Дифференциальные уравнения и оптимальное управление

Differential equations and optimal control

УДК 517.9

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ С ОСРЕДНЕНИЕМ УРАВНЕНИЙ

С. А. СПАСКОВ[1)], **А. К. ХМЫЗОВ**[2)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*
[2)]*ИООО «ЭПАМ Системз», ул. Академика Купревича, 1/1, 220141, г. Минск, Беларусь*

Рассматривается краевая задача для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \dot{L}(t)X(t) + \dot{F}(t), \\ M_1 X(0) + M_2 X(b) = Q, \end{cases}$$

где $t \in T = [0, b]$, $L : T \to \mathbb{R}^{p \times p}$ и $F : T \to \mathbb{R}^p$ – непрерывные справа матрично- и векторнозначные функции ограниченной вариации; M_1, $M_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Q \in \mathbb{R}^p$ – некоторые заданные матрицы и вектор. Эта задача изучается в рамках подхода, основанного на исследовании предельного поведения решений конечно-разностных с осреднением представлений исходной задачи. Вводится понятие фундаментальной матрицы, соответствующей конечно-разностному уравнению с осреднением. Доказывается теорема существования и единственности решения конечно-разностной с осреднением краевой задачи для приведенной системы.

Ключевые слова: система линейных неоднородных дифференциальных уравнений; краевая задача; конечно-разностные с осреднением уравнения; фундаментальная матрица.

Образец цитирования:
Спасков С. А., Хмызов А. К. Краевая задача для системы конечно-разностных с осреднением уравнений // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 17–28.

For citation:
Spaskov S. A., Khmyzov A. K. Boundary value problem for system of finite-difference with averaging equations. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2018. No. 1. P. 17–28 (in Russ.).

Авторы:
Сергей Александрович Спасков – аспирант кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук О. Л. Яблонский.
Антон Константинович Хмызов – ведущий инженер-программист.

Authors:
Sergey A. Spaskov, postgraduate student at the department of functional analysis and analytical economics, faculty of mechanics and mathematics.
sergey.spaskov@gmail.com
Anton K. Khmyzov, leading software engineer.
anton.khmyzov@gmail.com

Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 17–28
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2018. No. 1. P. 17–28

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SYSTEM OF FINITE-DIFFERENCE WITH AVERAGING EQUATIONS

S. A. SPASKOV [a], ***A. K. KHMYZOV*** [b]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
[b]*Epam Systems, 1/1 Akademika Kupreviča Street, Minsk 220141, Belarus*
Corresponding author: A. K. Khmyzov (anton.khmyzov@gmail.com)

The boundary value problem for the system of linear nonhomogeneous differential equations with generalized coefficients is considered

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \dot{L}(t)X(t) + \dot{F}(t), \\ M_1X(0) + M_2X(b) = Q, \end{cases}$$

where $t \in T = [0, b]$, $L : T \to \mathbb{R}^{p \times p}$ and $F : T \to \mathbb{R}^p$ are right-continuous matrix and vector valued functions of bounded variation; M_1, $M_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Q \in \mathbb{R}^p$ are defined matrices and vector. The problem is investigated with the help of the corresponding finite-difference with averaging equation behavior studying. The definition of the fundamental matrix, corresponding to the finite-difference with averaging equation is introduced. The theorem of the existence and uniqueness of the finite-difference with averaging boundary value problem, corresponding to the described system is proved.

Key words: system of linear nonhomogeneous differential equations; boundary value problem; finite-difference with averaging equations; fundamental matrix.

В настоящей работе рассматривается краевая задача

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \dot{L}(t)X(t) + \dot{F}(t), \\ M_1X(0) + M_2X(b) = Q, \end{cases} \tag{1}$$

где $t \in T = [0, b]$, $X : T \to \mathbb{R}^p$ – неизвестная вектор-функция, $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{p \times p}$; $L(t) = \left(L^{ij}(t)\right)$, где $i, j = 1, \ldots, p$ и $L^{ij}(\cdot)$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации, при $t \le 0$ $L^{ij}(t) = L^{ij}(0) = 0$, при $t > b$ $L(t) = L(b)$, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, $F^i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, p$, – непрерывные справа функции ограниченной вариации, при $t \le 0$ $F^i(t) = F^i(0)$, при $t > b$ $F^i(t) = F^i(b)$. M_1, M_2 – некоторые заданные матрицы: M_1, $M_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Q \in \mathbb{R}^p$ – некоторый заданный вектор.

Если рассматривать $\dot{L}(t)$ как обобщенную производную матричнозначной функции, то задача (1) содержит произведение обобщенной функции на разрывную $\dot{L}(t)X(t)$ и не является корректной. Определением решения рассматриваемой задачи занимались многие авторы. Основные подходы к исследованию таких уравнений заключаются в следующем: переходе к интегральному уравнению, где интеграл понимается в смысле Лебега – Стилтьеса, Перрона – Стилтьеса и др. [1], аппроксимации исходного уравнения дифференциальными уравнениями с гладкими коэффициентами [2], формализации данной задачи в рамках теории обобщенных функций [3; 4].

В работе [5] показано, что эти подходы можно охватить одним, основанным на исследовании предельного поведения решений представлением исходной задачи в виде конечно-разностных с осреднением задач [5; 6]. В рамках данного подхода соответствующая краевой задаче (1) конечно-разностная с осреднением задача может быть записана в следующем виде:

$$X_n(t + h_n) - X_n(t) = \left(L_n(t + h_n) - L_n(t)\right) \cdot X_n(t) + F_n(t + h_n) - F_n(t), \tag{2}$$

$$M_1X_n(t)\Big|_{t \in [0, h_n)} + M_2X_n(m_bh_n + t)\Big|_{t \in [0, h_n)} = Q_n(t)\Big|_{t \in [0, h_n)}, \tag{3}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $h_n \in \mathbb{R}$, $h_n < b$ – произвольные фиксированные числа; m_b – целая часть числа $\dfrac{b}{h_n}$; $Q_n : [0, h_n) \to$ $\to \mathbb{R}^p$ – некоторая заданная вектор-функция;

$$L_n(t) = \left(\left(L^{ij} * \rho_n^{ij}\right)(t)\right) = \left(\int_0^{1\backslash\gamma^{ij}(n)} L^{ij}(t+s)\rho_n^{ij}(s)\,ds\right),$$

$$\rho_n^{ij}(t) = \gamma^{ij}(n)\rho\left(\gamma^{ij}(n)t\right),\ \rho \in C^\infty(\mathbb{R}),\ \operatorname{supp}\rho \subset [0;1],\ \int_0^1 \rho(s)\,ds = 1;$$

$$\gamma^{ij} \text{ – некоторая монотонная функция, } \gamma^{ij}(n) \to \infty, \text{ при } n \to \infty.$$

$$F_n(t) = \left(\left(F^i * \bar\rho_n\right)(t)\right) = \left(\int_0^{1\backslash n} F^i(t+s)\bar\rho_n(s)\,ds\right),$$

$$\bar\rho_n(s) = \bar\rho(ns),\ \bar\rho \in C^\infty(\mathbb{R}),\ \bar\rho(s) \ge 0,\ \operatorname{supp}\bar\rho \subset [0,1],\ \int_0^1 \bar\rho(s)\,ds = 1.$$

Под решениями задачи (1) будем понимать предел последовательности решений соответствующих конечно-разностных с осреднением задач при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ и $Q_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} Q$ по некоторой норме. Подобная трактовка решений использовалась в случае задачи Коши в работах [6; 7], где существование такого предела было установлено в виде решения некоторого интегрального уравнения. При этом стоит отметить, что пределов может быть несколько и особую роль в этом вопросе играет связь между параметрами n и h_n. Основное же содержание настоящей работы заключается в исследовании вопроса существования и единственности решения конечно-разностной с осреднением задачи (2), (3).

Использование в описываемом подходе осреднения в указанном виде связано с положением о том, что в реальном мире нельзя, например, измерить плотность вещества в точке, а можно измерить лишь его среднюю плотность в достаточно малой окрестности этой точки и объявить это плотностью в данной точке [8, с. 82].

Фундаментальная матрица, соответствующая конечно-разностному уравнению с осреднением

Фундаментальной матрицей, соответствующей конечно-разностному с осреднением уравнению (2), назовем матрицу $B_n(t, r)$, являющуюся решением следующей задачи:

$$\begin{cases} B_n(t+h_n, r) - B_n(t, r) = \left(L_n(t+h_n) - L_n(t)\right)B_n(t, r), \\ B_n(t, r)\big|_{t\in[r,\, r+h_n)} = E, \end{cases} \tag{4}$$

где $t, r \in \mathbb{R}$; E – единичная матрица.

Если положить, что t и r – произвольные фиксированные действительные числа, то существует представление $t = \tau_{t,r} + m_{t,r}h_n$, где $m_{t,r}$ и $\tau_{t,r}$ такие числа, что $\tau_{t,r} \in [r, r+h_n)$ и $m_{t,r} \in \mathbb{Z}$. Обозначим $t_{k,r} = \tau_{t,r} + kh_n$, $k \in \mathbb{Z}$. При $r = 0$ положим $m_{t,r} = m_t$, $\tau_{t,r} = \tau_t$ и $t_{k,r} = t_k$.

Утверждение 1. Фундаментальная матрица, определенная в (4):

1) существует и единственна для любых действительных t и r таких, что $t \ge r$;

2) существует и единственна для $t, r \in \mathbb{R}$ и $t < r$, если и только если $\forall t_{k,r}$, $k = m_{t,r}, m_{t,r}+1, \ldots, -1$, матрица $\left(E + L_n(t_{k+1,r}) - L_n(t_{k,r})\right)$ не вырождена;

3) если выполнены условия одного из предыдущих пунктов и разность $(t - r)$ не кратна h_n, то фундаментальная матрица $B_n(t, r)$ бесконечно дифференцируема по первой переменной в некоторой окрестности точки $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Докажем пункты 1) и 2). Пусть $t \ge r$, тогда для $B_n(t, r)$, очевидно, из (4) следует представление $B_n(t, r) = \prod_{k=0}^{m_{t,r}-1}\left(L_n(t_{k+1,r}) - L_n(t_{k,r}) + E\right)$, а значит, фундаментальная матрица

$B_n(t, r)$ существует и единственна. Теперь пусть $t < r$. Если $\forall t_{k,r}$, $k = m_{t,r}, m_{t,r} + 1, \ldots, -1$, матрица $\left(E + L_n\left(t_{k+1,r}\right) - L_n\left(t_{k,r}\right)\right)$ не вырождена, то из (4) следует, что $B_n(t, r) = \prod_{k = m_{t,r}}^{-1} \left(L_n\left(t_{k+1,r}\right) - L_n\left(t_{k,r}\right) + E\right)^{-1}$, и, значит, опять фундаментальная матрица $B_n(t, r)$ существует и единственна. Обратно, если $t < r$ и существует $B_n(t, r)$, удовлетворяющая (4), то справедливо $E = \left(\prod_{k = m_{t,r}}^{-1} \left(L_n\left(t_{k+1,r}\right) - L_n\left(t_{k,r}\right) + E\right)\right) \cdot B_n(t, r)$ и в силу того, что ранг произведения матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей, имеем, что матрицы $\left(E + L_n\left(t_{k+1,r}\right) - L_n\left(t_{k,r}\right)\right)$ не вырождены $\forall t_{k,r}$ при $k = m_{t,r}, m_{t,r} + 1, \ldots, -1$.

Докажем пункт 3). Пусть s и r такие действительные числа, что не существует такого $k \in \mathbb{Z}$, что $s = r + kh_n$, тогда $\tau_{s,r} \neq 0$ и при $t \in s\left(-\tau_{s,r}, s - \tau_{s,r} + h_n\right)$ значение величины $m_{t,r} = m_{s,r}$, т. е. постоянно. Заметим также, что $L_n(t) \in C^\infty\left(T, \mathbb{R}^{p \times p}\right)$, это непосредственно следует из [9, с. 17], а значит, и функция $\left(L_n(t + h_n) - L_n(t) + E\right)$ бесконечно дифференцируема по t при $t \in \mathbb{R}$ как линейная комбинация. Если $s > r$, то при $t \in \left(s - \tau_{s,r}, s - \tau_{s,r} + h_n\right)$ фундаментальная матрица задается формулой $B_n(t, r) = \prod_{k=0}^{m_{s,r}-1} \left(L_n\left(t_{k+1,r}\right) - L_n\left(t_{k,r}\right) + E\right)$ и как произведение бесконечно дифференцируемых функций тоже является бесконечно дифференцируемой функцией для $t \in \left(s - \tau_{s,r}, s - \tau_{s,r} + h_n\right)$. Если $s < r$ и $\forall s_{k,r} = \tau_{s,r} + kh_n$, $k = m_{s,r}, m_{s,r} + 1, \ldots, -1$, матрица $\left(E + L_n\left(s_{k+1,r}\right) - L_n\left(s_{k,r}\right)\right)$ не вырождена, то в силу непрерывности существуют такие окрестности $U_{s_{k,r}}$ точек $s_{k,r}$, что при $t \in U_{s_{k,r}}$ матрицы $\left(E + L_n(t + h_n) - L_n(t)\right)$ не вырождены $\forall k \in \left\{m_{s,r}, m_{s,r} + 1, \ldots, -1\right\}$. Выберем

$$U_s = \left(s - \tau_{s,r}, s - \tau_{s,r} + h_n\right) \cap \left(\bigcap_{k = m_{s,r}}^{-1} \left\{s : s + \left(k - m_{s,r}\right) \cdot h_n \in U_{s_{k,r}}\right\}\right),$$

тогда при $t \in U_s$ $\forall t_{k,r}$, $k = m_{t,r}, m_{t,r} + 1, \ldots, -1$, матрицы $\left(E + L_n\left(t_{k+1,r}\right) - L_n\left(t_{k,r}\right)\right)$ не вырождены и, следовательно, $\left(L_n\left(t_{k+1,r}\right) - L_n\left(t_{k,r}\right) + E\right)^{-1}$ также бесконечно дифференцируемы. Другими словами, при $t \in U_s$ существует фундаментальная матрица $B_n(t, r)$, она задается формулой $B_n(t, r) = \prod_{k = m_{s,r}}^{-1} \left(L_n\left(t_{k+1,r}\right) - L_n\left(t_{k,r}\right) + E\right)^{-1}$ и является бесконечно дифференцируемой в этой окрестности как произведение бесконечно дифференцируемых функций.

Утверждение доказано.

Теорема 1. *Общее решение уравнения (2) представимо в виде*

$$X_n(t) = B_n(t, 0) \cdot X_{n0}(\tau_t) + \sum_{k=0}^{m_t - 1} B_n\left(t, t_{k+1}\right) \cdot \left(F_n\left(t_{k+1}\right) - F_n\left(t_k\right)\right), \tag{5}$$

где $X_{n0} : \left[0, h_n\right) \to \mathbb{R}^p$ *– произвольная вектор-функция.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственной проверкой легко убедиться, что если $X_n(t)$ имеет вид, указанный в (5), то оно будет являться решением уравнения (2). С другой стороны, пусть есть некоторое $X_n^1(t)$ – решение уравнения (2) и $X_n^2(t)$ задано по формуле (5), где $X_{n0}(\cdot)$ взято равным $X_{n0}(t)\big|_{[0, h_n)} = X_n^1(t)\big|_{[0, h_n)}$, тогда очевидно следующее:

$$X_n^2(t)\Big|_{t\in[0,\,h_n)} = B_n(t,0)\cdot X_{n0}(\tau_t) + \sum_{k=0}^{m_t-1} B_n(t,t_{k+1})\cdot\big(F_n(t_{k+1}) - F_n(t_k)\big) = X_{n0}(t) = X_n^1(t)\Big|_{t\in[0,\,h_n)},$$

т. е. $X_n^1(t)$ и $X_n^2(t)$ совпадают на интервале $[0,\, h_n)$. Очевидно также, что $X_n^2(t)$ является решением уравнения (2). Более того, заметим, что если вектор-функции $X_n^1(t)$ и $X_n^2(t)$ – решения уравнения (2) и для некоторого t выполняется $X_n^2(t) = X_n^1(t)$, то $X_n^2(t+h_n) = X_n^1(t+h_n)$. Следовательно, $X_n^2(t) = X_n^1(t)$ для любого $t\in T = [0;\, b]$, и, значит, произвольное решение уравнения (2) может быть описано формулой (5).

Следствие 1. *Существует единственное решение конечно-разностной с осреднением задачи Коши*

$$X_n(t+h_n) - X_n(t) = \big(L_n(t+h_n) - L_n(t)\big)X_n(t) + F_n(t+h_n) - F_n(t), \tag{6}$$

$$X_n(t)\Big|_{[0,\,h_n)} = X_{n0}(t), \tag{7}$$

где $X_{n0} : [0,\, h_n) \to \mathbb{R}^p$ *– некоторая вектор-функция, задающая начальное условие.*

Существование и единственность решения конечно-разностной с осреднением краевой задачи

Пусть τ – некоторое произвольное фиксированное число из интервала $[0,\, h_h)$. Обозначим

$$H_{B_n}(\tau) = M_1\cdot B_n(\tau,0) + M_2\cdot B_n(m_b h_n + \tau, 0) = M_1 + M_2\cdot B_n(m_b h_n + \tau, 0).$$

Пусть также $H_{B_n}(\tau)^+$ – обобщенная обратная матрица для $H_{B_n}(\tau)$, т. е. выполняется условие

$$H_{B_n}(\tau)\cdot H_{B_n}(\tau)^+\cdot H_{B_n}(\tau) = H_{B_n}(\tau). \tag{8}$$

Известно [10, с. 40], что обобщенная обратная матрица $H_{B_n}(\tau)^+$ существует при любой $H_{B_n}(\tau)\in\mathbb{R}^{p\times p}$, однако может быть не единственной. Пусть $\tilde{H}_n^\tau$ – множество матриц $H_{B_n}(\tau)^+$, удовлетворяющих условию (8).

Обозначим также $\tau_k = \tau + kh_n$, $k\in\mathbb{Z}$.

Теорема 2. *Решение конечно-разностной с осреднением краевой задачи (2), (3) существует тогда и только тогда, когда* $\forall\tau\in[0,\, h_h)$ *выполняется*

$$\Big(E - H_{B_n}(\tau)\cdot H_{B_n}(\tau)^+\Big)\cdot\left(Q_n(\tau) - M_2\cdot\left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1})\cdot\big(F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)\big)\right)\right) = 0. \tag{9}$$

При этом, если для некоторого τ *из* $[0,\, h_h)$ *множество* $\tilde{H}_n^\tau$ *состоит более чем из одного элемента и условие (9) выполняется хотя бы для одной матрицы* $H_{B_n}(\tau)^+\in\tilde{H}_n^\tau$, *то оно выполняется для всех матриц из* $\tilde{H}_n^\tau$.

Если выполняется условие (9), то для единственности решения необходимо и достаточно, чтобы $\forall\tau\in[0,\, h_h)$

$$H_{B_n}(\tau)^+\cdot H_{B_n}(\tau) = E, \tag{10}$$

где для каждого τ *из* $[0,\, h_h)$ $H_{B_n}(\tau)^+$ *– некоторая матрица из* $\tilde{H}_n^\tau$. *При этом условие (10) является необходимым и достаточным для того, чтобы матрица* $H_{B_n}(\tau)^+$, *определенная по формуле (8), была единственной и* $H_{B_n}(\tau)^+ = H_{B_n}(\tau)^{-1}$.

Доказательство. Пусть выполняется условие (9) и $H_{B_n}(\tau)^+\in\tilde{H}_n^\tau$ $\forall\tau\in[0,\, h_h)$, тогда возьмем

$$X_{n0}(\tau)\big|_{\tau\in[0,\,h_n)} = \left(E - H_{B_n}(\tau)^{+}\cdot H_{B_n}(\tau)\right)\cdot C_{n0}(\tau) +$$

$$+ H_{B_n}(\tau)^{+}\cdot\left(Q_n(\tau) - M_2\cdot\left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n\left(m_b h_n+\tau,\ \tau_{k+1}\right)\cdot\left(F_n\left(\tau_{k+1}\right)-F_n\left(\tau_k\right)\right)\right)\right), \tag{11}$$

где $C_{n0}:[0,\,h_h)\to\mathbb{R}^p$ – произвольная вектор-функция.

Покажем, что решение задачи Коши (6), (7), где $X_{n0}(\cdot)$ в формуле (7) взято определенным по формуле (11), будет удовлетворять краевым условиям (3). Согласно теореме 1 имеем

$$M_1X_n(\tau)\big|_{\tau\in[0,\,h_n)} + M_2X_n\left(m_bh_n+\tau\right)\big|_{\tau\in[0,\,h_n)} = M_1X_{n0}(\tau) + M_2B_n\left(m_bh_n+\tau,\ 0\right)\cdot X_{n0}(\tau) +$$

$$+ M_2\cdot\left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n\left(m_b h_n+\tau,\ \tau_{k+1}\right)\cdot\left(F_n\left(\tau_{k+1}\right)-F_n\left(\tau_k\right)\right)\right) =$$

$$= H_{B_n}(\tau)\cdot X_{n0}(\tau) + M_2\cdot\left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n\left(m_b h_n+\tau,\ \tau_{k+1}\right)\cdot\left(F_n\left(\tau_{k+1}\right)-F_n\left(\tau_k\right)\right)\right).$$

Подставим $X_{n0}(\tau)$ из (11). С учетом (8) и (9) получим

$$M_1X_n(\tau)\big|_{\tau\in[0,\,h_n)} + M_2X_n\left(m_bh_n+\tau\right)\big|_{\tau\in[0,\,h_n)} = H_{B_n}(\tau)\cdot\Bigg(\left(E - H_{B_n}(\tau)^{+}\cdot H_{B_n}(\tau)\right)\cdot C_{n0}(\tau) +$$

$$+ H_{B_n}(\tau)^{+}\cdot\left(Q_n(\tau) - M_2\cdot\left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n\left(m_b h_n+\tau,\ \tau_{k+1}\right)\cdot\left(F_n\left(\tau_{k+1}\right)-F_n\left(\tau_k\right)\right)\right)\right)\Bigg) +$$

$$+ M_2\cdot\left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n\left(m_b h_n+\tau,\ \tau_{k+1}\right)\cdot\left(F_n\left(\tau_{k+1}\right)-F_n\left(\tau_k\right)\right)\right) = H_{B_n}(\tau)\cdot H_{B_n}(\tau)^{+}\cdot\Bigg(Q_n(\tau) -$$

$$- M_2\cdot\left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n\left(m_b h_n+\tau,\ \tau_{k+1}\right)\cdot\left(F_n\left(\tau_{k+1}\right)-F_n\left(\tau_k\right)\right)\right)\Bigg) +$$

$$+ M_2\cdot\left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n\left(m_b h_n+\tau,\ \tau_{k+1}\right)\cdot\left(F_n\left(\tau_{k+1}\right)-F_n\left(\tau_k\right)\right)\right) =$$

$$= Q_n(\tau) - M_2\cdot\left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n\left(m_b h_n+\tau,\ \tau_{k+1}\right)\cdot\left(F_n\left(\tau_{k+1}\right)-F_n\left(\tau_k\right)\right)\right) +$$

$$+ M_2\cdot\left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n\left(m_b h_n+\tau,\ \tau_{k+1}\right)\cdot\left(F_n\left(\tau_{k+1}\right)-F_n\left(\tau_k\right)\right)\right) = Q_n(\tau).$$

Обратно, пусть существует $X_n(t)$ – решение краевой задачи (2), (3), покажем, что условие (9) выполняется. Воспользуемся для $X_n(t)$ представлением (5), тогда, как показано выше, краевое условие (3) может быть записано в виде

$$\left(H_{B_n}(\tau)\cdot X_{n0}(\tau) + M_2\cdot\left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n\left(m_b h_n+\tau,\ \tau_{k+1}\right)\cdot\left(F_n\left(\tau_{k+1}\right)-F_n\left(\tau_k\right)\right)\right)\right)\Bigg|_{\tau\in[0,\,h_n)} = Q_n(\tau).$$

Преобразуем последнее равенство, $\forall\tau\in\left[0,\,h_h\right)$ имеем

$$H_{B_n}(\tau)\cdot X_{n0}(\tau)=Q_n(\tau)-M_2\cdot\left(\sum_{k=0}^{m_b-1}B_n\left(m_bh_n+\tau,\,\tau_{k+1}\right)\cdot\left(F_n\left(\tau_{k+1}\right)-F_n\left(\tau_k\right)\right)\right).$$

Тогда

$$H_{B_n}(\tau)\cdot H_{B_n}(\tau)^+\cdot H_{B_n}(\tau)\cdot X_{n0}(\tau)=$$

$$=H_{B_n}(\tau)\cdot H_{B_n}(\tau)^+\cdot\left(Q_n(\tau)-M_2\cdot\left(\sum_{k=0}^{m_b-1}B_n\left(m_bh_n+\tau,\,\tau_{k+1}\right)\cdot\left(F_n\left(\tau_{k+1}\right)-F_n\left(\tau_k\right)\right)\right)\right).$$

Из двух последних равенств и условия (8) имеем $\forall\tau\in\left[0,\,h_h\right)$

$$Q_n(\tau)-M_2\cdot\left(\sum_{k=0}^{m_b-1}B_n\left(m_bh_n+\tau,\,\tau_{k+1}\right)\cdot\left(F_n\left(\tau_{k+1}\right)-F_n\left(\tau_k\right)\right)\right)=$$

$$=H_{B_n}(\tau)\cdot H_{B_n}(\tau)^+\cdot\left(Q_n(\tau)-M_2\cdot\left(\sum_{k=0}^{m_b-1}B_n\left(m_bh_n+\tau,\,\tau_{k+1}\right)\cdot\left(F_n\left(\tau_{k+1}\right)-F_n\left(\tau_k\right)\right)\right)\right),$$

откуда и следует справедливость условия (9).

Далее, докажем, что если для произвольного фиксированного $\tau\in\left[0,\,h_n\right)$ некоторые матрицы $H^1_{B_n}(\tau)^+$, $H^2_{B_n}(\tau)^+\in\tilde{H}^\tau_n$ и для $H^1_{B_n}(\tau)^+$ выполняется условие (9), то оно также выполняется для матрицы $H^2_{B_n}(\tau)^+$. Действительно,

$$\left(E-H_{B_n}(\tau)\cdot H^2_{B_n}(\tau)^+\right)\cdot\left(Q_n(\tau)-M_2\cdot\left(\sum_{k=0}^{m_b-1}B_n\left(m_bh_n+\tau,\,\tau_{k+1}\right)\cdot\left(F_n\left(\tau_{k+1}\right)-F_n\left(\tau_k\right)\right)\right)\right)=$$

$$=\left(E-H_{B_n}(\tau)\cdot H^2_{B_n}(\tau)^+\right)H_{B_n}(\tau)\cdot H^1_{B_n}(\tau)^+\times$$

$$\times\left(Q_n(\tau)-M_2\cdot\left(\sum_{k=0}^{m_b-1}B_n\left(m_bh_n+\tau,\,\tau_{k+1}\right)\cdot\left(F_n\left(\tau_{k+1}\right)-F_n\left(\tau_k\right)\right)\right)\right)=$$

$$=\left(H_{B_n}(\tau)-H_{B_n}(\tau)\cdot H^2_{B_n}(\tau)^+\cdot H_{B_n}(\tau)\right)\times$$

$$\times H^1_{B_n}(\tau)^+\cdot\left(Q_n(\tau)-M_2\cdot\left(\sum_{k=0}^{m_b-1}B_n\left(m_bh_n+\tau,\,\tau_{k+1}\right)\cdot\left(F_n\left(\tau_{k+1}\right)-F_n\left(\tau_k\right)\right)\right)\right)=0.$$

Осталось доказать единственность. Для этого вначале докажем, что для произвольного фиксированного $\tau\in\left[0,\,h_n\right)$ условие (10) выполняется тогда и только тогда, когда матрица $H_{B_n}(\tau)^+$, определенная в формуле (8), единственна.

Действительно, если выполняется условие (10) для некоторой $H^1_{B_n}(\tau)^+\in\tilde{H}^\tau_n$, тогда, как известно из теории матриц, $\det\left(H_{B_n}(\tau)\right)\neq 0$ и $H^1_{B_n}(\tau)^+=H_{B_n}(\tau)^{-1}$. Теперь, если для некоторой $H^2_{B_n}(\tau)^+\in\tilde{H}^\tau_n$ выполняется условие (8), т. е. $H_{B_n}(\tau)\cdot H^2_{B_n}(\tau)^+\cdot H_{B_n}(\tau)=H_{B_n}(\tau)$, то, домножив левую и правую части этого уравнения слева на $H_{B_n}(\tau)^{-1}$, получим $H^2_{B_n}(\tau)^+\cdot H_{B_n}(\tau)=E$, откуда $H^2_{B_n}(\tau)^+=H_{B_n}(\tau)^{-1}=H^1_{B_n}(\tau)^+$.

С другой стороны, положим, что матрица, определенная формулой (8), существует и единственна. Покажем, что в этом случае $\det\left(H_{B_n}(\tau)\right)\neq 0$ и $H_{B_n}(\tau)^+=H_{B_n}(\tau)^{-1}$. Предположим, что $\det\left(H_{B_n}(\tau)\right)=0$.

Следовательно, существует такая ненулевая матрица A, что $H_{B_n}(\tau)\cdot A=0,$ и тогда, очевидно, матрица $\left(H_{B_n}(\tau)^{+}+A\right)\neq H_{B_n}(\tau)^{+}$ тоже удовлетворяет условию (8), получили противоречие, следовательно, $\det\left(H_{B_n}(\tau)\right)\neq 0.$ Тогда существует обратная матрица $H_{B_n}(\tau)^{-1},$ которая, как несложно заметить, удовлетворяет условию (8), и, значит, $H_{B_n}(\tau)^{+}=H_{B_n}(\tau)^{-1}.$

Теперь пусть выполняются условия (9) и (10) $\forall\tau\in[0,\,h_h).$ Докажем, что краевая задача (2), (3) имеет единственное решение. Как доказано выше, из выполнения условий (9) и (10) следует, что решение краевой задачи (2), (3) существует и матрица $H_{B_n}(\tau)$ обратима. Тогда с учетом теоремы 1 и несложных преобразований краевое условие (3) может быть переписано в виде начального условия

$$X_{n0}(\tau)=H_{B_n}(\tau)^{-1}\cdot\left(Q_n(\tau)-M_2\cdot\left(\sum_{k=0}^{m_b-1}B_n\left(m_bh_n+\tau,\,\tau_{k+1}\right)\cdot\left(F_n\left(\tau_{k+1}\right)-F_n\left(\tau_k\right)\right)\right)\right).$$

В силу следствия 1 заключаем, что решение уравнения (2), удовлетворяющее приведенному начальному условию, единственно.

И наконец, пусть краевая задача (2), (3) имеет единственное решение и выполняются условия (9). Докажем справедливость условия (10) $\forall\tau\in[0,\,h_h).$ Для этого предположим, что условие (10) не выполняется, т. е. для некоторого $\tau\in[0,\,h_h)$ $E-H_{B_n}(\tau)^{+}\cdot H_{B_n}(\tau)\neq 0,$ но тогда формула (11) задает семейство функций $X_{n0}(\tau),$ зависящее от выбора вектор-функции $C_{n0}:[0,\,h_n)\to\mathbb{R}^p,$ что противоречит единственности решения. Следовательно, условие (10) выполняется.

Таким образом, теорема 2 доказана.

Утверждение 2. Пусть $H_{B_n}(\cdot)^{+}:[0,\,h_n)\to\mathbb{R}^{p\times p}$ – произвольная фиксированная функция такая, что $\forall\tau\in[0,\,h_h)$ выполняется $H_{B_n}(\tau)^{+}\in\tilde{H}_n^{\tau}$ и для заданной конечно-разностной с осреднением краевой задачи (2), (3) выполняется условие (9), тогда $X_n(\cdot):T\to\mathbb{R}^p$ является решением этой задачи, если и только если существует такая задача Коши (6), (7), где начальное условие имеет вид

$$X_{n0}(\tau)\big|_{\tau\in[0,\,h_n)}=\left(E-H_{B_n}(\tau)^{+}\cdot H_{B_n}(\tau)\right)\cdot C_{n0}(\tau)+$$
$$+H_{B_n}(\tau)^{+}\cdot\left(Q_n(\tau)-M_2\cdot\left(\sum_{k=0}^{m_b-1}B_n\left(m_bh_n+\tau,\,\tau_{k+1}\right)\cdot\left(F_n\left(\tau_{k+1}\right)-F_n\left(\tau_k\right)\right)\right)\right)\qquad(12)$$

с некоторой заданной функцией $C_{n0}:[0,\,h_n)\to\mathbb{R}^p,$ что ее решение совпадает с $X_n(t)$ $\forall t\in T.$

Доказательство. Пусть для некоторой вектор-функции $X_n(\cdot):T\to\mathbb{R}^p$ существует такая вектор-функция $C_{n0}:[0,\,h_n)\to\mathbb{R}^p,$ что если рассмотреть задачу Коши (6), (7) с начальным условием, заданным формулой (12), то решение этой задачи Коши будет совпадать с функцией $X_n(t)$ $\forall t\in T.$ Докажем, что в этом случае $X_n(\cdot)$ будет решением краевой задачи (2), (3). Очевидно, $X_n(\cdot)$ является решением уравнения (2), осталось проверить выполнение краевых условий (3). В силу теоремы 1 и с учетом формул (9) и (12) имеем

$$M_1X_n(\tau)\big|_{\tau\in[0,\,h_n)}+M_2X_n\left(m_bh_n+\tau\right)\big|_{\tau\in[0,\,h_n)}=M_1X_{n0}(\tau)+M_2B_n\left(m_bh_n+\tau,\,0\right)\cdot X_{n0}(\tau)+$$
$$+M_2\cdot\left(\sum_{k=0}^{m_b-1}B_n\left(m_bh_n+\tau,\,\tau_{k+1}\right)\cdot\left(F_n\left(\tau_{k+1}\right)-F_n\left(\tau_k\right)\right)\right)=$$
$$=H_{B_n}(\tau)\cdot X_{n0}(\tau)+M_2\cdot\left(\sum_{k=0}^{m_b-1}B_n\left(m_bh_n+\tau,\,\tau_{k+1}\right)\cdot\left(F_n\left(\tau_{k+1}\right)-F_n\left(\tau_k\right)\right)\right)=$$

$$= H_{B_n}(\tau) \cdot \left(E - H_{B_n}(\tau)^+ \cdot H_{B_n}(\tau)\right) \cdot C_{n0}(\tau) +$$

$$+ H_{B_n}(\tau) \cdot H_{B_n}(\tau)^+ \cdot \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n\left(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}\right) \cdot \left(F_n\left(\tau_{k+1}\right) - F_n\left(\tau_k\right)\right)\right)\right) +$$

$$+ M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n\left(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}\right) \cdot \left(F_n\left(\tau_{k+1}\right) - F_n\left(\tau_k\right)\right)\right) =$$

$$= Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n\left(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}\right) \cdot \left(F_n\left(\tau_{k+1}\right) - F_n\left(\tau_k\right)\right)\right) +$$

$$+ M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n\left(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}\right) \cdot \left(F_n\left(\tau_{k+1}\right) - F_n\left(\tau_k\right)\right)\right) = Q_n(\tau).$$

Таким образом, функция $X_n(\cdot)$ есть решение краевой задачи (2), (3).

Теперь пусть вектор-функция $X_n(\cdot): T \to \mathbb{R}^p$ является решением задачи (2), (3). Докажем, что существует такая задача Коши (6), (7), где начальное условие задано формулой (12), и ее решение совпадает с $X_n(t)\ \forall t \in T$. Для этого покажем, что для любого $X_n(t)$, решения задачи (2), (3), и $X_{n0}(t)$, определенного по формуле (12), существует такая функция $C_{n0}: [0, h_n) \to \mathbb{R}^p$, что $X_n(\tau)\big|_{\tau \in [0, h_n)} = X_{n0}(\tau)$.

Согласно теореме 1 $X_n(t)$ представимо в виде

$$X_n(t) = B_n(t, 0) \cdot Y_{n0}(\tau_t) + \sum_{k=0}^{m_t-1} B_n\left(t, t_{k+1}\right) \cdot \left(F_n\left(t_{k+1}\right) - F_n\left(t_k\right)\right),$$

где $Y_{n0}: [0, h_n) \to \mathbb{R}^p$ – некоторая вектор-функция. Тогда из (3) $\forall \tau \in [0, h_n)$ имеем

$$M_1 X_n(\tau)\big|_{\tau \in [0, h_n)} + M_2 X_n\left(m_b h_n + \tau\right)\big|_{\tau \in [0, h_n)} = M_1 Y_{n0}(\tau) + M_2 B_n\left(m_b h_n + \tau, 0\right) \cdot Y_{n0}(\tau) +$$

$$+ M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n\left(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}\right) \cdot \left(F_n\left(\tau_{k+1}\right) - F_n\left(\tau_k\right)\right)\right) =$$

$$= H_{B_n}(\tau) \cdot Y_{n0}(\tau) + M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n\left(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}\right) \cdot \left(F_n\left(\tau_{k+1}\right) - F_n\left(\tau_k\right)\right)\right) = Q_n(\tau)$$

или

$$H_{B_n}(\tau) \cdot Y_{n0}(\tau) = Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n\left(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}\right) \cdot \left(F_n\left(\tau_{k+1}\right) - F_n\left(\tau_k\right)\right)\right).$$

Согласно теореме 2 в нашем случае справедлива формула (9) и последнее равенство можно переписать в виде

$$H_{B_n}(\tau) \cdot Y_{n0}(\tau) = H_{B_n}(\tau) \cdot H_{B_n}(\tau)^+ \times$$

$$\times \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n\left(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}\right) \cdot \left(F_n\left(\tau_{k+1}\right) - F_n\left(\tau_k\right)\right)\right)\right)$$

или

$$H_{B_n}(\tau) \cdot \left(Y_{n0}(\tau) - H_{B_n}(\tau)^+ \cdot \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n\left(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}\right) \cdot \left(F_n\left(\tau_{k+1}\right) - F_n\left(\tau_k\right)\right)\right)\right)\right) = 0.$$

Тогда справедливо $\forall\tau \in [0, h_n)$

$$Y_{n0}(\tau) - H_{B_n}(\tau)^+ \cdot \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n\left(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}\right) \cdot \left(F_n\left(\tau_{k+1}\right) - F_n\left(\tau_k\right)\right)\right)\right) =$$

$$= \left(E - H_{B_n}(\tau)^+ \cdot H_{B_n}(\tau)\right) \times$$

$$\times \left(Y_{n0}(\tau) - H_{B_n}(\tau)^+ \cdot \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n\left(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}\right) \cdot \left(F_n\left(\tau_{k+1}\right) - F_n\left(\tau_k\right)\right)\right)\right)\right).$$

Следовательно, если взять

$$C_{n0}(\tau) = Y_{n0}(\tau) - H_{B_n}(\tau)^+ \cdot \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n\left(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}\right) \cdot \left(F_n\left(\tau_{k+1}\right) - F_n\left(\tau_k\right)\right)\right)\right),$$

то будет справедливо

$$X_n(\tau)\Big|_{\tau\in[0,\, h_n)} = Y_{n0}(\tau) = \left(E - H_{B_n}(\tau)^+ \cdot H_{B_n}(\tau)\right) \cdot C_{n0}(\tau) +$$

$$+ H_{B_n}(\tau)^+ \cdot \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n\left(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}\right) \cdot \left(F_n\left(\tau_{k+1}\right) - F_n\left(\tau_k\right)\right)\right)\right) = X_{n0}(\tau).$$

Утверждение доказано.

Непрерывность и дифференцируемость решения конечно-разностной с осреднением краевой задачи

В этом разделе рассмотрим вопрос о бесконечной дифференцируемости решений конечно-разностной с осреднением краевой задачи, т. е. о нахождении условий, при которых $X_n(t) \in C^\infty\left(T, \mathbb{R}^p\right)$, где $X_n(t)$ – решение (2), (3). Здесь и далее $\forall x \in \mathbb{R}^p$ $\|x\| = \max\limits_{1\le i\le p}|x_i|$, а $\forall A \in \mathbb{R}^{p\times p}$ соответственно $\|A\| = \max\limits_{1\le i\le p}\sum\limits_{j=1}^{p}|a_{ij}|$.

Согласно утверждению 2 решение $X_n(\cdot)$ краевой задачи (2), (3) определяется единственным образом путем выбора функции $H_{B_n}(\cdot)^+ : [0, h_n) \to \mathbb{R}^{p\times p}$ такой, что $\forall\tau \in [0, h_h)$ выполняется $H_{B_n}(\tau)^+ \in \tilde{H}_n^\tau$ и $C_{n0}(\cdot) : [0, h_n) \to \mathbb{R}^p$. Таким образом, свойства решения задачи (2), (3) могут быть определены путем наложения условий на функции $H_{B_n}(\cdot)^+$, $C_{n0}(\cdot)$ и $Q_n(\cdot)$. Приведем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть* $X_n(\cdot)$ *– решение конечно-разностной с осреднением краевой задачи (2), (3), определенное выбором функций* $H_{B_n}(\cdot)^+ : [0, h_n) \to \mathbb{R}^{p\times p}$ *и* $C_{n0}(\cdot) : [0, h_n) \to \mathbb{R}^p$*, и пусть выполнены условия*

$$Q_n(\tau) \in C^\infty\left([0, h_n), \mathbb{R}^p\right),$$

$$H_{B_n}(\tau)^+ \in C^\infty\left([0, h_n), \mathbb{R}^{p\times p}\right),$$

$$C_{n0}(\tau) \in C^\infty\left([0, h_n), \mathbb{R}^p\right),$$

и при $l = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left\| \frac{d^l}{dt^l} X_{n0}(h_n - s) - \frac{d^l}{dt^l} B_n(h_n + s, 0) X_{n0}(s) - \frac{d^l}{dt^l}\left(F(h_n + s) - F_s(s)\right) \right\| \underset{s\to+0}{\longrightarrow} 0,$$

где $X_{n0}(\tau)$ *определено по формуле (12), т. е.*

$$X_{n0}(\tau)\big|_{\tau\in[0,\,h_n)} = \left(E - H_{B_n}(\tau)^{+}\cdot H_{B_n}(\tau)\right)\cdot C_{n0}(\tau) +$$

$$+\,H_{B_n}(\tau)^{+}\cdot\left(Q_n(\tau) - M_2\cdot\left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n\left(m_b h_n + \tau,\ \tau + (k+1)\cdot h_n\right)\cdot\left(F_n\left(t_{k+1}\right) - F_n\left(t_k\right)\right)\right)\right).$$

Тогда $X_n(t)$ *принадлежит пространству* $C^{\infty}\left(T,\ \mathbb{R}^p\right)$.

Доказательство. Докажем, что $X_{n0}(\tau)\in C^{\infty}\left([0,\ h_n),\ \mathbb{R}^p\right)$.

В силу свойства 3) утверждения 1 фундаментальной матрицы $B_n\left(m_b h_n + \tau,\ 0\right)\in C^{\infty}\left([0;\ h_n),\ \mathbb{R}^{p\times p}\right)$, следовательно, $H_{B_n}(\tau)\in C^{\infty}\left([0,\ h_n),\ \mathbb{R}^{p\times p}\right)$, так как по определению $H_{B_n}(\tau) = M_1 + M_2\cdot B_n\left(m_b h_n + \tau,\ 0\right)$.

Далее, как уже отмечалось, мы можем утверждать, что $L_n(\cdot)\in C^{\infty}\left(\mathbb{R},\ \mathbb{R}^{p\times p}\right)$ и $F_n(\cdot)\in C^{\infty}\left(\mathbb{R},\ \mathbb{R}^p\right)$, это следует из [9, с. 17]. Тогда функция $\left(L_n(t+h_n) - L_n(t) + E\right)$ бесконечно дифференцируема по t при $t\in\mathbb{R}$. Поскольку $B_n\left(m_b h_n + \tau,\ \tau + (k+1)\cdot h_n\right) = \prod_{i=k+1}^{m_b-1}\left(L_n\left(\tau_{i+1}\right) - L_n\left(\tau_i\right) + E\right)$ и количество элементов в произведении при фиксированном k постоянно $\forall\tau\in[0;\ h_n)$, то $B_n\left(m_b h_n + \tau,\ \tau + (k+1)\cdot h_n\right)\in$ $\in C^{\infty}\left([0,\ h_n),\ \mathbb{R}^{p\times p}\right)$ как функция от $\tau\in[0;\ h_n)$ $\forall k = \overline{0,\ (m_b - 1)}$.

Следовательно, в силу условий теоремы и всего вышесказанного $X_{n0}(\tau)\in C^{\infty}\left([0,\ h_n),\ \mathbb{R}^p\right)$. Справедливо также следующее преобразование:

$$\frac{d^l}{dt^l}X_{n0}(h_n - s) - \frac{d^l}{dt^l}B_n(h_n + s,\ 0)X_{n0}(s) - \frac{d^l}{dt^l}\left(F_n(h_n + s) - F_n(s)\right) =$$

$$= \frac{d^l}{dt^l}X_{n0}(h_n - s) - \frac{d^l}{dt^l}X_{n0}(s) - \frac{d^l}{dt^l}\left(L_n(h_n + s) - L_n(s)\right)X_{n0}(s) - \frac{d^l}{dt^l}\left(F_n(h_n + s) - F_n(s)\right).$$

Как упоминалось ранее, наше решение конечно-разностной с осреднением краевой задачи (2), (3) будет также решением задачи Коши (6), (7), где начальное условие задается формулой (12). Поэтому, как показано в [11], решение $X_n(t)$ принадлежит пространству $C^{\infty}\left(T,\ \mathbb{R}^p\right)$.

Библиографические ссылки

1. *Das P. S., Sharma R. R.* Existence and stability of measure differential equations // Czech. Math. J. 1972. Vol. 22, № 1. P. 145–158.
2. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Импульсные процессы: модели и приложения. М. : Наука, 1991.
3. *Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.* Теория обобщенных функций: секвенциальный подход. М. : Мир, 1976.
4. *Colombeau J. F.* New generalized functions and multiplication of distributions // Amsterdam : North-Holland Publ. Co., 1984.
5. *Лазакович Н. В.* Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38, № 5. С. 23–27.
6. *Yablonski A.* Differential equations with generalized coefficients // Nonlinear Anal. 2005. Vol. 63, issue 2. P. 171–197. DOI: 10.1016/j.na.2005.03.108.
7. *Лазакович Н. В., Яблонский О. Л., Хмызов А. К.* Системы дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в прямом произведении алгебр мнемофункций // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 2. С. 5–9.
8. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М. : Наука, 1981.
9. *Hörmander L.* The analysis of linear partial differential operators I, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaft. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2003.
10. *Ben-Israel Adi, Greville Thomas N. E.* Generalized Inverses: Theory and Applications. New York : Springer-Verlag, 2003.
11. *Автушко Т. С., Лазакович Н. В., Русецкий А. Ю.* Задача Коши для линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2013. № 3. С. 83–92.

References

1. Das P. S., Sharma R. R. Existence and stability of measure differential equations. *Czech. Math. J.* 1972. Vol. 22, No. 1. P. 145–158.

2. Zavalischin S. T., Sesekin A. N. Impul'snye protsessy: modeli i prilozheniya [Impulsive Processes. Models and Applications]. Moscow : Nauka, 1991 (in Russ.).

3. Antosik P., Mikusinski Y., Sikorski R. Teoriya obobshchennykh funktsii: sekventsial'nyi podkhod [Theory of distributions. The sequential approach]. Moscow : Mir, 1976 (in Russ.).

4. Colombeau J. F. New generalized functions and multiplication of distributions. Amsterdam : North-Holland Publ. Co., 1984.

5. Lazakovich N. V. [Stochastic differentials in the algebra of generalized random processes]. *Rep. of the Acad. of Sci. of Belarus*. 1994. Vol. 38, No. 5. P. 23–27 (in Russ.).

6. Yablonski A. Differential equations with generalized coefficients. *Nonlinear Anal.* 2005. Vol. 63, issue 2. P. 171–197. DOI: 10.1016/j.na.2005.03.108.

7. Lazakovich N. V., Yablonski O. L., Khmyzov A. K. [The Cauchy problem for systems of differential equations with generalized coefficients in the direct product of algebras of mnemonic functions]. *Rep. of the Natl. Acad. of Sci. of Belarus*. 2011. Vol. 55, No. 2. P. 5–9 (in Russ.).

8. Vladimirov V. S. Uravneniya matematicheskoi fiziki [Equations of Mathematical Physics]. Moscow : Nauka, 1981 (in Russ.).

9. Hörmander L. The analysis of linear partial differential operators I, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaft. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2003.

10. Ben-Israel Adi, Greville Thomas N. E. Generalized Inverses: Theory and Applications. New York : Springer-Verlag, 2003.

11. Autushka T. S., Lazakovich N. V., Rusetski A. Y. [Cauchy problem for linear inhomogeneous differential equations of second order with generalized coefficients in algebra of mnemofunctions]. *Proc. Natl. Acad. of Sci. of Belarus. Phys. and Math. Ser.* 2013. No. 3. P. 83–92 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 04.09.2017.
Received by editorial board 04.09.2017.