УДК 517.95

О НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

***А. Л. ГЛАДКОВ*[1], *Т. В. КАВИТОВА*[2]**

[1] *Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*
[2] *Витебский государственный университет им. П. М. Машерова, Московский пр., 33, 210038, г. Витебск, Беларусь*

Рассмотрено нелинейное нелокальное параболическое уравнение $u_t = \Delta u + a(x, t)u^r \int_\Omega u^p(y, t)dy - b(x, t)u^q$ для $(x, t) \in \Omega \times (0, +\infty)$ с нелинейным нелокальным граничным условием $u(x, t)\big|_{\partial\Omega \times (0, +\infty)} = \int_\Omega k(x, y, t)u^l(y, t)dy$ и начальными данными $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$, где r, p, q, l – положительные постоянные; Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Неотрицательные функции $a(x, t)$ и $b(x, t)$ определены при $x \in \bar{\Omega}$, $t \geq 0$ и локально непрерывны по Гёльдеру, неотрицательная непрерывная функция $k(x, y, t)$ определена при $x \in \partial\Omega$, $y \in \bar{\Omega}$, $t \geq 0$, неотрицательная непрерывная функция $u_0(x)$ – при $x \in \bar{\Omega}$ и удовлетворяет условию $u_0(x) = \int_\Omega k(x, y, 0)u_0^l(y)dy$ при $x \in \partial\Omega$. Изучены классические решения. Для доказательства существования локального максимального решения рассмотрена регуляризация исходной задачи. Установлены существование локального решения регуляризованной задачи и сходимость ее решений к локальному максимальному решению исходной задачи. Введены понятия верхнего и нижнего решений. Показано, что верхнее решение не меньше нижнего. Для нетривиальных начальных функций при выполнении определенных условий на данные задачи установлена положительность решений. Как следствие положительности решений и принципа сравнения решений доказана теорема единственности решения.

Ключевые слова: нелинейное параболическое уравнение; нелокальное граничное условие; существование решения; принцип сравнения.

Образец цитирования:
Гладков А. Л., Кавитова Т. В. О начально-краевой задаче для нелокального параболического уравнения с нелокальным граничным условием // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 29–38.

For citation:
Gladkov A. L., Kavitova T. V. On the initial-boundary value problem for a nonlocal parabolic equation with nonlocal boundary condition. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2018. No. 1. P. 29–38 (in Russ.).

Авторы:
Александр Львович Гладков – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой математической кибернетики механико-математического факультета.
Татьяна Валерьевна Кавитова – старший преподаватель кафедры геометрии и математического анализа факультета математики и информационных технологий.

Authors:
Alexander L. Gladkov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics.
gladkoval@bsu.by
Tatiana V. Kavitova, senior lecturer at the department of geometry and mathematical analysis, faculty of mathematics and information technologies.
kavitovatv@tut.by

ON THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NONLOCAL PARABOLIC EQUATION WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITION

A. L. GLADKOV [a], ***T. V. KAVITOVA*** [b]

[a] *Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
[b] *Vitebsk State University named after P. M. Masherov, 33 Maskoŭski Avenue, Vitebsk 210038, Belarus*
Corresponding author: T. V. Kavitova (kavitovatv@tut.by)

We consider a nonlinear nonlocal parabolic equation $u_t = \Delta u + a(x, t)u^r \int_\Omega u^p(y, t)dy - b(x, t)u^q$ for $(x, t) \in \Omega \times (0, +\infty)$ with nonlinear nonlocal boundary condition $u(x, t)\big|_{\partial\Omega \times (0, +\infty)} = \int_\Omega k(x, y, t)u^l(y, t)dy$ and initial data $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$, where r, p, q, l are positive constants; Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ with smooth boundary $\partial\Omega$. Nonnegative functions $a(x, t)$ and $b(x, t)$ are defined for $x \in \bar{\Omega}$, $t \geq 0$ and local Hölder continuous, nonnegative continuous function $k(x, y, t)$ is defined for $x \in \partial\Omega$, $y \in \bar{\Omega}$, $t \geq 0$, nonnegative continuous function $u_0(x)$ is defined for $x \in \bar{\Omega}$ and satisfies the condition $u_0(x) = \int_\Omega k(x, y, 0)u_0^l(y)dy$ for $x \in \partial\Omega$. In this paper we study classical solutions. To prove the existence of a local maximal solution, we consider the regularization of the original problem. We establish the existence of a local solution of the regularized problem and the convergence of solutions of this problem to a local maximal solution of the original problem. We introduce definitions of a supersolution and a subsolution. It is shown that a supersolution is not less than a subsolution. We establish the positiveness of solutions of the problem with nontrivial initial data under certain conditions on the data of the problem. As a consequence of the positiveness of solutions and the comparison principle of solutions, we prove the uniqueness theorem.

Key words: nonlinear parabolic equation; nonlocal boundary condition; existence of solution; comparison principle.

Рассмотрено нелинейное параболическое уравнение

$$u_t = \Delta u + a(x, t)u^r \int_\Omega u^p(y, t)dy - b(x, t)u^q, \ x \in \Omega, \ t > 0, \tag{1}$$

с нелинейным нелокальным граничным условием

$$u(x, t) = \int_\Omega k(x, y, t)u^l(y, t)dy, \ x \in \partial\Omega, \ t > 0, \tag{2}$$

и начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \ x \in \Omega, \tag{3}$$

где r, p, q, l – положительные постоянные; Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ с гладкой границей $\partial\Omega$.

Относительно данных задачи (1)–(3) в работе сделаны следующие предположения:

$$a(x, t), \ b(x, t) \in C^\alpha_{\text{loc}}\left(\bar{\Omega} \times [0, +\infty)\right), \ 0 < \alpha < 1, \ a(x, t) \geq 0, \ b(x, t) \geq 0;$$

$$k(x, y, t) \in C\left(\partial\Omega \times \bar{\Omega} \times [0, +\infty)\right), \ k(x, y, t) \geq 0;$$

$$u_0(x) \in C\left(\bar{\Omega}\right), \ u_0(x) \geq 0, \ x \in \bar{\Omega}, \ u_0(x) = \int_\Omega k(x, y, 0)u_0^l(y)dy, \ x \in \partial\Omega.$$

Начально-краевые задачи с нелокальностями в уравнении или граничном условии рассматривались в ряде работ [1–11]. В частности, в [1] доказан принцип сравнения для задачи (1)–(3) при $a(x, t) \equiv b(x, t) \equiv 0$, $k(x, y, t) = k(x, y)$, $l = 1$, с нелинейным членом $g(x, u)$ в уравнении. Задача (1)–(3) при $a(x, t) \equiv 0$ рассмотрена в [8], где доказаны существование локального решения, принцип сравнения решений и исследованы вопросы единственности и неединственности решений, а также в [6], где получены условия существования глобального решения и обращения решения в бесконечность в течение конечного времени. В [2] исследуются вопросы существования локального и глобального решений задачи (1)–(3) при $a(x, t) \equiv b(x, t) \equiv 0$, $k(x, y, t) = k(x, y)$, $l = 1$, с нелокальным членом $\int_\Omega g(u(y, t))dy$ в уравнении. В работе [3] получены условия существования и отсутствия глобальных положительных решений задачи (1)–(3) при $a(x, t) \equiv 1$, $r = 0$, $b(x, t) \equiv b$, $k(x, y, t) = k(x, y)$, $l = 1$. В [5] доказан принцип сравнения решений и определены условия существования и отсутствия глобальных положительных решений задачи (1)–(3) при $a(x, t) \equiv 1$, $r = 0$, $b(x, t) \equiv b$, $k(x, y, t) = k(x, y)$.

В настоящей работе для задачи (1)–(3) установлено существование локального решения и доказан принцип сравнения решений.

Локальное существование

Пусть $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$, $\Gamma_T = S_T \cup \overline{\Omega} \times \{0\}$, $T > 0$.

Определение 1. Назовем неотрицательную функцию $u(x, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(Q_T \cup \Gamma_T)$ верхним решением задачи (1)–(3) в Q_T, если

$$u_t \geq \Delta u + a(x, t)u^r \int_\Omega u^p(y, t)dy - b(x, t)u^q, \ (x, t) \in Q_T, \tag{4}$$

$$u(x, t) \geq \int_\Omega k(x, y, t)u^l(y, t)dy, \ (x, t) \in S_T, \tag{5}$$

$$u(x, 0) \geq u_0(x), \ x \in \Omega. \tag{6}$$

Неотрицательную функцию $u(x, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(Q_T \cup \Gamma_T)$ назовем нижним решением задачи (1)–(3) в Q_T, если неравенства (4)–(6) выполнены с противоположным знаком. Функцию $u(x, t)$ будем называть решением задачи (1)–(3) в Q_T, если $u(x, t)$ одновременно является верхним и нижним решениями задачи (1)–(3) в Q_T.

Определение 2. Назовем решение $u(x, t)$ задачи (1)–(3) в Q_T максимальным, если для любого другого решения $v(x, t)$ задачи (1)–(3) в Q_T выполнено неравенство $v(x, t) \leq u(x, t)$, $(x, t) \in Q_T$.

Пусть последовательность $\{\varepsilon_m\}$ такова, что $0 < \varepsilon_m < 1$ и $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$. При $\varepsilon = \varepsilon_m$, $m = 1, 2, \ldots$, введем в рассмотрение функции $u_{0\varepsilon}(x)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{gathered} u_{0\varepsilon}(x) \in C(\overline{\Omega}), \ u_{0\varepsilon}(x) \geq \varepsilon, \ u_{0\varepsilon_i}(x) \geq u_{0\varepsilon_j}(x) \text{ для } \varepsilon_i \geq \varepsilon_j, \\ u_{0\varepsilon}(x) \to u_0(x) \text{ при } \varepsilon \to 0, \\ u_{0\varepsilon}(x) = \int_\Omega k(x, y, 0)u_{0\varepsilon}^l(y)dy + \varepsilon, \ x \in \partial\Omega. \end{gathered} \tag{7}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + a(x, t)u^r \int_\Omega u^p(y, t)dy - b(x, t)u^q + b(x, t)\varepsilon^q, \ (x, t) \in Q_T, \\ u(x, t) = \int_\Omega k(x, y, t)u^l(y, t)dy + \varepsilon, \ (x, t) \in S_T, \\ u(x, 0) = u_{0\varepsilon}(x), \ x \in \Omega, \end{cases} \tag{8}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_m$. Понятия решения, верхнего и нижнего решений задачи (8) вводятся аналогично определению 1.

Теорема 1. *Для некоторого $T > 0$ задача (8) имеет единственное решение в Q_T.*

Доказательство. Построим верхнее решение задачи (8). Пусть $k = \sup_{\partial\Omega \times \Omega \times (0, T_1)} k(x, y, t)$ и $a = \sup_{Q_{T_1}} a(x, t)$ для некоторого $T_1 > 0$. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x)$, обладающую следующими свойствами:

$$\varphi(x) \in C^2(\overline{\Omega}),\ \inf_{\Omega} \varphi(x) \geq \max\left(\sup_{\Omega} u_{0\varepsilon}(x),\, 1\right),\ \inf_{\partial\Omega} \varphi(x) \geq k \max(1,\, \exp(l-1)) \int_{\Omega} \varphi^l(y)\,dy + 1.$$

Покажем, что функция $w(x,\, t) = \exp(\beta t)\varphi(x)$ является верхним решением задачи (8) в Q_T при подходящем выборе $\beta > 0$ и $T > 0$.

Действительно, в Q_T получим

$$w_t - \Delta w - a(x,\, t) w^r \int_{\Omega} w^p(y,\, t)\,dy + b(x,\, t) w^q - b(x,\, t)\varepsilon^q =$$

$$= \exp(\beta t)\left(\beta\varphi(x) - \Delta\varphi(x) - a(x,\, t)\exp\left[\beta(r+p-1)t\right]\varphi^r(x)\int_{\Omega}\varphi^p(y)\,dy\right) +$$

$$+ b(x,\, t)\left(\exp(\beta q t)\varphi^q(x) - \varepsilon^q\right) \geq 0$$

при выполнении следующих неравенств:

$$\beta \geq \sup_{\Omega} \Delta\varphi + a \max(1,\, \exp(r+p-1)) \sup_{\Omega} \varphi^r(x) \int_{\Omega} \varphi^p(y)\,dy,\ T \leq \min(1,\, 1/\beta,\, T_1).$$

На границе S_T имеем

$$w(x,\, t) - \int_{\Omega} k(x,\, y,\, t) w^l(y,\, t)\,dy - \varepsilon = \exp(\beta t)\varphi(x) - \int_{\Omega} k(x,\, y,\, t)\exp(\beta l t)\varphi^l(y)\,dy - \varepsilon \geq$$

$$\geq \exp(\beta t)\left(\varphi(x) - k\exp\left[\beta(l-1)t\right]\int_{\Omega}\varphi^l(y)\,dy\right) - \varepsilon \geq 0.$$

При $x \in \Omega$ выполнено

$$w(x,\, 0) - u_{0\varepsilon}(x) = \varphi(x) - u_{0\varepsilon}(x) \geq 0.$$

Для доказательства существования решения задачи (8) введем в рассмотрение множество

$$B = \left\{h(x,\, t) \in C\left(\overline{Q}_T\right) : \varepsilon \leq h(x,\, t) \leq w(x,\, t),\ h(x,\, 0) = u_{0\varepsilon}(x)\right\}$$

и задачу

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + a(x,\, t) u^r \int_{\Omega} \upsilon^p(y,\, t)\,dy - b(x,\, t) u^q + b(x,\, t)\varepsilon^q,\ (x,\, t) \in Q_T, \\ u(x,\, t) = \int_{\Omega} k(x,\, y,\, t)\,\upsilon^l(y,\, t)\,dy + \varepsilon,\ (x,\, t) \in S_T, \\ u(x,\, 0) = u_{0\varepsilon}(x),\ x \in \Omega, \end{cases} \tag{9}$$

где $\upsilon \in B$. Понятия решения, нижнего и верхнего решений задачи (9) вводятся аналогично определению 1.

Покажем, что множество B выпукло. Действительно, пусть $h_1,\, h_2 \in B$, тогда $\varepsilon \leq \theta h_1 + (1-\theta)h_2 \leq w$ для $\theta \in [0,\, 1]$. Отметим, что для некоторого T задача (9) имеет решение $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ [12]. Пусть A – отображение, сопоставляющее каждой функции $\upsilon \in B$ решение задачи (9), т. е. $A(\upsilon) = u$. Убедимся в том, что A – непрерывное отображение множества B в себя. Несложно показать, что $\underline{u}(x,\, t) = \varepsilon$ и $\overline{u}(x,\, t) = w(x,\, t)$ являются нижним и верхним решениями задачи (9) соответственно. По принципу сравнения для задачи (9) A отображает множество B в себя.

Пусть $G(x,\, y;\, t-\tau)$ есть функция Грина для уравнения теплопроводности с однородным граничным условием Дирихле. В [13; 14] доказаны следующие свойства функции Грина:

$$G(x, y; t-\tau) \geq 0,\ x, y \in \Omega,\ 0 \leq \tau < t,$$
$$\frac{\partial G(x, y; t-\tau)}{\partial n} \leq 0,\ G(x, y; t-\tau) = 0,\ x \in \Omega,\ y \in \partial\Omega,\ 0 \leq \tau < t, \tag{10}$$
$$\int_{\Omega} G(x, y; t-\tau)\,dy \leq 1,\ x \in \Omega,\ 0 \leq \tau < t,$$

где $\vec{n}$ – единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Несложно показать, что

$$\int_{\Omega} G(x, y; t)\,dy - \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, \xi; t-\tau)}{\partial n}\,dS_\xi\,d\tau = 1,\ (x, t) \in Q_T. \tag{11}$$

Как известно, функция $u(x, t)$ является решением задачи (9) тогда и только тогда, когда $u(x, t)$ удовлетворяет в Q_T уравнению

$$u(x, t) = \int_{\Omega} G(x, y; t)\,u_{0\varepsilon}(y)\,dy +$$
$$+\int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t-\tau)\left(a(y, \tau)u^r(y, \tau)\int_{\Omega} \upsilon^p(\eta, \tau)\,d\eta + b(y, \tau)\left(\varepsilon^q - u^q(y, \tau)\right)\right)dy\,d\tau -$$
$$-\int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, \xi; t-\tau)}{\partial n}\left(\int_{\Omega} k(\xi, y, \tau)\,\upsilon^l(y, \tau)\,dy + \varepsilon\right)dS_\xi\,d\tau. \tag{12}$$

Покажем, что отображение A непрерывно на множестве B. Действительно, пусть u_1 и u_2 – решения задачи (9) в Q_T с $\upsilon = \upsilon_1$ и $\upsilon = \upsilon_2$ соответственно, где $\upsilon_i \in B$, $i = 1, 2$. Используя (10) и (12), получим

$$|u_1 - u_2| = \left| \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t-\tau)\left\{ a(y, \tau)\left[u_1^r(y, \tau)\int_{\Omega}\left(\upsilon_1^p(\eta, \tau) - \upsilon_2^p(\eta, \tau)\right)d\eta + \right.\right.\right.$$
$$\left.+ \left(u_1^r(y, \tau) - u_2^r(y, \tau)\right)\int_{\Omega} \upsilon_2^p(\eta, \tau)\,d\eta \right] - b(y, \tau)\left(u_1^q(y, \tau) - u_2^q(y, \tau)\right)\Big\}\,dy\,d\tau -$$
$$\left. - \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, \xi; t-\tau)}{\partial n}\int_{\Omega} k(\xi, y, \tau)\left(\upsilon_1^l(y, \tau) - \upsilon_2^l(y, \tau)\right)dy\,dS_\xi\,d\tau \right| \leq$$
$$\leq |\Omega| \sup_{Q_T}\left|\upsilon_1^p - \upsilon_2^p\right| \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t-\tau)\,a(y, \tau)\,u_1^r(y, \tau)\,dy\,d\tau +$$
$$+ \theta \sup_{Q_T}|u_1 - u_2| \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t-\tau)\,dy\,d\tau -$$
$$- \sup_{Q_T}\left|\upsilon_1^l - \upsilon_2^l\right| \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, \xi; t-\tau)}{\partial n}\int_{\Omega} k(\xi, y, \tau)\,dy\,dS_\xi\,d\tau,$$

где

$$\theta = r|\Omega| \sup_{Q_T} a(x, t) \max\left(\varepsilon^{r-1},\ \sup_{Q_T} w^{r-1}(x, t)\right) \sup_{Q_T} w^p(x, t) + q \sup_{Q_T} b(x, t) \max\left(\varepsilon^{q-1},\ \sup_{Q_T} w^{q-1}(x, t)\right).$$

Вследствие (10) можно выбрать постоянную T таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\theta \sup_{Q_T} \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t-\tau)\,dy\,d\tau < \frac{1}{2}.$$

Тогда, принимая во внимание неравенство

$$\sup_{Q_T}|u_1-u_2|\le 2\left\{p|\Omega|\max\left(\varepsilon^{p-1},\ \sup_{Q_T}w^{p-1}(x,t)\right)\sup_{Q_T}\int_0^t\int_\Omega G(x,y;t-\tau)a(y,\tau)w^r(y,\tau)dy\,d\tau+\right.$$
$$\left.+\,l\max\left(\varepsilon^{l-1},\ \sup_{Q_T}w^{l-1}(x,t)\right)\sup_{Q_T}\int_0^t\int_{\partial\Omega}\left(-\frac{\partial G(x,\xi;t-\tau)}{\partial n}\right)\int_\Omega k(\xi,y,\tau)dy\,dS_\xi\,d\tau\right\}\sup_{Q_T}|\upsilon_1-\upsilon_2|$$

и свойства (10), (11), получим непрерывность отображения A на множестве B. Из предыдущих рассуждений также следует, что множество функций AB равномерно ограничено. В силу (12) и свойств функции Грина [14] множество AB равностепенно непрерывно. Тогда по теореме Арцела – Асколи множество AB относительно компактно в $C(\overline{Q}_T)$.

Применяя теорему Шаудера, получим существование неподвижной точки u_ε отображения A в B такой, что u_ε является решением задачи (8). Единственность решения задачи (8) следует из принципа сравнения, который может быть доказан аналогично тому, как это будет сделано в разделе «Принцип сравнения» для задачи (1)–(3). Теорема доказана.

Теорема 2. *Для некоторого $T>0$ задача (1)–(3) имеет максимальное решение в Q_T.*

Доказательство. Пусть u_ε – решение задачи (8). Тогда u_ε удовлетворяет в Q_T уравнению

$$u_\varepsilon(x,t)=\int_\Omega G(x,y;t)\,u_{0\varepsilon}(y)dy+$$
$$+\int_0^t\int_\Omega G(x,y;t-\tau)\left(a(y,\tau)u_\varepsilon^r(y,\tau)\int_\Omega u_\varepsilon^p(\eta,\tau)d\eta+b(y,\tau)\left(\varepsilon^q-u_\varepsilon^q(y,\tau)\right)\right)dy\,d\tau-$$
$$-\int_0^t\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(x,\xi;t-\tau)}{\partial n}\left(\int_\Omega k(\xi,y,\tau)u_\varepsilon^l(y,\tau)dy+\varepsilon\right)dS_\xi\,d\tau. \tag{13}$$

Применяя принцип сравнения для решений задачи (8) при $\varepsilon_1\le\varepsilon_2$, получим $u_{\varepsilon_1}\le u_{\varepsilon_2}$. Согласно теореме Дини для некоторого $T>0$ последовательность $\{u_\varepsilon(x,t)\}$ сходится равномерно в $\overline{Q}_T$ при $\varepsilon\to0$ к некоторой функции $u_m(x,t)$. Переходя к пределу при $\varepsilon\to0$ в (13) и используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, приходим к выводу о том, что функция $u_m(x,t)$ удовлетворяет в Q_T уравнению

$$u_m(x,t)=\int_\Omega G(x,y;t)\,u_0(y)dy+$$
$$+\int_0^t\int_\Omega G(x,y;t-\tau)\left(a(y,\tau)u_m^r(y,\tau)\int_\Omega u_m^p(\eta,\tau)d\eta-b(y,\tau)u_m^q(y,\tau)\right)dy\,d\tau-$$
$$-\int_0^t\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(x,\xi;t-\tau)}{\partial n}\int_\Omega k(\xi,y,\tau)u_m^l(y,\tau)dy\,dS_\xi\,d\tau.$$

Следовательно, $u_m(x,t)$ есть решение задачи (1)–(3) в Q_T. Несложно показать, что $u_m(x,t)$ является максимальным решением задачи (1)–(3) в Q_T. Теорема доказана.

Принцип сравнения

Теорема 3. *Пусть $\underline{u}(x,t)$ и $\overline{u}(x,t)$ – нижнее и верхнее решения задачи (1)–(3) в Q_T соответственно. Кроме того, если $\min(r,p,l)<1$, то предположим, что $\underline{u}(x,t)>0$ или $\overline{u}(x,t)>0$ при $(x,t)\in Q_T\cup\Gamma_T$. Тогда $\overline{u}(x,t)\ge\underline{u}(x,t)$ при $(x,t)\in Q_T\cup\Gamma_T$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\min(r,p,l)\ge1$. Пусть $u_{0\varepsilon}(x)$ удовлетворяет условиям (7), но только $u_{0\varepsilon}(x)\to\underline{u}(x,0)$ при $\varepsilon\to0$. Построим максимальное решение $\underline{u}_m(x,t)$ задачи (1)–(3) с начальным условием $u_0(x)=\underline{u}(x,0)$ следующим образом:

$$\underline{u}_m(x,\,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon(x,\,t),$$

где $u_\varepsilon(x,\,t)$ – решение задачи (8).

Покажем, что имеют место следующие соотношения:

$$\underline{u}(x,\,t)\le \underline{u}_m(x,\,t)\le \overline{u}(x,\,t),\ \ (x,\,t)\in Q_T\cup\Gamma_T. \tag{14}$$

Докажем второе неравенство в (14), первое доказывается аналогично.

Пусть для $t\in(0,\,T)$ неотрицательная функция $\varphi(x,\,\tau)\in C^{2,1}(\overline{Q}_t)$ и удовлетворяет однородному граничному условию Дирихле. Умножим первое уравнение (8) на φ и проинтегрируем по области Q_t:

$$\int_0^t\int_\Omega u_{\varepsilon\tau}(x,\,\tau)\varphi(x,\,\tau)\,dx\,d\tau=$$

$$=\int_0^t\int_\Omega\left(\Delta u_\varepsilon(x,\,\tau)+a(x,\,\tau)u_\varepsilon^r(x,\,\tau)\int_\Omega u_\varepsilon^p(y,\,\tau)\,dy+b(x,\,\tau)\left(\varepsilon^q-u_\varepsilon^q(x,\,\tau)\right)\right)\varphi(x,\,\tau)\,dx\,d\tau.$$

Применяя формулу Грина и формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x,\,t)\varphi(x,\,t)\,dx\le\int_\Omega u_\varepsilon(x,\,0)\varphi(x,\,0)\,dx+\varepsilon^q\int_0^t\int_\Omega b(x,\,\tau)\varphi(x,\,\tau)\,dx\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_\Omega u_\varepsilon(x,\,\tau)\left(\varphi_\tau(x,\,\tau)+\Delta\varphi(x,\,\tau)\right)dx\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_\Omega\left(a(x,\,\tau)u_\varepsilon^r(x,\,\tau)\int_\Omega u_\varepsilon^p(y,\,\tau)\,dy-b(x,\,\tau)u_\varepsilon^q(x,\,\tau)\right)\varphi(x,\,\tau)\,dx\,d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\varphi(x,\,\tau)}{\partial n}\left(\int_\Omega k(x,\,y,\,\tau)u_\varepsilon^l(y,\,\tau)\,dy+\varepsilon\right)dS_x\,d\tau. \tag{15}$$

С другой стороны, верхнее решение $\overline{u}(x,\,t)$ удовлетворяет неравенству (15) с противоположным знаком и $\varepsilon=0$. Пусть $w(x,\,t)=u_\varepsilon(x,\,t)-\overline{u}(x,\,t)$. Используя теорему Лагранжа, имеем

$$\int_\Omega w(x,\,t)\varphi(x,\,t)\,dx\le\int_\Omega w(x,\,0)\varphi(x,\,0)\,dx+\varepsilon^q\int_0^t\int_\Omega b(x,\,\tau)\varphi(x,\,\tau)\,dx\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_\Omega w(x,\,\tau)\left(\varphi_\tau(x,\,\tau)+\Delta\varphi(x,\,\tau)-qb(x,\,\tau)\theta_1^{q-1}(x,\,\tau)\varphi(x,\,\tau)\right)dx\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_\Omega a(x,\,\tau)\overline{u}^r(x,\,\tau)\varphi(x,\,\tau)\int_\Omega p\theta_2^{p-1}(y,\,\tau)w(y,\,\tau)\,dy\,dx\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_\Omega a(x,\,\tau)r\theta_3^{r-1}(x,\,\tau)w(x,\,\tau)\varphi(x,\,\tau)\int_\Omega u_\varepsilon^p(y,\,\tau)\,dy\,dx\,d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\varphi(x,\,\tau)}{\partial n}\left(\int_\Omega k(x,\,y,\,\tau)l\theta_4^{l-1}(y,\,\tau)w(y,\,\tau)\,dy+\varepsilon\right)dS_x\,d\tau, \tag{16}$$

где $\theta_i(x,\,\tau)\,(i=1,\,2,\,3,\,4)$ – положительные непрерывные, а следовательно, и ограниченные в $\overline{Q}_t$ функции, причем

$$\sup_{Q_t}\left(\theta_2^{p-1}(x,\,\tau)+\theta_3^{r-1}(x,\,\tau)+\theta_4^{l-1}(x,\,\tau)\right)\le\theta,$$

где положительная постоянная θ не зависит от ε.

Отметим, что справедливы неравенства:

$$0 \le a(x, t) \le M, \ 0 \le b(x, t) \le M, \ (x, t) \in \bar{Q}_T,$$
$$0 \le k(x, y, t) \le M, \ (x, y, t) \in \partial\Omega \times \bar{\Omega} \times [0, T],$$

где M – некоторая положительная постоянная.

Определим последовательность $\gamma_k(x, \tau), \ k = 1, 2, \ldots$, следующим образом: $\gamma_k(x, \tau) \in C^{\infty}(\bar{Q}_t)$, $\gamma_k \ge 0$ и $\gamma_k \to qb(x, \tau)\theta_1^{q-1}(x, \tau)$ при $k \to \infty$ в $L^1(Q_t)$. Рассмотрим в Q_t задачу

$$\begin{cases} \varphi_\tau + \Delta\varphi - \gamma_k\varphi = 0, \ (x, \tau) \in Q_t, \\ \varphi(x, \tau) = 0, \ (x, \tau) \in S_t, \\ \varphi(x, t) = \psi(x), \ x \in \Omega, \end{cases} \tag{17}$$

где $\psi(x) \in C_0^{\infty}(\Omega)$ и $0 \le \psi(x) \le 1$. Обозначим решение задачи (17) через $\varphi_k(x, \tau)$. Отметим, что $\varphi_k(x, \tau) \in C^{2,1}(\bar{Q}_t)$ и в силу принципа максимума $0 \le \varphi_k(x, \tau) \le 1$ в $\bar{Q}_t$. Поскольку $\gamma_k \ge 0$, то легко показать, что $-N \le \dfrac{\partial\varphi_k(x, \tau)}{\partial n} \le 0$ на S_t, где N – некоторая положительная постоянная, не зависящая от k и ε. Положим $\varphi = \varphi_k$ в (16) и перейдем к пределу при $k \to \infty$:

$$\int_\Omega w(x, t)\psi(x)dx \le \int_\Omega w_+(x, 0)dx + \varepsilon^q MT|\Omega| + \varepsilon NT|\partial\Omega| + m(t)\int_0^t\int_\Omega w_+(x, \tau)dx\,d\tau, \tag{18}$$

где $w_+ = \max(w, 0)$, $|\partial\Omega|$ и $|\Omega|$ – меры Лебега $\partial\Omega$ в $\mathbb{R}^{n-1}$ и Ω в $\mathbb{R}^n$ соответственно;

$$m(t) = M|\Omega|\theta\left(p\sup_{Q_t}\bar{u}^r(x, \tau) + r\sup_{Q_t}u_\varepsilon^p(x, \tau)\right) + lMN\theta|\partial\Omega|.$$

Отметим, что $m(t) \le m(T_0)$ при $t \in (0, T_0]$ для любого $T_0 \in (0, T)$ и $w(x, 0) \le 0$ для $x \in \Omega$.

Выберем последовательность $\psi_k(x) \in C_0^{\infty}(\Omega)$, $0 \le \psi_k(x) \le 1$, сходящуюся в $L^1(\Omega)$ к функции

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } w(x, t) > 0, \\ 0, \text{ если } w(x, t) \le 0. \end{cases}$$

Подставляя $\psi_k(x)$ вместо $\psi(x)$ в (18) и переходя к пределу при $k \to \infty$, получим

$$\int_\Omega w_+(x, t)dx \le \varepsilon^q MT|\Omega| + \varepsilon NT|\partial\Omega| + m(T_0)\int_0^t\int_\Omega w_+(x, \tau)dx\,d\tau, \ t \in (0, T_0].$$

Применяя лемму Гронуолла, имеем

$$\int_\Omega w_+(x, t)dx \le \left(\varepsilon^q MT|\Omega| + \varepsilon NT|\partial\Omega|\right)\exp\left[m(T_0)t\right], \ t \in (0, T_0].$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим $w(x, t) \le 0$ в $\bar{Q}_{T_0}$. В силу произвольности T_0 имеем $w(x, t) \le 0$ в $Q_T \cup \Gamma_T$. Для случая $\min(r, p, l) < 1$ можно рассмотреть разность $w = \underline{u} - \bar{u}$ и, проводя аналогичные рассуждения с использованием положительности $\underline{u}$ или $\bar{u}$, доказать утверждение теоремы. Теорема доказана.

Предположим, что выполнены следующие условия:

$$k(x, \cdot, t) \not\equiv 0 \text{ для любых } x \in \partial\Omega \text{ и } t \in (0, T), \tag{19}$$

$$a(x, t) > 0 \text{ при } x \in \bar{\Omega} \text{ и } t \in [0, T). \tag{20}$$

Лемма 1. *Пусть* $u_0(x)$ *– нетривиальная функция в* Ω*, выполнено (19) и одно из следующих условий:* $q \geq 1$*, или* $b(x, t) \equiv 0$ *в* Q_T*, или* $l < 1$, $r + p < q < 1$ *и справедливо (20). Предположим, что* $u(x, t)$ *– решение задачи (1)–(3) в* Q_T*. Тогда* $u(x, t) > 0$ *в* $Q_T \cup S_T$*.*

Доказательство. Пусть $q \geq 1$ или $b(x, t) \equiv 0$ в Q_T. Обозначим

$$M = \max\left(\sup_{Q_{T_0}} u(x, t), \sup_{Q_{T_0}} b(x, t)\right),$$

где $T_0 \in (0, T)$; M – некоторая положительная постоянная. Положим $v = u\exp(\lambda t)$, где $\lambda \geq M^q$. Отметим, что в Q_{T_0} выполнено

$$v_t - \Delta v = \exp(\lambda t)(\lambda u + u_t - \Delta u) \geq u\exp(\lambda t)\left(\lambda - b(x, t)u^{q-1}\right) \geq 0.$$

Поскольку $v(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$, и $u_0(x)$ – нетривиальная неотрицательная функция в Ω, то согласно сильному принципу максимума $v(x, t) > 0$ в Q_{T_0}. Следовательно, $u(x, t) > 0$ в Q_{T_0}. Из (2) и (19) получим $u(x, t) > 0$ на S_{T_0}. В силу произвольности T_0 имеем $u(x, t) > 0$ в $Q_T \cup S_T$.

Пусть $l < 1$, $r + p < q < 1$ и выполнено условие (20). Положим

$$a_\tau = \inf_{Q_\tau} a(x, t),\; b_\tau = \sup_{Q_\tau} b(x, t)$$

для некоторого $\tau \in (0, T)$. Через Ω' обозначим множество всех точек $\bar{\Omega}$, для которых выполнено неравенство

$$u_0(x) < \left\{\frac{a_\tau}{2b_\tau}\int_\Omega u_0^p(y)dy\right\}^{\frac{1}{q-r}}.$$

Тогда для некоторого $\sigma \in (0, \tau)$ справедливо неравенство

$$a(x, t)u^r\int_\Omega u^p(y, t)dy - b(x, t)u^q \geq 0 \text{ для } x \in \bar{\Omega}' \text{ и } t \in [0, \sigma]. \tag{21}$$

Пусть Ω'' – область в Ω' такая, что $u_0(x) \not\equiv 0$ в Ω''. Из (1) и (21) следует

$$u_t - \Delta u \geq 0 \text{ для } x \in \Omega'' \text{ и } t \in (0, \sigma).$$

Вследствие сильного принципа максимума $u(x, t) > 0$ для $x \in \Omega''$ и $t \in (0, \sigma]$. Отметим, что последнее неравенство выполняется для $x \in \Omega' \setminus \partial\Omega$ и $t \in (0, \sigma]$.

Для точек $x \in \overline{\bar{\Omega} \setminus \Omega'}$ справедливо

$$u_0(x) \geq \left\{\frac{a_\tau}{2b_\tau}\int_\Omega u_0^p(y)dy\right\}^{\frac{1}{q-r}}.$$

Тогда существует постоянная $\delta \in (0, T)$ такая, что $u(x, t) > 0$ для $x \in \overline{\bar{\Omega} \setminus \Omega'}$ и $t \in [0, \delta]$. Следовательно, $u(x, t) > 0$ для $x \in \Omega$ и $t \in (0, t_1]$, где $t_1 \leq \min(\sigma, \delta)$. В силу (19) получим $u(x, t) > 0$ для $x \in \bar{\Omega}$ и $t \in (0, t_1]$. Пусть $\bar{t} \in (0, t_1)$. Легко видеть, что при достаточно малом ε нижним решением задачи (1)–(3) с начальными данными при $t = \bar{t}$ выступает функция $\underline{u}(x, t) \equiv \varepsilon$. Лемма доказана.

Простым следствием теоремы 3 и леммы 1 является следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполнено одно из условий:*

1) $\min(r, p, l) \geq 1$*;*

2) $\min(r, p, l) < 1$*, справедливо (19),* $u_0(x) > 0$ *в* $\bar{\Omega}$ *и или* $q \geq 1$*, или* $b(x, t) \equiv 0$ *в* Q_T*, или* $l < 1$*,* $r + p < q < 1$*, верно (20);*

3) существует положительное в $Q_T \cup \Gamma_T$ *решение задачи (1)–(3).*

Тогда решение задачи (1)–(3) единственно в Q_T*.*

Библиографические ссылки

1. *Deng K.* Comparison principle for some nonlocal problems // Quart. Appl. Math. 1992. Vol. 50, issue 3. P. 517–522. DOI: 10.1090/qam/1178431.

2. *Lin Z., Liu Y.* Uniform blowup profiles for diffusion equations with nonlocal source and nonlocal boundary // Acta Math. Sci. 2004. Vol. 24, issue 3. P. 443–450. DOI: 10.1016/S0252-9602(17)30168-6.

3. *Wang Y., Mu C., Xiang Z.* Properties of positive solution for nonlocal reaction-diffusion equation with nonlocal boundary // Bound. Value Probl. 2007. Vol. 2007. P. 1–12. Article ID: 064579. DOI: 10.1155/2007/64579.

4. *Cui Z., Yang Z.* Roles of weight functions to a nonlinear porous medium equation with nonlocal source and nonlocal boundary condition // J. Math. Anal. Appl. 2008. Vol. 342, issue 1. P. 559–570. DOI: 10.1016/j.jmaa.2007.11.055.

5. *Mu C., Liu D., Zhou S.* Properties of positive solutions for a nonlocal reaction-diffusion equation with nonlocal nonlinear boundary condition // J. Korean Math. Soc. 2010. Vol. 47, № 6. P. 1317–1328. DOI: 10.4134/JKMS.2010.47.6.1317.

6. *Gladkov A., Guedda M.* Blow-up problem for semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition // Nonlinear Anal. 2011. Vol. 74, № 13. P. 4573–4580. DOI: 10.1016/j.na.2011.04.027.

7. *Zhong G., Tian L.* Blow up problems for a degenerate parabolic equation with nonlocal source and nonlocal nonlinear boundary condition // Bound. Value Probl. 2012. Vol. 2012. P. 1–14. DOI: 10.1186/1687-2770-2012-45.

8. *Gladkov A., Guedda M.* Semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition // Appl. Anal. 2012. Vol. 91, issue 12. P. 2267–2276. DOI: 10.1080/00036811.2011.601297.

9. *Fang Z. B., Zhang J., Yi S.-C.* Roles of weight functions to a nonlocal porous medium equation with inner absorption and nonlocal boundary condition // Abstr. Appl. Anal. 2012. Vol. 2012. P. 1–16. DOI: 10.1155/2012/326527.

10. *Fang Z. B., Zhang J.* Influence of weight functions to a nonlocal *p*-Laplacian evolution equation with inner absorption and nonlocal boundary condition // J. Inequal. Appl. 2013. Vol. 2013. P. 1–10.

11. *Fang Z. B., Zhang J.* Global and blow-up solutions for the nonlocal *p*-Laplacian evolution equation with weighted nonlinear nonlocal boundary condition // J. Integral Equ. Appl. 2014. Vol. 26, № 2. P. 171–196. DOI: 10.1216/JIE-2014-26-2-171.

12. *Pao C. V.* Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York : Plenum Press, 1992.

13. *Kahane C. S.* On the asymptotic behavior of solutions of parabolic equations // Czechoslovak Math. J. 1983. Vol. 33, issue 2, № 108. P. 262–285.

14. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М. : Наука, 1967.

References

1. Deng K. Comparison principle for some nonlocal problems. *Quart. Appl. Math.* 1992. Vol. 50, issue 3. P. 517–522. DOI: 10.1090/qam/1178431.

2. Lin Z., Liu Y. Uniform blowup profiles for diffusion equations with nonlocal source and nonlocal boundary. *Acta Math. Sci.* 2004. Vol. 24, issue 3. P. 443–450. DOI: 10.1016/S0252-9602(17)30168-6.

3. Wang Y., Mu C., Xiang Z. Properties of positive solution for nonlocal reaction-diffusion equation with nonlocal boundary. *Bound. Value Probl.* 2007. Vol. 2007. P. 1–12. Article ID: 064579. DOI: 10.1155/2007/64579.

4. Cui Z., Yang Z. Roles of weight functions to a nonlinear porous medium equation with nonlocal source and nonlocal boundary condition. *J. Math. Anal. Appl.* 2008. Vol. 342, issue 1. P. 559–570. DOI: 10.1016/j.jmaa.2007.11.055.

5. Mu C., Liu D., Zhou S. Properties of positive solutions for a nonlocal reaction-diffusion equation with nonlocal nonlinear boundary condition. *J. Korean Math. Soc.* 2010. Vol. 47, No. 6. P. 1317–1328. DOI: 10.4134/JKMS.2010.47.6.1317.

6. Gladkov A., Guedda M. Blow-up problem for semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition. *Nonlinear Anal.* 2011. Vol. 74, No. 13. P. 4573–4580. DOI: 10.1016/j.na.2011.04.027.

7. Zhong G., Tian L. Blow up problems for a degenerate parabolic equation with nonlocal source and nonlocal nonlinear boundary condition. *Bound. Value Probl.* 2012. Vol. 2012. P. 1–14. DOI: 10.1186/1687-2770-2012-45.

8. Gladkov A., Guedda M. Semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition. *Appl. Anal.* 2012. Vol. 91, issue 12. P. 2267–2276. DOI: 10.1080/00036811.2011.601297.

9. Fang Z. B., Zhang J., Yi S.-C. Roles of weight functions to a nonlocal porous medium equation with inner absorption and nonlocal boundary condition. *Abstr. Appl. Anal.* 2012. Vol. 2012. P. 1–16. DOI: 10.1155/2012/326527.

10. Fang Z. B., Zhang J. Influence of weight functions to a nonlocal *p*-Laplacian evolution equation with inner absorption and nonlocal boundary condition. *J. Inequal. Appl.* 2013. Vol. 2013. P. 1–10.

11. Fang Z. B., Zhang J. Global and blow-up solutions for the nonlocal *p*-Laplacian evolution equation with weighted nonlinear nonlocal boundary condition. *J. Integral Equ. Appl.* 2014. Vol. 26, No. 2. P. 171–196. DOI: 10.1216/JIE-2014-26-2-171.

12. Pao C. V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York : Plenum Press, 1992.

13. Kahane C. S. On the asymptotic behavior of solutions of parabolic equations. *Czechoslovak Math. J.* 1983. Vol. 33, issue 2, No. 108. P. 262–285.

14. Ladyzhenskaja O. A., Solonnikov V. A., Ural’ceva N. N. Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa [Linear and quasilinear equations of parabolic type]. Moscow : Nauka, 1967 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 27.10.2017.
Received by editorial board 27.10.2017.