
ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

INFORMATICS, COMPUTER SCIENCE AND MANAGEMENT

УДК 512.644

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СЕНСОРНОЙ КОНФИГУРАЦИИ И УПРАВЛЕНИЕ ПОТОКАМИ

Л. А. ПИЛИПЧУК¹⁾, А. С. ПИЛИПЧУК¹⁾, Е. Н. ПОЛЯЧОК¹⁾, А. И. ФАРАЗЕЙ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Статья посвящена разработке стратегий идентификации расположения специальных программируемых устройств (сенсоров) в узлах сети для сбора, обработки, анализа информации о функции потока в целях оценки дуговых потоков в той части сети, которая непосредственно не наблюдается. Одним из направлений решения задачи является перебор возможных размещений, основанный на эвристических соображениях. В качестве модели потоковой сети с сенсорами используется разреженная недоопределенная система линейных алгебраических

Образец цитирования:

Пилипчук ЛА, Пилипчук АС, Полячок ЕН, Фаразей АИ. Идентификация сенсорной конфигурации и управление потоками. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;2:67–76.

For citation:

Pilipchuk LA, Pilipchuk AS, Polyachok EN, Farazei AI. Identification of the sensors configuration and flows control. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;2:67–76. Russian.

Авторы:

Людмила Андреевна Пилипчук – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики.

Андрей Степанович Пилипчук – соискатель кафедры методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук; профессор кафедры методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики А. И. Калинин.

Евгений Николаевич Полячок – магистрант кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – Л. А. Пилипчук.

Артем Иванович Фаразей – студент факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – Л. А. Пилипчук.

Authors:

Ludmila A. Pilipchuk, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of computer applications and systems, faculty of applied mathematics and computer sciences. pilipchuk@bsu.by

Andrei S. Pilipchuk, postgraduate student at the department of optimal control methods, faculty of applied mathematics and computer sciences.

an.pilipchuk@gmail.com

Eugene N. Polyachok, master's degree student at the department of computer applications and systems, faculty of applied mathematics and computer sciences.

arszp10@gmail.com

Artem I. Farazei, student at the faculty of applied mathematics and computer sciences.

artem.farazei@gmail.com

уравнений. Определяются условия единственности решения системы специального вида, полученной исходя из априорной информации от сенсоров, установленных в обозреваемых узлах сети. Однако проверка этих условий с помощью перебора возможна только для небольших сетей. Получены оценки, ограничивающие число просматриваемых вариантов, и обоснован интервал изменения количества обозреваемых узлов, гарантирующих полную наблюдаемость сети. Эти результаты позволяют увеличить размерности решаемых задач. Для исследуемого класса задач найдены условия эффективной применимости точных методов. Разработаны методы нахождения субоптимальных решений установления полной наблюдаемости сети для заданного порога интенсивности. Получены численные результаты построения субоптимальных решений для различных значений порога интенсивности. Представлена визуализация сенсорной конфигурации обозреваемых узлов, гарантирующих полную наблюдаемость сети.

Ключевые слова: граф; разреженная система; моделирование; сенсорная конфигурация; оптимальные и субоптимальные решения; визуализация.

IDENTIFICATION OF THE SENSORS CONFIGURATION AND FLOWS CONTROL

L. A. PILIPCHUK^a, A. S. PILIPCHUK^a, E. N. POLYACHOK^a, A. I. FARAZEI^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: L. A. Pilipchuk (pilipchuk@bsu.by)

The article is devoted to the development of strategies for identifying the location of special programmable devices (sensors) in network nodes for collecting, processing, analyzing information about the flow function in order to evaluate arc flows in that part of the network that is not directly observed. One of the ways to solve this problem is to search through possible placements, based on heuristic considerations. In work as a model of a flow network with sensors, a sparse underdetermined system of linear algebraic equations is used. The conditions for the uniqueness of the solution of a special kind of system obtained as a result of the use of a priori information from sensors installed in the monitored nodes of the network are determined. However, checking these conditions with a full search can only be used for small networks. The estimations limiting the number of viewed configurations of nodes are obtained and the interval of changing the number of monitored nodes that guarantee the complete observability of the network is justified. These results make it possible to increase the dimensionality of the problems being solved. Methods are developed for finding suboptimal solutions to establish the complete observability of the network for a given intensity threshold. Numerical results of constructing suboptimal solutions for various values of the intensity threshold are obtained. The results of visualization of the sensory configuration of the observed nodes are presented, which guarantee complete observability of the network. Conditions for effective applicability of exact methods are obtained for problems of the investigated class.

Key words: graph; sparse system; modeling; configuration of sensors; optimal and suboptimal solutions; visualization.

Введение

Неотъемлемой составляющей в задачах управления потоками и их контроля в сетях является проектирование стратегий расположения специальных программируемых устройств (сенсоров). Технологии коммуникации позволяют получить информацию о потоках в больших сетях с помощью сенсоров и видеокамер для относительно незначительной части сети. Первостепенную важность имеет разработка *оптимальных* стратегий расположения минимального количества сенсоров в узлах сети для сбора частичной информации о функции потока. На основании анализа и использования полученных данных рассматривается возможность оценки потоков в той части сети, которая непосредственно не наблюдается. Задача моделирования процессов оценки потоков на ненаблюдаемой части может быть представлена в виде недоопределенной системы линейных алгебраических уравнений, где совокупность переменных соответствует неизвестным дуговым потокам и переменным интенсивностям узлов, а совокупность уравнений – условиям баланса. Необходимо установить сенсоры в определенные (обозреваемые) узлы для сбора полной информации о функции потока, которая бы гарантировала полную наблюдаемость сети. В результате обработки информации от установленных в обозреваемые узлы сенсоров получена специальная разреженная система линейных алгебраических уравнений, единственность решения которой гарантирует полную наблюдаемость сети. Решение системы линейных алгеб-

раических уравнений определяет численные значения потоков на ненаблюдаемой части исходной сети. Это означает, что все потоки известны, т. е. сеть полностью наблюдаема.

Данная проблема упоминается в литературе [1] как проблема местоположения датчиков (Sensor Location Problem, SLP). В [2] доказано, что задача идентификации минимального числа датчиков и их конфигураций является NP -полной. В последние несколько лет проблема расположения сенсоров SLP для мониторинга потоков в сети была объектом растущего интереса в связи с ее актуальностью в области контроля и управления движением. С ростом размерности сети стратегии *полного* перебора для определения оптимальных конфигураций обзорываемых узлов NP -полных задач данного класса оказываются неприемлемыми. В этом контексте первостепенное значение имеет разработка новых подходов и стратегий определения местоположения датчиков, развитие технологий и алгоритмов численного решения разреженных систем линейных алгебраических уравнений.

В [3–5] изложены новые подходы к построению оптимального решения задачи определения минимального количества специальных программируемых устройств (сенсоров) и конфигураций обзорываемых узлов сети для сбора полной информации о функции потока, которая бы гарантировала полную наблюдаемость сети. В [4] продолжено исследование проблемы, представлена математическая формулировка задачи SLP, а также применен генетический подход к поиску приемлемых решений. В [3; 5] рассмотрен подход, основанный на методах декомпозиции потоков и позволяющий представить систему для моделирования процессов оценки потоков в виде независимых подсистем. Также даны эффективные алгоритмы и технологии численного решения независимых подсистем определения дуговых потоков на ненаблюдаемой части сети, основанные на применении аппарата теории графов, результатов разреженного сетевого и матричного анализа.

Оптимальные решения задачи расположения сенсоров для оценки потоков на ненаблюдаемой части сети

Основой для моделирования процессов оценки потоков на ненаблюдаемой части графа является недоопределенная система линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{ji} = \begin{cases} x_i, & i \in I^*, \\ 0, & i \in I \setminus I^*, \end{cases} \quad (1)$$

где $I^* \subseteq I, I^* \neq \emptyset, G=(I, U)$ – связный ориентированный двунаправленный граф с множеством узлов I и множеством дуг U , определенных на $I \times I, |I| < \infty, |U| < \infty. I_i^+(U) = \{j \in I : (i, j) \in U\}, I_i^-(U) = \{j \in I : (j, i) \in U\}$. Двунаправленный граф G обладает следующим свойством: если существует дуга $(i, j) \in U$ с дуговым потоком x_{ij} , то существует и дуга $(j, i) \in U$ с дуговым потоком x_{ji} , который в общем случае может не совпадать с x_{ij} .

Задача нахождения оптимального расположения сенсоров в сети заключается в том, чтобы по данному графу $G=(I, U)$, описывающему транспортную сеть, найти подмножество M обзорываемых узлов минимального размера $|M|$ и их конфигурации при размещении специальных программируемых устройств (сенсоров) для наблюдения за потоками. Пусть M – множество обзорываемых узлов графа $G=(I, U)$, в которых установлены указанные устройства сбора информации, $M \subseteq I$. Для заданного множества M обзорываемых узлов известна следующая априорная информация (показания установленных датчиков):

$$x_{ij} = f_{ij}, j \in I_i^+(U), x_{ji} = f_{ji}, j \in I_i^-(U), i \in M; x_i = f_i, i \in M \cap I^*, \quad (2)$$

где наблюдаемые дуговые потоки f_{ij} и наблюдаемые переменные интенсивности f_i получены априори из (2) на основании данных от сенсоров. Учтем дополнительную информацию о коэффициентах разбиения потока. Используя известные коэффициенты разбиения $p_{ij}, 0 < p_{ij} \leq 1, (i, j) \in U$, можно выразить общий исходящий поток $F(i) = \sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij}$ как функцию от объема потока по каждой исходящей дуге.

На основании известных коэффициентов разбиения $p_{ij}, (i, j) \in U$, найденных для дуг сети $G=(I, U)$, определяются дополнительные уравнения взаимосвязи дуговых потоков следующим образом. Если для узла i выполняется соотношение $|I_i^+(U)| \geq 2$, то для любой другой дуги, исходящей из этого узла, например (i, v_i) , дуговые потоки для всех дуг, исходящих из узла i (за исключением дуги (i, v_i)), выражаются через дуговой поток x_{i, v_i} следующим образом:

$$x_{i,j} = p_{i,j}F(i), (i, j) \in U, \text{ или } x_{ij} = \frac{p_{i,j}}{p_{i,v_i}} x_{i,v_i}, j \in I_i^+(U) \setminus \{v_i\}, |I_i^+(U)| \geq 2, \quad (3)$$

где (i, v_i) – каноническая дуга, исходящая из узла. Обозначим $\beta_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{p_{i,v_i}}$, если $|I_i^+(U)| \geq 2$, и $\beta_{i,j} = p_{i,v_i}$, $|I_i^+(U)| = 1$. Определим из (3) численные значения дуговых потоков x_{ij} , которые можно выразить с помощью коэффициентов разбиения p_{ij} , p_{i,v_i} через наблюдаемые потоки $x_{i,v_i} = f_{i,v_i}$ согласно (2), полученные от специальных программируемых устройств (сенсоров), установленных в узлах множества M . Численные значения дуговых потоков, выраженные с помощью (3) через коэффициенты разбиения потока, подставим в уравнения системы (1). Удалим из графа $G = (I, U)$ дуги с известными значениями дуговых потоков и узлы с известными значениями переменной интенсивности $x_i = f_i$, $i \in M \cap I^*$. Исключим из системы (3) те уравнения, которые не содержат неизвестных дуговых потоков и интенсивностей узлов. Пусть q – число оставшихся уравнений вида (3) с неизвестными значениями дуговых потоков. С учетом выполненных преобразований графа G получим новый граф $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$, $\bar{I}^* = I^* \setminus (M \cap I^*)$. В результате система (1), (3) преобразуется к виду

$$\sum_{j \in I_i^+(\bar{U})} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(\bar{U})} x_{ji} = \begin{cases} a_i + x_i, & i \in \bar{I}^*, \\ a_i, & i \in \bar{I} \setminus \bar{I}^*, \end{cases} \quad (4)$$

$$\sum_{(i,j) \in \bar{U}} \lambda_{ij}^p x_{ij} = 0, p \in P = \{1, \dots, q\}, \text{ если } P \neq \emptyset. \quad (5)$$

Заметим, что множество P может быть пустым. Коэффициенты в уравнениях (5), связывающие неизвестные дуговые потоки, равны: $\lambda_{ij}^p = 1$, $\lambda_{i,v_i}^p = -\frac{p_{ij}}{p_{i,v_i}}$, $j \in I_i^+(\bar{U}) \setminus \{v_i\}$, если $|I_i^+(\bar{U})| > 1$, $i \in \bar{I}$; $\lambda_{ij}^p = 0$,

если $|I_i^+(\bar{U})| = 1$, $i \in \bar{I}$. Неизвестными системы (4)–(5) являются дуговые потоки x_{ij} , $(i, j) \in \bar{U}$, и переменные интенсивности узлов x_i , $i \in \bar{I}^*$, $\bar{I}^* \subseteq \bar{I}$. Орграф $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ может быть несвязным и (или) не двунаправленным. Некоторые компоненты связности графа \bar{G} могут не содержать узлов из множества \bar{I}^* .

Сформулируем задачу поиска *оптимального* расположения сенсоров в узлах графа $G = (I, U)$ для оценки дуговых потоков и переменных интенсивностей узлов: *найти подмножество M узлов минимального размера, $M \subseteq I$, такое, чтобы соответствующая система (4)–(5) имела единственное решение.*

Теорема 1. Пусть A – матрица инцидентности связного ориентированного графа G . Строки усеченной матрицы инцидентности \tilde{A} , образованной удалением любой строки матрицы A , линейно независимы.

Доказательство. Ранг матрицы инцидентности связного ориентированного графа $G = (I, U)$ равен $|I| - 1$, и дуги, соответствующие базисному множеству столбцов матрицы инцидентности, образуют остовное дерево графа G . Линейная независимость усеченной матрицы инцидентности \tilde{A} следует из приведения подматрицы матрицы \tilde{A} , которая соответствует базисным столбцам, к виду верхней треугольной матрицы, определитель которой отличен от нуля. Теорема доказана.

С целью уменьшить число $|U|$ столбцов в матрице инцидентности A графа $G = (I, U)$ до числа $|I| - 1$ построим матрицу H размерности $|I| \times (|I| - 1)$, используя известные коэффициенты разбиения p_{ij} , $(i, j) \in U$, для каждой дуги $(i, j) \in U$. Напомним, что согласно (3) можно выразить общий исходящий из узла $i \in I$ поток $F(i) = \sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij}$ как функцию от объема потока по каждой исходящей дуге.

Элементы матрицы H вычисляются следующим образом:

$$H_{i,j} = \begin{cases} \beta_{j,i}, & \text{если } e_j \text{ – каноническая дуга, } i \neq j, (j, i) \in U, \\ - \sum_{k \in I_i^+(U)} \beta_{i,k}, & \text{если } e_j \text{ – каноническая дуга, } i = j, \\ 0, & \text{если } i \text{ и } j \text{ не соединены дугой.} \end{cases}$$

Матрица H имеет линейно зависимые строки, поскольку сумма всех ее строк равна нулю. Следовательно, ранг матрицы H меньше $|I|$.

Теорема 2. Строки матрицы \tilde{H} , образованной в результате удаления из матрицы H строки с номером $i^* \in \{1, \dots, |I|\}$, являются линейно независимыми.

Доказательство. Пусть $|I| = n$ и узлы графа пронумерованы: $1, \dots, n$. Без ограничения общности предположим, что $i^* = n$, и обозначим $\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_{n-1}$ строки матрицы \tilde{H} . Проведем доказательство от противного. Допустим, что строки $\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_{n-1}$ матрицы \tilde{H} линейно зависимы. Тогда существуют

такие коэффициенты b_1, \dots, b_{n-1} , $\sum_{i=1}^{n-1} b_i^2 > 0$, что

$$\sum_{i=1}^{n-1} b_i \tilde{H}_i = 0.$$

Умножим обе части последнего уравнения на вектор потока $f^* = (f_{e_1}, \dots, f_{e_n})$, содержащий значения дуговых потоков только через канонические дуги (e_1, \dots, e_n) . В результате получим

$$b_1 \tilde{H}_1 f^* + \dots + b_{n-1} \tilde{H}_{n-1} f^* = 0,$$

что равносильно выражению

$$b_1 \tilde{H}_{1,e_1} f_{e_1} + \dots + b_1 \tilde{H}_{1,e_n} f_{e_n} + b_2 \tilde{H}_{2,e_1} f_{e_1} + \dots + b_2 \tilde{H}_{2,e_n} f_{e_n} + \dots \\ \dots + b_{n-1} \tilde{H}_{n-1,e_1} f_{e_1} + \dots + b_{n-1} \tilde{H}_{n-1,e_n} f_{e_n} = 0.$$

По определению матрицы \tilde{H} имеем

$$\tilde{H}_{i,e_j} f_{e_j} = \beta_{j,i} f_{e_j} = f_{j,i}, \text{ если } i \neq j, \text{ и } \tilde{H}_{i,e_j} f_{e_j} = - \left(\sum_{k \in I_i^+(U)} \beta_{i,k} \right) f_{e_j} = - \sum_{k \in I_i^+(U)} f_{i,k}, \text{ если } i = j,$$

или

$$(\pm b_1 \mp b_2) f_{1,2} + \dots + (\pm b_1 \mp b_{n-1}) f_{1,n-1} + \\ + (\pm b_2 \mp b_1) f_{2,1} + \dots + (\pm b_2 \mp b_{n-1}) f_{2,n-1} + \dots \\ \dots + (\pm b_{n-1} \mp b_1) f_{n-1,1} + \dots + (\pm b_{n-1} \mp b_{n-2}) f_{n-1,n-2} + \\ + (\pm b_1 f_{1,n} \mp b_1 f_{n,1}) + \dots + (\pm b_{n-1} f_{n-1,n} \mp b_{n-1} f_{n,n-1}) = 0,$$

где знак первого элемента в каждой паре коэффициентов вида $(\pm b_i \mp b_j)$ противоположен знаку второго элемента и зависит от направления дуги и $f_{i,j} = 0$, если узлы i и j не являются смежными. Поскольку данное выражение должно выполняться для всех возможных ненулевых значений потоковой функции, то все коэффициенты этого уравнения при значениях потока $f_{i,j}$ должны быть равны нулю, т. е. имеем следующие соотношения:

$$\pm b_i \mp b_j = 0, \text{ где } f_{i,j} \neq 0, i \neq j, i < n, j < n, \quad (6)$$

$$b_k = 0, \text{ где } f_{k,n} \neq 0, \text{ или } f_{n,k} \neq 0, k < n. \quad (7)$$

Рассмотрим усеченную матрицу инцидентности \tilde{A} . Заметим, что каждый столбец этой матрицы содержит максимум два ненулевых элемента: $+1, -1$. Если рассмотреть линейную комбинацию строк матрицы \tilde{A} и коэффициентов b_1, \dots, b_{n-1} , то можно убедиться, что каждый элемент результирующего вектора имеется в левой части соотношений (6) – (7), однако согласно тем же соотношениям эти элементы должны быть равны нулю. Таким образом, имеем

$$b_1 \tilde{A}_1 + \dots + b_{n-1} \tilde{A}_{n-1} = 0.$$

Однако из данного выражения следует, что строки усеченной матрицы \tilde{A} являются линейно зависимыми, что противоречит теореме 1. Таким образом, строки матрицы \tilde{H} линейно независимы.

Следствие 1. Рассмотрим усеченную матрицу \tilde{H} . Удалим из нее столбец, который соответствует канонической дуге узла i^* . Полученная матрица \hat{H} размерности $(n-1) \times (n-1)$ является матрицей полного ранга.

Доказательство. Проводится по схеме доказательства теоремы 2.

Теорема 3. Пусть $G = (I, U)$ – связный двунаправленный ориентированный граф. Основой для моделирования процессов оценки потоков на ненаблюдаемой части графа G является недоопределенная система линейных алгебраических уравнений (1), при этом выполняется условие $I^* = \emptyset$. Известны коэффициенты p_{ij} , $(i, j) \in U$, разбиения потока для всех дуг графа. Тогда достаточно одной наблюдаемой дуги графа G для вычисления значений дуговых потоков всего графа.

Доказательство. Пусть e_k – обозреваемая дуга, которая соответствует узлу k . Сформируем матрицу \tilde{H} для графа G , при этом канонической дугой для узла k является обозреваемая дуга e_k . Для дуги e_k известно численное значение f_{e_k} дугового потока. Используя соотношение (3), можно явно вычислить значения элементов столбца, соответствующего канонической дуге e_k , следующим образом:

$$f_{k,j} = \beta_{k,j} f_{e_k}. \quad (8)$$

Обозначим $\tilde{H}^{(k)}$ столбец с элементами (8), соответствующий канонической дуге e_k . Сформируем вектор правой части: $b = -\tilde{H}^{(k)}$. Удалим столбец $\tilde{H}^{(k)}$ из матрицы \tilde{H} . В результате получим матрицу \hat{H} размерности $(n-1) \times (n-1)$. Составим следующую систему:

$$\hat{H}x = b, \quad (9)$$

где x – вектор, содержащий значения дуговых потоков через канонические дуги, за исключением дуги e_k . Согласно следствию 1 матрица \hat{H} является матрицей полного ранга, а значит, таковой является и матрица \tilde{H} . Таким образом, система (9) имеет единственное решение, вычислив которое мы можем воспользоваться соотношениями (8) для вычисления значений потока для всех дуг графа G . Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть G – связный ориентированный двунаправленный граф с функцией потока (1), содержащий $k = |I^*|$ узлов с переменной интенсивностью. Известны коэффициенты p_{ij} , $(i, j) \in U$, разбиения потока для всех дуг графа. Для определения численных значений дуговых потоков всего графа достаточно разместить $k = |I^*|$ сенсоров в узлах множества I^* .

Доказательство. Обозначим: v_1, \dots, v_k – узлы с переменной интенсивностью x_i , $i \in I^*$. Так как все узлы с переменной интенсивностью являются обозреваемыми, то известны априори численные значения x_i , $i \in I^*$ (т. е. разница между общим входящим и общим выходящим потоком каждого узла). Кроме этого, известны численные значения дуговых потоков для k канонических дуг. С учетом этого матрица \tilde{H}' преобразованной системы (1) содержит $n - k$ неизвестных, $n = |U|$. Удалим из матрицы \tilde{H}' столбцы $\tilde{H}'^{(v_1)}, \dots, \tilde{H}'^{(v_k)}$, соответствующие узлам v_1, \dots, v_k , предварительно построив вектор правой части: $b' = -\sum_{i=1}^k \tilde{H}'^{(v_i)}$. В результате получим матрицу \hat{H}' размерности $(n-k) \times (n-k)$. Составим следующую систему:

$$\hat{H}'x = b, \quad (10)$$

где x – вектор, содержащий значения дуговых потоков через канонические дуги, за исключением дуги e_k . По теореме 2 матрица \hat{H}' является матрицей полного ранга, а значит, и \tilde{H}' – матрица полного ранга. Таким образом, из системы (10) однозначно определяются значения дуговых потоков для канонических дуг.

Моделирование процессов оценки потоков на ненаблюдаемой части сети: субоптимальные решения

Стратегии полного перебора узлов графа G в целях поиска наименьшего числа $|M|$ обозреваемых узлов и их конфигураций исследуемого класса NP-полных задач SLP, которые бы гарантировали полную наблюдаемость сети, можно применять для относительно небольших сетей. Определение оптимальной конфигурации расстановки сенсоров с использованием алгоритмов полного перебора вариантов

$$C_m^1 = m, C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}, \dots, C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

потребуется огромных вычислительных затрат даже для относительно малой размерности сети $G = (I, U)$, $m = |I|$. В случае моделирования процесса трафика в масштабах крупных городов количество транспортных средств может достигать десятков тысяч и изменения величин дуговых потоков

и переменных интенсивностей узлов обычно лежат в широком диапазоне. В некоторых практических задачах дискретной оптимизации малейшие изменения значений отдельных параметров не оказывают существенного влияния на решения, поэтому некоторыми ограничениями на параметры реальной модели можно пренебречь и (или) включить дополнительные ограничения в математическую модель. Кроме этого, коэффициенты разбиения $p_{ij}, (i, j) \in U$, переменные интенсивности узлов $x_i, i \in I^*$, и дуговые потоки $x_{ij}, (i, j) \in U$, являются неточными данными (получены непосредственно из измерений, подвержены ошибкам округления). Один из способов выражения неточности данных, имеющий с пользовательской точки зрения хорошие свойства [6], опирается на интервальные матрицы и векторы. Интервальный вектор \mathbf{b} представляет собой матрицу-столбец $\mathbf{b} = \{b : \underline{b} \leq b \leq \bar{b}\}$, т. е. $\mathbf{b} = [\underline{b}, \bar{b}] = [b_c - \delta, b_c + \delta]$, $\underline{b}, \bar{b} \in \mathbb{R}^m$, где $b_c = \frac{1}{2}(\underline{b} + \bar{b})$ – средний вектор (вектор середин); $\delta = \frac{1}{2}(\bar{b} - \underline{b})$ – неотрицательный вектор радиусов [6].

Для определения численных значений дуговых потоков графа G достаточно разместить $k = |I^*|$ сенсоров в узлах множества $M = I^*$ (следствие 2). Интервал изменения количества $|M|$ обозреваемых узлов, гарантирующих полную наблюдаемость сети, равен $[\underline{h}, \bar{h}]$, где $\underline{h} = 1$ и $\bar{h} = |I^*|$, $|M| \leq |I^*|$. Следовательно, верхняя граница \bar{h} интервала $[\underline{h}, \bar{h}]$ уменьшилась до значения $|I^*|$ по сравнению с первоначальным значением $\bar{h} = |I|$. В реальных моделях относительно небольшие изменения переменной интенсивности $x_i, i \in I^*$, не оказывают существенного влияния на решения. Для численных значений переменной интенсивности $x_i, i \in I^*$, введем порог интенсивности t (*intensity threshold*), $t > 0$. Пусть величины данного порога изменяются в интервале $[\underline{t}, \bar{t}]$, $\underline{t} > 0$, $\bar{t} = V$. Границы последнего $\underline{t} > 0$ и $\bar{t} = V$ определяются опытным путем. С пользовательской точки зрения значения порога интенсивности из интервала $[\underline{t}, \bar{t}]$ не должны оказывать существенного влияния на решения задачи.

Выберем некоторое численное значение порога интенсивности $t \in [\underline{t}, \bar{t}]$. Определим множество узлов $\tilde{I}^*, \tilde{I}^* \subseteq I^*$, для которых выполняются неравенства

$$|x_i| < t, i \in \tilde{I}^*. \quad (11)$$

Исключим из I^* те узлы, для которых выполнены условия (11). Обновим множество I^* узлов графа G с переменной интенсивностью $x_i, i \in I^*$, следующим образом: $I^* = I^* \setminus \tilde{I}^*$. Очевидно, что для переменных интенсивностей $x_i, i \in I^*$, обновленного множества I^* выполнены соотношения $|x_i| \geq t, i \in I^*$. Для новых множеств узлов I^* и $I \setminus I^*$ графа G представим систему (1). После расположения сенсоров в узлах обновленного множества I^* и обработки полученной априорной информации (2), (3) получим разреженную систему линейных алгебраических уравнений (4)–(5), единственность решения $x = (x_{ij}, (i, j) \in \bar{U}, x_i, i \in \bar{I}^*)$ которой гарантирует полную наблюдаемость сети G .

Сформулируем задачу поиска *субоптимального* (t -оптимального) решения задачи расположения сенсоров в узлах графа $G = (I, U)$ для оценки дуговых потоков и переменных интенсивностей узлов: для заданного порога интенсивности $t, |x_i| \geq t, i \in \bar{I}^*$, найти такое подмножество M узлов графа G , $M \subseteq I$, чтобы соответствующая система (4)–(5) имела единственное решение.

Субоптимальные решения экстремальных задач рассматривались и ранее. Исследованию ϵ -оптимальных (субоптимальных) решений экстремальных задач специального вида, приемлемых по значению целевой функции, посвящены работы [7; 8]. Общий подход к построению k -оптимальных решений кратчайших путей в динамическом программировании рассматривается в работах [9; 10]. Интерес к построению таких решений повышается в связи с крупными изменениями используемых вычислительных средств, улучшением характеристик вычислительной техники, ее быстродействия и оперативной памяти, появлением многопроцессорных систем и новых возможностей организации вычислительных процессов, заложенных в высокоуровневых языках программирования, которые имеют в своем наличии дополнительные структуры и библиотеки для прикладного использования. Вычислительная сторона задачи существенно меняется в зависимости от того, перебор какого количества субоптимальных решений необходимо выполнить.

Естественным является следующий подход: перебирать t -оптимальные решения для различных численных значений порога интенсивности t из интервала $[\underline{t}, \bar{t}]$ до тех пор, пока не встретится t -оптимальное решение, которое является приемлемым по числу сенсоров $|M| = |I^*|$ и значению t порога

интенсивности. Далее для выбранного t -оптимального решения применяются стратегии случайного поиска с целью уменьшить число $|M|$ обозреваемых узлов.

Численные результаты построения субоптимальных решений задачи расположения сенсоров на реальных данных

Численные результаты построения субоптимальных решений задачи расположения сенсоров для оценки дуговых потоков на ненаблюдаемых частях сетей получены для реальных данных (сети G_1, G_2) с использованием ПЭВМ Intel G3900, 16 Гб ОЗУ, и применением возможностей стандартных библиотек высокоуровневого языка программирования Python распараллеливания на четырех потоках. Характеристики сетей G_1 и G_2 приведены ниже. В таблице представлены субоптимальные решения на реальных данных для различных значений порога интенсивности t .

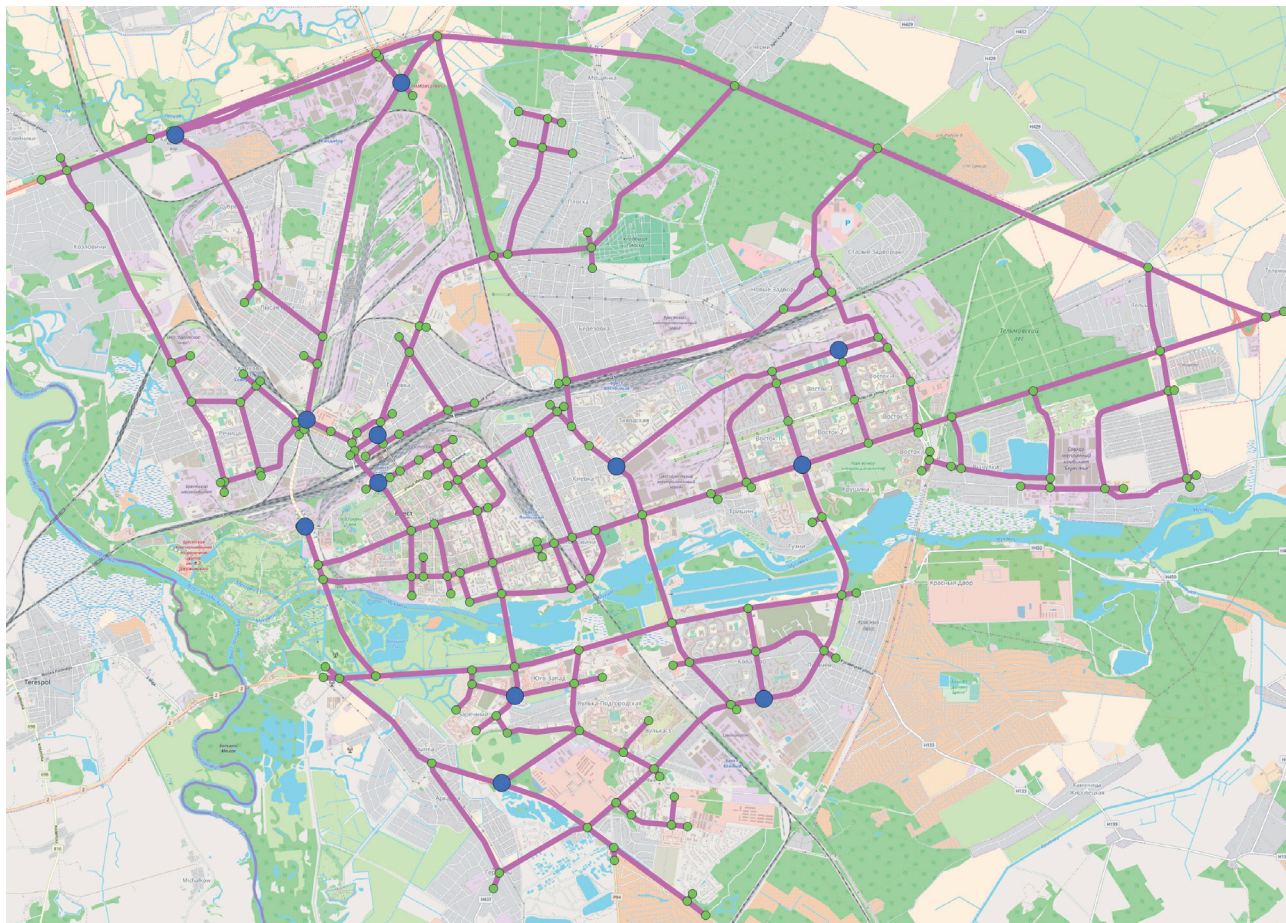
Разработано приложение на языке программирования Python 3 для считывания информации со специальных программируемых устройств (сенсоров) и построения субоптимального решения для фиксированного порога интенсивности из заданного интервала. Входные данные и результаты численного решения задачи SLP хранятся в СУБД *PostgreSQL 10*. Визуализация расположения сенсоров осуществляется в геоинформационной системе *Quantum GIS*. Пересчет данных о транспортных потоках на ненаблюдаемой части сети осуществляется на основе априорной информации, полученной от сенсоров. Разработан программный комплекс для визуализации сенсорной конфигурации обозреваемых узлов субоптимального решения задачи SLP, которое для заданного порога интенсивности t гарантирует полную наблюдаемость сети.

Субоптимальные решения задачи SLP для реальных сетей при различных значениях порога интенсивности

The results of solving the sensor location problem for different values of the intensity threshold

Параметры сети	Порог интенсивности t	Начальное число обозреваемых узлов	Конечное число обозреваемых узлов	Число обусловленности матрицы	Ранг матрицы	Время вычисления дуговых потоков, с
$G_1 = (I_1, U_1),$ $ I_1 = 81, U_1 = 234$	5	78	29	245	101	0,028
	20	71	51	169	50	0,013
	50	58	39	205	61	0,025
	70	53	18	1839	98	0,021
	100	38	11	33 820	97	0,013
	150	23	7	143 900	90	0,014
	200	14	5	696 080	85	0,014
	300	9	5	27 474	80	0,012
$G_2 = (I_2, U_2),$ $ I_2 = 99, U_2 = 258$	5	99	66	466	71	0,004
	20	88	54	30 009	84	0,017
	50	71	54	284	67	0,019
	70	60	21	39 894	122	0,013
	100	51	17	55 798	121	0,021
	150	36	12	12 528	116	0,028
	200	24	7	596 980	114	0,020
	300	15	5	383 341	109	0,020

На рисунке представлены результаты визуализации сенсорной конфигурации обозреваемых узлов субоптимального решения задачи SLP, которое для заданного порога интенсивности $t = 150$ гарантирует полную наблюдаемость сети G_2 .



Сенсорная конфигурация обозреваемых узлов (синяя заливка), гарантирующая полную наблюдаемость сети $G_2 = (I_2, U_2)$, $|I_2| = 99$, $|U_2| = 258$,
при пороге интенсивности $t = 150$, $|M| = 12$

Sensory configuration of the observed nodes of the set M (blue fill),
which is guarantees full observability of the network $G_2 = (I_2, U_2)$, $|I_2| = 99$, $|U_2| = 258$,
for given the threshold of intensity $t = 150$, $|M| = 12$

Получены численные результаты построения субоптимальных решений и представлена визуализация сенсорной конфигурации обозреваемых узлов, которая гарантирует полную наблюдаемость сети.

Библиографические ссылки

1. Bianco L, Confessore G, Gentili M. Combinatorial aspects of the sensor location problem. *Annals of Operation Research*. 2006;144(1):201–234. DOI: 10.1007/s10479-006-0016-9.
2. Bianco L, Confessore G, Reverberi P. A network based model for traffic sensor location with implication in O/D matrix estimates. *Transportation Science*. 2001;35(1):50–60. DOI: 10.1287/trsc.35.1.50.10140.
3. Pilipchuk LA. *Sparse Linear Systems and Their Applications*. Minsk: Belarusian State University; 2013.
4. Bianco L, Cerrone C, Cerulli R, Gentili M. Locating sensors to observe network arc flows: exact and heuristic approaches. *Computers and Operation Research*. 2014;46:12–22. DOI: 10.1016/j.cor.2013.12.013.
5. Pilipchuk LA, Pilipchuk AS. Sparse linear systems: theory of decomposition, methods, technology, applications and implementation in Wolfram Mathematica. *AIP Conference Proceedings*. 2015;1690(1):060006. DOI: 10.1063/1.4936744.
6. Фидлер М, Недома Й, Рамик Я, Рон И, Циммерманн К. Задачи линейной оптимизации с неточными данными. Москва: Институт компьютерных исследований; 2008.
7. Габасов Р, Кириллова ФМ, Костюкова ОИ. *Конструктивные методы оптимизации. Ч. 3. Сетевые задачи*. Минск: БГУ; 1986.
8. Pilipchuk L, Pilipchuk A, Pesheva Y. Algorithms for construction of optimal and suboptimal solutions in network optimization problems. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2009;54(2):193–205.
9. Романовский ИВ. Субоптимальные решения. Петрозаводск: Издательство Петрозаводского университета; 1998.
10. Романовский И. В. Перебор субоптимальных решений в дискретных задачах оптимизации. *Компьютерные инструменты в образовании*. 2012;6:25–34.

References

1. Bianco L, Confessore G, Gentili M. Combinatorial aspects of the sensor location problem. *Annals of Operation Research*. 2006;144(1):201–234. DOI: 10.1007/s10479-006-0016-9.
2. Bianco L, Confessore G, Reverberi P. A network based model for traffic sensor location with implication in O/D matrix estimates. *Transportation Science*. 2001;35(1):50–60. DOI: 10.1287/trsc.35.1.50.10140.
3. Pilipchuk LA. *Sparse Linear Systems and Their Applications*. Minsk: Belarusian State University; 2013.
4. Bianco L, Cerrone C, Cerulli R, Gentili M. Locating sensors to observe network arc flows: exact and heuristic approaches. *Computers and Operation Research*. 2014;46:12–22. DOI: 10.1016/j.cor.2013.12.013.
5. Pilipchuk LA, Pilipchuk AS. Sparse linear systems: theory of decomposition, methods, technology, applications and implementation in Wolfram Mathematica. *AIP Conference Proceedings*. 2015;1690(1):060006. DOI: 10.1063/1.4936744.
6. Fidler M, Nedoma I, Ramik Ya, Ron I, Tsimmermann K. *Zadachi lineinoi optimizatsii s netochnymi dannymi* [Problems of linear optimization with inaccurate data]. Moscow: Institute for Computer Studies; 2008. Russian.
7. Gabasov R, Kirillova FM, Kostyukova OI. *Konstruktivnye metody optimizatsii. Chast' 3. Setevye zadachi* [Constructive optimization methods. Part 3. Network tasks]. Minsk: Belarusian State University; 1986. Russian.
8. Pilipchuk L, Pilipchuk A, Pesheva Y. Algorithms for construction of optimal and suboptimal solutions in network optimization problems. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2009;54(2):193–205.
9. Romanovskii IV. *Suboptimal'nye resheniya* [Suboptimal solutions]. Petrozavodsk: Izdatel'stvo Petrozavodskogo universiteta; 1998. Russian.
10. Romanovskii I. V. [Survey of suboptimal solutions in discrete optimization problems]. *Komp'yuternye instrumenty v obrazovanii*. 2012;6:25–34. Russian.

Статья поступила в редакцию 07.02.2018.
Received by editorial board 07.02.2018.