УДК 539.3

РЕШЕНИЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННЫМИ ОСНОВАНИЯМИ

В. В. КОРОЛЕВИЧ [1], ***Д. Г. МЕДВЕДЕВ*** [2]

[1]*Международный центр современного образования, Štěpánská, 704/61, PSČ 110 00, г. Прага, Чехия*
[2]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Приводится решение неосесимметричной стационарной задачи теплопроводности для профилированных полярно-ортотропных кольцевых пластин с теплоизолированными основаниями. Учитывается зависимость теплофизических характеристик материала пластины от температуры. Задаются значения температур на контурах кольцевой пластины: на внутреннем контуре – постоянная температура T_0^*, а на внешнем контуре на нескольких дугах длиной l_i $\left(i = \overline{1, k}\right)$ – температура T_1^* $\left(T_1^* > T_0^*\right)$. Распределение температур в такой пластине будет неосесимметричным. Предполагается, что радиальный, λ_r, и тангенциальный, λ_θ, коэффициенты теплопроводности линейно зависят от температуры $T(r, \theta)$:

$$\lambda_r(T) = \lambda_r^{(0)}\left(1 - \gamma T(r, \theta)\right), \ \lambda_\theta(T) = \lambda_\theta^{(0)}\left(1 - \gamma T(r, \theta)\right),$$

Образец цитирования:
Королевич В. В., Медведев Д. Г. Решение неосесимметричной стационарной задачи теплопроводности для полярно-ортотропной кольцевой пластины переменной толщины с теплоизолированными основаниями // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 77–87.

For citation:
Karalevich U. V., Medvedev D. G. The solution of the nonaxisymmetric stationary problem of heat conduction for the polar-orthotropic annular plate of variable thickness with thermal insulated bases. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2018. No. 1. P. 77–87 (in Russ.).

Авторы:
Владимир Васильевич Королевич – преподаватель.
Дмитрий Георгиевич Медведев – кандидат физико-математических наук, доцент; декан механико-математического факультета.

Authors:
Uladzimir V. Karalevich, lecturer.
v.korolevich@mail.ru
Dmitrij G. Medvedev, PhD (physics and mathematics), docent; dean of the faculty of mechanics and mathematics.
medvedev@bsu.by

где параметр $\gamma > 1$; постоянные $\lambda_r^{(0)}$, $\lambda_\theta^{(0)}$ определяются экспериментально при начальной температуре T_0. При введении в рассмотрение новой функции $Z(r, \theta) = \left[T(r, \theta) - \frac{\gamma}{2}T^2(r, \theta)\right]$ исходное нелинейное дифференциальное уравнение теплопроводности приводится к линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка в частных производных.

Ключевые слова: композиционный материал; температура; полярно-ортотропная кольцевая пластина; стационарное уравнение теплопроводности; дифференциальное уравнение; интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода; резольвента; квадратное уравнение; пластина степенного профиля; коническая пластина; пластина экспоненциального профиля.

THE SOLUTION OF THE NONAXISYMMETRIC STATIONARY PROBLEM OF HEAT CONDUCTION FOR THE POLAR-ORTHOTROPIC ANNULAR PLATE OF VARIABLE THICKNESS WITH THERMAL INSULATED BASES

U. V. KARALEVICH [a]***, D. G. MEDVEDEV*** [b]

[a]*International Center of Modern Education, 704/61 Štěpánská, Prague PSČ 110 00, Czech*
[b]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: D. G. Medvedev (medvedev@bsu.by)

In the work is given the solution of nonaxisymmetric stationary heat conduction problem for profiled polar-orthotropic annular plates with thermally insulated bases. The dependence of the thermophysical characteristics of the plate material of the temperature is taken into account. Temperature values are set on the contours of the annular plate: temperature T_0^* is constant on the internal contour, and on the outer contour on several arcs with length l_i $\left(i = \overline{1, k}\right)$ – temperature is T_1^* $\left(T_1^* > T_0^*\right)$. The temperature distribution in such a plate is nonaxisymmetric. It is assumed that the radial λ_r and tangential λ_θ heat conduction coefficients are linearly dependent on the temperature $T(r, \theta)$:

$$\lambda_r(T) = \lambda_r^{(0)}\left(1 - \gamma T(r, \theta)\right), \ \lambda_\theta(T) = \lambda_\theta^{(0)}\left(1 - \gamma T(r, \theta)\right),$$

here the parameter $\gamma > 1$; the constants $\lambda_r^{(0)}$, $\lambda_\theta^{(0)}$ are determined experimentally at the primary temperature T_0. The primary nonlinear differential heat equation is reduced to a linear differential equation of the 2nd kind in partial derivatives when a new function $Z(r, \theta) = \left[T(r, \theta) - \frac{\gamma}{2}T^2(r, \theta)\right]$ is introduced in consideration.

Key words: composite material; temperature; polar-orthotropic annular plate; stationary heat conduction equation; differential equation; Volterra integral equation of the 2nd kind; resolvent; quadratic equation; plate of power profile; conical plate; plate of exponential profile.

Введение

В современном энергетическом оборудовании, машиностроительных и авиакосмических конструкциях, аппаратах пищевой и химической промышленности широко применяются кольцевые пластины из анизотропных материалов. Часто они могут находиться в неоднородных тепловых полях. Это приведет к дополнительным, так называемым температурным напряжениям в анизотропных кольцевых пластинах, которые необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации указанных конструкций.

Постановка задачи

Рассматривается кольцевая пластина, толщина $h(r)$ которой изменяется вдоль радиуса r по заданному закону. Пластина изготовлена из материала, обладающего цилиндрической анизотропией, причем ось анизотропии совпадает с геометрической осью пластины, и в каждой точке которой имеются три взаимно ортогональные плоскости упругой симметрии.

Пусть на внутреннем контуре (при $r = r_0$) пластины поддерживается постоянная температура T_0^*, а на внешнем контуре (при $r = R$) на нескольких дугах длиной $l_i \left(i = \overline{1, k}\right)$ – температура T_1^* $\left(T_1^* > T_0^*\right)$. Основания кольцевой пластины при $z = \pm\frac{h}{2}$ теплоизолированы. Внутренних источников тепла в пластине не имеется. Тепловое поле в такой анизотропной пластине в общем случае будет неосесимметричным.

В настоящей работе исследуется распределение температуры в полярно-ортотропных кольцевых пластинах переменной толщины с теплоизолированными основаниями с учетом зависимости теплофизических характеристик материала пластин от температуры.

Решение задачи

Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z, поместив начало в точке пересечения оси анизотропии со срединной плоскостью пластины.

Уравнение стационарной теплопроводности для полярно-ортотропной пластины переменной толщины с теплоизолированными основаниями имеет вид [1–2]

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_r(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \left(\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r}\right)\cdot\left(\lambda_r(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\lambda_\theta(T)\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) = 0. \tag{1}$$

Предположим, что радиальный, λ_r, и тангенциальный, λ_θ, коэффициенты теплопроводности линейно зависят от температуры T [3]:

$$\lambda_r(T) = \lambda_r^{(0)}\left(1 - \gamma T(r, \theta)\right),\ \lambda_\theta(T) = \lambda_\theta^{(0)}\left(1 - \gamma T(r, \theta)\right), \tag{2}$$

где параметр $\gamma > 1$; постоянные $\lambda_r^{(0)}$, $\lambda_\theta^{(0)}$ определяются экспериментально при начальной температуре T_0.

Подстановка выражений (2) в уравнение (1) приводит к следующему однородному нелинейному дифференциальному уравнению 2-го порядка в частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left((1 - \gamma T)\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \left(\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r}\right)\cdot\left((1 - \gamma T)\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left((1 - \gamma T)\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) = 0. \tag{3}$$

Введем в рассмотрение новую функцию

$$Z(r, \theta) = \left[T(r, \theta) - \frac{\gamma}{2}T^2(r, \theta)\right]. \tag{4}$$

Уравнение (3) сведется к линейному дифференциальному уравнению для новой функции $Z(r, \theta)$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \left(\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r}\right)\frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial\theta^2} = 0. \tag{5}$$

Разложим функцию $Z(r, \theta)$ в тригонометрический ряд Фурье

$$Z(r, \theta) = Z_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n^{(1)}(r)\cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n^{(2)}(r)\sin n\theta. \tag{6}$$

Первое слагаемое в разложении функции $Z(r, \theta)$ учитывает ее осесимметричную составляющую. Слагаемые, содержащие $\cos n\theta$, соответствуют симметричным составляющим функции $Z(r, \theta)$ относительно плоскости $\theta = 0$, а слагаемые, содержащие $\sin n\theta$, – обратно симметричным.

Подставляя разложение (6) в уравнение (5), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для компонент $Z_0(r)$, $Z_n^{(i)}(r)$ $(i = 1, 2)$

$$\begin{cases} (n = 0)\quad \dfrac{d^2 Z_0}{dr^2} + \left(\dfrac{h'(r)}{h(r)} + \dfrac{1}{r}\right)\dfrac{dZ_0}{dr} = 0, & (7) \\[2ex] (n \geq 1)\quad \dfrac{d^2 Z_n^{(i)}}{dr^2} + \left(\dfrac{h'(r)}{h(r)} + \dfrac{1}{r}\right)\dfrac{dZ_n^{(i)}}{dr} - \dfrac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}}\cdot\dfrac{n^2}{r^2}Z_n^{(i)}(r) = 0. & (8) \end{cases}$$

Первое дифференциальное уравнение (7) системы, описывающее осесимметричное распределение температуры в полярно-ортотропной кольцевой пластине переменной толщины с теплоизолированными основаниями, нами подробно исследовалось в работе [4]. Его решение есть

$$Z_0(r) = C_1^{(0)} \int_{r_0}^{r} \frac{ds}{sh(s)} + C_2^{(0)}, \tag{9}$$

где $C_1^{(0)}$, $C_2^{(0)}$ – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий.

Найдем решения второго дифференциального уравнения (8) системы для некоторых частных случаев.

1. Кольцевая пластина степенного профиля.

Профиль такой пластины задается выражением $h(r) = h_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, где h_0 – толщина пластины на внутреннем контуре (при $r = r_0$). Дифференцируя функцию $h(r)$ и подставляя в уравнение (8), получим однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами вида

$$\frac{d^2 Z_n^{(i)}}{dr^2} + \frac{(1-\alpha)}{r} \frac{dZ_n^{(i)}}{dr} - \frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}} \cdot \frac{n^2}{r^2} Z_n^{(i)}(r) = 0. \tag{10}$$

Введем новую переменную $t = \ln r$. Тогда дифференциальное уравнение (10) сведется к обыкновенному дифференциальному уравнению 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2 Z_n^{(i)}}{dt^2} - \alpha \frac{dZ_n^{(i)}}{dt} - n^2 \frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}} \cdot Z_n^{(i)}(t) = 0. \tag{11}$$

Характеристическое уравнение для однородного дифференциального уравнения (11) есть

$$k^2 - \alpha k - n^2 \frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}} = 0.$$

Корни этого квадратного уравнения равны

$$\begin{cases} k_1(n) = \dfrac{1}{2}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4n^2 \dfrac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}}} \right), \\ k_2(n) = \dfrac{1}{2}\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4n^2 \dfrac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}}} \right). \end{cases}$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения (11) есть

$$Z_n^{(i)}(t) = C_{n,1}^{(i)} \cdot e^{k_1(n)t} + C_{n,2}^{(i)} \cdot e^{k_2(n)t},$$

где $C_{n,1}^{(i)}$, $C_{n,2}^{(i)}$ – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий.

При переходе к старой переменной r решение дифференциального уравнения (10) будет следующим:

$$Z_n^{(i)}(r) = C_{n,1}^{(i)} \cdot r^{k_1(n)} + C_{n,2}^{(i)} \cdot r^{k_2(n)}. \tag{12}$$

2. Кольцевая пластина конического профиля.

Профили конических кольцевых пластин или пластин прямолинейного профиля задаются формулой $h(r) = h_0^* \left(1 - \frac{r}{R_1} \right)$, где h_0^* – толщина пластины в центре (при $r = 0$); R_1 – радиус окружности пересечения образующих конуса ($R \le R_1$). Дифференцируя функцию $h(r)$ и подставляя в уравнение (8), получим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2 Z_n^{(i)}}{dr^2} + \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1 \left(1 - \frac{r}{R_1} \right)} \right] \frac{dZ_n^{(i)}}{dr} - \frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}} \cdot \frac{n^2}{r^2} Z_n^{(i)}(r) = 0. \tag{13}$$

Введем новую переменную $x = \dfrac{r}{R_1}$. Тогда уравнение (13) приведется к виду

$$x^2(1-x)\frac{d^2Z_n^{(i)}}{dx^2} + (1-2x)x\frac{dZ_n^{(i)}}{dx} - n^2\frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}}Z_n^{(i)}(x) = 0. \tag{14}$$

В результате замены [5]

$$Z_n^{(i)}(x) = x^{\lambda_n}W_n^{(i)}(x),$$

где $\lambda_n = n\sqrt{\dfrac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}}}$, дифференциальное уравнение (14) сводится к гипергеометрическому уравнению

$$x(1-x)\frac{d^2W_n^{(i)}}{dx^2} + \left[c_n - (a_n + b_n + 1)x\right]\frac{dW_n^{(i)}}{dx} - a_n b_n \cdot W_n^{(i)}(x) = 0.$$

Здесь параметры a_n, b_n, c_n равны

$$a_n = \lambda_n + 1,\ b_n = \lambda_n,\ c_n = 2\lambda_n + 1.$$

В окрестности точки $x = 0$ решение дифференциального уравнения (14) выражается в гипергеометрических функциях:

1) при $c_n \neq 1, 2, 3, \ldots$

$$Z_n^{(i)}(x) = \tilde{C}_{n;1}^{(i)} \cdot x^{\lambda_n}F(a_n,\ b_n;\ c_n;\ x) + \tilde{C}_{n;2}^{(i)} \cdot x^{\lambda_n + 1 - c_n}F(a_n + 1 - c_n,\ b_n + 1 - c_n;\ 2 - c_n;\ x);$$

2) при $c_n = 1 + k_n\ (k_n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$Z_n^{(i)}(x) = \tilde{C}_{n;1}^{(i)} \cdot x^{\lambda_n}F(a_n,\ b_n;\ 1 + k_n;\ x) + \tilde{C}_{n;2}^{(i)} \cdot x^{\lambda_n}\Phi(a_n,\ b_n;\ 1 + k_n;\ x),$$

где $k_n = 2n\sqrt{\dfrac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}}}$; $F(a,\ b;\ c;\ x)$, $\Phi(a,\ b;\ c;\ x)$ – гипергеометрические функции 1-го и 2-го родов соответственно, выражаемые степенными рядами [6]. Произвольные постоянные $\tilde{C}_{n,1}^{(i)}$, $\tilde{C}_{n,2}^{(i)}$ определяются из граничных условий.

В старой переменной r решение дифференциального уравнения (13) есть

1) при $c_n \neq 1, 2, 3, \ldots$

$$Z_n^{(i)}(r) = \tilde{C}_{n;1}^{(i)} \cdot \left(\frac{r}{R_1}\right)^{\lambda_n} \cdot F\left(a_n,\ b_n;\ c_n;\ \frac{r}{R_1}\right) +$$

$$+ C_{n;2}^{(i)} \cdot \left(\frac{r}{R_1}\right)^{\lambda_n + 1 - c_n} \cdot F\left(a_n + 1 - c_n,\ b_n + 1 - c_n;\ 2 - c_n;\ \frac{r}{R_1}\right);$$

2) при $c_n = 1 + k_n\ (k_n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$Z_n^{(i)}(r) = \tilde{C}_{n;1}^{(i)} \cdot x\left(\frac{r}{R_1}\right)^{\lambda_n} \cdot F\left(a_n,\ b_n;\ 1 + k_n;\ \frac{r}{R_1}\right) + \tilde{C}_{n;2}^{(i)} \cdot \left(\frac{r}{R_1}\right)^{\lambda_n} \cdot \Phi\left(a_n,\ b_n;\ 1 + k_n;\ \frac{r}{R_1}\right).$$

3. Кольцевая пластина экспоненциального профиля.

Профиль экспоненциальных кольцевых пластин задается выражением $h(r) = h_0^* e^{\beta\left(\frac{r}{R}\right)}$, где $\beta = \ln\left(\dfrac{h_1}{h_0^*}\right) < 0$, $\beta \in (-\infty,\ 0)$; h_0^* – толщина пластины в центре (при $r = 0$). Дифференцируя функцию $h(r)$ и подставляя в уравнение (8), получим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2Z_n^{(i)}}{dr^2} + \left(\frac{\beta}{R} + \frac{1}{r}\right)\frac{dZ_n^{(i)}}{dr} - \frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}} \cdot \frac{n^2}{r^2}Z_n^{(i)}(r) = 0. \tag{15}$$

Умножая обе части уравнения (15) на r^2, получим следующее выражение:

$$r^2 \frac{d^2 Z_n^{(i)}}{dr^2} + \left(1 + \beta \frac{r}{R}\right) r \frac{dZ_n^{(i)}}{dr} - n^2 \frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}} \cdot Z_n^{(i)}(r) = 0. \tag{16}$$

Введем новую переменную $\xi = -\beta\left(\frac{r}{R}\right)$. Тогда дифференциальное уравнение (16) примет вид

$$\xi^2 \frac{d^2 Z_n^{(i)}}{d\xi^2} + (1 - \xi)\xi \frac{dZ_n^{(i)}}{d\xi} - n^2 \frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}} \cdot Z_n^{(i)}(\xi) = 0. \tag{17}$$

Сделав замену

$$Z_n^{(i)}(\xi) = \xi^{\lambda_n} V_n^{(i)}(\xi),$$

где $\lambda_n = n\sqrt{\frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}}}$, приведем дифференциальное уравнение (17) к вырожденному гипергеометрическому уравнению

$$\xi \frac{d^2 V_n^{(i)}}{d\xi^2} + (c_n - \xi)\frac{dV_n^{(i)}}{d\xi} - b_n V_n^{(i)}(\xi) = 0.$$

Здесь параметры b_n, c_n следующие:

$$b_n = \lambda_n,\ c_n = 2\lambda_n + 1.$$

Решение дифференциального уравнения (17) выражается в вырожденных гипергеометрических функциях:

1) при $c_n \neq 1, 2, 3, \ldots$

$$Z_n^{(i)}(\xi) = \hat{C}_{n;1}^{(i)} \cdot \xi^{\lambda_n}\, {}_1F_1(b_n;\ c_n;\ \xi) + \hat{C}_{n;2}^{(i)} \cdot \xi^{\lambda_n + 1 - c_n}\, {}_1F_1(b_n + 1 - c_n;\ 2 - c_n;\ \xi);$$

2) при $c_n = 1 + k_n$ $(k_n = 1, 2, 3, \ldots)$ и одновременно $b_n = s_n$ $(s_n = 1, 2, 3, \ldots, k_n)$

$$Z_n^{(i)}(\xi) = \hat{C}_{n;1}^{(i)} \cdot \xi^{\lambda_n}\, {}_1F_1(s_n;\ 1 + k_n;\ \xi) + \hat{C}_{n;2}^{(i)} \cdot \xi^{\lambda_n}\, {}_1F_1(s_n - k_n;\ 1 - k_n;\ \xi),$$

где $k_n = 2n\sqrt{\frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}}}$; ${}_1F_1(b_n;\ c_n;\ \xi)$ – вырожденная гипергеометрическая функция 2-го порядка, выражаемая степенным рядом [6]. Произвольные постоянные $\hat{C}_{n,1}^{(i)}$, $\hat{C}_{n,2}^{(i)}$ определяются из граничных условий.

Возвращаясь к старой переменной r, запишем решение дифференциального уравнения (16):

1) при $c_n \neq 1, 2, 3, \ldots$

$$Z_n^{(i)}(r) = \hat{C}_{n;1}^{(i)} \cdot \left(-\beta\left(\frac{r}{R}\right)\right)^{\lambda_n} \cdot {}_1F_1\left(b_n;\ c_n;\ \left(-\beta\left(\frac{r}{R}\right)\right)\right) + \hat{C}_{n;2}^{(i)} \cdot \left(-\beta\left(\frac{r}{R}\right)\right)_1^{\lambda_n + 1 - c_n} \times$$

$$\times\ {}_1F_1\left(b_n + 1 - c_n;\ 2 - c_n;\ \left(-\beta\left(\frac{r}{R}\right)\right)\right);$$

2) при $c_n = 1 + k_n$ $(k_n = 1, 2, 3, \ldots)$ и одновременно $b_n = s_n$ $(s_n = 1, 2, 3, \ldots, k_n)$

$$Z_n^{(i)}(r) = \hat{C}_{n;1}^{(i)} \cdot \left(-\beta\left(\frac{r}{R}\right)\right)^{\lambda_n} \cdot {}_1F_1\left(s_n;\ 1 + k_n;\ \left(-\beta\left(\frac{r}{R}\right)\right)\right) + \hat{C}_{n;2}^{(i)} \cdot \left(-\beta\left(\frac{r}{R}\right)\right)^{\lambda_n} \times$$

$$\times\ {}_1F_1\left(s_n - k_n;\ 1 - k_n;\ \left(-\beta\left(\frac{r}{R}\right)\right)\right).$$

4. Для произвольного профиля анизотропной кольцевой пластины получим общее решение уравнения (8) с помощью интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода.

Для этого полагаем

$$\frac{d^2 Z_n^{(i)}}{dr^2} = \eta_n^{(i)}(r). \tag{18}$$

Последовательно интегрируя выражение (18), получим

$$\frac{dZ_n^{(i)}}{dr} = \int_{r_0}^{r} \eta_n^{(i)}(s)\,ds + \dot{Z}_n^{(i)}(r_0),\ \ Z_n^{(i)}(r) = \int_{r_0}^{r} (r-s)\eta_n^{(i)}(s)\,ds + \dot{Z}_n^{(i)}(r_0)(r-r_0) + Z_n^{(i)}(r_0). \tag{19}$$

Здесь использовалась формула Дирихле

$$\underbrace{\int_{r_0}^{r} dr_1 \int_{r_0}^{r_1} dr_2 \ldots \int_{r_0}^{r_{n-1}} \eta_n^{(i)}(r_n)\,dr_n}_{n \text{ раз}} = \frac{1}{(n-1)!}\int_{r_0}^{r} (r-s)^{n-1}\,\eta_n^{(i)}(s)\,ds.$$

Подставляя во второе уравнение (8) системы вместо компонент $Z_n^{(i)}(r)$ и их производных правые части выражений (18), (19), получим искомое линейное интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода

$$\eta_n^{(i)}(r) = \lambda \int_{r_0}^{r} K_n(r, s)\eta_n^{(i)}(s)\,ds + f_n^{(i)}(r), \tag{20}$$

где числовой параметр $\lambda = -1$; $K_n(r, s) = \left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r}\right) - \frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}}\frac{n^2}{r^2}(r-s)\right]$ – ядро интегрального уравнения; $f_n^{(i)}(r) = \frac{\partial K_n(r, s)}{\partial s} Y_n^{(i)}(r_0) - K_n(r, r_0)\dot{Y}_n^{(i)}(r_0)$ – свободный член интегрального уравнения.

Общее решение линейного интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода (20) записывается с помощью *резольвенты* $R_n(r, s; \lambda)$ в виде [7]

$$\eta_n^{(i)}(r) = \lambda \int_{r_0}^{r} R_n(r, s; \lambda) f_n^{(i)}(s)\,ds + f_n^{(i)}(r). \tag{21}$$

Здесь функция $R_n(r, s; \lambda)$ определяется функциональным рядом

$$R_n(r, s; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_{n,m+1}(r, s),$$

который для непрерывных ядер $K_{n,m}(r, s)$ сходится абсолютно и равномерно.

Повторяющиеся, или *итерированные ядра* $K_{n,m}(r, s)$, определяются по следующим рекуррентным формулам:

$$K_{n,1}(r, s) = K_n(r, s),$$

$$K_{n,2}(r, s) = \int_{s}^{r} K_n(r, t) K_{n,1}(t, s)\,dt,$$

……………………………………..

$$K_{n,m}(r, s) = \int_{s}^{r} K_n(r, t) K_{n,m-1}(t, s)\,dt.$$

Если свободный член $f_n^{(i)}(r)$ непрерывен в $[r_0, R]$, а ядро $K_n(r, s)$ непрерывно при $r_0 \le r \le R$, $r_0 \le s \le r$, то линейное интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода (20) имеет при любом параметре λ ($\lambda \ne 0$) единственное непрерывное решение, определяемое формулой (21).

Отметим, что интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода можно решать и другими аналитическими и численными методами, указанными, например, в работе [8].

Запишем общее решение дифференциального уравнения (5) через разрешающие функции $\eta_n^{(i)}(r)$ $(i = 1, 2)$:

$$Z(r,\theta)=\left(C_1^{(0)}\int_{r_0}^{r}\frac{ds}{sh(s)}+C_2^{(0)}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{r_0}^{r}(r-s)\eta_n^{(1)}(s)ds+\dot{Z}_n^{(1)}(r_0)(r-r_0)+Z_n^{(1)}(r_0)\right]\cos n\theta+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{r_0}^{r}(r-s)\eta_n^{(2)}(s)ds+\dot{Z}_n^{(2)}(r_0)(r-r_0)+Z_n^{(2)}(r_0)\right]\sin n\theta. \quad (22)$$

Возвращаясь к формуле (4), получим квадратное уравнение для распределения температуры в профилированной анизотропной кольцевой пластине с теплоизолированными основаниями

$$T^2(r,\theta)-\frac{2}{\gamma}T(r,\theta)+\frac{2}{\gamma}Z(r,\theta)=0.$$

Оно имеет два решения:

$$T(r,\theta)=\frac{1}{\gamma}\left[1\pm\sqrt{1-2\gamma Z(r,\theta)}\right]. \quad (23)$$

Запишем формулу (23) в следующем виде:

$$\left(\gamma T(r,\theta)-1\right)=\pm\sqrt{1-2\gamma\cdot Z(r,\theta)}. \quad (24)$$

Анализируя формулу (24), получим два следующих варианта распределения температуры в профилированной анизотропной кольцевой пластине в зависимости от значения параметра γ:

$$\begin{aligned}&1)\ \text{если}\ T_1^*<\frac{1}{\gamma},\ \text{то}\ T(r,\theta)=\frac{1-\sqrt{1-2\gamma\cdot Z(r,\theta)}}{\gamma};\\&2)\ \text{если}\ T_1^*\ge\frac{1}{\gamma},\ \text{то}\ T(r,\theta)=\frac{1+\sqrt{1-2\gamma\cdot Z(r,\theta)}}{\gamma},\end{aligned} \quad (25)$$

где функция $Z(r,\theta)$ определяется формулой (22).

В заключение рассмотрим пример расчета температурного поля в полярно-ортотропной кольцевой пластине степенного профиля, на внутреннем контуре которой поддерживается постоянная температура T_0^*, а на внешнем контуре по концам диаметра пластины приложены два точечных источника тепла с температурой T_1^* каждый.

Заменим точечные источники тепла распределенной тепловой нагрузкой интенсивностью q, приложенной по двум малым дугам одинаковой длины $l=\varphi R$:

$$q=\frac{T_1^*}{\varphi R}\ \text{при}\ -\frac{\varphi}{2}\le\theta\le\frac{\varphi}{2}\ \text{и}\ q=\frac{T_1^*}{\varphi R}\ \text{при}\ \left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)\le\theta\le\left(\pi+\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$q=0\ \text{при}\ \frac{\varphi}{2}<\theta<\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)\ \text{и}\ q=0\ \text{при}\ \left(\pi+\frac{\varphi}{2}\right)<\theta<\left(2\pi-\frac{\varphi}{2}\right),$$

где φ – произвольный, сколь угодно малый центральный угол, опирающийся на дугу l.

Разложим тепловую нагрузку q в тригонометрический ряд Фурье по косинусам с четными номерами n, так как эта нагрузка симметрична относительно диаметра:

$$q(\theta)=\frac{q_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}q_{2n}\cos 2n\theta,$$

где

$$q_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}q(\varphi)d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\varphi/2}\frac{T_1^*}{\varphi R}d\theta+\frac{2}{\pi}\int_{\pi-(\varphi/2)}^{\pi}\frac{T_1^*}{\varphi R}d\theta=\frac{2T_1^*}{\pi\varphi R}\left(\frac{\varphi}{2}-0\right)+\frac{2T_1^*}{\pi\varphi R}\left(\pi-\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)\right)=\frac{2T_1^*}{\pi R};$$

$$q_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}q(\varphi)\cos 2n\theta d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\varphi/2}\frac{T_1^*}{\varphi R}\cos 2n\theta d\theta+\frac{2}{\pi}\int_{\pi-(\varphi/2)}^{\pi}\frac{T_1^*}{\varphi R}\cos 2n\theta d\theta=\frac{2T_1^*}{\pi\varphi R}\frac{1}{2n}(\sin n\varphi-\sin 0)+$$
$$+\frac{2T_1^*}{\pi\varphi R}\frac{1}{2n}\left(\sin 2n\pi-\sin 2n\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)\right)=\frac{2T_1^*}{\pi R}\left(\frac{\sin n\varphi}{n\varphi}\right).$$

При $\varphi \to 0$ $\lim\limits_{\varphi \to 0}\left(\dfrac{\sin n\varphi}{n\varphi}\right) = 1,$ то $q_{2n} = \dfrac{2T_1^*}{\pi R}.$

Следовательно,

$$q(\theta) = \frac{T(R,\, \theta)}{2\pi R} = \frac{T_1^*}{\pi R}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\theta\right).$$

Таким образом, распределение температуры $T(R,\, \theta)$ по внешнему краю кольцевой пластины задается выражением

$$T(R,\, \theta) = 2T_1^*\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\theta\right). \tag{26}$$

Ниже нам придется решать нелинейную алгебраическую задачу, поэтому для получения приближенного решения ограничимся, например, двенадцатой гармоникой в выражении (26):

$$T(R,\, \theta) \approx 2T_1^*\left(1 + 2\sum_{n=1}^{6} \cos 2n\theta\right).$$

По формуле (4) вычислим приближенно значение функции $Z(R,\, \theta)$:

$$Z(R,\, \theta) = \left[T(R,\, \theta) - \frac{\gamma}{2}T^2(R,\, \theta)\right] \approx 2T_1^*\left[\left(1 + 2\sum_{n=1}^{6} \cos 2n\theta\right) - \gamma T_1^*\left(1 + 2\sum_{n=1}^{6} \cos 2n\theta\right)^2\right] \approx$$

$$\approx 2T_1^*\left[\left(1 - 13\gamma T_1^*\right) + 2\sum_{n=1}^{6}\left(1 - (13 - n)\cdot \gamma T_1^*\right)\cos 2n\theta\right].$$

Решение дифференциального уравнения (5) для кольцевой пластины со степенным профилем для рассматриваемой задачи (9), (12) есть

$$Z(r,\, \theta) = Z_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} Z_{2n}(r)\cos 2n\theta = \left\{\left[\frac{C_1^{(0)}}{\alpha h_0 r_0^{\alpha}}\left(r^{\alpha} - r_0^{\alpha}\right) + C_2^{(0)}\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{2n,1}^{(1)}\cdot r^{k_1(2n)} + C_{2n,2}^{(1)}\cdot r^{k_2(2n)}\right) \times\right.$$

$$\left.\times \cos 2n\theta\right\} \approx \left\{\left[\frac{C_1^{(0)}}{\alpha h_0 r_0^{\alpha}}\left(r^{\alpha} - r_0^{\alpha}\right) + C_2^{(0)}\right] + \sum_{n=1}^{6}\left(C_{2n,1}^{(1)}\cdot r^{k_1(2n)} + C_{2n,2}^{(1)}\cdot r^{k_2(2n)}\right)\cos 2n\theta\right\}. \tag{27}$$

Постоянные $C_1^{(0)},\, C_2^{(0)},\, C_{2n,1}^{(1)},\, C_{2n,2}^{(1)}$ определяются из граничных условий

$$\begin{cases} Z(r_0,\, \theta) = \left(T_0^* - \dfrac{\gamma}{2}T_0^{*2}\right), \\ Z(R,\, \theta) \approx 2T_1^*\left[\left(1 - 13\gamma T_1^*\right) + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{6}\left(1 - (13 - n)\cdot \gamma T_1^*\right)\cos 2n\theta\right]. \end{cases} \tag{28}$$

Подставляя решение (27) в граничные условия (28), получим системы уравнений для неизвестных постоянных $C_1^{(0)},\, C_2^{(0)},\, C_{2n,1}^{(1)},\, C_{2n,2}^{(1)}$:

$$\begin{cases} C_2^{(0)} = \left(T_0^* - \dfrac{\gamma}{2}T_0^{*2}\right), \\ \dfrac{C_1^{(0)}}{\alpha h_0 r_0^{\alpha}}\left(R^{\alpha} - r_0^{\alpha}\right) + C_2^{(0)} = 2T_1^*\left(1 - 13\gamma T_1^*\right); \end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{cases} C_{2n,1}^{(1)} \cdot r_0^{k_1(2n)} + C_{2n,2}^{(1)} \cdot r_0^{k_2(2n)} = 0, \\ C_{2n,1}^{(1)} \cdot R^{k_1(2n)} + C_{2n,2}^{(1)} \cdot R^{k_2(2n)} = 4T_1^*\left[1 - (13 - n) \cdot \gamma T_1^*\right], \ \left(n = \overline{1, 6}\right). \end{cases} \tag{30}$$

Решения систем уравнений (29), (30) есть

$$\begin{cases} C_1^{(0)} = \alpha h_0 r_0^{\alpha} \cdot \dfrac{\left[2T_1^*\left(1 - 13\gamma T_1^*\right) - T_0^*\left(1 - \dfrac{\gamma}{2}T_0^*\right)\right]}{\left(R^{\alpha} - r_0^{\alpha}\right)}, \\ C_2^{(0)} = T_0^*\left(1 - \dfrac{\gamma}{2}T_0^*\right); \end{cases} \tag{31}$$

$$\begin{cases} C_{2n,1}^{(1)} = -4T_1^*\left[1 - (13 - n) \cdot \gamma T_1^*\right] \cdot \dfrac{\delta^{k_2(2n)}}{\left(\delta^{k_1(2n)} - \delta^{k_2(2n)}\right)} \dfrac{1}{R^{k_1(2n)}}, \\ C_{2n,1}^{(1)} = 4T_1^*\left[1 - (13 - n) \cdot \gamma T_1^*\right] \cdot \dfrac{\delta^{k_1(2n)}}{\left(\delta^{k_1(2n)} - \delta^{k_2(2n)}\right)} \dfrac{1}{R^{k_2(2n)}}. \end{cases} \tag{32}$$

Подставляя найденные выражения (31), (32) для постоянных $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, C_{2n,1}^{(1)}, C_{2n,2}^{(1)}$ в формулу (27) для функции $Z(r, \theta)$, получим

$$Z(r, \theta) \approx Z_0(r) + \sum_{n=1}^{6} Z_{2n}(r)\cos 2n\theta,$$

где

$$Z_0(r) = \left\{ \frac{\left[2T_1^*\left(1 - 13\gamma T_1^*\right) - T_0^*\left(1 - \frac{\gamma}{2}T_0^*\right)\right]}{\left(1 - \delta^{\alpha}\right)} \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha} - \frac{\left[2T_1^*\left(1 - 13\gamma T_1^*\right)\delta^{\alpha} - T_0^*\left(1 - \frac{\gamma}{2}T_0^*\right)\right]}{\left(1 - \delta^{\alpha}\right)} \right\},$$

$$Z_{2n}(r) = -4T_1^* \frac{\left[1 - (13 - n) \cdot \gamma T_1^*\right]}{\left[\delta^{k_1(2n)} - \delta^{k_2(2n)}\right]} \left[\delta^{k_2(2n)} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{k_1(2n)} - \delta^{k_1(2n)} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{k_2(2n)}\right], \left(n = \overline{1, 6}\right).$$

Распределение температуры $T(r, \theta)$ в профилированной полярно-ортотропной кольцевой пластине задается уравнениями (25). Данное уравнение является нелинейным алгебраическим уравнением и решение его можно получить численными методами либо приближенно аналитически.

Найдем приближенное решение уравнения (25), учитывая, что в нашем случае $2\gamma Z(r, \theta) < 1$, $\forall r \in \left[r_0, R\right]$, разложив корень квадратный в ряд по малому параметру γ до 3-го порядка малости. В результате получим

$$T(r, \theta) \approx Z(r, \theta) + \frac{\gamma}{2}Z^2(r, \theta) + \frac{\gamma^2}{2}Z^3(r, \theta), \tag{34}$$

где $Z^2(r, \theta) = y_0(r) + \sum_{n=1}^{6} y_{2n}(r)\cos 2n\theta$; $Z^3(r, \theta) = \nu_0(r) + \sum_{n=1}^{6} \nu_{2n}(r)\cos 2n\theta$. Коэффициенты $y_0(r), y_{2n}(r)$, $\nu_0(r), \nu_{2n}(r)$ связаны с коэффициентами $Z_0(r), Z_{2n}(r)$ сложными алгебраическими выражениями.

Случай с несимметричным расположением точечных источников тепла на внешнем контуре анизотропной пластины приводит к еще более сложному решению задачи стационарной теплопроводности и требует отдельного исследования.

Заключение

Зависимость теплофизических параметров композитного материала пластины от температуры $T(r, \theta)$ (2) может носить и более сложный характер, например квадратичная, экспоненциальная или логарифмическая зависимости. Ход решения остается таким же, как в настоящей работе, и только на конечном этапе для нахождения распределения температуры в анизотропной кольцевой пластине придется решать кубическое или трансцендентные уравнения для функции $T(r, \theta)$. Общим для всех случаев нелинейности является то, что распределение температуры $T(r, \theta)$ в анизотропных кольцевых пластинах является неосесимметричным.

Библиографические ссылки

1. *Уздалев А. И.* Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1967.
2. *Уздалев А. И., Брюханова Е. Н.* Уравнение теплопроводности для пластины переменной толщины с неоднородными теплофизическими свойствами // Задачи прикладной теории упругости : межвуз. научн. сб. Саратов : Саратов. политехн. ин-т, 1985. С. 3–7.
3. *Дмитриенко Ю. И.* Механика композиционных материалов при высоких температурах. М. : Машиностроение, 1997.
4. *Королевич В. В., Медведев Д. Г.* Стационарные температурные поля в анизотропных кольцевых пластинах переменной толщины с теплоизолированными основаниями // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2016. № 3. С. 160–165.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1976.
6. *Коваленко А. Д.* Круглые пластинки переменной толщины. М. : Физматгиз, 1959.
7. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями. М. : КомКнига, 2007.
8. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы : справ. пособие. Киев : Наука, 1986.

References

1. Uzdalev A. I. Nekotorye zadachi termouprugosti anizotropnogo tela [Some problems of thermoelasticity of an anisotropic body]. Saratov : Publ. House of the Saratov Univ., 1967 (in Russ.).
2. Uzdalev A. I., Bryukhanova E. N. Equations of thermal conductivity for plates of variable thickness with inhomogeneous thermophysical properties. *Zadachi prikladnoi teorii uprugosti* [Problems of Applied Theory of Elasticity] : Interuniv. sci. collect. Saratov : Saratov Polytech. Inst., 1985. P. 3–7 (in Russ.).
3. Dmitrienko Y. I. Mekhanika kompozitsionnykh materialov pri vysokikh temperaturakh [Mechanics of composite materials at high temperatures]. Moscow : Mashinostroenie, 1997 (in Russ.).
4. Karalevich U. V., Medvedev D. G. Solution of the axisymmetric stationary problems of the heat conductivity for the polar-orthotropic ring plate of variable thickness with thermally insulated bases and with themperature dependent thermophysical characteristics. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2016. No. 3. P. 160–165 (in Russ.).
5. Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam [Reference book of ordinary differential equations]. Moscow : Nauka, 1976 (in Russ.).
6. Kovalenko A. D. Kruglye plastinki peremennoi tolshchiny [Round plates of variable thickness]. Moscow : Fizmatgiz, 1959 (in Russ.).
7. Krasnov M. L., Kisilev A. I., Makarenko G. I. Integral'nye uravneniya: zadachi i primery s podrobnymi resheniyami [Integral equations: problems and examples with detailed solutions]. Moscow : KomKniga, 2007 (in Russ.).
8. Verlan' A. F., Sizikov V. S. Integral'nye uravneniya: metody, algoritmy, programmy [Integral equations: methods, algorithms, programs]. Kiev : Nauka, 1986 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 27.10.2017.
Received by editorial board 27.10.2017.