
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

THEORY OF PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

УДК 519.21

О ГИБРИДНОЙ МОДЕЛИ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

Д. А. ПАВЛИВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Исследованы свойства так называемых гибридных моделей, в которых различные компоненты многомерного вектора состояния рынка описываются как аффинными, так и неаффинными моделями. Такие модели позволяют объединить в себе сильные стороны каждого из классов. На примере гибридной модели *квадратичная – Даффи – Кана* рассмотрены различные свойства основных функций временной структуры доходности – форвардной кривой и кривой доходности. Найдены условия для параметров модели, обеспечивающие возрастающий (убывающий) характер поведения кривых. Определена ширина полос, характеризующая гибкость модели при оценке параметров по реальным данным. Показано, что расширение аффинных моделей до гибридных путем добавления неаффинных составляющих не приводит к существенному усложнению анализа и в то же время повышает гибкость модели.

Ключевые слова: кривая доходности; форвардная кривая; гибридная модель; квадратичная модель; модель Даффи – Кана.

Образец цитирования:

Павлив Д. А. О гибридной модели временной структуры процентных ставок // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 39–47.

For citation:

Pauliu D. A. Hybrid term structure models. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2018. No. 1. P. 39–47 (in Russ.).

Автор:

Дмитрий Александрович Павлив – аспирант кафедры теории вероятности и математической статистики факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Г. А. Медведев.

Author:

Dzmitry A. Pauliu, postgraduate student at the department of probability theory and mathematical statistics, faculty of applied mathematics and computer science.
375293325768@yandex.ru

HYBRID TERM STRUCTURE MODELS

D. A. PAULIU^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

In this paper, we study the properties of so-called hybrid models in which the various components of a multi-dimensional vector describing the state of the market, are both affine and non-affine models. Such models allows to combine the strengths of both affine and non-affine models. Using example of a hybrid model *quadratic – Duffy – Kan* the different properties were found for the main functions of the term structure – the forward rate and the yield curve. We found conditions on the parameters of the model, when curves are increases (decreases). Width of the bands characterizing the flexibility of the model fitting to the real data was studied. As a result, it is shown that expanding affine models to hybrid models by adding non-affine factors does not add additional complexity to analysis, but increases flexibility of the model.

Key words: yield curve; forward rate; hybrid model; quadratic model; Duffy – Kan model.

В последнее время в противовес простым, аффинным моделям, например [1], появляются более сложные, неаффинные модели [2], которые, как предполагается, должны лучше описывать реальные процессы финансового рынка. Проблема неаффинных моделей заключается в их аналитической сложности даже для одномерного случая, в то время как реальные данные предполагают многомерность модели. В работе [3] исследуется возможность построения так называемых гибридных моделей, когда некоторые переменные состояния рынка описываются аффинными моделями, тогда как другие – неаффинными. Такие модели позволяют объединить преимущества каждого из классов моделей: так, аффинная составляющая может лучше описывать долгосрочное поведение процессов, в то время как неаффинная часть за счет своей нелинейности позволяет более точно описать динамику краткосрочной и среднесрочной доходности. В [3] проведен сравнительный анализ структуры волатильности процессов, получаемых с помощью простых и гибридных моделей, и показано, что гибридные модели являются более предпочтительными. В настоящей работе на основе подхода, предложенного в [3], построена гибридная модель, а также изучены ее свойства функций временной структуры доходности. В результате показано, что расширение аффинных моделей до гибридных путем добавления неаффинных составляющих не приводит к существенному усложнению анализа и в то же время повышает гибкость модели.

Одной из наиболее популярных аффинных моделей является модель Даффи – Кана, в рамках которой процесс состояния рынка $X_A(t)$ описывается диффузионным уравнением

$$dX_A(t) = k_A(\theta_A - X_A)dt + \sqrt{2k_A D_A \frac{X_A - x_A}{\theta_A - x_A}} dW_A(t), X_A(0) > x_A,$$

где k_A – параметр, определяющий коэффициент автокорреляции процесса $X_A(t)$; θ_A – стационарное среднее данного процесса; D_A – стационарная дисперсия; x_A – параметр, имеющий смысл нижней границы процесса $X_A(t)$; $W_A(t)$ – стандартный винеровский процесс. В качестве компонент вектора $X_A(t)$ могут выступать различные финансовые процессы, такие как краткосрочная, среднесрочная, долгосрочная процентные ставки, доходности биржевых индексов, долговые обязательства и т. п. Свойства данной модели детально изучены в литературе [1]. Для одномерного случая модели Даффи – Кана чаще всего предполагают, что процесс состояния рынка $X_A(t)$ совпадает с процессом краткосрочной процентной ставки $r(t)$.

Простота аффинных моделей позволяет детально исследовать различные характеристики финансового рынка, например временную структуру доходности, что является их преимуществом. Однако получаемые результаты оказываются далеки от реальных данных. В связи с этим в ходе своего развития аффинный класс моделей был расширен до неаффинного, популярность которого существенно возросла в последние годы. Одной из моделей неаффинного класса является квадратичная модель [2], в которой состояние рынка описывается вектором латентных переменных $X_Q(t)$

$$dX_Q(t) = \mu(X_Q(t))dt + \sigma(X_Q(t))dW_Q(t), t > t_0, X_Q(t_0) = x_Q \in \mathbb{R}^n$$

с функциями дрейфа $\mu(X_Q)$ и волатильности $\sigma(X_Q)$. Процентная ставка в такой модели определяется как $r(t) = r_{\min} + X_Q^T(t)\Phi X_Q(t)$, где r_{\min} – нижняя граница значений процентной ставки; Φ – диагональная n -мерная матрица [2]. Очевидно, что такая модель, в силу своей нелинейности, является более сложной для аналитического исследования.

В [3] рассматривается возможность использования так называемых гибридных моделей, когда некоторые компоненты вектора рыночного состояния $X(t)$ описываются, например, аффинной моделью $X_A(t)$, а другие – квадратичной $X_Q(t)$. Такие модели позволяют расширить возможности аффинного класса путем добавления неаффинных свойств, при этом, как будет показано далее, не приводящего к значительному усложнению анализа.

Будем предполагать независимость компонент одного класса от другого. В данном случае значение процентной ставки определяется как

$$\begin{aligned} r(t) &= \alpha + 1^T X_A(t) + X_Q^T(t)\Phi X_Q(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \\ X_A(t) &\in \mathbb{R}^m, \quad X_Q(t) \in \mathbb{R}^n, \quad \Phi = \text{diag}\{\varphi_{Q,j}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \end{aligned} \quad (1)$$

Далее, будем использовать следующее обозначение гибридных моделей: $A(n)Q(m)$, где $A(n)$ описывает n -мерную модель Даффи – Кана; $Q(m)$ – m -мерная квадратичная модель. При этом все параметры и функции, относящиеся к классу $A(n)$, будут указываться с нижним индексом A и аналогично: относящиеся к классу $Q(m)$ – с нижним индексом Q .

Чаще всего для исследования временной структуры доходности процентных ставок используют кривую доходности $y(\tau, X)$ и форвардную кривую $f(\tau, X)$. Заметим, что для рассматриваемых гибридных моделей в силу предположения межклассовой независимости компонент вектора состояния рынка имеют место следующие равенства:

$$y(\tau, X) = y_A(\tau, X_A) + y_Q(\tau, X_Q), \quad f(\tau, X) = f_A(\tau, X_A) + f_Q(\tau, X_Q). \quad (2)$$

Будем рассматривать n -мерную модель Даффи – Кана $A(n)$ в условиях следящего предположения.

Предположение 1. Компоненты n -мерного вектора состояния X_A являются независимыми.

В силу предположения 1 многомерная модель Даффи – Кана, по сути, распадается на n независимых подмоделей $A(1)$, детально исследованных в литературе, например в [1], откуда, в частности, известны следующие соотношения:

$$y_A(\tau, X_A) = \sum_{i=1}^n \left(x_{A,i} + (\theta_{A,i} - x_{A,i}) \left(\frac{B_{A,i}(\tau) X_{A,i} - x_{A,i}}{\tau} + \frac{k_{A,i}}{V_{A,i}} \left(1 - \frac{\ln(1 + v_{A,i}) B_{A,i}(\tau)}{\tau v_{A,i}} \right) \right) \right), \quad (3)$$

$$f_A(\tau, X_A) = \sum_{i=1}^n \left(x_{A,i} + (\theta_{A,i} - x_{A,i}) B_{A,i}(\tau) \left(k_{A,i} - (V_{A,i} - v_{A,i}) \frac{X_{A,i} - x_{A,i}}{\theta_{A,i} - x_{A,i}} - v_{A,i} V_{A,i} B_{A,i}(\tau) \frac{X_{A,i} - x_{A,i}}{\theta_{A,i} - x_{A,i}} \right) \right), \quad (4)$$

где

$$B_{A,i}(\tau) = \left(\frac{\varepsilon_{A,i}}{e^{\varepsilon_{A,i}\tau} - 1} + V_{A,i} \right)^{-1}, \quad \lambda_{A,i}(X_{A,i}) = -\lambda_{A,i} \sqrt{\frac{X_{A,i} - x_{A,i}}{\theta_{A,i} - x_{A,i}}},$$

$$\varepsilon_{A,i} = \sqrt{\left(k_{A,i} + \lambda_{A,i} \sigma_{A,i} \right)^2 + \frac{4k_{A,i} D_{A,i}}{\theta_{A,i} - x_{A,i}}},$$

$$\sigma_{A,i} = \frac{\sqrt{2k_{A,i} D_{A,i}}}{\theta_{A,i} - x_{A,i}}, \quad v_{A,i} = \frac{\varepsilon_{A,i} - k_{A,i} - \lambda_{A,i} \sigma_{A,i}}{2}, \quad V_{A,i} = \varepsilon_{A,i} - v_{A,i}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

где $\lambda_{A,i}(X_{A,i})$ – рыночная стоимость риска в модели Даффи – Кана.

Модель $Q(m)$ будем рассматривать при следующих упрощающих предположениях, предложенных в [2].

Предположение 2. Компоненты m -мерного вектора состояния X_Q являются независимыми. Это влечет за собой диагональность матриц K_Q и S_Q .

Предположение 3. Стационарное среднее процесса $X_Q(t)$ равно нулю, $\theta_Q = 0$. Заметим, что авторы достаточно часто делают подобное предположение, например в [2; 4].

Предположение 4. Квадратичная модель рассматривается в риск-нейтральной мере, т. е. когда рыночная стоимость риска равна нулю. Такое предположение упрощает анализ, но при этом сохраняет основные закономерности.

В качестве функций дрейфа и волатильности квадратичной модели будем использовать $-k_{Q,i}$ и $s_{Q,i}$ соответственно [2]. В условиях предположений 2–4 основные функции временной структуры доходности примут вид [2]

$$y_Q(\tau, X_Q) = \frac{1}{\tau} \left(\sum_{i=1}^m A_{Q,ii}(\tau) X_{Q,i}^2 + C_Q(\tau) \right), \quad (5)$$

$$f_Q(\tau, X_Q) = \sum_{i=1}^m \frac{dA_{Q,ii}(\tau)}{d\tau} X_{Q,i}^2 + \frac{dC_Q(\tau)}{d\tau}, \quad (6)$$

где

$$A_{Q,ii}(\tau) = \frac{\varphi_{Q,i}}{k_{Q,i} + v_{Q,i} \operatorname{cth}(\tau v_{Q,i})}, \quad v_{Q,i} = \sqrt{k_{Q,i}^2 + 2s_{Q,i}^2 \varphi_{Q,i}}; \quad \frac{dC_Q(\tau)}{d\tau} = \alpha + \sum_{i=1}^m \frac{s_{Q,i}^2 \varphi_{Q,i}}{k_{Q,i} + v_{Q,i} \operatorname{cth}(\tau v_{Q,i})};$$

$$C_Q(\tau) = \tau\alpha + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{1 + \omega_{Q,i} \exp(2v_{Q,i}\tau)}{1 + \omega_{Q,i}} \right) - (v_{Q,i} + k_{Q,i})\tau \right), \quad \omega_{Q,i} \equiv \frac{v_{Q,i} + k_{Q,i}}{v_{Q,i} - k_{Q,i}}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Утверждение 1. Имеют место следующие предельные значения при $\tau = 0$ и $\tau = \infty$:

$$y(0, X) = f(0, X) = r(X), \quad y(\infty) = f(\infty) = \sum_{i=1}^n \left(x_{A,i} + v_A \frac{(\theta_{A,i} - x_{A,i})^2}{D_{A,i}} \right) + \alpha + \sum_{j=1}^m \left(\frac{v_{Q,j} - k_{Q,j}}{2} \right).$$

Доказательство. Результат получается непосредственным взятием предела в (2) с учетом (3)–(6).

Утверждение 2. При малых сроках до погашения кривые $y(\tau, X)$ и $f(\tau, X)$ имеют представления:

$$\begin{aligned} f(\tau, X) &= r(X) + \tau \sum_{i=1}^n \left((\theta_{A,i} - x_{A,i}) \left(k_{A,i} - (V_{A,i} - v_{A,i}) \frac{X_{A,i} - x_{A,i}}{\theta_{A,i} - x_{A,i}} \right) \right) + \\ &\quad + \tau \sum_{j=1}^m \varphi_{Q,j} (s_{Q,j}^2 - 2X_{Q,j}^2 k_{Q,j}) + o(\tau^2), \\ y(\tau, X) &= r(X) + \frac{1}{2} \tau \sum_{i=1}^n \left((\theta_{A,i} - x_{A,i}) \left(k_{A,i} - (V_{A,i} - v_{A,i}) \frac{X_{A,i} - x_{A,i}}{\theta_{A,i} - x_{A,i}} \right) \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \tau \sum_{j=1}^m \varphi_{Q,j} (s_{Q,j}^2 - 2X_{Q,j}^2 k_{Q,j}) + o(\tau^2), \end{aligned}$$

при этом скорость изменения форвардной кривой в два раза выше соответствующей скорости кривой доходности.

Доказательство. Результат получается как сумма разложений в ряд Тейлора соответствующих кривых для модели Даффи – Кана и квадратичной модели.

Утверждение 3. Достаточное условие возрастания форвардной кривой гибридной модели $A(n)Q(m)$ есть выполнение следующих неравенств:

$$X_{A,i} > x_{A,i} + \frac{k_{A,i}(\theta_{A,i} - x_{A,i})}{V_{A,i} - v_{A,i}}, \quad X_{Q,j}^2 < \frac{s_{Q,j}^2}{4s_{Q,j}^2 A_{Q,ij}(\infty) + 2k_{Q,j}}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m,$$

и достаточное условие убывания форвардной кривой – выполнение неравенств:

$$X_{A,i} \leq x_{A,i} + \frac{k_{A,i}(\theta_{A,i} - x_{A,i})}{V_{A,i} + v_{A,i}}, \quad X_{Q,j}^2 > \frac{s_{Q,j}^2}{2k_{Q,j}}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Доказательство. Изучим поведение первой производной $f_Q(\tau, X_Q)$

$$\frac{df_Q(\tau, X_Q)}{d\tau} = \sum_{i=1}^m \frac{d^2 A_{Q,ii}(\tau)}{d\tau^2} X_{Q,i}^2 + \frac{d^2 C_Q(\tau)}{d\tau^2}, \quad (7)$$

где

$$\frac{d^2 A_{Q,ii}(\tau)}{d\tau^2} = -(4s_{Q,i}^2 A_{Q,ii}^2(\tau) + 2k_{Q,i}) \frac{dA_{Q,ii}(\tau)}{d\tau}, \quad \frac{d^2 C_Q(\tau)}{d\tau^2} = \sum_{i=1}^m s_{Q,i}^2 A_{Q,ii}(\tau) \frac{dA_{Q,ii}(\tau)}{d\tau}. \quad (8)$$

Перегруппировав слагаемые с учетом (8), можно переписать (7) следующим образом:

$$\frac{df_Q(\tau, X_Q)}{d\tau} = \sum_{i=1}^m \frac{dA_{Q,ii}(\tau)}{d\tau} \left(s_{Q,i}^2 - X_{Q,i}^2 (4s_{Q,i}^2 A_{Q,ii}(\tau) + 2k_{Q,i}) \right). \quad (9)$$

Попробуем найти условия, накладываемые на вектор X , при которых форвардная кривая будет равномерно возрастающей (убывающей) по τ . Эти условия соответствуют положительности (отрицательности) производной форвардной кривой (9) либо равенству ее нулю для некоторого τ . Достаточным условием того, что производная форвардной кривой будет положительной (отрицательной), служит

положительность (отрицательность) каждого из слагаемых. При этом функция $\frac{dA_{Q,ii}(\tau)}{d\tau}$ является положительной, монотонно убывающей и изменяет свои значения от $\varphi_{Q,i}$ при $\tau = 0$ и до 0 при $\tau = \infty$,

и, следовательно, первый множитель каждого из слагаемых $\frac{dA_{Q,ii}(\tau)}{d\tau}$ не будет влиять на его знак.

В связи с этим условия положительности (отрицательности) производной принимают следующий вид (соответственно):

$$X_{Q,i}^2 < \frac{s_{Q,i}^2}{4s_{Q,i}^2 A_{Q,ii}(\tau) + 2k_{Q,i}}, \quad X_{Q,i}^2 > \frac{s_{Q,i}^2}{4s_{Q,i}^2 A_{Q,ii}(\tau) + 2k_{Q,i}}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (10)$$

На основании вида функции $A_{Q,i}(\tau)$ ясно, что правая часть (10) является монотонно убывающей функцией τ , поэтому полученные результаты с учетом аналогичного утверждения для модели Даффи – Кана, приведенного в [1], доказывают утверждение.

Таким образом, выполненный анализ показывает, что определение свойств гибридной модели сводится к нахождению соответствующих свойств для моделей $A(n)$ и $Q(m)$ с последующим их комбинированием с учетом (1) и (2).

Рассмотрим проблему определения временной структуры в фиксированный момент времени t , когда состояние рынка характеризуется некоторым фиксированным вектором $X(t) = X \in \mathbb{R}^{n+m}$, которому согласно (1) сопоставимо вполне определенное значение процентной ставки r . Заметим, что это значение ставки при наличии квадратичной составляющей порождается не единственным вектором X , а существует целое многообразие векторов из \mathbb{R}^{n+m} , соответствующее этому r . Такое многообразие векторов X согласуется с многообразием временных структур, которые будут компактно располагаться в некоторой полосе и иметь одинаковое значение r при $\tau = 0$. Данное свойство существенно отличает квадратичные модели от аффинных, в которых получается только единственная кривая, соединяющая стартовое

значение $y(0) = r$ с предельным значением $y(\infty)$. Представляет интерес найти ширину этой полосы при ограничении на выбор компонент вектора X :

$$r = \alpha + \sum_{i=1}^n X_{A,i} + \sum_{j=1}^m z_{Q,j}, \quad r - \text{fix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad X_{A,i} \in (0, r - \alpha), \quad z_{Q,j} = \varphi_{Q,j} X_{Q,j}^2 \in (0, r - \alpha).$$

Заметим, что в условиях сделанных предположений предельное значение $y(\infty)$ для гибридной модели $A(n)Q(m)$ принимает вид

$$y(\infty) = f(\infty) = \alpha + \sum_{i=1}^n v_{A,i} \frac{\theta_{A,i}^2}{D_{A,i}} + \sum_{j=1}^m \frac{v_{Q,j} - k_{Q,j}}{2}.$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. В условиях сделанных предположений верхняя и нижняя границы кривой доходности и форвардной кривой (в общем случае недостижимые) при фиксированном значении процентной ставки r и фиксированной матрице Φ будут определяться выражениями:

$$y_{\max}(\tau) = y_0(\tau) + \frac{(r - \alpha)}{\tau} \max \left(B_{A, M_A}(\tau), \frac{A_{Q, M_Q M_Q}(\tau)}{\varphi_{Q, M_Q}} \right),$$

$$y_{\min}(\tau) = y_0(\tau) + \frac{(r - \alpha)}{\tau} \min \left(B_{A, m_A}(\tau), \frac{A_{Q, m_Q m_Q}(\tau)}{\varphi_{Q, m_Q}} \right),$$

$$f_{\max}(\tau, X) = f_0(\tau) + (r - \alpha) \max \left(1 - k_{A, H_A} B_{A, H_A}(\tau) - \frac{k_{A, H_A} D_{A, H_A}}{\theta_{A, H_A}} B_{A, H_A}^2(\tau); \frac{1}{\varphi_{Q, H_Q}} \frac{\partial A_{Q, H_Q H_Q}(\tau)}{\partial \tau} \right),$$

$$f_{\min}(\tau, X) = f_0(\tau) + (r - \alpha) \min \left(1 - k_{A, h_A} B_{A, h_A}(\tau) - \frac{k_{A, h_A} D_{A, h_A}}{\theta_{A, h_A}} B_{A, h_A}^2(\tau); \frac{1}{\varphi_{Q, h_Q}} \frac{\partial A_{Q, h_Q h_Q}(\tau)}{\partial \tau} \right),$$

где индексы $M_A, M_Q, m_A, m_Q, H_A, H_Q, h_A$ и h_Q выбираются таким образом, что

$$B_{A, m_A}(\tau) \leq B_{A, i}(\tau), \quad B_{A, i}(\tau) \leq B_{A, M_A}(\tau), \quad \frac{A_{Q, m_Q m_Q}(\tau)}{\varphi_{Q, m_Q}} \leq \frac{A_{Q, j j}(\tau)}{\varphi_{Q, j}}, \quad \frac{A_{Q, j j}(\tau)}{\varphi_{Q, j}} \leq \frac{A_{Q, M_Q M_Q}(\tau)}{\varphi_{Q, M_Q}},$$

$$k_{A, i} B_{A, i}(\tau) - \frac{k_{A, i} D_{A, i}}{\theta_{A, i}} B_{A, i}^2(\tau) \leq k_{A, h_A} B_{A, h_A}(\tau) - \frac{k_{A, h_A} D_{A, h_A}}{\theta_{A, h_A}} B_{A, h_A}^2(\tau),$$

$$k_{A, H_A} B_{A, H_A}(\tau) - \frac{k_{A, H_A} D_{A, H_A}}{\theta_{A, H_A}} B_{A, H_A}^2(\tau) \leq k_{A, i} B_{A, i}(\tau) - \frac{k_{A, i} D_{A, i}}{\theta_{A, i}} B_{A, i}^2(\tau),$$

$$\frac{1}{\varphi_{Q, j}} \frac{\partial A_{Q, j j}(\tau)}{\partial \tau} \leq \frac{1}{\varphi_{Q, H_Q}} \frac{\partial A_{Q, H_Q H_Q}(\tau)}{\partial \tau}, \quad \frac{1}{\varphi_{Q, h_Q}} \frac{\partial A_{Q, h_Q h_Q}(\tau)}{\partial \tau} \leq \frac{1}{\varphi_{Q, j}} \frac{\partial A_{Q, j j}(\tau)}{\partial \tau}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Теперь исследуем влияние матрицы Φ на ширину полос для кривой доходности и форвардной кривой в гибридной модели $A(n)Q(m)$. Отметим, что матрица Φ определяет как стартовое значение $y(0) = r$, так и предельное значение $y(\infty)$.

Теорема 2. В условиях сделанных предположений верхняя и нижняя границы (недостижимые) кривой доходности и форвардной кривой при фиксированных значениях процентной ставки r и $y(\infty)$ будут определяться выражениями:

$$\begin{aligned}
 y_{\max}(\tau) &= \frac{1}{2\tau} \ln \left(\operatorname{ch}(v^o \tau) + \frac{k^o}{v^o} \operatorname{sh}(v^o \tau) \right) + \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n \theta_{A,i} \frac{k_{A,i}}{V_{A,i}} \left(\tau - \frac{\ln(1 + v_{A,i}) B_{A,i}(\tau)}{v_{A,i}} \right) + \\
 &\quad + \alpha - \frac{k^o}{2} + \frac{(r - \alpha)}{\tau} \max \left(B_{A, M_A}(\tau), \frac{1}{k_o \operatorname{cth}(k_o \tau) + k_o} \right), \\
 y_{\min}(\tau) &= \frac{1}{2\tau} \ln \left(\operatorname{ch}(v_o \tau) + \frac{k_o}{v_o} \operatorname{sh}(v_o \tau) \right) + \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n \theta_{A,i} \frac{k_{A,i}}{V_{A,i}} \left(\tau - \frac{\ln(1 + v_{A,i}) B_{A,i}(\tau)}{v_{A,i}} \right) + \\
 &\quad + \alpha - \frac{k_o}{2} + \frac{(r - \alpha)}{\tau} \min \left(B_{A, m_A}(\tau), \frac{1}{v_o \operatorname{cth}(v_o \tau) + k^o} \right), \\
 f_{\max}(\tau, X) &= \alpha + \frac{1}{2} \frac{(v^o)^2 - (k^o)^2}{v^o \operatorname{cth}(v^o \tau) + k^o} + \sum_{i=1}^n \theta_{A,i} B_{A,i}(\tau) k_{A,i} + \\
 &\quad + (r - \alpha) \max \left(1 - k_{A, H_A} B_{A, H_A}(\tau) - \frac{k_{A, H_A} D_{A, H_A}}{\theta_{A, H_A}} B_{A, H_A}^2(\tau); \frac{1}{\exp(2k_o \tau)} \right), \\
 f_{\min}(\tau, X) &= \alpha + \frac{1}{2} \frac{(v_o)^2 - (k_o)^2}{v_o \operatorname{cth}(v_o \tau) + k_o} + \sum_{i=1}^n \theta_{A,i} B_{A,i}(\tau) k_{A,i} + \\
 &\quad + (r - \alpha) \min \left(1 - k_{A, h_A} B_{A, h_A}(\tau) - \frac{k_{A, h_A} D_{A, h_A}}{\theta_{A, h_A}} B_{A, h_A}^2(\tau); \frac{1}{\left(\operatorname{ch}(v^o \tau) + \frac{k^o}{v^o} \operatorname{sh}(v^o \tau) \right)^2} \right),
 \end{aligned}$$

где индексы M_A, m_A, H_A и h_A выбираются таким образом, что

$$\begin{aligned}
 B_{A, m_A}(\tau) &\leq B_{A, i}(\tau), \quad B_{A, i}(\tau) \leq B_{A, M_A}(\tau), \\
 k_{A, i} B_{A, i}(\tau) - \frac{k_{A, i} D_{A, i}}{\theta_{A, i}} B_{A, i}^2(\tau) &\leq k_{A, h_A} B_{A, h_A}(\tau) - \frac{k_{A, h_A} D_{A, h_A}}{\theta_{A, h_A}} B_{A, h_A}^2(\tau), \\
 k_{A, H_A} B_{A, H_A}(\tau) - \frac{k_{A, H_A} D_{A, H_A}}{\theta_{A, H_A}} B_{A, H_A}^2(\tau) &\leq k_{A, i} B_{A, i}(\tau) - \frac{k_{A, i} D_{A, i}}{\theta_{A, i}} B_{A, i}^2(\tau), \quad 1 \leq i \leq n,
 \end{aligned}$$

а k_o и k^o – минимальное и максимальное значения соответственно среди $k_{Q,j}$, а $v_o = k_o$ и

$$v^o = 2 \left(y(\infty) - \alpha - \sum_{i=1}^n v_{A,i} \frac{\theta_{A,i}^2}{D_{A,i}} \right) + k^o.$$

Рассмотрим численный пример для модели $A(2)Q(2)$, иллюстрирующий полученные результаты. Пусть $\alpha = 0$ и

$$\begin{aligned}
 K_A &= \begin{pmatrix} 0,08 & 0,0 \\ 0,0 & 0,03 \end{pmatrix}, \quad D_A = \begin{pmatrix} 0,001 & 0,0 \\ 0,0 & 0,002 \end{pmatrix}, \quad \theta_A = (0,005 \quad 0,002)^T, \quad X_A = \begin{pmatrix} 0,001 \\ 0,002 \end{pmatrix}, \\
 K_Q &= \begin{pmatrix} 0,6 & 0,0 \\ 0,0 & 0,13 \end{pmatrix}, \quad S_Q = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,0 \\ 0,0 & 0,08 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad X_Q = \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,08 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

где использовались оценки параметров квадратичной части модели из [2], а оценки параметров аффинной части подбирались таким образом, чтобы результирующая гибридная модель совпадала

с квадратичной на границах временной оси $Y_0(0)$ и $Y_0(\infty)$. Такой выбор параметров позволяет проводить сравнение гибридной и квадратичной моделей при заданных экзогенных переменных, характеризующих состояние финансового рынка. В этом случае значение стартовой процентной ставки $r = 0,0511$, значение предельной доходности $y(\infty) = 0,0721$. Будем называть кривую доходности $Y_0(u)$ (форвардную кривую) допустимой, если $Y_0(0) = r$ и $Y_0(\infty) = y(\infty)$. На рис. 1 представлены кривая доходности $Y(u)$ и форвардная кривая $F(u)$ для полученной гибридной модели, а также верхние и нижние границы допустимых кривых при фиксированной (базовой) матрице Φ . Здесь использовано нелинейное преобразование сроков до погашения $u = 1 - e^{-\rho\tau}$, которое отображает положительную полуось $(0, \infty)$ в единичный интервал $(0, 1)$ [5], так что $Y_0(u) = y(\tau, X)$, $F_0(u) = f(\tau, X)$, где $\tau = \frac{-\ln(1-u)}{\rho}$.

На рис. 2 показаны те же кривые, что и на рис. 1, но уже для случая, когда могут варьироваться не только допустимые векторы переменных состояния X , но и допустимые матрицы Φ , что, как видно, существенно расширяет полосу возможных кривых доходности.

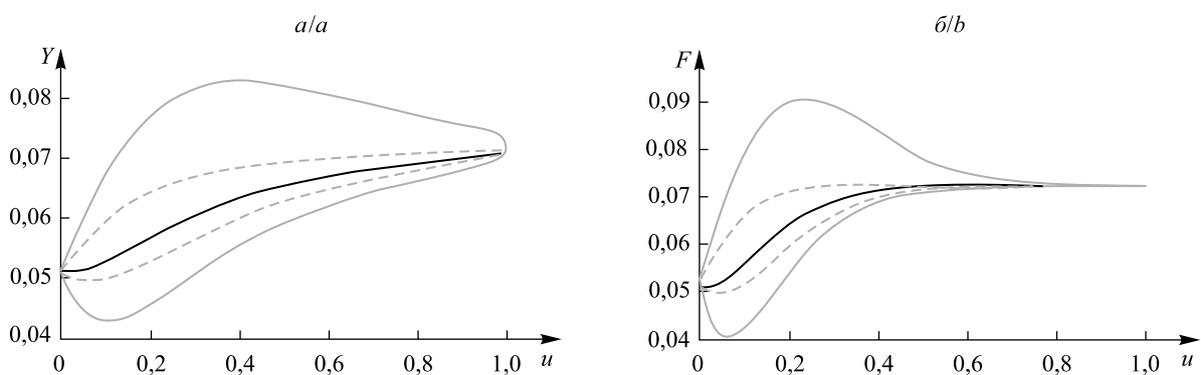


Рис. 1. Функция $Y(u)$ (черная сплошная линия) (а); функция $F(u)$ (черная сплошная линия) (б) и их верхние и нижние границы для гибридной модели $A(2)Q(2)$ (серая сплошная линия) при фиксированной матрице Φ . Информативно представлены аналогичные границы для квадратичной модели $Q(2)$ с параметрами, соответствующими значениям $r = 0,0511$ и $y(\infty) = 0,0721$ (пунктирная линия серого цвета)

Fig. 1. Function $Y(u)$ (black solid line) (a); function $F(u)$ (black solid line) (b) and their upper and lower bounds for the hybrid model $A(2)Q(2)$ (gray solid line) for a fixed matrix Φ .

Similar bounds for the quadratic model $Q(2)$ with parameters corresponding to the values $r = 0.0511$ and $y(\infty) = 0.0721$ (gray dotted line) are presented informatively

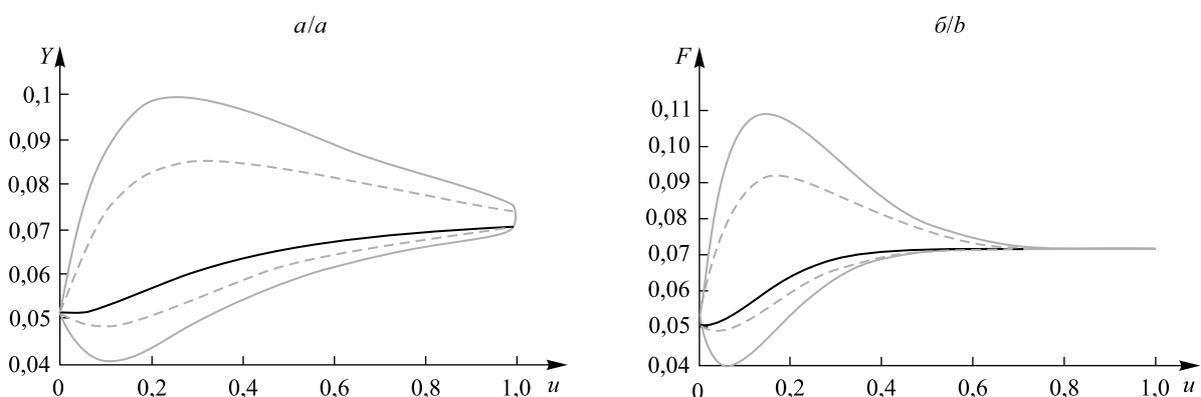


Рис. 2. Функция $Y(u)$ (черная сплошная линия) (а); функция $F(u)$ (черная сплошная линия) (б) и их верхние и нижние границы для гибридной модели $A(2)Q(2)$ (серая сплошная линия) при варьировании матрицы Φ . Информативно представлены аналогичные границы для квадратичной модели $Q(2)$ с параметрами, соответствующими значениям $r = 0,0511$ и $y(\infty) = 0,0721$ (пунктирная линия серого цвета)

Fig. 2. Function $Y(u)$ (black solid line) (a); function $F(u)$ (black solid line) (b) and their upper and lower bounds for the hybrid model $A(2)Q(2)$ (gray solid line) for a non-fixed matrix Φ .

Similar bounds for the quadratic model $Q(2)$ with parameters corresponding to the values $r = 0.0511$ and $y(\infty) = 0.0721$ (gray dotted line) are presented informatively

Полученные результаты свидетельствуют о том, что гибридная модель $A(n)Q(m)$ позволяет получить большее разнообразие кривых доходностей и форвардных кривых при фиксированных значениях $y(0)$ и $y(\infty)$ в сравнении с квадратичной моделью $Q(m)$. При этом следует отметить, что повышение размерности модели за счет добавления аффинных факторов при сделанных предположениях не приводит к значительному усложнению аналитического анализа модели.

Таким образом, построена новая гибридная модель *квадратичная – Даффи – Кана* на основе подхода, предложенного в [3], для которой выведен и доказан ряд свойств и утверждений, а также проведен ее сравнительный анализ с квадратичной моделью на предмет «гибкости» описания реальных данных при фиксированных экзогенных параметрах финансового рынка. Результаты работы могут быть использованы как для решения практических задач прикладного финансового анализа, так и для продолжения теоретических исследований неаффинных моделей временной структуры доходности процентных ставок.

Библиографические ссылки

1. *Медведев Г. А.* О временной структуре доходности. 3. Однофакторная модель Даффи – Кана // Вестн. Том. гос. ун-та. 2012. № 3 (20). С. 71–80.
2. *Медведев Г. А., Павлив Д. А.* О квадратичных моделях доходности в риск-нейтральной среде // Вестн. Том. гос. ун-та. 2016. № 4 (37). С. 44–56.
3. *Ahn D., Dittmar R., Gallant A., et al.* Purebred or hybrid?: Reproducing the volatility in term structure dynamics // *J. Econom.* 2003. Vol. 116, issues 1–2. P. 147–180. DOI: 10.1016/S0304-4076(03)00106-4.
4. *Ahn D., Dittmar R., Gallant A.* Quadratic Term Structure Models: Theory and Evidence. New Orleans : AFA, 2001.
5. *Медведев Г. А.* О временной структуре доходности. 7. Новая версия // Вестн. Том. гос. ун-та. 2013. № 4 (25). С. 61–70.

References

1. Medvedev G. A. [On term structure of yield rates. 3. The Duffie – Kan one-factor model]. *Tomsk State Univ. J.* 2012. No. 3 (20). P. 71–80 (in Russ.).
2. Medvedev G. A., Pavliv D. A. [On term structure models in risk-neutral measure]. *Tomsk State Univ. J.* 2016. No. 4 (37). P. 44–56 (in Russ.).
3. Ahn D., Dittmar R., Gallant A., et al. Purebred or hybrid?: Reproducing the volatility in term structure dynamics. *J. Econom.* 2003. Vol. 116, issues 1–2. P. 147–180. DOI: 10.1016/S0304-4076(03)00106-4.
4. Ahn D., Dittmar R., Gallant A. Quadratic Term Structure Models: Theory and Evidence. New Orleans : AFA, 2001.
5. Medvedev G. A. [On term structure of yield rates. 7. The new version]. *Tomsk State Univ. J.* 2013. No. 4 (25). P. 61–70 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 30.08.2017.
Received by editorial board 30.08.2017.