ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ
LETTER TO THE EDITORS

В статью А. Л. Гладкова и Т. В. Кавитовой «О начально-краевой задаче для нелокального параболического уравнения с нелокальным граничным условием», опубликованную в издании «Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика» (2018, № 1), необходимо внести исправления, не влияющие на приведенные в ней результаты. Текст после формулы (13) и до конца доказательства теоремы 2 следует изложить в новой редакции:

«Применяя принцип сравнения для решений задачи (8) при $\varepsilon_1 \le \varepsilon_2$, получим $u_{\varepsilon_1} \le u_{\varepsilon_2}$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в (13) и используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, можно сделать вывод, что функция $u_m(x, t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x, t)$ удовлетворяет в Q_T уравнению

$$u_m(x, t) = \int\limits_\Omega G(x, y; t) u_0(y) dy +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_\Omega G(x, y; t - \tau)\left(a(y, \tau) u_m^r(y, \tau) \int\limits_\Omega u_m^p(\eta, \tau) d\eta - b(y, \tau) u_m^q(y, \tau)\right) dy\, d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, \xi; t - \tau)}{\partial n} \int\limits_\Omega k(\xi, y, \tau) u_m^l(y, \tau) dy\, dS_\xi\, d\tau.$$

В силу свойств функции Грина функция $u_m(x, t)$ является решением задачи (1)–(3) в Q_T. Несложно показать, что $u_m(x, t)$ – максимальное решение задачи (1)–(3) в Q_T. Теорема доказана».

Доказательство теоремы 3 следует изложить в новой редакции:

«Пусть $w(x, t) = \bar{u}(x, t) - \underline{u}(x, t)$ и $T_0 \in (0, T)$. Тогда $w(x, t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\begin{cases} w_t \ge \Delta w + a(x, t)\left\{ r\theta_1^{r-1}(x, t) w \int\limits_\Omega \bar{u}^p(y, t) dy + p\underline{u}^r \int\limits_\Omega \theta_2^{p-1}(y, t) w(y, t) dy \right\} - \\ - b(x, t)\left(\bar{u}^q - \underline{u}^q\right),\ (x, t) \in Q_{T_0}, \\ w(x, t) \ge l \int\limits_\Omega k(x, y, t) \theta_3^{l-1}(y, t) w(y, t) dy,\ (x, t) \in S_{T_0}, \\ w(x, 0) \ge 0,\ x \in \Omega, \end{cases} \tag{14}$$

где $\theta_i(x, t)$ $(i = 1, 2, 3)$ – неотрицательные непрерывные в $\bar{Q}_{T_0}$ функции, удовлетворяющие в силу условий теоремы соотношению

$$\sup_{Q_{T_0}} \left(r\theta_1^{r-1}(x, t) + p\theta_2^{p-1}(x, t) + l\theta_3^{l-1}(x, t)\right) \le \theta, \tag{15}$$

здесь θ – некоторая положительная постоянная. Отметим, что справедливы неравенства

$$0 \le a(x, t) \le M,\ 0 \le \underline{u}(x, t) \le M,\ 0 \le \bar{u}(x, t) \le M,\ (x, t) \in \bar{Q}_{T_0}, \tag{16}$$

где M – некоторая положительная постоянная.

Предположим, что функция $\psi(x) \in C^2(\bar{\Omega})$ и постоянная λ обладают следующими свойствами:

$$\begin{gathered} 0 < \psi(x) \le 1 \text{ в } \bar{\Omega},\ \psi(x) \equiv 1 \text{ на } \partial\Omega, \\ l \int\limits_\Omega k(x, y, t) \theta_3^{l-1}(y, t) \psi(y) dy < 1 \text{ на } \bar{S}_{T_0}, \\ \lambda > M^{p+1} \theta |\Omega| + \max_{\bar{\Omega}} \frac{\Delta\psi(x) + M^{r+1}\theta|\Omega|}{\psi(x)}, \end{gathered} \tag{17}$$

где $|\Omega|$ – мера Лебега множества Ω.

Положим

$$w(x, t) = \exp(\lambda t)\psi(x)h(x, t). \tag{18}$$

Докажем, что $w(x, t) \geq 0$ в $\bar{Q}_{T_0}$. Предположим, что это неверно. Тогда существует точка $(x_1, t_1) \in \Omega \times$ $\times (0, T_0]$ такая, что $\min\limits_{\bar{Q}_{T_0}} h(x, t) = h(x_1, t_1) < 0$. Если $x_1 \in \Omega$, то

$$h_t(x_1, t_1) \leq 0,\ \nabla h(x_1, t_1) = \vec{0},\ \Delta h(x_1, t_1) \geq 0.$$

Учитывая последние соотношения и (15)−(17), подставив выражение для $w(x, t)$ из (18) в первое неравенство из (14), в точке (x_1, t_1) получим

$$0 \geq h_t \geq -\lambda h + \frac{\Delta\psi}{\psi} h + \Delta h + 2\frac{\nabla\psi\nabla h}{\psi} + M^{p+1}\theta|\Omega| h + \frac{M^{r+1}\theta|\Omega|}{\psi} h - \frac{b}{\psi}\exp(-\lambda t_1)\left(\bar{u}^q - \underline{u}^q\right) \geq$$

$$\geq \left(-\lambda + \frac{\Delta\psi}{\psi} + M^{p+1}\theta|\Omega| + \frac{M^{r+1}\theta|\Omega|}{\psi}\right) h > 0.$$

Если $x_1 \in \partial\Omega$, то в силу (17), (18) и второго неравенства из (14) имеем

$$h(x_1, t_1) \geq l\int\limits_{\Omega} k(x_1, y, t_1)\theta_3^{l-1}(y, t_1)\psi(y)dy \cdot h(x_1, t_1) > h(x_1, t_1).$$

Так как T_0 можно выбрать произвольным в промежутке $(0, T)$, то полученные выше противоречия доказывают утверждение теоремы. Теорема доказана».

А. Л. Гладков[1], Т. В. Кавитова[2]

[1]***Александр Львович Гладков*** – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой математической кибернетики механико-математического факультета БГУ.

Alexander L. Gladkov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University.

gladkoval@bsu.by

[2]***Татьяна Валерьевна Кавитова*** – старший преподаватель кафедры геометрии и математического анализа факультета математики и информационных технологий ВГУ имени П. М. Машерова.

Tatiana V. Kavitova, senior lecturer at the department of geometry and mathematical analysis, faculty of mathematics and information technologies, Vitebsk State University named after P. M. Masherov.

kavitovatv@tut.by