',J}(t_1, t_2; \theta) \right| \xrightarrow[|t_2 - t_1| \to \infty]{} 0,\quad I, I', J \in L,\ t_1, t_2 \in \mathbb{N},\quad \theta \in \Theta. \tag{4}$$

Определение 3 [11]. Матрица B называется неотрицательной $B \geq 0$ (положительной $B > 0$), если каждый элемент в B неотрицателен (положителен). Неприводимая неотрицательная матрица называется примитивной, если она имеет только одно уникальное собственное число.

Лемма 1. *Из эргодического принципа (4) для неоднородной цепи Маркова следует*

$$\left| h_{I,J}(t_1, t_2; \theta) - p_J(t_2; \theta) \right| \xrightarrow[|t_2 - t_1| \to \infty]{} 0,\ I, J \in L,\ t_1, t_2 \in \mathbb{N},\ \theta \in \Theta. \tag{5}$$

Доказательство. Применяя формулу полной вероятности и условие нормировки, имеем

$$\left| h_{I,J}(t_1, t_2; \theta) - p_J(t_2; \theta) \right| = \left| \sum_{I' \in L} \left(h_{I,J}(t_1, t_2; \theta) - h_{I',J}(t_1, t_2; \theta) \right) p_{I'}(t_1; \theta) \right|. \tag{6}$$

Воспользуемся неравенством треугольника:

$$\left| \sum_{I' \in L} \left(h_{I,J}(t_1, t_2; \theta) - h_{I',J}(t_1, t_2; \theta) \right) p_{I'}(t_1; \theta) \right| \leq \sum_{I' \in L} \left| h_{I,J}(t_1, t_2; \theta) - h_{I',J}(t_1, t_2; \theta) \right| p_{I'}(t_1; \theta). \tag{7}$$

Так как L – конечно, $p_{I'}(t_1; \theta) \in [0, 1]$, то из (4), (6), (7) следует (5).

Лемма 2. *Если имеет место модель (1), (2), то при любых ограниченных значениях коэффициентов* $\{\theta_s\}$ *и ограниченных значениях экзогенных факторов* $\{z_{j,s,t}\}$ *для* n*-мерной векторной цепи Маркова* X_t *выполняется эргодический принцип (4).*

Доказательство. В [10] (в теореме 2) доказаны условия, при которых цепь Маркова подчиняется эргодическому принципу:

У1) матрица вероятностей одношаговых переходов $Q(t; \theta) = (q_{I,J}(t; \theta)) \in [0,1]^{\nu\times\nu}$, $I, J \in L$, $t \in \mathbb{N}$, является стохастической примитивной матрицей, которая при умножении на любую стохастическую примитивную матрицу дает примитивную матрицу;

У2) для всех положительных элементов $q^+_{I,J}(t; \theta)$ матрицы $Q(t; \theta)$ выполняется

$$\min_{I,J \in L} q^+_{I,J}(t; \theta) \geq \lambda > 0 \tag{8}$$

равномерно относительно t для некоторого $\lambda > 0$.

Проверим выполнение условий У1, У2 в нашем случае. Согласно [8] при любых ограниченных значениях коэффициентов $\{\theta_s\}$ и ограниченных значениях экзогенных факторов $\{z_{j,s,t}\}$ все элементы матрицы вероятностей одношаговых переходов положительны: $q_{I,J}(t; \theta) > 0$ для любых $I, J \in L$, $t \in \mathbb{N}$, т. е. стохастическая матрица $Q(t; \theta)$ является положительной: $Q(t; \theta) > 0$. Согласно [11] неотрицательная матрица B является примитивной, если существует такое $p \in \mathbb{N}$, что $B^p > 0$. Для матрицы $Q(t; \theta)$ это условие верно при $p = 1$, т. е. $Q(t; \theta)$ примитивна для любого t. Найдем произведение матрицы $Q(t; \theta)$ на произвольную стохастическую [11] примитивную матрицу $B = (b_{I,J}) \in [0, 1]^{\nu\times\nu}$:

$$Q(t; \theta) B = \left(\sum_{K \in L} q_{I,K}(t; \theta) b_{K,J} \right)_{I,J} \in [0, 1]^{\nu\times\nu};\ b_{I,J} \in [0, 1],\ \sum_{J \in L} b_{I,J} = 1,\ I \in L. \tag{9}$$

Так как матрица B примитивна, то она не имеет нулевого столбца, т. е. с учетом (9)

$$\exists I \in L,\ b_{I,\,J} > 0,\ J \in L. \tag{10}$$

Из (10) и установленного выше факта, что $Q(t;\,\theta) > 0,$ следует: $\exists K \in L,\ q_{I,\,K}(t;\,\theta) b_{K,\,J} > 0,\ I, J \in L,$ откуда $\sum_{K \in L} q_{I,\,K}(t;\,\theta) b_{K,\,J} > 0, I, J \in L.$ Это означает, что произведение матриц $Q(t;\,\theta) B > 0$ – положительная и, следовательно, примитивная матрица, т. е. доказана выполнимость условия У1.

С учетом того что матрица $Q(t;\,\theta) > 0,$ перепишем условие (8) в виде

$$\min_{I,\,J \in L} q_{I,\,J}(t;\,\theta) \geq \lambda > 0. \tag{11}$$

Поскольку значения коэффициентов $\{\theta_s\}$ и экзогенных факторов $\{z_{j,\,s,\,t}\}$ ограничены, то величины $a_{s,\,i},\ b_{s,\,j} z_{j,\,s,\,t}$ принадлежат отрезкам: $a_{s,\,i} \in \left[\underline{a}_s, \overline{a}_s\right] \subset \mathbb{R},\ b_{s,\,j}\, z_{j,\,s,\,t} \in \left[\underline{c}_s, \overline{c}_s\right] \subset \mathbb{R},\ i \in A, s \in S, t \in \mathbb{N},$ где $|\,\underline{a}_s\,| < \infty,\ |\,\overline{a}_s\,| < \infty,\ |\underline{c}_s| < \infty, |\overline{c}_s| < \infty.$ Найдем такое $\lambda > 0,$ при котором (11) выполняется равномерно относительно t:

$$\min_{I,\,J \in L} q_{I,\,J}(t;\,\theta) = \min_{I,\,J \in L} \prod_{s=1}^{n} C_N^{j_s} \left(\exp\left(a_s' I + b_s' Z_{s,\,t}\right)\right)^{j_s} \left(1 + \exp\left(a_s' I + b_s' Z_{s,\,t}\right)\right)^{-N} \geq$$

$$\geq \prod_{s=1}^{n} \frac{\min\limits_{I,\,J \in L} \left(C_N^{j_s} \exp\left(j_s a_s' I + j_s b_s' Z_{s,\,t}\right)\right)}{\max\limits_{I,\,J \in L} \left(1 + \exp\left(a_s' I + b_s' Z_{s,\,t}\right)\right)^N} \geq \prod_{s=1}^{n} \frac{\min\limits_{I,\,J \in L} \left(\exp\left(j_s a_s' I + j_s b_s' Z_{s,\,t}\right)\right)}{\max\limits_{I,\,J \in L} \left(1 + \exp\left(a_s' I + b_s' Z_{s,\,t}\right)\right)^N}. \tag{12}$$

Поскольку функции $e^x, \left(1 + e^x\right)^N$ – неубывающие, то с учетом (12) имеем

$$\min_{I,\,J \in L} q_{I,\,J}(t;\,\theta) \geq \prod_{s=1}^{n} e^{\min\limits_{I,\,J \in L} j_s\left(a_s' I + b_s' Z_{s,\,t}\right)} \left(1 + e^{\max\limits_{I,\,J \in L}\left(a_s' I + b_s' Z_{s,\,t}\right)}\right)^{-N}. \tag{13}$$

Учитывая, что $i_s,\ j_s \in A = \{0, 1, \ldots, N\},$ находим

$$\begin{aligned} \min_{I,\,J \in L} j_s\left(a_s' I + b_s' Z_{s,\,t}\right) &\geq \min_{I,\,J \in L} j_s a_s' I + \min_{I,\,J \in L} j_s b_s' Z_{s,\,t} = \sum_{i=1}^{n} \min_{I,\,J \in L} j_s a_{s,\,i}' i_i + \sum_{j=1}^{m} \min_{I,\,J \in L} j_s b_{s,\,j} z_{j,\,s,\,t} = \\ &= nN^2 \underline{a}_s I\{\underline{a}_s < 0\} + mN\underline{c}_s I\{\underline{c}_s < 0\}; \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \max_{I \in L}\left(a_s' I + b_s' Z_{s,\,t}\right) &= \max_{I \in L} a_s' I + \max b_s' Z_{s,\,t} = \sum_{i=1}^{n} \max_{I \in L} a_{s,\,i}' i_i + \sum_{j=1}^{m} \max_{j} b_{s,\,j} z_{j,\,s,\,t} = \\ &= Nn\overline{a}_s I\{\overline{a}_s \geq 0\} + m\overline{c}_s. \end{aligned} \tag{15}$$

Подставим (14) и (15) в (13):

$$\min_{I,\,J \in L} q_{I,\,J}(t;\,\theta) \geq \prod_{s=1}^{n} \frac{e^{nN^2 \underline{a}_s I\{\underline{a}_s < 0\} + mN\underline{c}_s\{\underline{c}_s < 0\}}}{\left(1 + e^{Nn\overline{a}_s I\{\overline{a}_s \geq 0\} + m\overline{c}_s}\right)^N} =:: \lambda > 0, \tag{16}$$

т. е. справедливо (11) и условие У2. Следовательно, для цепи Маркова X_t выполняется эргодический принцип (4).

Замечание. На практике значения коэффициентов и экзогенных переменных обычно принадлежат некоторым симметричным отрезкам:

$$a_{s,\,i} \in \left[-a_s^*, a_s^*\right] \subset \mathbb{R},\ b_{s,\,j} \in \left[-b_s^*, b_s^*\right] \subset \mathbb{R},\ z_{j,\,s,\,t} \in \left[-z_s^*, z_s^*\right] \in \mathbb{R},\ i \in A, s \in S, t \in \mathbb{N},$$

где $a_s^*, b_s^*, z_s^* \in (0, +\infty),\ s \in S.$ В этом случае согласно (16) имеем

$$\lambda = \left(\prod_{s=1}^{n} \left(e^{Nna_s^* + mb_s^* z_s^*}\left(1 + e^{Nna_s^* + mb_s^* z_s^*}\right)\right)\right)^{-N} > 0.$$

Асимптотические свойства оценки максимального правдоподобия параметров модели

В рамках модели (1), (2) логарифмическая функция правдоподобия для $n \times T$ пространственно-временных наблюдений $\left\{x_{s,t} : s \in S, t = 1, 2, \ldots, T\right\}$, где T – длительность наблюдения, имеет аддитивный по $\theta_1, \ldots, \theta_n$ вид [8]:

$$l(\theta) = \ln \mathbf{P}_{\theta^0}\left\{X_1\right\} \prod_{t=2}^{T} \mathbf{P}_{\theta^0}\left\{X_t \middle| X_{t-1}\right\} = \sum_{s=1}^{n} l_s(\theta_s), \tag{17}$$

$$l_s(\theta_s) = \sum_{t=2}^{T} \left(x_{s,t}\theta_s' Y_{s,t} - N \ln\left(1 + \exp\left(\theta_s' Y_{s,t}\right)\right) + \ln C_N^{x_{s,t}} \right).$$

Оценка максимального правдоподобия (ОМП) $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^D$ составного вектора параметров определяется как решение экстремальной задачи [8]

$$l(\theta) \to \max_{\theta}. \tag{18}$$

В [9] доказано, что если $m = 1$, $z_{1,s,t} \equiv z_s \neq 0$ не зависит от t и цепь Маркова $X_t \in L$ стационарна, то при любых ограниченных значениях коэффициентов $\left\{\theta_s\right\}$ и ограниченном $z_s \in \mathbb{R}^1$ построенная согласно (18) ОМП $\hat{\theta}$ при $T \to +\infty$ является состоятельной и асимптотически нормально распределенной:

$$L\left\{\sqrt{T} G^{\frac{1}{2}} (\hat{\theta} - \theta^0)\right\} \longrightarrow N_D\left(\mathrm{O}_D, \mathrm{I}_D\right),$$

где O_D – нулевой вектор-столбец порядка D; I_D – единичная матрица порядка D, а блочно-диагональная информационная матрица Фишера G вычисляется по формуле

$$G = N \operatorname{diag}\left\{\mathbf{E}\left\{Y_{s,t} Y_{s,t}'\, p_s\left(X_{t-1}, z_s\right)\left(1 - p_s\left(X_{t-1}, z_s\right)\right)\right\}\right\},\ Y_{s,t} = \left(X_{t-1}', z_s\right)',\ s = 1, \ldots, n.$$

Установим условия состоятельности ОМП, построенной для модели (1), (2) в общем случае согласно (18). Аналогично [12] определим информационную функцию Кульбака для случайных наблюдений $X_{t-1}, X_t \in L,\ t \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{K}_t\left(\theta^0, \theta\right) = \mathbf{E}_{\theta^0}\left\{\ln \frac{\mathbf{P}_{\theta^0}\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\}}{\mathbf{P}_{\theta}\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\}}\right\},\ \theta, \theta^0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^D, \tag{19}$$

где $\mathbf{P}_\theta\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\}$, $\mathbf{E}_\theta\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\}$ обозначает условное распределение вероятностей и условное математическое ожидание соответственно, вычисленные при значении параметра $\theta \in \Theta$ вероятностной модели (1), (2); $\mathbf{P}_\theta\left\{X_1 \mid X_0\right\} ::= \mathbf{P}_\theta\left\{X_1\right\}$. Как видно из (3), функция Кульбака (19) зависит от t через экзогенные переменные $Z_{s,t} \in \mathbb{R}^m$ (в рассмотренном ранее в [9] стационарном случае эта зависимость отсутствовала). В связи с этим введем так называемую усредненную функцию Кульбака для T наблюдений $X_1, \ldots, X_T \in A^n$:

$$\mathrm{K}_T^*\left(\theta^0, \theta\right) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \mathrm{K}_t\left(\theta^0, \theta\right),\ \theta, \theta^0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^D. \tag{20}$$

Лемма 3. *Справедливо неравенство*

$$\mathrm{K}_t\left(\theta^0, \theta\right) \geq 0,\ \theta, \theta^0 \in \mathbb{R}^D,$$

причем $\mathrm{K}_t\left(\theta^0, \theta\right) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}_{\theta^0}\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\} \overset{\text{п. н.}}{=} \mathbf{P}_\theta\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (19), неравенства Йенсена [12] для выпуклой функции $y = -\ln x$ и условия нормировки имеем цепочку неравенств:

$$\mathrm{K}_t\left(\theta^0, \theta\right) = \mathbf{E}_{\theta^0}\left\{-\ln \frac{\mathbf{P}_\theta\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\}}{\mathbf{P}_{\theta^0}\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\}}\right\} \geq -\ln \mathbf{E}_{\theta^0}\left\{\frac{\mathbf{P}_\theta\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\}}{\mathbf{P}_{\theta^0}\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\}}\right\} =$$

$$= -\ln \sum_{I, J \in L} \frac{\mathbf{P}_\theta\left\{X_t = J \mid X_{t-1} = I\right\}}{\mathbf{P}_{\theta^0}\left\{X_t = J \mid X_{t-1} = I\right\}} \mathbf{P}_{\theta^0}\left\{X_t = J \middle| X_{t-1} = I\right\} \mathbf{P}_{\theta^0}\left\{X_{t-1} = I\right\} =$$

$$= -\ln \sum_{I, J \in L} \mathbf{P}_\theta\left\{X_t = J \mid X_{t-1} = I\right\} \mathbf{P}_{\theta^0}\left\{X_{t-1} = I\right\} = -\ln 1 = 0,$$

причем неравенство Йенсена обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{P}_{\theta^0}\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\} \overset{\text{п. н.}}{=} \mathbf{P}_\theta\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\}.$$

Из леммы 3 следует, что функция $\mathrm{K}_t\left(\theta^0, \theta\right)$ достигает своего минимального (нулевого) значения при $\theta = \theta^0$, однако в силу наличия экзогенных переменных $Z_{1,t}, \ldots, Z_{n,t} \in \mathbb{R}^m$ эта точка минимума может быть не единственной. По построению (20) таким же свойством обладает и усредненная функция Кульбака $\mathrm{K}_T^*\left(\theta^0, \theta\right)$.

Теорема 1. *Если имеет место биномиальная условно авторегрессионная модель (1), (2), значения экзогенных переменных* $\left\{Z_{s,t}\right\}$ *ограничены и таковы, что усредненная функция Кульбака (20) имеет единственный минимум при* $\theta = \theta^0$, *то ОМП* $\hat{\theta}$ *является состоятельной оценкой:*

$$\hat{\theta} \xrightarrow[T \to \infty]{\mathbf{P}} \theta^0. \tag{21}$$

Доказательство. Представим ОМП в виде, эквивалентном (18):

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta \in \Theta} l(\theta) = \arg\min_{\theta \in \Theta}\left(\frac{1}{T}\left(l\left(\theta^0\right) - l(\theta)\right)\right).$$

Согласно (17) это равенство преобразуется к виду

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta \in \Theta}\left(\frac{1}{T}\left(\ln \mathbf{P}_{\theta^0}\left\{X_1\right\}\prod_{t=2}^{T}\mathbf{P}_{\theta^0}\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\} - \ln \mathbf{P}_\theta\left\{X_1\right\}\prod_{t=2}^{T}\mathbf{P}_\theta\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\}\right)\right) =$$

$$= \arg\min_{\theta \in \Theta}\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\ln\frac{\mathbf{P}_{\theta^0}\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\}}{\mathbf{P}_\theta\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\}}\right) = \arg\min_{\theta \in \Theta}\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}u\left(X_t, X_{t-1}; \theta^0, \theta\right)\right), \tag{22}$$

где $\mathbf{P}_{\theta^0}\left\{X_1 \mid X_0\right\} ::= \mathbf{P}_{\theta^0}\left\{X_1\right\}$, $u\left(X_t, X_{t-1}; \theta^0, \theta\right) = \ln\dfrac{\mathbf{P}_{\theta^0}\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\}}{\mathbf{P}_\theta\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\}}$ – статистика вклада.

Воспользуемся условиями теоремы Бернштейна [13] для выполнения закона больших чисел применительно к случайной последовательности $u\left(X_t, X_{t-1}; \theta^0, \theta\right)$:

C1) дисперсия $\mathbf{D}\left\{u\left(X_t, X_{t-1}; \theta^0, \theta\right)\right\}$ ограничена;

C2) $\mathbf{corr}\left\{u\left(X_{t_1}, X_{t_1-1}; \theta^0, \theta\right), u\left(X_{t_2}, X_{t_2-1}; \theta^0, \theta\right)\right\} \xrightarrow[|t_1 - t_2| \to \infty]{} 0.$

В силу (1), (2) и ограниченности параметров модели: $\theta^0, \theta \in \Theta$, дисперсия $\mathbf{D}\left\{u\left(X_t, X_{t-1}; \theta^0, \theta\right)\right\}$ также ограничена, т. е. условие C1 выполняется.

Без потери общности рассмотрим случай, когда $t_2 < t_1 - 1$. Имеем по определению и свойствам математического ожидания:

$$\mathbf{cov}\left\{u\left(X_{t_1}, X_{t_1-1}; \theta^0, \theta\right), u\left(X_{t_2}, X_{t_2-1}; \theta^0, \theta\right)\right\} =$$

$$= \sum_{I_1, I_2, J_1, J_2 \in L} u\left(J_1, I_1; \theta^0, \theta\right) u\left(J_2, I_2; \theta^0, \theta\right) P\left(I_1, I_2, J_1, J_2\right), \tag{23}$$

$$P\left(I_1, I_2, J_1, J_2\right) ::=$$

$$::= \mathbf{P}\left\{X_{t_1} = J_1, X_{t_1-1} = I_1, X_{t_2} = J_2, X_{t_2-1} = I_2\right\} - \mathbf{P}\left\{X_{t_1} = J_1, X_{t_1-1} = I_1\right\}\mathbf{P}\left\{X_{t_2} = J_2, X_{t_2-1} = I_2\right\}.$$

Применим формулу умножения вероятностей:

$$P\left(I_1, I_2, J_1, J_2\right) = \mathbf{P}\left\{X_{t_1} = J_1 \middle| X_{t_1-1} = I_1, X_{t_2} = J_2, X_{t_2-1} = I_2\right\}\mathbf{P}\left\{X_{t_1-1} = I_1 \middle| X_{t_2} = J_2, X_{t_2-1} = I_2\right\}\times$$

$$\times \mathbf{P}\left\{X_{t_2} = J_2 \middle| X_{t_2-1} = I_2\right\}\mathbf{P}\left\{X_{t_2-1} = I_2\right\} - \mathbf{P}\left\{X_{t_1} = J_1 \middle| X_{t_1-1} = I_1\right\}\mathbf{P}\left\{X_{t_1-1} = I_1\right\}\times$$

$$\times \mathbf{P}\left\{X_{t_2} = J_2 \middle| X_{t_2-1} = I_2\right\}\mathbf{P}\left\{X_{t_2-1} = I_2\right\}.$$

Тогда в силу марковского свойства для $t_2 < t_1 - 1$ имеем

$$P(I_1, I_2, J_1, J_2) =$$
$$= \mathbf{P}\left\{X_{t_1} = J_1 \middle| X_{t_1-1} = I_1\right\}\mathbf{P}\left\{X_{t_2} = J_2 \middle| X_{t_2-1} = I_2\right\}\mathbf{P}\left\{X_{t_1-1} = I_1 \middle| X_{t_2} = J_2\right\}\mathbf{P}\left\{X_{t_2-1} = I_2\right\} -$$
$$- \mathbf{P}\left\{X_{t_1} = J_1 \middle| X_{t_1-1} = I_1\right\}\mathbf{P}\left\{X_{t_1-1} = I_1\right\}\mathbf{P}\left\{X_{t_2} = J_2 \middle| X_{t_2-1} = I_2\right\}\mathbf{P}\left\{X_{t_2-1} = I_2\right\} =$$
$$= \left(\mathbf{P}\left\{X_{t_1-1} = I_1 \middle| X_{t_2} = J_2\right\} - \mathbf{P}\left\{X_{t_1-1} = I_1\right\}\right) \times$$
$$\times \mathbf{P}\left\{X_{t_1} = J_1 \middle| X_{t_1-1} = I_1\right\}\mathbf{P}\left\{X_{t_2} = J_2 \middle| X_{t_2-1} = I_2\right\}\mathbf{P}\left\{X_{t_2-1} = I_2\right\}. \quad (24)$$

Поскольку по условию теоремы 1 значения $\{\theta_s\}$ и $\{z_{j,s,t}\}$ ограничены, то в силу леммы 2 выполняется эргодический принцип и из леммы 1 следует

$$\left|\mathbf{P}\left\{X_{t_1-1} = I_1 \middle| X_{t_2} = J_2\right\} - \mathbf{P}\left\{X_{t_1-1} = I_1\right\}\right| \xrightarrow[|t_1 - t_2| \to \infty]{} 0. \quad (25)$$

Из (23) – (25) заключаем, что $\left|\mathbf{cov}\left\{u\left(X_{t_1}, X_{t_1-1}; \theta^0, \theta\right), u\left(X_{t_2}, X_{t_2-1}; \theta^0, \theta\right)\right\}\right| \xrightarrow[|t_1-t_2|\to\infty]{} 0.$ Это означает, что зависимость между $u\left(X_{t_1}, X_{t_1-1}; \theta^0, \theta\right)$ и $u\left(X_{t_2}, X_{t_2-1}; \theta^0, \theta\right)$ ослабевает при $|t_1 - t_2| \to \infty.$ Следовательно, по определению коэффициента корреляции и ограниченности $\mathbf{D}\left\{u\left(X_t, X_{t-1}; \theta^0, \theta\right)\right\}$ выполняется условие С2, и к $\left\{u\left(X_t, X_{t-1}; \theta^0, \theta\right)\right\}$ приме́ним закон больших чисел Бернштейна для слабо зависимых случайных величин:

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\ln\frac{\mathbf{P}_{\theta^0}\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\}}{\mathbf{P}_{\theta}\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\}} - \mathbf{E}\left\{\ln\frac{\mathbf{P}_{\theta^0}\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\}}{\mathbf{P}_{\theta}\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\}}\right\}\right) \xrightarrow[T\to\infty]{\mathbf{P}} 0. \quad (26)$$

Закон больших чисел (26) с учетом (20) можно записать в эквивалентном виде:

$$\bar{\mathrm{K}}_T\left(\theta^0, \theta\right) - \mathrm{K}_T^*\left(\theta^0, \theta\right) \xrightarrow[T\to\infty]{\mathbf{P}} 0, \quad (27)$$

где $\bar{\mathrm{K}}_T\left(\theta^0, \theta\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u\left(X_t, X_{t-1}; \theta^0, \theta\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\ln\frac{\mathbf{P}_{\theta^0}\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\}}{\mathbf{P}_{\theta}\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\}}.$

По условию теоремы 1 имеем $\arg\min_{\theta\in\Theta}\mathrm{K}_T^*\left(\theta^0, \theta\right) = \theta^0,$ а согласно (22) $\hat{\theta} = \arg\min_{\theta\in\Theta}\bar{\mathrm{K}}_T\left(\theta^0, \theta\right),$ поэтому для модели (1), (2) из сходимости целевых функций (27) следует сходимость точек минимума (21).

Отметим, что согласно лемме 3 условие унимодальности функции Кульбака есть и условие статистической идентифицируемости параметров [12; 14], т. е. условие разрешимости задачи состоятельного оценивания этих параметров при $T \to \infty.$ Вектор параметров модели (1), (2) является составным: $\theta = \left(\theta_1', \ldots, \theta_n'\right)' \in \Theta \subset \mathbb{R}^D,$ $\theta_s = \left(a_s', b_s'\right)' \in \mathbb{R}^{n+m},$ где $a_s = \left(a_{s,1}, \ldots, a_{s,n}\right)' \in \mathbb{R}^n$ – вектор-столбец n авторегрессионных коэффициентов, $b_s = \left(b_{s,1}, \ldots, b_{s,m}\right)' \in \mathbb{R}^m$ – вектор-столбец m регрессионных коэффициентов при экзогенных переменных. Как доказано в [9], при отсутствии экзогенных переменных идентифицируемость параметров a_s обеспечивается их ограниченностью. Согласно теореме 1 условие идентифицируемости параметров b_s, т. е. условие унимодальности функции $\mathrm{K}_T^*\left(\theta^0, \theta\right),$ эквивалентно следующему (при $T \to \infty$): $\left(b_s - b_s^0\right)Z_{s,t} = 0,$ $s \in S,$ $t = 1, \ldots, T \Leftrightarrow b_s = b_s^0, s \in S.$ Таковое выполняется, если экзогенные переменные $\left\{Z_{s,t}\right\} \subset \mathbb{R}^m$ удовлетворяют условию Эйкера [12] на минимальное характеристическое число $(m \times m)$-матрицы $Q_{T,s}$:

$$Q_{T,s} = \sum_{t=1}^{T}\left(Z_{s,t} - \bar{Z}_s\right)\left(Z_{s,t} - \bar{Z}_s\right)', \bar{Z}_s = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} Z_{s,t} : \lambda_{\min}\left(Q_{T,s}\right) \xrightarrow[T\to\infty]{} +\infty, s \in S.$$

Исследуем теперь асимптотическое $(T \to \infty)$ распределение ОМП $\hat{\theta}.$ Определим информационную матрицу Фишера для случайных наблюдений $X_{t-1}, X_t \in L,$ $t \in \mathbb{N}$:

$$J_t(\theta) = -\mathbf{E}_{\theta}\left\{\nabla_{\theta}^2 \ln \mathbf{P}_{\theta}\left\{X_t \mid X_{t-1}\right\}\right\} \in \mathbb{R}^{D\times D}, \ \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^D,$$

и «усредненную» матрицу Фишера для T наблюдений $X_1, \ldots, X_T \in A^n$:

$$J_T(\theta) = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} J_t(\theta),\ \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^D.$$

Теорема 2. *В условиях теоремы 1, если* $\left|J_T\left(\theta^0\right)\right| \neq 0,$ *то ОМП* $\hat{\theta}$ *является асимптотически нормально распределенной:*

$$L\left\{\left(TJ_T\left(\theta^0\right)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\hat{\theta}-\theta^0\right)\right\} \longrightarrow N_D\left(\mathrm{O}_D, \mathrm{I}_D\right). \tag{28}$$

Доказательство. Теорема 2 доказывается по схеме доказательства теоремы из [12], в которой найдены условия асимптотической нормальности ОМП для независимых наблюдений. Для того чтобы применить указанную схему для случая зависимых наблюдений, необходимо проверить условия:

В1) $-T^{-1}J_T^{-1}\left(\theta^0\right)\nabla^2_\theta l\left(\theta^0\right) \xrightarrow[T\to\infty]{\mathbf{P}} \mathrm{I}_D;$

В2) $L\left\{\left(TJ_T\left(\theta^0\right)\right)^{\frac{1}{2}}\nabla_\theta l\left(\theta^0\right)\right\} \longrightarrow N_D\left(\mathrm{O}_D, \mathrm{I}_D\right).$

В теореме 1 доказано выполнение закона больших чисел для слабо зависимых случайных величин $u\left(X_t, X_{t-1};\ \theta^0,\ \theta\right) = \ln \mathbf{P}_{\theta^0}\left\{X_t \middle| X_{t-1}\right\}\left(\mathbf{P}_\theta\left\{X_t \middle| X_{t-1}\right\}\right)^{-1};$ аналогично доказывается закон больших чисел для $-\nabla^2_\theta u\left(X_t, X_{t-1};\ \theta^0,\ \theta\right) = -\nabla^2_\theta \ln \mathbf{P}_\theta\left\{X_t \middle| X_{t-1}\right\}$:

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(-\nabla^2_\theta \ln \mathbf{P}_\theta\left\{X_t \middle| X_{t-1}\right\} - \mathbf{E}\left\{-\nabla^2_\theta \ln \mathbf{P}_\theta\left\{X_t \middle| X_{t-1}\right\}\right\}\right) \xrightarrow[T\to\infty]{\mathbf{P}} \mathrm{O}_D,$$

что эквивалентно справедливости условия В1.

Проверим условия (теорема 1 из [15]) применимости центральной предельной теоремы к сумме $\nabla_\theta l\Big|_{\theta=\theta^0} = \sum_{t=1}^{T}\nu\left(X_t, X_{t-1};\ \theta^0\right),\ \nu\left(X_t, X_{t-1};\ \theta^0\right) = \nabla_\theta \ln \mathbf{P}_\theta\left\{X_t \middle| X_{t-1}\right\}\Big|_{\theta=\theta^0}$:

С1) случайные величины равномерно ограничены: $\left|\nu\left(X_t, X_{t-1};\ \theta^0\right)\right| \leq C < \infty,$ что верно в силу ограниченности параметров модели и экзогенных факторов;

С2) дисперсия равномерно отделена от нуля: $\mathbf{D}\left\{\nu\left(X_t, X_{t-1};\ \theta^0\right)\right\} \geq c > 0.$ Данный факт доказывается аналогично доказательству условия У2 леммы 2;

С3) для элементов матрицы $Q(t;\ \theta)$ справедливо

$$T^{\frac{1}{3}}\min_{\substack{I,\ K\in L\\ t=1,\ldots,T}}\sum_{J\in L}\min\left\{q_{I,J}(t;\ \theta),\ q_{K,J}(t;\ \theta)\right\} \xrightarrow[T\to\infty]{} \infty. \tag{29}$$

Для выполнения (29) достаточно условия: $T^{\frac{1}{3}}\min_{t=1,\ldots,T}\sum_{J\in L}\min_{I\in L} q_{I,J}(t;\ \theta) \xrightarrow[T\to\infty]{} \infty,$ которое имеет место в силу установленного ранее свойства равномерной отделимости от нуля переходных вероятностей $q_{I,J}(t;\theta) \geq c > 0,\ t \in \mathbb{Z}.$ Таким образом, выполняется центральная предельная теорема в виде В2, откуда следует (28).

Результаты компьютерного моделирования

Рассматривалась биномиальная условно авторегрессионная модель (1), (2) при следующих значениях параметров:

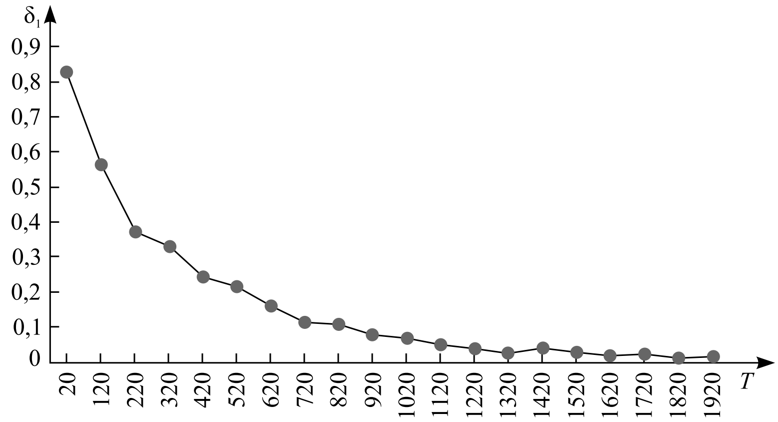
$$N = 4,\ A = \{0, 1, \ldots, 4\},\ n = 3,\ S = \{1, 2, 3\},\ m = 1,\ z_{1,s,t} = \cos(t+s),\ s \in S,\ t \in \mathbb{N},\ D = 12;$$

$$\theta_1 = (-0{,}2;\ 0{,}18;\ -0{,}15;\ 0{,}2)',\ \theta_2 = (-0{,}18;\ 0{,}24;\ -0{,}05;\ -0{,}1)',\ \theta_3 = (0{,}13;\ -0{,}13;\ -0{,}29;\ 0{,}3)'.$$

По методу Монте-Карло вычислялась экспериментальная (выборочная) вероятность отклонения ОМП i-го параметра модели $\hat{\theta}_i$ от истинного значения θ_i^0 более чем на $\varepsilon\ (\varepsilon > 0,\ i = 1, \ldots, D)$:

$$\hat{\delta}_i = \hat{\mathbf{P}}\left\{\left|\hat{\theta}_i - \theta_i^0\right| > \varepsilon\right\} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} I\left\{\left|\hat{\theta}_i^{(k)} - \theta_i^0\right| > \varepsilon\right\},$$

где θ_i^0 – истинное значение i-го параметра; $\hat{\theta}_i^{(k)}$ – ОМП i-го параметра модели $(i = 1, 2, \ldots, 12)$ по k-й реализации пространственно-временных данных $(k = 1, 2, \ldots, M)$; M = 1000 – количество реализаций Монте-Карло. Для иллюстрации состоятельности оценки $\hat{\theta}_1$ на рисунке представлен график зависимости $\hat{\hat{\delta}}_1$ от длительности наблюдений T при i = 1, $T \in [20, 1920]$.



Вероятность отклонения ОМП модели от истинного значения
The probability of deviation of MLE of the model from the true value

Таким образом, в случае, когда экзогенные факторы зависят от t $\left(z_{1,s,t} = \cos(t+s),\ s \in S,\ t \in \mathbb{N}\right)$, построенные ОМП являются состоятельными, как и для однородных цепей Маркова.

Библиографические ссылки

1. Kharin Yu. *Robustness in Statistical Forecasting*. New York: Springer; 2013. DOI: 10.1007/978-3-319-00840-0.

2. Kharin Yu, Zhurak M. Statistical analysis of spatio-temporal data based on Poisson model. *Informatica*. 2015;26(1):67–87. DOI: 10.15388/Informatica.2015.39.

3. Kharin Yu, Zhurak M. Statistical forecasting based on binomial conditional autoregressive model of spatio-temporal data. *Pliska Studia Mathematica*. 2017;27:23–36.

4. Gelfand AE. *Handbook of Spatial Statistics*. [USA]: Taylor and Francis Group, LLC; 2010.

5. Boulieri A, Liverani S, Hoogh K, Blangiardo M. A space-time multivariate Bayesian model to analyse road traffic accidents by severity. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A*. 2017;180(1):119–139. DOI: 10.1111/rssa.12178.

6. Rushworth A, Lee D, Sarran C. An adaptive spatiotemporal smoothing model for estimating trends and step changes in disease risk. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C*. 2017;66(1):141–157. DOI: 10.1111/rssc.12155.

7. Amek N, Bayoh N, Hamel M, Lindblade KA, Gimnig J, Laserson KF, et al. Spatio-temporal modeling of sparse geostatistical malaria sporozoite rate data using a zero inflated binomial model. *Spatial and Spatio-temporal Journal of Epidemiology*. 2011;2(4):283–290. DOI: 10.1016/j.sste.2011.08.001.

8. Харин ЮС, Журак МК. Биномиальная условно авторегрессионная модель пространственно-временных данных и ее вероятностно-статистический анализ. *Доклады НАН Беларуси*. 2015;59(6):5–12.

9. Харин ЮС, Журак МК. Асимптотический анализ оценок максимального правдоподобия параметров биномиальной условно авторегрессионной модели пространственно-временных данных. *Известия НАН Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2016;1:36–45. DOI: 10.29235/1561-2430-2016-0-1-36-45.

10. Сарымсаков ТА, Мустафин ХА. К эргодической теореме для неоднородных цепей Маркова. *Труды Среднеазиатского государственного университета им. В. И. Ленина*. 1957;74:1–37.

11. Ланкастер П. *Теория матриц*. Москва: Наука; 1973.

12. Харин ЮС, Зуев НМ, Жук ЕЕ. *Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика*. Минск: БГУ; 2011.

13. Бернштейн СН. *Теория вероятностей*. Москва: Госиздательство; 1927.

14. Боровков АА. *Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез*. Москва: Наука; 1984.

15. Добрушин РЛ. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. I. *Теория вероятностей и ее применения*. 1956;1(1):72–89.

References

1. Kharin Yu. *Robustness in Statistical Forecasting*. New York: Springer; 2013. DOI: 10.1007/978-3-319-00840-0.

2. Kharin Yu, Zhurak M. Statistical analysis of spatio-temporal data based on Poisson model. *Informatica*. 2015;26(1):67–87. DOI: 10.15388/Informatica.2015.39.

3. Kharin Yu, Zhurak M. Statistical forecasting based on binomial conditional autoregressive model of spatio-temporal data. *Pliska Studia Mathematica*. 2017;27:23–36.

4. Gelfand AE. *Handbook of Spatial Statistics*. [USA]: Taylor and Francis Group, LLC; 2010.
5. Boulieri A, Liverani S, Hoogh K, Blangiardo M. A space-time multivariate Bayesian model to analyse road traffic accidents by severity. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A*. 2017;180(1):119–139. DOI: 10.1111/rssa.12178.
6. Rushworth A, Lee D, Sarran C. An adaptive spatiotemporal smoothing model for estimating trends and step changes in disease risk. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C*. 2017;66(1):141–157. DOI: 10.1111/rssc.12155.
7. Amek N, Bayoh N, Hamel M, Lindblade KA, Gimnig J, Laserson KF, et al. Spatio-temporal modeling of sparse geostatistical malaria sporozoite rate data using a zero inflated binomial model. *Spatial and Spatio-temporal Journal of Epidemiology*. 2011;2(4):283–290. DOI: 10.1016/j.sste.2011.08.001.
8. Kharin YuS, Zhurak MK. Binomial conditional autoregressive model of the space-time data and its probabilistic and statistical analysis. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 2015;59(6):5–12. Russian.
9. Kharin YuS, Zhurak MK. Asymptotic analysis of maximum likelihood estimators for parameters of binomial conditionally autoregressive model of spatio-temporal data. *Proceedings of the National Academy of Sciences. Physics and Mathematics Series*. 2016;1:36–45. DOI: 10.29235/1561-2430-2016-0-1-36-45. Russian.
10. Sarymsakov TA, Mustafin HA. On an ergodic theorem for inhomogeneous Markov chains. *Trudy Sredneaziatskogo gosudarstvennogo universiteta im. V. I. Lenina*. 1957;74:1–37. Russian.
11. Lancaster P. *Teoriya matrits* [The theory of matrices]. Moscow: Nauka; 1973. Russian.
12. Kharin YuS, Zuev NM, Zuk EE. *Teoriya veroyatnostei, matematicheskaya i prikladnaya statistika* [Probability theory, mathematical and applied statistics]. Minsk: Belarusian State University; 2011. Russian.
13. Bernshtein SN. *Teoriya veroyatnostei* [Probability theory]. Moscow: Gosizdatel'stvo; 1927. Russian.
14. Borovkov AA. *Matematicheskaya statistika. Otsenka parametrov. Proverka gipotez* [Math statistics. Evaluation of parameters. Hypotheses testing]. Moscow: Nauka; 1984. Russian.
15. Dobrushin RL. Central limit theorem for nonstationary Markov Chains. I. *Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya.* 1956;1(1):72–89. Russian.

Статья поступила в редколлегию 07.02.2018.
Received by editorial board 07.02.2018.