УДК 517.986

2-ОДНОРОДНЫЕ *C**-АЛГЕБРЫ С ПРОСТРАНСТВОМ ПРИМИТИВНЫХ ИДЕАЛОВ, ГОМЕОМОРФНЫМ ДВУМЕРНОМУ ОРИЕНТИРУЕМОМУ КОМПАКТНОМУ СВЯЗНОМУ МНОГООБРАЗИЮ, ПОРОЖДЕННЫЕ ИДЕМПОТЕНТАМИ

М. В. ЩУКИН [1)]

[1)]*Белорусский национальный технический университет, пр. Независимости, 65, 220013, г. Минск, Беларусь*

Ранее было доказано, что каждая *n*-однородная *C**-алгебра изоморфна алгебре всех непрерывных сечений соответствующего алгебраического расслоения. При этом база расслоения есть пространство идеалов этой алгебры в оболочечно-ядерной топологии. С использованием этой реализации в настоящей работе рассмотрена 2-однородная *C**-алгебра *A* с пространством примитивных идеалов, гомеоморфным двумерному компактному связному ориентируемому многообразию. Нами сконструированы три идемпотента из алгебры *A* таких, что наименьшая банахова алгебра, их содержащая, совпадает с алгеброй *A*.

Ключевые слова: *C**-алгебра; идемпотент; конечномерные неприводимые представления; операторная алгебра; порождающие элементы.

Образец цитирования:
Щукин М. В. 2-Однородные *C**-алгебры с пространством примитивных идеалов, гомеоморфным двумерному ориентируемому компактному связному многообразию, порожденные идемпотентами // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 4–9.

For citation:
Shchukin M. V. 2-Homogeneous *C**-algebras with the space of primitive ideals homeomorphic to a two-dimensional oriented compact connected manifold generated by idempotents. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2018. No. 1. P. 4–9 (in Russ.).

Автор:
Михаил Владимирович Щукин – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики № 1 факультета информационных технологий и робототехники.

Author:
Mikhail V. Shchukin, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics No. 1, faculty of information technology and robotics.
mvs777777@gmail.com

2-HOMOGENEOUS C^*-ALGEBRAS WITH THE SPACE OF PRIMITIVE IDEALS HOMEOMORPHIC TO A TWO-DIMENSIONAL ORIENTED COMPACT CONNECTED MANIFOLD GENERATED BY IDEMPOTENTS

M. V. SHCHUKIN [a]

[a]*Belarusian National Technical University, 65 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220013, Belarus*

Before showed in 1961 that every n-homogeneous C^*-algebra is isomorphic to the algebra of all continuous sections for the appropriate algebraic bundle. The base space for the bundle is homeomorphic to the space of primitive ideals for the algebra in the appropriate topology. By using that we considered the 2-homogeneous C^*-algebra A such that the space of primitive ideals of the algebra is homeomorphic to a two-dimensional compact oriented connected manifold. We constructed three idempotents from the algebra A that generated the algebra.

Key words: C^*-algebra; idempotent; finite-dimensional irreducible representations; operator algebras; number of generators.

Интерес к C^*-алгебрам, порожденным идемпотентами, появился в связи с применением в теории сингулярных интегральных операторов. Алгебра сингулярных интегральных операторов над простым контуром может быть реализована как алгебра, порожденная двумя идемпотентами. Такие алгебры могут иметь неприводимые представления размерности только 1 и 2. В работе [1] описана структура пространства представлений банаховых алгебр, порожденных N идемпотентами с некоторыми конкретными соотношениями между ними. В работе [2] описана структура n-однородных C^*-алгебр с пространством примитивных идеалов, гомеоморфным двумерной сфере S^2. Используя эту реализацию, в работах [3; 4] доказано, что любая n-однородная ($n \geq 2$) C^*-алгебра с пространством примитивных идеалов $PrimA$, гомеоморфным двумерной сфере S^2, может быть порождена тремя идемпотентами и не может быть порождена двумя идемпотентами. В работах [5; 6] найдено минимальное число идемпотентов, порождающих некоторые C^*-алгебры и матричные алгебры. В настоящей работе нами доказывается, что любая 2-однородная C^*-алгебра над компактным двумерным связным ориентируемым многообразием может быть порождена тремя идемпотентами. Для этого мы используем результаты работы [7], в которой описана структура n-однородных C^*-алгебр с пространством примитивных идеалов, гомеоморфным двумерному ориентируемому компактному связному многообразию.

Для доказательства основных результатов нам понадобится реализация n-однородных C^*-алгебр над компактным двумерным многообразием.

Предложение 1 [8]. *Компактное двумерное связное ориентируемое многообразие гомеоморфно сфере P_k с приклеенными k ручками.*

Пусть задана n-однородная C^*-алгебра A над пространством P_k. Вырежем из множества P_k часть сферы D, гомеоморфную открытому кругу.

Предложение 2 [7]. *Ограничение расслоения ξ_A на множество $P_k \backslash D$ тривиально.*

Реализуем множество $P_k \backslash D$ как верхнюю часть единичной сферы с k ручками. Пусть B_V обозначает алгебру непрерывных квадратных матриц-функций на $P_k \backslash D$ порядка n с дополнительным условием на границе:

$$a(z) = V^{-1}(z)a(1)V(z),\ a(z) \in B_V,\ V(z) = \begin{pmatrix} z^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

где z – комплексная координата на плоскости. Высоту точки над плоскостью обозначим через h.

Предложение 3 [7]. *Алгебра A изоморфна одной из алгебр B_V.*

Реализуем $P_k \backslash D$ как верхнюю полусферу радиусом 1 с k ручками, которые не выходят за пределы цилиндра радиусом 1 и высотой $\frac{1}{2}$. Имеет место результат, аналогичный предложению 3.

Предложение 4. *Алгебра A над P_k изоморфна одной из алгебр B_V, где B_V – алгебра над $P_k \backslash D$, определяемая соотношениями:*

$$a(z)=V(z)a(1)V^{-1}(z),\ a(z)\in B_V,\ V(z)=\begin{pmatrix} z^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ для } z\in S^1=\delta D.$$

Некоторые результаты исследования структуры C^*-алгебр B_V

Обозначим через E_{ij} квадратную матрицу порядка n, у которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит число 1, а остальные элементы этой матрицы равны 0.

Лемма 1. *Алгебру B_V, рассматриваемую как модуль над своим центром, изоморфным $C(P_k)$, можно реализовать как прямую сумму модулей*

$$B_V=E_{11}C(P_k)\oplus E_{12}B_m\oplus\ldots\oplus E_{1n}B_m \underset{2\le s\le n}{\oplus} E_{s1}B_{-m} \underset{2\le s,\,t\le n}{\oplus} E_{st}C(P_k),$$

где $C(P_k)$ – алгебра всех непрерывных функций на P_k. Модуль B_m состоит из функций $a(z)\in C(P_k\backslash D)$, удовлетворяющих дополнительному условию на границе $a(z)=z^m\cdot a(1),\ z\in S^1=\delta D$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Любой элемент $g\in B_V$ имеет вид $g(x,y,h)\in C\left(P_k\backslash D, C^{n\times n}\right)$, $(x,y,h)\in R^3$, удовлетворяющий при $h=0$ условию

$$g(z)=\begin{pmatrix} z^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{11}(1) & g_{12}(1) & \dots & g_{1n}(1) \\ g_{21}(1) & g_{22}(1) & \dots & g_{2n}(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1}(1) & g_{n2}(1) & \dots & g_{nn}(1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z^{-m} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$g(z)=\begin{pmatrix} g_{11}(1)\cdot|z|^{2m} & g_{12}(1)\cdot z^m & \dots & g_{1n}(1)\cdot z^m \\ g_{21}(1)\cdot z^{-m} & g_{22}(1) & \dots & g_{2n}(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1}(1)\cdot z^{-m} & g_{n2}(1) & \dots & g_{nn}(1) \end{pmatrix}.$$

Поскольку $z\in S^1$, то $|z|=1$. Тогда $g_{11}(z)=g_{11}(1)$ и функцию g_{11} можно рассматривать как функцию на P_k. Функции $g_{ij}(2\le i,\ j\le n)$ также можно рассматривать как функции из $C(P_k)$. Функции $g_{1j}(x,y,h)(2\le j\le n)$ образуют модуль B_m, функции $g_{i1}(x,y,h)(2\le i\le n)$ порождают модуль B_{-m}. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если функции $f_1,\dots,f_t\in B_m$ $\left(-(n-1)\le m\le n-1\right)$ и в любой точке $x_0\in P_k\backslash D$ $\exists i\in\overline{1,t}$, $\exists i\in\overline{1,t}$, $f_i(x_0)\ne 0$, то $B_m=f_1\cdot C(P_k)+\ldots+f_t\cdot C(P_k)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим для каждой точки $x_0\in P_k\backslash D$ открытый шар U_{x_0} радиусом $r(x_0)$ такой, что некоторая функция $f_i(x)\ne 0,\ x\in 2U_{x_0}\cap(P_k\backslash D)$. Здесь $2U_{x_0}$ обозначает шар радиусом $2r(x_0)$ и с тем же центром, что и U_{x_0}. При этом, если $x_0\in S^1=\delta D$, то $f_i(z)=z^m\cdot f_i(1)\ne 0$ при $z\in S^1$. Для точки $x_0\in S^1$ выберем так окрестность U_{x_0}, чтобы $S^1\subset U_{x_0}$. В этом случае множество $U_{x_0}=\bigcup_{z\in S^1}U_z$. Поскольку $P_k\backslash D$ компактно, то существует конечное подпокрытие $U_1,\dots,U_s$. Возьмем разбиение единицы $h_1,\dots,h_s$, подчиненное покрытию $U_1,\dots,U_s$. Тогда функцию $f\in B_m$ можно представить в виде $f=fh_1+\ldots+fh_s$. В силу выбора окрестностей U_i $\forall i\in\overline{1,t}$, $\exists n(i)$, $f_{n(i)}(x)\ne 0,\ x\in(2U_i)\cap(P_k\backslash D)$. Тогда на $\overline{U_i}$ существует и ограничена функция $\dfrac{1}{f_{n(i)}}$. По лемме Титце – Брауэра – Урысона она продолжается до непрерывной функции

$\frac{1}{f^*_{n(i)}}$, определенной на всем P_k. Теперь получаем, что $f = f \cdot h_1 \cdot f_{n(1)} \cdot \frac{1}{f^*_{n(1)}} + \ldots + f \cdot h_s \cdot f_{n(s)} \cdot \frac{1}{f^*_{n(s)}}$. Функции $f \cdot h_i \cdot \frac{1}{f^*_{n(i)}} \in C(P_k)$, следовательно, получено требуемое разложение.

Обратно, модуль $f_i \cdot C(P_k) \subset B_m$ по определению модуля B_m, тогда $f_1 \cdot C(P_k) + \ldots + f_t \cdot C(P_k) \subset B_m$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Любой элемент* $f \in C(P_k \backslash D) \big| (f(z) = f(1),\ z \in \delta D)$ *может быть представлен в виде* $f = f_1 g_1 + f_2 g_2$, *где* $f_i \in B_m,\ g_i \in B_{-m}$.

Доказательство. Алгебра непрерывных функций $C(P_k \backslash D)$ с условием $f(z) = f(1),\ z \in \delta D$, изоморфна алгебре $C(P_k)$.

Возьмем покрытие U_1, U_2 множества P_k такое, что U_1 содержит точку x_1 пересечения $P_k \backslash D$ и оси Oh и не содержит точек $z \in S^1 = \delta D$, $\bar{U}_2$ не содержит точку x_1.

Пусть h_1, h_2 – разбиение единицы для покрытия U_1 и U_2. Возьмем $f_2 = \sqrt{fh_2} \cdot \frac{z}{|z|}$, $g_2 = \sqrt{fh_2} \cdot \frac{\bar{z}}{|z|}$, где $\sqrt{fh_2}$ обозначает в обоих случаях одну и ту же ветвь корня. Эти функции определены, так как $\frac{1}{|z|} > 0$ ограничено снизу на множестве $\bar{U}_2$. Далее, положим $f_1 = \sqrt{fh_1}$, $g_1 = \sqrt{fh_1}$, где выбрано одинаковое значение корня в обоих случаях. Тогда $f_1 \in B_m$ и $g_1 \in B_{-m}$, так как $\sqrt{fh_1}(z) = 0$ при $z \in S^1 = \delta D$. Справедлив следующий ряд равенств: $f = fh_1 + fh_2 = \sqrt{fh_1} \cdot \sqrt{fh_1} + \sqrt{fh_2} \cdot \frac{z}{|z|} \cdot \sqrt{fh_2} \cdot \frac{\bar{z}}{|z|} = f_1 g_1 + f_2 g_2$, из которого следует утверждение леммы. Лемма доказана.

2-Однородные *C**-алгебры над двумерными компактными связными ориентируемыми многообразиями

Следующая теорема является основным результатом данной работы.

Теорема 1. *Пусть A обозначает 2-однородную C*-алгебру над двумерным компактным связным ориентируемым многообразием P_k. Тогда алгебра A может быть порождена тремя идемпотентами.*

Доказательство. Пусть A_1 обозначает 2-однородную C*-алгебру

$$B_V,\ V(z) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим идемпотенты

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & h_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h_1 & 0 \end{bmatrix},\ P_3 = \frac{1}{1 + |f|^2} \begin{bmatrix} 1 & f \\ \bar{f} & |f|^2 \end{bmatrix},$$

где $h_1,\ f,\ \bar{f}$ обозначают следующие функции: $h_1(x, y, h) = h$, $f(x, y, h) = x + iy$, $\bar{f}(x, y, h) = x - iy$. Проверить, являются ли матрицы-функции P_1, P_2, P_3 идемпотентами, можно непосредственным вычислением. Идемпотенты P_1, P_2, P_3 принадлежат алгебре A_1 по определению алгебры A_1.

Пусть B – наименьшая банахова алгебра, содержащая P_1, P_2, P_3. Рассмотрим произведение $P_1 \cdot P_2 = \begin{bmatrix} 1 + h_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Функция $1 + h_1^2$ разделяет точки множества $h \in [0, 1]$ и нигде не обращается в нуль, значит, она порождает алгебру непрерывных функций $C(h)$. Другими словами, для любой функции $h_2 \in C(h)$ существует последовательность многочленов $M_n(1 + h_1^2)$ такая, что $\lim_{n \to \infty} M_n(1 + h_1^2) = h_2$. Тогда

$\lim\limits_{n\to\infty} M_n(P_1 \cdot P_2) = \begin{bmatrix} h_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Отсюда следует, что алгебра матриц-функций $\begin{bmatrix} C(h) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \subset B$, в частности $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B$.

Элемент $E_{11} \cdot P_3 \cdot E_{11} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+|f|^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B$. Этот элемент порождает алгебру $\begin{bmatrix} C(|f|) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \subset B$. В частности, $\begin{bmatrix} 1+|f|^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B$.

Элемент $\begin{bmatrix} 1+|f|^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot P_3 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B$ и также $P_3 \cdot \begin{bmatrix} 1+|f|^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B$.

Далее, элементы $P_2 - E_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h & 0 \end{bmatrix} \in B$, $P_1 - E_{11} = \begin{bmatrix} 0 & h \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B$.

Элементы $\begin{bmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \overline{f} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |f|^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B$,

$$\begin{bmatrix} 0 & h \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \overline{f} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\overline{f} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B,$$

$$\begin{bmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hf & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B.$$

Функции hf и $h\overline{f}$ разделяют точки в одной плоскости на высоте $h_0 > 0$ над плоскостью $h = 0$. Функция h разделяет точки по вертикали, все эти функции вместе с функцией, тождественно равной 1, порождают алгебру $C(P_k^*)$ согласно теореме Стоуна – Вейерштрасса. Здесь P_k^* обозначает множество $P_k \backslash D$, склеенное по окружности $S^1 = \delta D$. Пространство P_k^* гомеоморфно множеству P_k. Это значит, что алгебра непрерывных функций $C(P_k^*)$ изоморфна алгебре $C(P_k)$.

Поскольку функции f и h не равны одновременно нулю на $P_k \backslash D$, то матрицы $\begin{bmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 & h \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ порождают модуль $\begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ над алгеброй $\begin{pmatrix} C(P_k) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ в соответствии с леммой 2.

Матрицы-функции $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \overline{f} & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h & 0 \end{bmatrix}$ порождают модуль $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{-1} & 0 \end{bmatrix}$ над алгеброй $\begin{pmatrix} C(P_k) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Из леммы 3 следует, что элементы из модулей $\begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{-1} & 0 \end{bmatrix}$ порождают алгебру $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C(P_k) \end{pmatrix} \subset B$.

Итак, B содержит множества $\begin{pmatrix} C(P_k) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{-1} & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C(P_k) \end{pmatrix}$. В силу леммы 1 имеем следующее равенство для алгебр: $B = A_1$. Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. *Bottcher A., Gohberg I., Karlovich Yu., et al.* Banach algebras generated by N idempotents and applications // Oper. Theory. Adv., Appl. 1996. Vol. 90. P. 19–54. DOI: 10.1007/978-3-0348-9040-3_2.

2. *Antonevich A., Krupnik N.* On trivial and non-trivial *n*-homogeneous *C**-algebras // Integr. Equ. Oper. Theory. 2000. Vol. 38, issue 2. P. 172–189. DOI: 10.1007/BF01200122.

3. *Щукин М. В.* Нетривиальная *C**-алгебра, порожденная четырьмя идемпотентами // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2001. Т. 9. С. 161–163.

4. *Shchukin M.* Non-trivial *C**-algebras generated by idempotents // Proceedings of the International Conference on Nonlinear Operators, Differential Equations and Applications : semin. on fixed point theory Cluj-Napoca : in 3 vols (Cluj-Napoca, 12–17 Sept., 2001). Cluj-Napoca, 2002. Vol. 3. P. 353–359.

5. *Krupnik N., Roch S., Silbermann B.* On *C**-algebras generated by idempotents // J. Funct. Anal. 1996. Vol. 137, issue 2. P. 303–319. DOI: 10.1006/jfan.1996.0048.

6. *Рабановіч В. І.* Матричні банахови алгебри і теорія зображень : дис. … канд. физ.-мат. наук : 01.01.01. Киев, 2000.

7. *Щукин М. В. n*-Однородные *C**-алгебры с пространством примитивных идеалов, гомеоморфным ориентируемому компактному двумерному многообразию // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 2. С. 12–17.

8. *Масси У.* Алгебраическая топология. М. : Мир, 1977.

References

1. Bottcher A., Gohberg I., Karlovich Yu., et al. Banach algebras generated by N idempotents and applications. *Oper. Theory. Adv., Appl.* 1996. Vol. 90. P. 19–54. DOI: 10.1007/978-3-0348-9040-3_2.

2. Antonevich A., Krupnik N. On trivial and non-trivial *n*-homogeneous *C**-algebras. *Integr. Equ. Oper. Theory.* 2000. Vol. 38, issue 2. P. 172–189. DOI: 10.1007/BF01200122.

3. Shchukin M. V. [Non-trivial *C**-algebra generated by four idempotents]. *Proc. of the Inst. of Math. of the Natl. Acad. of Sci. of Belarus.* 2001. Vol. 9. P. 161–163 (in Russ.).

4. Shchukin M. Non-trivial *C**-algebras generated by idempotents. *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Operators, Differential Equations and Applications* : semin. on fixed point theory Cluj-Napoca : in 3 vols (Cluj-Napoca, 12–17 Sept., 2001). Cluj-Napoca, 2002. Vol. 3. P. 353–359.

5. Krupnik N., Roch S., Silbermann B. On *C**-algebras generated by idempotents. *J. Funct. Anal.* 1996. Vol. 137, issue 2. P. 303–319. DOI: 10.1006/jfan.1996.0048.

6. Rabanovich V. I. [The matrix algebras and the theory of representations] : diss. … PhD (phys. and math.) : 01.01.01. Kiev, 2000 (in Ukrainian).

7. Shchukin M. V. [*n*-Homogeneous *C**-algebras with the set of primitive ideals homeomorphic to an oriented connected compact two-dimensional manifold]. *Proc. Natl. Acad. of Sci. of Belarus. Phys. and Math. Ser.* 2010. No. 2. P. 12–17 (in Russ.).

8. Massi U. Algebraicheskaya topologiya. Moscow : Mir, 1977.

Статья поступила в редколлегию 10.07.2017.
Received by editorial board 10.07.2017.