Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 10–16
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2017. No. 3. P. 10–16

УДК 517.51+517.53

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ВЫСШИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ БЛЯШКЕ

Т. С. МАРДВИЛКО[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Получены верхние и нижние оценки для квазинормы (нормы) для высших производных произведения Бляшке в пространстве L_p. Результаты получены для всех $p \in (0, +\infty) \setminus \left\{\frac{1}{s}\right\}$, где $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ – порядок рассматриваемой производной. Случай $p = \frac{1}{s}$ исследован автором ранее.

Пусть $\mathbb{a}_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ – набор из n комплексных чисел, лежащих в единичном круге $|z| < 1$. Обозначим произведение Бляшке с нулями в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$b_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z}.$$

Для $0 < p < \frac{1}{s}$ и $s \in \mathbb{N}$, а также $s = 1$ и $p > 1$ найден $\inf\limits_{\mathbb{a}_n} \left\| b_n^{(s)} \right\|_{L_p}$, а для $\frac{1}{s} < p < \infty$ и $s \in \mathbb{N}$ получен $\sup\limits_{\mathbb{a}_n} \left\| b_n^{(s)} \right\|_{L_p}$. В остальных случаях доказаны оценки, точные по порядку.

Основные результаты изложены в теоремах 1–5 настоящей работы.

Ключевые слова: произведение Бляшке; рациональные функции; высшие производные; пространство Лебега.

Благодарность. Автор выражает благодарность профессору А. А. Пекарскому за постоянную поддержку, обсуждение результатов данной работы и полезные замечания.

Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований НАН Беларуси «Конвергенция».

INTEGRATE INEQUALITIES FOR THE HIGHER DERIVATIVES OF BLASHKE PRODUCT

T. S. MARDVILKA[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

Upper and lower inequalities for the higher derivatives of Blashke product in the Lebesgue space L_p are obtained in this work. All $p \in (0, +\infty) \setminus \left\{\frac{1}{s}\right\}$, $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, are considered, where s is order of the derivative. The case $p = \frac{1}{s}$ was investigated by the author earlier.

Let $\mathbb{a}_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ be a certain set of n complex numbers laying in the unit disc $|z| < 1$. Let us introduce the Blashke products

Образец цитирования:
Мардвилко Т. С. Интегральные неравенства для высших производных произведений Бляшке // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 10–16.

For citation:
Mardvilka T. S. Integrate inequalities for the higher derivatives of Blashke product. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2018. No. 1. P. 10–16 (in Russ.).

Автор:
Татьяна Сергеевна Мардвилко – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры теории функций механико-математического факультета.

Author:
Tatsiana S. Mardvilka, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics.
mardvilko@mail.ru

$$b_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z}$$

with zeros at the points $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

For $0 < p < \frac{1}{s}$ and $s \in \mathbb{N}$ holds the equality $\inf\limits_{\mathbb{a}_n} \left\| b_n^{(s)} \right\|_{L_p} = 0.$ For $p > 1$ holds the equality $\inf\limits_{\mathbb{a}_n} \| b_n' \|_{L_p} = n.$ For $\frac{1}{s} < p < \infty$ and $s \in \mathbb{N}$ holds the equality $\sup\limits_{\mathbb{a}_n} \left\| b_n^{(s)} \right\|_{L_p} = +\infty.$ In other cases, the obtained estimates are exact in order.

The main results of the present paper are stated in theorems 1–5.

Key words: Blashke product; rational functions; higher derivatives; Lebesgue space.

Acknowledgements. The author would like to thank professor A. A. Pekarskii for support, constructive criticism and productive discussion of the manuscript.

This work supported by state programs for scientific research of the National Academy of Sciences of Belarus «Convergence».

Через $C(T)$ обозначим пространство непрерывных комплекснозначных функций f на единичной окружности $T = \{z : |z| = 1\}$, наделенных нормой

$$\| f \|_{C(T)} = \max_{z \in T} | f(z) |.$$

Будем также работать с пространством Лебега L_p, $0 < p < \infty$, измеримых комплексных функций на T с конечной квазинормой (нормой при $1 \le p < \infty$)

$$\| f \|_{L_p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_T | f(z) |^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty.$$

Пусть $\mathbb{a}_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ – набор из n комплексных чисел, лежащих в круге $D = \{z : |z| < 1\}$. Рассмотрим произведение Бляшке с нулями в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$b_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z}. \tag{1}$$

Введем также рациональные функции вида

$$r_n(z) = \frac{p_n(z)}{(1 - \bar{a}_1 z) \cdot (1 - \bar{a}_2 z) \cdot \ldots \cdot (1 - \bar{a}_n z)}, \tag{2}$$

где $p_n(z)$ – многочлен степени не выше n.

Произведения Бляшке играют важную роль в рациональной аппроксимации. В частности, в [1] было замечено, что первую производную рациональной функции (2) можно мажорировать первой производной произведения Бляшке (1) и равномерной нормой $r_n(z)$:

$$|r_n'(z)| \le |b_n'(z)| \cdot \|r_n\|_{C(T)}, \quad z \in T. \tag{3}$$

Интегрируя неравенство (3), придем к следующему неравенству для первой производной рациональной функции, полученному в [2]:

$$\|r_n'\|_{L_1} \le n \|r_n\|_{C(T)}. \tag{4}$$

В [3] и [4] обобщены неравенства (3) и (4) на высшие производные. В частности, получено следующее неравенство типа Бернштейна для высших производных рациональных функций:

$$\left\| r_n^{(s)} \right\|_{L_{\frac{1}{s}}} \le c(s) \cdot n^s \cdot \|r_n\|_{C(T)}, \quad s \ge 2. \tag{5}$$

Здесь и ниже через $c(\ldots), c_1(\ldots), c_2(\ldots), c_n(\ldots)$ обозначаем положительные величины, зависящие от указанных в скобках параметров.

Неравенства (4) и (5) применяются для доказательства обратных теорем рациональной аппроксимации функций [2–5]. Произведения Бляшке (1) играют роль экстремальных функций в выражениях (3) и (4). Неравенства (5) являются точными относительно множителя n^s. В этом можно убедиться на примере функции $r_n = b_n$ (см. ниже равенство (6)). Что же касается постоянной $c(s)$ из неравенства (5), то ее точное значение до сих пор не определено. Оценки этой постоянной можно найти в работе [6], где автором также была получена точная постоянная в неравенстве для высших производных произведений Бляшке: было доказано, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ справедливо равенство

$$\sup_{a_n} \left\| b_n^{(s)} \right\|_{L_{\frac{1}{s}}} = s!\lambda^s\left(\frac{1}{s}\right) \cdot n^s. \qquad (6)$$

Здесь и далее для краткости будем использовать следующее обозначение:

$$\lambda(\alpha) = \frac{2^{\alpha-1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)}, \ \alpha > 0,$$

где Γ – гамма-функция Эйлера.

В работе [6] показано также, что при $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и $n \geq s$

$$\inf_{a_n} \left\| b_n^{(s)} \right\|_{L_{\frac{1}{s}}} > \frac{\pi^{s-1} \cdot (s-1)\left((s-2)!\right)^s}{2^{3s-1} \cdot (s!+1)^s s^{s-1}} \cdot \left(n - (s-1)\right)^s.$$

Здесь получены оценки $\left\| b_n^{(s)} \right\|_{L_p}$ для $p \in (0, +\infty) \setminus \left\{\frac{1}{s}\right\}$.

Теорема 1. *Для* $n, s \in \mathbb{N}$ *и* $\frac{1}{s} < p < \infty$ *имеет место равенство*

$$\sup_{a_n} \left\| b_n^{(s)} \right\|_{L_p} = +\infty.$$

Теорема 2. *Для* $n, s \in \mathbb{N}$ *и* $0 < p < \frac{1}{s}$ *имеет место неравенство*

$$\sup_{a_n} \left\| b_n^{(s)} \right\|_{L_p} \leq s!\lambda^s\left(\frac{1}{s}\right) \cdot n^s.$$

Нами также получены оценки снизу для рассматриваемых квазинорм.

Теорема 3. *Для* $n, s \in \mathbb{N}$, $0 < p < \frac{1}{s}$ *имеет место равенство*

$$\inf_{a_n} \left\| b_n^{(s)} \right\|_{L_p} = 0.$$

Теорема 4. *Для* $n, s \in \mathbb{N}$, $n \geq s \geq 2$, *и* $\frac{1}{s} < p < \infty$ *имеет место неравенство*

$$\inf_{a_n} \left\| b_n^{(s)} \right\|_{L_p} > \frac{\pi^{s-1} \cdot (s-1)\left((s-2)!\right)^s}{2^{3s-1} \cdot (s!+1)^s s^{s-1}} \cdot \left(n - (s-1)\right)^s.$$

Для первой производной для инфимума рассматриваемой квазинормы можно выписать точное равенство, имеющее место в следующей теореме.

Теорема 5. *Для* $n \in \mathbb{N}$ *и* $p > 1$ *имеет место равенство*

$$\inf_{a_n} \left\| b_n' \right\|_{L_p} = n.$$

В целях доказательства теорем 1 и 3 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1 [6]. *Пусть* $\alpha > 0$ *и*

$$J_\alpha(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_T \frac{|dz|}{\left|1-\bar{\xi}z\right|^{1+\alpha}},\ \xi \in D.$$

Для $J_\alpha(\xi)$ *имеют место следующие неравенства:*

$$\frac{1}{\left(1-|\xi|^2\right)^\alpha} \le J_\alpha(\xi) \le \frac{\lambda(\alpha)}{\left(1-|\xi|^2\right)^\alpha}.$$

Порядковые оценки для $J_\alpha(\xi)$ можно найти также в работе [7]. Оценки из леммы 1 для $J_\alpha(\xi)$ являются точными.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим произведение Бляшке

$$b_n(z) = z^{n-1}\cdot\frac{z-\rho}{1-\rho z},\ 0<\rho<1.$$

Представим $b_n(z)$ в виде суммы полинома степени $n-1$ и правильной рациональной дроби

$$b_n(z) = p_{n-1}(z) + \frac{1}{\rho^n}\cdot\frac{1-\rho^2}{1-\rho z}, \tag{7}$$

где $p_{n-1}(z) = \dfrac{z^{n-1}(z-\rho)-\rho^{-n}\left(1-\rho^2\right)}{1-\rho z}$.

Нетрудно убедиться, что $\left|p_{n-1}(z)\right| \le 1+2\cdot\rho^{-n}$ при $z\in T$. В связи с этим согласно неравенству Бернштейна при $n \ge s+1$ имеет место оценка

$$\left\|p_{n-1}^{(s)}\right\|_{L_p} \le \left\|p_{n-1}^{(s)}\right\|_{C(T)} \le \left(1+2\cdot\rho^{-n}\right)\cdot\frac{(n-1)!}{(n-s-1)!}. \tag{8}$$

Пусть $n \ge s+1$ и $s \ge 2$. Заметим, что нам достаточно рассмотреть случай $\frac{1}{s} < p < 1$, так как оценка для остальных значений p сводится к данному случаю применением неравенства Гёльдера. Итак, из соотношений (7), (8) и леммы 1 имеем

$$\left\|b_n^{(s)}\right\|_{L_p}^p \ge \left\|\left(\frac{1}{\rho^n}\cdot\frac{1-\rho^2}{1-\rho z}\right)^{(s)}\right\|_{L_p}^p - \left\|p_{n-1}^{(s)}\right\|_{L_p}^p \ge$$

$$\ge \frac{1}{\rho^{p(n-s)}}\cdot\frac{1}{\left(1-\rho^2\right)^{ps-1}} - \left(1+\frac{2}{\rho^n}\right)^p\cdot\left(\frac{(n-1)!}{(n-s-1)!}\right)^p.$$

Переходя к пределу при $\rho \to 1-0$, получим, что правая часть последнего неравенства растет неограниченно и, следовательно, неограниченно растет и левая часть.

В случае $n < s+1$ и $s \ge 2$

$$\left\|b_n^{(s)}\right\|_{L_p} = \frac{1}{\rho^n}\left\|\left(\frac{1-\rho^2}{1-\rho z}\right)^{(s)}\right\|_{L_p} = \frac{1}{\rho^n}\left\|\rho^s\,\frac{1-\rho^2}{(1-\rho z)^{s+1}}\right\|_{L_p}.$$

Применяя лемму 1, получим

$$\left\|b_n^{(s)}\right\|_{L_p} \ge \frac{1}{\rho^{n-s}}\cdot\frac{1}{\left(1-\rho^2\right)^{s-\frac{1}{p}}} \to +\infty \ \text{ при } \rho \to 1-0.$$

И наконец, рассмотрим случай $s = 1$.

$$\left|b_n'(z)\right| = n - 1 + \frac{1-\rho^2}{\left|1-\rho z\right|^2},\ \ z \in T.$$

Следовательно, с учетом леммы 1 при $p > 1$ получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_T \left|b_n'(z)\right|^p |dz| \geq \frac{1}{2\pi}\int_T \frac{\left(1-\rho^2\right)^p}{\left|1-\rho z\right|^{2p}}|dz| \geq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\left(1-\rho^2\right)^{p-1}}.$$

Переходя к пределу при $\rho \to 1 - 0$ в последнем неравенстве, получим также утверждение теоремы для $s = 1$ и $p > 1$.

Доказательство теоремы 2. Для доказательства данной теоремы воспользуемся неравенством Гёльдера

$$\| f\cdot g\|_p \leq \| f\|_u \cdot \|g\|_v,\ \ \frac{1}{p} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v},\ \ u > p.$$

Применяя неравенство Гёльдера с $u = \frac{1}{s}$ и $v = \frac{p}{1-ps}$, сведем рассматриваемый в теореме случай к $p = \frac{1}{s}$, доказанному ранее:

$$\left\|b_n^{(s)}\right\|_{L_p} \leq \left\|b_n^{(s)}\right\|_{L_{\frac{1}{s}}}\cdot\|1\|_{L_v} = \left\|b_n^{(s)}\right\|_{L_{\frac{1}{s}}}.$$

Из последней полученной оценки и равенства (6) следует утверждение теоремы.

Замечание 1. Неравенство в теореме 2 является точным по порядку, т. е. относительно множителя n^s. В этом можно убедиться на примере функции $b_n(z) = z^n$. Постоянная $s!\lambda^s\left(\frac{1}{s}\right)$ из теоремы 2 является точной при $s = 1$ и любом $0 < p < \frac{1}{s}$. Убедиться в этом можно также на примере функции $b_n(z) = z^n$. Из доказательства видно, что для высших производных найденная постоянная не является точной, так как применяется неравенство Гёльдера и условия, при которых неравенство Гёльдера обращается в равенство, в данном случае не выполнены.

Доказательство теоремы 3. Для $n < s$ теорема, очевидно, выполняется, так как в этом случае

$$\left\|\left(z^n\right)^{(s)}\right\|_{L_p} = 0.$$

Докажем, что теорема справедлива для $n \geq s$. Для этого рассмотрим произведение Бляшке с нулями в точках $a_k = \rho\cdot\omega_k$, где $\omega_k = e^{\frac{2\pi ik}{n}}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, и $0 < \rho < 1$. Такое произведение Бляшке можно записать следующим образом:

$$b_n(z) = \frac{z^n - \rho^n}{1-\rho^n z^n} = -\frac{1}{\rho^n} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1-\rho^{2n}}{\rho^n\cdot n\left(1-\omega_k\rho z\right)}.$$

Для s-й производной такого произведения Бляшке справедлива оценка

$$\left|b_n^{(s)}(z)\right| \leq \frac{s!\left(1-\rho^{2n}\right)}{\rho^{n-s}\cdot n}\left\{\frac{1}{\left|1-\rho z\right|^{s+1}} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\left|1-\omega_k\rho z\right|^{s+1}}\right\}.$$

В силу инвариантности относительно замены ω_k на ω_0, $k = 1, \ldots, n-1$, интеграла

$$\int_T \frac{|dz|}{\left|1-\omega_k\rho z\right|^{\alpha}},\ \ \alpha > 0,$$

для рассматриваемой квазинормы имеем

$$\left\|b_n^{(s)}\right\|_{L_p} \le n^{\frac{1}{p}-1} \cdot \frac{s!\left(1-\rho^{2n}\right)}{\rho^{n-s}} \cdot \left(\int_T \frac{|dz|}{|1-\rho z|^{sp+p}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Применяя лемму 1, получим оценку

$$\left\|b_n^{(s)}\right\|_{L_p} \le c(n,\, p,\, s) \cdot \frac{1-\rho^{2n}}{\rho^{n-s}\left(1-\rho^2\right)^{s+1-\frac{1}{p}}} \text{ при } \frac{1}{s+1} < p < \frac{1}{s}. \tag{9}$$

Переходя в неравенстве (9) к пределу при $\rho \to 1-0$, получим утверждение теоремы 3 при $\frac{1}{s+1} < p < \frac{1}{s}$.

Для оценки квазинормы $\left\|b_n^{(s)}\right\|_{L_p}$ при $p \le \frac{1}{s+1}$ применим неравенство Гёльдера

$$\left\|b_n^{(s)}\right\|_{L_p} \le \left\|b_n^{(s)}\right\|_{L_{p'}} \cdot \|1\|_{L_{pp'/(p'-p)}} = \left\|b_n^{(s)}\right\|_{L_{p'}}$$

с любым $\frac{1}{s+1} < p' < \frac{1}{s}$ и воспользуемся оценкой (9).

Замечание 2. Рассматриваемое в доказательстве теоремы 3 семейство произведений Бляшке

$$b_n(z) = \frac{z^n - \rho^n}{1-\rho^n z^n},\ 0 < \rho < 1,$$

играет роль экстремальных функций также и в верхней оценке исследуемой квазинормы при $p = \frac{1}{s}$, $s \ge 2$. В работе [6] показано, что именно на таком семействе произведений Бляшке асимптотически, при $\rho \to 1-0$, достигается равенство (6).

Доказательство теоремы 4. Для оценки снизу величины $\left\|b_n^{(s)}\right\|_{L_p}$, $\frac{1}{s} < p < \infty$, $s \ge 2$, воспользуемся неравенством Гёльдера

$$\|f \cdot g\|_p \ge \|f\|_u \cdot \|g\|_v,\ \frac{1}{p} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v},\ u < p,$$

с показателями $u = \frac{1}{s} < p$ и $v = \frac{1}{1-ps}$:

$$\left\|b_n^{(s)}\right\|_{L_p} \ge \left\|b_n^{(s)}\right\|_{L_{\frac{1}{s}}} \cdot \|1\|_{L_v} = \left\|b_n^{(s)}\right\|_{L_{\frac{1}{s}}} > \frac{\pi^{s-1} \cdot (s-1) \cdot \left((s-2)!\right)^s}{2^{3s-1} \cdot (s!+1)^s \cdot s^{s-1}} \cdot \left(n-(s-1)\right)^s.$$

Замечание 3. Неравенство в теореме 4 также является точным относительно множителя n^s. К сожалению, для нижней оценки величины $\left\|b_n^{(s)}\right\|_{L_p}$, $\frac{1}{s} \le p < \infty$, неизвестна точная постоянная даже для критического показателя $p = \frac{1}{s}$, $s \ge 2$, при котором $\left\|b_n^{(s)}\right\|_{L_p}$ ведет себя устойчиво относительно полюсов произведения Бляшке и имеет порядок n^s.

Доказательство теоремы 5. Эта теорема доказывается аналогично теореме 4. Для получения требуемой оценки достаточно воспользоваться известным равенством для первой производной произведения Бляшке: $\|b_n'\|_{L_1} = n$.

Библиографические ссылки

1. *Русак В. Н.* Обобщение неравенства С. Н. Бернштейна для производной тригонометрического многочлена // Докл. АН БССР. 1963. Т. 7, № 9. С. 580–583.

2. *Долженко Е. П.* Некоторые точные интегральные оценки производных рациональных и алгебраических функций. Приложения // Anal. Math. 1978. Т. 4, № 4. С. 247–268.

3. *Пекарский А. А.* Оценки высших производных рациональных функций и их приложения // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1980. № 5. С. 21–29.
4. *Lorentz G. G., von Golitschek M., Makovoz Y.* Constructive Approximation. Advanced Problems. New York ; Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1996.
5. *Petrushev P. P., Popov V. A.* Rational Approximation of Real Functions. Cambridge : Univ. Press, 1987.
6. *Mardvilko T. S.* On the values of the constants in the Bernstein type inequalities for higher derivatives of rational functions // East J. Approximat. 2009. Vol. 15, № 2. P. 31–42.
7. *Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K.* Theory of Bergman Spaces, Boundary Problems. New York ; Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2000.

References

1. Rusak V. N. [Generalization of an inequality of S. N. Bernstein for the derivative of a trigonometrical multinomial]. *Rep. of the Acad. of Sci. of the BSSR.* 1963. Vol. 7, No. 9. P. 580–583 (in Russ.).
2. Dolzenko E. P. [Certain sharp integral estimates for the derivatives of rational and polynomial functions. Annexes]. *Anal. Math.* 1978. Vol. 4, No. 4. P. 247–268 (in Russ.).
3. Pekarskii A. A. [Estimates for higher derivatives of rational functions and their applications]. *Proc. of the Natl. Acad. of Sci. of Belarus. Phys.-Math. Ser.* 1980. No. 5. P. 21–29 (in Russ.).
4. Lorentz G. G., von Golitschek M., Makovoz Y. Constructive Approximation. Advanced Problems. New York ; Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1996.
5. Petrushev P. P., Popov V. A. Rational Approximation of Real Functions. Cambridge : Univ. Press, 1987.
6. Mardvilko T. S. On the values of the constants in the Bernstein type inequalities for higher derivatives of rational functions. *East J. Approximat.* 2009. Vol. 15, No. 2. P. 31–42.
7. Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K. Theory of Bergman Spaces, Boundary Problems. New York ; Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2000.

Статья поступила в редколлегию 28.09.2017.
Received by editorial board 28.09.2017.