

УДК 512.542

О ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП С КОММУТАНТАМИ B -ПОДГРУПП

Е. В. ЗУБЕЙ¹⁾

¹⁾Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины,
ул. Советская, 104, 246007, г. Гомель, Беларусь

Конечная ненильпотентная группа называется B -группой, если в ее факторгруппе по подгруппе Фраттини все собственные подгруппы нильпотентны. Устанавливается r -разрешимость группы, в которой некоторая силовская r -подгруппа перестановочна с коммутантами 2-нильпотентных (или 2-замкнутых) B -подгрупп четного порядка группы, а также разрешимость группы, у которой коммутанты 2-замкнутых и 2-нильпотентных B -подгрупп четного порядка перестановочны.

Ключевые слова: конечная группа; r -разрешимая группа; силовская подгруппа; B -группа; коммутант; перестановочные подгруппы.

ON THE PERMUTABILITY OF SYLOW SUBGROUPS WITH DERIVED SUBGROUPS OF B -SUBGROUPS

E. V. ZUBEI^a

^aFrancisk Skorina Gomel State University, 104 Saveckaja Street, Gomel 246007, Belarus

A finite non-nilpotent group G is called a B -group if every proper subgroup of the quotient group $G/\Phi(G)$ is nilpotent. We establish the r -solubility of the group in which some Sylow r -subgroup permutes with the derived subgroups of 2-nilpotent (or 2-closed) B -subgroups of even order and the solubility of the group in which the derived subgroups of 2-closed and 2-nilpotent B -subgroups of even order are permutable.

Key words: finite group; r -solvable group; Sylow subgroup; B -group; the derived subgroup; permutable subgroups.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Начало изучения таких групп положила работа О. Ю. Шмидта [1]. Обзоры результатов о свойствах групп Шмидта, существовании подгрупп Шмидта и их некоторых приложениях в теории классов конечных групп приведены в [2; 3].

Одной из первых работ, посвященных перестановочности некоторых подгрупп с подгруппами Шмидта, является статья Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика [4]. Их результаты получили развитие в исследованиях В. Н. Княгиной и В. С. Монахова [5–7]. Группы с ограничениями на некоторые подгруппы Шмидта изучались в [8–13].

Образец цитирования:

Зубей ЕВ. О перестановочности силовских подгрупп с коммутантами B -подгрупп. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;1: 12–17.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-12-17>

For citation:

Zubei EV. On the permutability of Sylow subgroups with derived subgroups of B -subgroups. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;1:12–17. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-12-17>

Автор:

Екатерина Владимировна Зубей – аспирантка кафедры алгебры и геометрии факультета математики и технологий программирования. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор В. С. Монахов.

Author:

Ekaterina V. Zubei, postgraduate student at the department of algebra and geometry, faculty of mathematics and programming technologies.
ekaterina.zubey@yandex.ru

Я. Г. Беркович предложил называть B -группой группу, у которой факторгруппа по подгруппе Фраттини является группой Шмидта [14, с. 461]. Начальные свойства B -группы установлены в [15]. Ее строение во многом схоже со строением группы Шмидта: B -группа бипримарна, одна из силовских подгрупп нормальна, а другая – циклическая (см. лемму 1). Но есть и отличия: в группе Шмидта подгруппа Фраттини нормальной силовской подгруппы содержится в центре группы, а в B -группе это свойство нарушается. Примером служит диэдральная группа порядка 18, она является B -группой и не является группой Шмидта.

В настоящей работе устанавливается r -разрешимость группы при условии, что некоторая силовская r -подгруппа перестановочна с коммутантами 2-нильпотентных (или 2-замкнутых) B -подгрупп четного порядка группы, а также разрешимость группы, у которой коммутанты 2-замкнутых и 2-нильпотентных B -подгрупп четного порядка перестановочны.

Вспомогательные результаты

Все используемые обозначения и определения соответствуют [16; 17].

Полупрямое произведение нормальной в G подгруппы A и подгруппы B записывается так:

$$G = [A]B.$$

Через $Z(G)$, $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются центр, подгруппа Фиттинга и подгруппа Фраттини группы G соответственно, а через H^G – наименьшая нормальная в G подгруппа, содержащая подгруппу H .

Группа G с нормальной силовской p -подгруппой G_p называется p -замкнутой. Если в группе G имеется нормальная подгруппа $G_{p'}$, такая, что $G = [G_{p'}]G_p$, то группа G называется p -нильпотентной. Если порядок подгруппы H делится на простое число p , то говорят, что H – pd -подгруппа.

Следуя [3], будем использовать обозначение $S_{\langle p, q \rangle}$ для группы Шмидта с нормальной силовской p -подгруппой и ненормальной силовской q -подгруппой. B -группу, у которой $B/\Phi(B)$ является $S_{\langle p, q \rangle}$ -группой, будем называть $B_{\langle p, q \rangle}$ -группой. Ясно, что любая $S_{\langle p, q \rangle}$ -группа является $B_{\langle p, q \rangle}$ -группой.

Лемма 1 [15, лемма 2.2]. Пусть B – $B_{\langle p, q \rangle}$ -группа, P и Q – ее силовские p - и q -подгруппы. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) $B = [P]Q$;

(2) $P \cap \Phi(B) = \Phi(P)$, $P = B'$ и $P/\Phi(P)$ – главный фактор группы B порядка p^m , где m – показатель числа p по модулю q ;

(3) $Q = \langle y \rangle$ – циклическая подгруппа и $y^q \in Z(B)$. Кроме того, $\Phi(B) = \Phi(P) \times \langle y^q \rangle$ и $Z(B) \leq \Phi(B)$;

(4) если H – нормальная в B подгруппа и $H \neq B$, то H нильпотентна;

(5) если M – максимальная в B подгруппа, то либо M нормальна в B и $M = P \times \langle y^q \rangle$, либо $M = [\Phi(P)]Q^x$ для некоторого $x \in B$.

Лемма 2 [15, лемма 2.5]. Пусть U – нормальная в группе V подгруппа и V/U является $B_{\langle p, q \rangle}$ -группой. Если H – наименьшая в V подгруппа такая, что $HU = V$, то H будет $B_{\langle p, q \rangle}$ -группой.

Лемма 3. Если в группе G нет $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгрупп для всех $q \in \pi(G)$, то группа G p -нильпотентна.

Доказательство (индукцией по порядку группы). Если H – собственная в G подгруппа, то H удовлетворяет условию леммы и по индукции она p -нильпотентна. Теперь по [16, IV.5.4] группа G либо p -нильпотентна, либо является p -замкнутой группой Шмидта, а следовательно, и B -группой. Последнее исключается условием леммы. Лемма доказана.

Лемма 4. Если в группе G нет 2-нильпотентных B -подгрупп четного порядка, то группа G 2-замкнута.

Доказательство. По условию в группе G нет 2-нильпотентных B -подгрупп четного порядка. Поэтому в ней нет и 2-нильпотентных подгрупп Шмидта четного порядка. Значит, группа G 2-замкнута по [18, следствие 3.1]. Лемма доказана.

Обозначим: $S(G)$ – разрешимый радикал группы G , т. е. наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G ; $S_r(G)$ – наибольшая нормальная r -разрешимая подгруппа группы G для простого r .

Далее используется понятие X -перестановочности подгрупп, которое в 2003 г. предложил А. Н. Скиба [19] (см. также [20]). Пусть X – непустое подмножество группы G . Подгруппы A и B называются X -перестановочными, если существует элемент $x \in X$ такой, что $AB^x = B^xA$. Если $X = 1$ – единичная подгруппа, то 1-перестановочные подгруппы – это в точности перестановочные подгруппы. Ясно, что перестановочные подгруппы будут X -перестановочными для любого непустого множества X .

Лемма 5 [20, лемма 2.1]. Пусть A, B и X – подгруппы группы G , N – нормальная в G подгруппа. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) если A X -перестановочна с B , то B X -перестановочна с A ;
- (2) если A X -перестановочна с B , то AN/N XN/N -перестановочна с BN/N ;
- (3) если A X -перестановочна с B и X – нормальная подгруппа группы G , то AX/X перестановочна с BX/X ;
- (4) если A X -перестановочна с B и $X \leq Y \leq G$, то A Y -перестановочна с B ;
- (5) если A X -перестановочна с B и $X \leq A$ либо $X \leq B$, то A перестановочна с B .

Напомним, что подгруппа, порожденная коммутаторами всех элементов группы G , называется коммутантом группы G и обозначается G' . Таким образом, $G' = \langle [a, b] \mid a, b \in G \rangle$. Нам понадобятся следующие свойства коммутантов.

Лемма 6. (1) Если $H \leq G$, то $H' \leq G'$ [17, лемма 4.2].

(2) Пусть $N \triangleleft G$. Тогда $(G/N)' = G'N/N$ [17, лемма 4.6].

(3) Если $G = HN$ и $N \triangleleft G$, то $G'N = H'N$ [17, лемма 5.8].

Лемма 7. Если подгруппа U группы G перестановочна с коммутантом каждой $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппы группы G , то подгруппа U^x , $x \in G$, также перестановочна с коммутантом каждой $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппы группы G .

Доказательство. Пусть B – $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппа группы G . Тогда B^x тоже $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппа группы G и $(B^x)' = (B')^x$ для любого $x \in G$. По условию $U(B')^{x^{-1}} = (B')^{x^{-1}}U$. Тогда $(U(B')^{x^{-1}})^x = U^xB' = ((B')^{x^{-1}}U)^x = B'U^x$. Лемма доказана.

Лемма 8. Предположим, что в группе G силовская r -подгруппа перестановочна с коммутантом каждой $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппы.

(1) Если $U \leq G$, то силовская r -подгруппа из U перестановочна с коммутантом каждой $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппы из U .

(2) Если N – нормальная в G подгруппа, то силовская r -подгруппа из факторгруппы G/N перестановочна с коммутантом каждой $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппы из G/N .

(3) Если $U \leq G$ и N – нормальная в U подгруппа, то в U/N силовская r -подгруппа перестановочна с коммутантом каждой $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппы из U/N .

Доказательство. (1) Пусть R_1 – силовская r -подгруппа в U . Тогда существует такая силовская r -подгруппа R в G , что $R_1 \leq R$. Пусть S' – коммутант $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппы S из U . По условию $RS' = S'R$. По тождеству Дедекинда $U \cap RS' = (U \cap R)S' = R_1S' = S'R \cap U = S'(R \cap U) = S'R_1$.

(2) Пусть R – силовская r -подгруппа группы G . Тогда RN/N – силовская r -подгруппа в G/N . Пусть B/N – $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппа из G/N . По лемме 2 $B = B_1N$, где B_1 – $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппа. По условию $B_1'R = RB_1'$, а так как нормальная подгруппа перестановочна с любой подгруппой, то $RB_1'N = B_1'NR$. По утверждению (3) леммы 6 $B_1'N = B_1'N$. Значит,

$$R(B'N) = R(B_1'N) = (B_1'N)R = (B'N)R. \quad (1)$$

По утверждению (2) леммы 6

$$(B/N)' = B'N/N. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем

$$(RN/N)(B/N)' = (RN/N)(B'N/N) = (B'N/N)(RN/N) = (B/N)'(RN/N).$$

(3) Утверждение (3) следует из (1) и (2). Лемма доказана.

Замечание 1. Если в условии леммы 8 вместо $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппы рассмотреть $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппу, то аналог утверждения (1) будет выполняться, а (2) и (3) – нарушаться.

Признаки r -разрешимости группы

Теорема 1. Если некоторая силовская r -подгруппа группы G $S_r(G)$ -перестановочна со всеми коммутантами 2-нильпотентных B -подгрупп четного порядка, не содержащимися в $S_r(G)$, то группа G r -разрешима.

Доказательство (индукцией по порядку группы). Предположим, что $X = S_r(G) \neq 1$. Если факторгруппа G/X не содержит 2-нильпотентных B -подгрупп четного порядка, то она 2-замкнута по лемме 4, а значит, разрешима. В этом случае группа G r -разрешима и утверждение верно. Следовательно, в факторгруппе G/X содержится 2-нильпотентная B -подгруппа четного порядка B/X .

Пусть R – силовская r -подгруппа группы G , тогда RX/X – силовская r -подгруппа в G/X . По лемме 2 минимальное добавление L к X в B является 2-нильпотентной B -подгруппой четного порядка. Если L содержится в X , то $B = XL$ тоже содержится в X и $B/X = 1$, т. е. получено противоречие. Следовательно, L не содержится в X .

По условию RX -перестановочна с L' . По утверждению (3) леммы 5 RX/X перестановочна с $L'X/X$. Используя лемму 6, получаем

$$\begin{aligned} (RX/X)(B/X)' &= (RX/X)(B'X/X) = (RX/X)(L'X/X) = \\ &= (L'X/X)(RX/X) = (B'X/X)(RX/X) = (B/X)'(RX/X). \end{aligned}$$

Следовательно, RX/X перестановочна с коммутантом $(B/X)' = L'X/X$ 2-нильпотентной B -подгруппы четного порядка B/X и условия теоремы наследуются факторгруппой G/X . По индукции факторгруппа G/X r -разрешима, а значит, r -разрешима и группа G .

Теперь предположим, что $S_r(G) = 1$, и надо доказать следующее утверждение: если силовская r -подгруппа группы G перестановочна со всеми коммутантами 2-нильпотентных B -подгрупп четного порядка, то группа G r -разрешима. Докажем это утверждение индукцией по порядку группы G . Пусть U – собственная подгруппа группы G . По утверждению (1) леммы 8 в подгруппе U силовская r -подгруппа перестановочна с коммутантом каждой 2-нильпотентной B -подгруппы четного порядка. Значит, условия утверждения выполняются для собственной подгруппы U из группы G . Следовательно, по индукции подгруппа U r -разрешима.

Пусть R – силовская r -подгруппа и D – 2-нильпотентная B -подгруппа четного порядка группы G . По лемме 7 $R^x D' = D' R^x$ для любого $x \in G$. Тогда по лемме Кегеля [16, VI.4.10] имеем, что либо $R^G \neq G$, либо $(D')^G \neq G$. Значит, группа G непростая.

Рассмотрим факторгруппу G/N , $N \neq 1$. Тогда RN/N – силовская r -подгруппа в G/N . Пусть B/N – 2-нильпотентная B -подгруппа четного порядка из G/N . Используя утверждение (2) леммы 8, получим $(RN/N)(B/N)' = (B/N)'(RN/N)$. По индукции G/N r -разрешима, следовательно, G r -разрешима. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если некоторая силовская r -подгруппа группы G $S_r(G)$ -перестановочна со всеми коммутантами 2-замкнутых B -подгрупп четного порядка, не содержащимися в $S_r(G)$, то группа G r -разрешима.*

Доказательство. Применим индукцию к порядку группы G . Предположим, что $X = S_r(G) \neq 1$. Если в факторгруппе G/X нет 2-замкнутых B -подгрупп четного порядка, то она 2-нильпотентна по лемме 3, а значит, разрешима. В этом случае группа G r -разрешима и утверждение верно. Следовательно, в факторгруппе G/X содержится 2-замкнутая B -подгруппа четного порядка B/X . Далее, повторяя соответствующую часть доказательства теоремы 1, заменив в нем только 2-нильпотентность B -подгруппы на 2-замкнутость, получаем, что группа G r -разрешима.

Теперь предположим, что $S_r(G) = 1$, и надо доказать следующее утверждение: если силовская r -подгруппа группы G перестановочна со всеми коммутантами 2-замкнутых B -подгрупп четного порядка, то группа G r -разрешима. Доказательство проведем индукцией по порядку группы G . Пусть U – собственная подгруппа группы G . Тогда по утверждению (1) леммы 8 силовская r -подгруппа из U перестановочна с коммутантами 2-замкнутых B -подгрупп четного порядка из U . По индукции подгруппа U r -разрешима.

Пусть R – силовская r -подгруппа и D – 2-замкнутая B -подгруппа четного порядка группы G . По лемме 7 $R^x D' = D' R^x$ для любого $x \in G$. Тогда по лемме Кегеля [16, VI.4.10] получаем, что либо $R^G \neq G$, либо $(D')^G \neq G$. Значит, группа G непростая. Рассмотрим факторгруппу G/N , $1 \neq N \triangleleft G$. По утверждению (2) леммы 8 силовская RN/N r -подгруппа перестановочна с коммутантом 2-замкнутой B -подгруппы четного порядка из G/N . Тогда по индукции подгруппа G/N r -разрешима. Следовательно, группа G r -разрешима. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если в группе G коммутант каждой не содержащейся в $S(G)$ 2-замкнутой B -подгруппы четного порядка $S(G)$ -перестановочен с коммутантом каждой не содержащейся в $S(G)$ 2-нильпотентной B -подгруппы четного порядка, то группа G разрешима.*

Доказательство. Применим индукцию к порядку группы G . Пусть N – нормальная в G подгруппа, U/N и V/N – 2-замкнутая и 2-нильпотентная B -подгруппы четного порядка из G/N , не содержащиеся в $S(G/N)$. По лемме 2 $U = U_1N$ и $V = V_1N$, где U_1 и V_1 – 2-замкнутая и 2-нильпотентная B -подгруппы четного порядка соответственно. Если $U_1 \leq S(G)$, то $U/N = U_1N/N \leq S(G/N)$. Получено противоречие. Поэтому $U_1 \not\leq S(G)$, аналогично $V_1 \not\leq S(G)$.

По условию $U_1'V_1' = V_1'U_1'$. Так как нормальная подгруппа перестановочна с любой подгруппой, то

$$(U_1'N)(V_1'N) = (V_1'N)(U_1'N).$$

По лемме 6 $U_1'N = U'N$ и $V_1'N = V'N$, поэтому $(U'N)(V'N) = (V'N)(U'N)$. Также по лемме 6

$$(U/N)'(V/N)' = (V/N)'(U/N)'.$$

Таким образом, условия теоремы выполняются для факторгруппы G/N . Если $N \neq 1$, то по индукции G/N разрешима. Поэтому надо считать, что $S(G) = 1$.

Докажем, что группа G непростая. Пусть $H = [H_2]H_2$ – 2-замкнутая B -подгруппа четного порядка и $D = [D_2]D_2$ – 2-нильпотентная B -подгруппа четного порядка группы G . По условию $H_2D_2 = D_2H_2$ и подгруппа H_2D_2 разрешима как бипримарная группа. По лемме 7 $H_2D_2^x = D_2^xH_2$ для любого $x \in G$, в частности $G \neq H_2D_2$. По лемме Кегеля [16, VI.4.10] получаем, что либо $H_2^G \neq G$, либо $D_2^G \neq G$. Значит, группа G непростая.

Рассмотрим собственную подгруппу Y группы G . Пусть T и S – 2-замкнутая и 2-нильпотентная B -подгруппы четного порядка из Y соответственно. По условию $S'T' = T'S'$. Следовательно, для собственной подгруппы Y условия теоремы выполняются и по индукции Y разрешима.

Так как группа G непростая, то в ней существует отличная от единицы собственная нормальная подгруппа N . Подгруппа N и факторгруппа G/N разрешимы. Следовательно, группа G разрешима. Теорема доказана.

Замечание 2. Согласно теореме Буриченко [21], для любой группы X существует группа G и ее абелева нормальная подгруппа N такая, что $G/N \cong X$ и все подгруппы простых порядков и порядка 4 из G содержатся в подгруппе N . Так как в коммутанте каждой подгруппы Шмидта все неединичные элементы имеют простые порядки и порядок 4, то в группе G из теоремы Буриченко коммутанты всех подгрупп Шмидта содержатся в подгруппе N . В частности, в G коммутанты 2-нильпотентных и 2-замкнутых подгрупп Шмидта четного порядка перестановочны. Поэтому в теоремах 1–3 заменить B -подгруппу на подгруппу Шмидта нельзя.

Библиографические ссылки

1. Шмидт ОЮ. Группы, все подгруппы которых специальные. *Математический сборник*. 1924;31(3–4):366–372.
2. Кузенный НФ, Левищенко СС. Конечные группы Шмидта и их обобщения. *Український математичний журнал*. 1991; 43(7–8):963–968.
3. Монахов ВС. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения. В: *Труды Украинского математического конгресса: сборник трудов*. Киев: Институт математики НАН Украины; 2002. с. 81–90.
4. Беркович ЯГ, Пальчик ЭМ. О перестановочности подгрупп конечной группы. *Сибирский математический журнал*. 1967;8(4):741–753.
5. Княгина ВН, Монахов ВС. О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта. *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2010;16(3):130–139.
6. Княгина ВН, Монахов ВС. О перестановочности максимальных подгрупп с подгруппами Шмидта. *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2011;17(4):126–133.
7. Княгина ВН, Монахов ВС. О перестановочности n -максимальных подгрупп с подгруппами Шмидта. *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2012;18(3):125–130.
8. Монахов ВС. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта. *Математические заметки*. 1995;58(5):717–722.
9. Княгина ВН, Монахов ВС. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта. *Сибирский математический журнал*. 2004;45(6):1316–1322.
10. Княгина ВН, Монахов ВС. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта. *Алгебра и логика*. 2007;46(4): 448–458.
11. Ведерников ВА. Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта. *Алгебра и логика*. 2007;46(6):669–687.
12. Kniashina VN, Monakhov VS. Finite groups with Hall Schmidt subgroups. *Publicationes Mathematicae Debrecen*. 2012;81(3–4): 341–350.
13. Al-Sharo KhA, Skiba AN. On finite groups with σ -subnormal Schmidt subgroups. *Communications in Algebra*. 2017;45(10): 4158–4165. DOI: 10.1080/00927872.2016.1236938.

14. Berkovich Y, Janko Z. *Groups of Prime Power Order. Volume 3*. Berlin: Walter de Gruyter; 2011.
15. Княгина ВН. О произведении B -группы и примарной группы. *Проблемы физики, математики и техники*. 2017;3(32): 52–57.
16. Huppert B. *Endliche Gruppen I*. Berlin: Springer-Verlag; 1967. DOI: 10.1007/978-3-642-64981-3.
17. Монахов ВС. *Введение в теорию конечных групп и их классов*. Минск: Вышэйшая школа; 2006.
18. Монахов ВС. О подгруппах Шмидта конечных групп. *Вопросы алгебры*. 1998;13:153–171.
19. Скиба АН. H -permutable subgroups. *Известия Гомельского государственного университета*. 2003;4:37–39.
20. Guo W, Shum KP, Skiba AN. X -semipermutable subgroups of finite groups. *Journal of Algebra*. 2007;315(1):31–41. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2007.06.002.
21. Буриченко ВП. О группах, элементы малых порядков которых порождают малую подгруппу. *Математические заметки*. 2012;92(3):361–367. DOI: 10.4213/mzm8972.

References

1. Shmidt OJu. [Groups, whose all subgroups are special]. *Matematicheskii sbornik*. 1924;31(3–4):366–372. Russian.
2. Kuzennyi NF, Levishhenko SS. Schmidt's finite groups and their generalizations. *Ukrains'kyj matematychnyj zhurnal*. 1991; 43(7–8):963–968. Russian.
3. Monakhov VS. [The Schmidt subgroups, its existence, and some of their classes]. In: *Trudy Ukrainського математического конгресса: sbornik trudov*. Kiev: Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine; 2002. p. 81–90. Russian.
4. Berkovich YaG, Pal'chik JeM. [On the commutability of subgroups of a finite group]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal*. 1967; 8(4):741–753. Russian.
5. Knyagina VN, Monakhov VS. On permutability of Sylow subgroups with Schmidt subgroups. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdelenija Rossijskoj akademii nauk*. 2010;16(3):130–139. Russian.
6. Knyagina VN, Monakhov VS. On the permutability of maximal subgroups with Schmidt subgroups. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdelenija Rossijskoj akademii nauk*. 2011;17(4):126–133. Russian.
7. Knyagina VN, Monakhov VS. On the permutability of n -maximal subgroups with Schmidt subgroups. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdelenija Rossijskoj akademii nauk*. 2012;18(3):125–130. Russian.
8. Monakhov VS. [Finite groups with a given set of Schmidt subgroups]. *Matematicheskie zametki*. 1995;58(5):717–722. Russian.
9. Kniahina VN, Monakhov VS. [Finite groups with subnormal Schmidt subgroups]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal*. 2004; 45(6):1316–1322. Russian.
10. Kniahina VN, Monakhov VS. [Finite groups with seminormal Schmidt subgroups]. *Algebra i logika*. 2007;46(4):448–458. Russian.
11. Vedernikov VA. [Finite groups with subnormal Schmidt subgroups]. *Algebra i logika*. 2007;46(6):669–687. Russian.
12. Kniahina VN, Monakhov VS. Finite groups with Hall Schmidt subgroups. *Publicationes Mathematicae Debrecen*. 2012;81(3–4): 341–350.
13. Al-Sharo KhA, Skiba AN. On finite groups with σ -subnormal Schmidt subgroups. *Communications in Algebra*. 2017;45(10): 4158–4165. DOI: 10.1080/00927872.2016.1236938.
14. Berkovich Y, Janko Z. *Groups of Prime Power Order. Volume 3*. Berlin: Walter de Gruyter; 2011.
15. Kniahina VN. On the product of a B -group and a primary group. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*. 2017;3(32): 52–57. Russian.
16. Huppert B. *Endliche Gruppen I*. Berlin: Springer-Verlag; 1967. DOI: 10.1007/978-3-642-64981-3.
17. Monakhov VS. *Vvedenie v teoriju konechnyh grupp i ih klassov* [Introduction to the theory of finite groups and their classes]. Minsk: Vyshhejskaja shkola; 2006. Russian.
18. Monakhov VS. [On Schmidt subgroups of finite groups]. *Voprosy algebry*. 1998;13:153–171. Russian.
19. Skiba AN. H -permutable subgroups. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta*. 2003;4:37–39.
20. Guo W, Shum KP, Skiba AN. X -semipermutable subgroups of finite groups. *Journal of Algebra*. 2007;315(1):31–41. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2007.06.002.
21. Burichenko VP. [On groups whose small- order elements generate a small subgroup]. *Matematicheskie zametki*. 2012;92(3): 361–367. Russian. DOI: 10.4213/mzm8972.

Статья поступила в редколлегию 27.08.2018.
Received by editorial board 27.08.2018.