УДК 517.9

РАЦИОНАЛЬНЫЕ МНЕМОФУНКЦИИ НА $\mathbb{R}$

Т. Г. ШАГОВА[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Рассмотрено подпространство распределений, у которых в аналитическом представлении $f = \left(f^{+},\ f^{-}\right)$ функции $f^{\pm}$ являются правильными рациональными функциями. Построено вложение этого пространства в подалгебру рациональных мнемофункций на прямой посредством отображения

$$R_a(f) = f_\varepsilon(x) = f^{+}(x + i\varepsilon) - f^{-}(x - i\varepsilon).$$

Приведено полное описание данной подалгебры: выделены ее образующие, сформулировано в явном виде правило умножения распределений в ней. С позиции рациональных мнемофункций проанализированы известные случаи, когда произведение распределений является не мнемофункцией, как в общем случае, а распределением. Сформулированы условия, при которых произведение произвольных рациональных распределений ассоциировано с распределением.

Ключевые слова: мнемофункция; аналитическое представление распределения; алгебра рациональных мнемофункций.

Образец цитирования:
Шагова ТГ. Рациональные мнемофункции на $\mathbb{R}$. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;2:6–17.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-6-17

For citation:
Shahava TR. Rational mnemofunctions on $\mathbb{R}$. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019; 2:6–17. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-6-17

Автор:
Татьяна Григорьевна Шагова – аспирантка кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор А. Б. Антоневич.

Author:
Tatsiana R. Shahava, postgraduate student at the department of functional analysis and analytical economics, faculty of mechanics and mathematics.
tanya.shagova@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-2634-4699

RATIONAL MNEMOFUNCTIONS ON $\mathbb{R}$

T. R. SHAHAVA[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

The subspace of rational distributions was considered it this paper. Distribution is called rational if it has analytical representation $f = \left(f^{+}, f^{-}\right)$ where functions $f^{\pm}$ are proper rational functions. The embedding of the rational distributions subspace into the rational mnemofunctions algebra on $\mathbb{R}$ was built by the mean of mapping

$$R_a(f) = f_\varepsilon(x) = f^{+}(x + i\varepsilon) - f^{-}(x - i\varepsilon).$$

A complete description of this algebra was given. Its generators were singled out; the multiplication rule of distributions in this algebra was formulated explicitly. Known cases when product of distributions is a distribution were analyzed by the terms of rational mnemofunctions theory. The conditions under which the product of arbitrary rational distributions is associated with a distribution were formulated.

Keywords: mnemofunction; analytical representation of distribution; algebra of rational mnemofunctions.

Введение

Еще в 1954 г. Л. Шварцем было показано, что невозможно корректно определить операцию умножения в пространстве обобщенных функций. Это препятствовало применению классической теории обобщенных функций (распределений) к решению нелинейных задач и уравнений с обобщенными коэффициентами. Основной подход к преодолению указанного препятствия заключается во введении новых объектов, сохраняющих ряд свойств обобщенных функций и образующих алгебру. Такие объекты называют новыми обобщенными функциями, или мнемофункциями. При этом строятся вложения пространства распределений в алгебру новых обобщенных функций, что позволяет определить произведение распределений как элемент построенной алгебры. На основе анализа конструкций, предложенных Ж. Ф. Коломбо [1], Ю. В. Егоровым [2] и др., в работе [3] описан общий метод построения таких алгебр.

В данной статье рассмотрена подалгебра в алгебре мнемофункций на прямой, порожденная правильными рациональными функциями. Для таких мнемофункций получено явное описание правила умножения.

Алгебра мнемофункций на прямой

Пространство основных функций $D(\mathbb{R})$ состоит из бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций с компактным носителем. Пространство обобщенных функций (распределений) $D'(\mathbb{R})$ определяется как сопряженное к пространству $D(\mathbb{R})$, т. е. состоит из линейных непрерывных функционалов на $D(\mathbb{R})$ [4]. Значение функционала f на основной функции φ будем обозначать $\langle f, \varphi\rangle$.

Алгебра мнемофункций на прямой строится следующим образом. Сначала рассматривается множество $\tilde{G}(\mathbb{R})$, состоящее из всех семейств f_ε бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций, зависящих от малого положительного параметра ε, таких, что для каждого f_ε, любого отрезка $[-a, a]$ и всякого $k \in \mathbb{N}$ существуют такие $C > 0$ и $m \in \mathbb{R}$, что имеет место оценка

$$\left|f_\varepsilon^{(k)}(x)\right| \le C\varepsilon^m,\ x \in [-a, a].$$

Далее рассматривается подмножество в $\tilde{G}(\mathbb{R})$, состоящее из семейств, быстро стремящихся к нулю:

$$J(\mathbb{R}) = \left\{g_\varepsilon : \forall[-a, a],\ \forall k \in \mathbb{N} \text{ и } m \in \mathbb{R}\ \exists C : \left|g_\varepsilon^{(k)}(x)\right| \le C\varepsilon^m,\ x \in [-a, a]\right\}.$$

$\tilde{G}(\mathbb{R})$ является дифференциальной алгеброй, а $J(\mathbb{R})$ есть идеал в ней, следовательно, определена фактор-алгебра $G(\mathbb{R})=\tilde{G}(\mathbb{R})/J(\mathbb{R})$, которая называется *алгеброй мнемофункций на прямой*, а ее элементы – классы эквивалентности $[f_\varepsilon]$, содержащие семейства $f_\varepsilon \in \tilde{G}(\mathbb{R})$, – мнемофункциями.

В алгебре $G(\mathbb{R})$ содержится подалгебра мнемочисел $\mathbb{C}^*$, порожденная постоянными, т. е. семействами $w(\varepsilon)$, не зависящими от x.

Связь мнемофункций с распределениями устанавливается с помощью понятия ассоциированности. Говорят, что мнемофункция $[f_\varepsilon]$ *ассоциирована с распределением* $f \in D'(\mathbb{R})$, если семейство f_ε сходится в $D'(\mathbb{R})$ к f, т. е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx=\langle f,\ \varphi\rangle,\ \forall\varphi\in D(\mathbb{R}).$$

В общем случае информацию о мнемофункции дает анализ асимптотического поведения величин $\langle f_\varepsilon,\ \varphi\rangle$, для которых в пространстве $D'(\mathbb{R})$ часто существует асимптотическое разложение вида

$$\langle f_\varepsilon,\ \varphi\rangle \approx \sum_{k=k_0}^{\infty}\langle u_k,\ \varphi\rangle\varepsilon^k,\ u_k\in D'(\mathbb{R}). \tag{1}$$

Равенство (1) означает асимптотическую сходимость, т. е. для любого N и каждого $\varphi\in D(\mathbb{R})$

$$\sum_{k=k_0}^{N}\langle u_k,\ \varphi\rangle\varepsilon^k-\langle f_\varepsilon,\ \varphi\rangle=o(\varepsilon^N).$$

Методом аппроксимации называется линейное отображение $R: D'(\mathbb{R})\to\tilde{G}(\mathbb{R})$, ставящее в соответствие распределению f семейство гладких функций f_ε, сходящееся к f в $D'(\mathbb{R})$. Метод аппроксимации порождает вложение пространства распределений в алгебру $G(\mathbb{R})$. Тогда произведением произвольных распределений называется мнемофункция

$$f\otimes_R g=R(f)R(g)\in G(\mathbb{R}). \tag{2}$$

Если произведение $R(f)R(g)$ ассоциировано с некоторым распределением h, то полагаем это распределение h произведением fg, порожденным заданным способом аппроксимации R. В общем случае информацию о поведении произведения $f_\varepsilon g_\varepsilon$ дает его асимптотическое разложение (1).

Аналитическое представление рациональных распределений

Рассмотрим часто используемый в анализе способ аппроксимации, основанный на известном аналитическом представлении распределений [5].

Аналитическим представлением распределения f будем называть пару функций $(f^+,\ f^-)$, где f^+ является аналитической в верхней полуплоскости, а f^- – в нижней полуплоскости, таких, что для любых $\varphi\in D(\mathbb{R})$

$$\langle f,\ \varphi\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f^+(x+i\varepsilon)-f^-(x-i\varepsilon)\right]\varphi(x)\,dx.$$

В силу утверждения п. 1.9 [5] аналитическое представление существует для любого распределения, однако в общем случае представление распределений через аналитические функции не единственно, оно определено с точностью до целой функции. Значит, и произведение аналитических представлений будет определяться неоднозначно. Отметим для сравнения, что при рассмотрении распределений на окружности $S=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$, проведенном в [6], проблемы неединственности произведения аналитических представлений не возникает, так как из условия, что функция $f^-(z)$, аналитическая при $|z|>1$, стремится к нулю на бесконечности, аналитическое представление определяется однозначно.

В данной работе будем рассматривать подпространство рациональных распределений, для которых аналитическое представление определяется однозначно, что позволит определить произведение рациональных распределений единственным образом.

Распределение f будем называть *рациональным*, если при его аналитическом представлении $f^\pm$ являются правильными рациональными функциями. Нетрудно показать, что всякая пара правильных рациональных функций $(f^+,\ f^-)$, где f^+ аналитическая в верхней полуплоскости, а f^- – в нижней полуплоскости, есть аналитическое представление некоторого распределения.

Обозначим $D'_R(\mathbb{R})$ подпространство пространства распределений, состоящее из рациональных распределений. На пространстве $D'_R(\mathbb{R})$ определим два оператора:

$$(P^+f)(z) := f^+(z),$$

$$(P^-f)(z) := f^-(z).$$

Таким образом, аналитическое представление задает изоморфизм $f \to (P^+f,\ P^-f) = (f^+,\ f^-)$ пространства рациональных распределений и пространства кусочно-аналитических функций, т. е. пар правильных рациональных функций $(f^+,\ f^-)$, аналитических в верхней и нижней полуплоскостях соответственно. Аналитическое представление рационального распределения f порождает его естественную аппроксимацию гладкими функциями

$$R_a(f) := f_\varepsilon(x) = f^+(x+i\varepsilon) - f^-(x-i\varepsilon) = (P^+f)(x+i\varepsilon) - (P^-f)(x-i\varepsilon). \quad (3)$$

Формула (3) задает вложение пространства $D'_R(\mathbb{R})$ в алгебру мнемофункций, и произведение распределений определяется с помощью формулы (2), где, в свою очередь, $R_a(f)R_a(g)$ можно представить в виде разности рациональной функции, аналитической в верхней полуплоскости, и рациональной функции, аналитической в нижней полуплоскости, которые зависят от ε, т. е. $R_a(f)R_a(g)$ также имеет аналитическое представление, зависящее от ε. Опишем это произведение более детально.

Рассмотрим рациональные распределения $f = (f^+,\ f^-)$ и $g = (g^+,\ g^-)$, тогда согласно (2)

$$f \otimes_{R_a} g = R_a(f)R_a(g) = \left(f^+(x+i\varepsilon) - f^-(x-i\varepsilon)\right)\left(g^+(x+i\varepsilon) - g^-(x-i\varepsilon)\right) =$$
$$= f^+(x+i\varepsilon)g^+(x+i\varepsilon) + f^-(x-i\varepsilon)g^-(x-i\varepsilon) - \left[f^+(x+i\varepsilon)g^-(x-i\varepsilon) + f^-(x-i\varepsilon)g^+(x+i\varepsilon)\right].$$

Здесь

$$f^+(x+i\varepsilon)g^+(x+i\varepsilon) = R_a(f^+g^+,\ 0),$$

$$f^-(x-i\varepsilon)g^-(x-i\varepsilon) = R_a(0,\ -f^-g^-),$$

их сумма – аппроксимирующее семейство для рационального распределения с аналитическим представлением $(f^+g^+,\ -f^-g^-)$, а $\gamma_\varepsilon(x) := -f^+(x+i\varepsilon)g^-(x-i\varepsilon) - f^-(x-i\varepsilon)g^+(x+i\varepsilon)$ есть рациональная функция, аналитическая на прямой, имеющая аналитическое представление $(\gamma_\varepsilon^+(z),\ \gamma_\varepsilon^-(z))$, зависящее от ε, которое можно получить, применив операторы $P^\pm$ к функции $\gamma_\varepsilon(x)$.

Таким образом, справедлива следующая теорема, описывающая правило умножения рациональных распределений.

Теорема 1. *Результат умножения рациональных распределений $f = (f^+,\ f^-)$ и $g = (g^+,\ g^-)$ может быть представлен в виде*

$$R_a(f)R_a(g) = h_\varepsilon^+(x+i\varepsilon) - h_\varepsilon^-(x-i\varepsilon),$$

где

$$h_\varepsilon^\pm(z) = \pm f^\pm(z)g^\pm(z) \pm (P^\pm\gamma_\varepsilon)(z).$$

Следствие 1. *Если $f = (f^+,\ 0)$ и $g = (g^+,\ 0)$, то*

$$(f^+,\ 0)(g^+,\ 0) = (f^+g^+,\ 0). \quad (4)$$

Следствие 2. *Если $f = (0,\ f^-)$ и $g = (0,\ g^-)$, то*

$$(0,\ f^-)(0,\ g^-) = (0,\ -f^-g^-). \quad (5)$$

Основная сложность при описании свойств произведения рациональных распределений сводится к исследованию поведения семейств аналитических функций $\gamma_\varepsilon^+(z) = \left(P^+\gamma_\varepsilon\right)(z)$ и $\gamma_\varepsilon^-(z) = \left(P^-\gamma_\varepsilon\right)(z)$, которое будет проведено ниже.

Алгебра рациональных мнемофункций

Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены с комплексными коэффициентами, есть правильная рациональная функция. Если

$$Q(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - z_k)^{p_k},$$

то рациональную функцию $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить следующим образом:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}\frac{B_{kj}}{(x - z_k)^j}.$$

Тогда если аналитическое представление рационального распределения f есть пара $\left(f^+,\ f^-\right)$, то, исходя из условия рациональности, аналитическая при $\mathrm{Im}z > 0$ функция f^+ имеет вид

$$f^+(z) = \sum_{k=1}^{n^+}\sum_{j=1}^{p_k^+}\frac{B_{kj}^+}{(z - z_k)^j},\ \text{где } \mathrm{Im}z_k \le 0.$$

Аналогично, поскольку функция f^-, аналитическая при $\mathrm{Im}z < 0$, рациональна:

$$f^-(z) = \sum_{k=1}^{n^-}\sum_{j=1}^{p_k^-}\frac{B_{kj}^-}{(z - z_k)^j},\ \text{где } \mathrm{Im}z_k \ge 0.$$

Алгеброй рациональных мнемофункций $\mathfrak{R}(\mathbb{R})$ будем называть алгебру над $\mathbb{C}^*$, порожденную элементами $R_a(f)$, где $f \in D_R'(\mathbb{R})$. Опишем правило умножения в этой алгебре.

Для удобства введем следующие обозначения. Рациональное распределение, имеющее аналитическое представление $\left(\frac{1}{(z-\xi)^n},\ 0\right)$, $\mathrm{Im}\xi \le 0$, будем обозначать $\frac{1}{(z-\xi)^{n+}}$, а распределение с аналитическим представлением $\left(0,\ -\frac{1}{(z-\eta)^n}\right)$, $\mathrm{Im}\eta \ge 0$, – через $\frac{1}{(z-\eta)^{n-}}$.

Так как для любого $f \in D_R'(\mathbb{R})$ функции $f^\pm$ представляются в виде суммы элементарных дробей, то задача умножения рациональных распределений сводится к определению произведения распределений вида $\frac{1}{(z-\xi)^{n+}}$ и $\frac{1}{(z-\eta)^{n-}}$. Отметим, что в силу следствий из теоремы 1 произведение распределений с аналитическими представлениями $\left(f^+,\ 0\right)$ и $\left(g^+,\ 0\right)$, а также с представлениями $\left(0,\ f^-\right)$ и $\left(0,\ g^-\right)$ определено. Следовательно, задача состоит в анализе произведения распределений $f = \left(f^+,\ 0\right)$ и $g = \left(0,\ g^-\right)$.

Лемма 1. *Пусть* $\mathrm{Im}\xi \le 0$ *и* $\mathrm{Im}\eta \ge 0$. *Тогда произведение распределений* $\frac{1}{(z-\xi)^+}$ *и* $\frac{1}{(z-\eta)^-}$ *находится по формуле*

$$R_a\left(\frac{1}{z-\xi},\ 0\right)R_a\left(0,\ -\frac{1}{z-\eta}\right) = c(\xi;\ \eta;\ \varepsilon)R_a\left(\frac{1}{z-\xi},\ 0\right) - c(\xi;\ \eta;\ \varepsilon)R_a\left(0,\ -\frac{1}{z-\eta}\right), \tag{6}$$

где $c(\xi;\ \eta;\ \varepsilon) = \frac{1}{\xi - \eta - 2i\varepsilon}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аппроксимирующее семейство, или мнемофункция, для распределения $\frac{1}{(z-\xi)^+}$ имеет вид

$$R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^+}\right)=\frac{1}{x+i\varepsilon-\xi},$$

в то время как аппроксимирующее семейство для $\frac{1}{(z-\eta)^-}$

$$R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^-}\right)=\frac{1}{x-i\varepsilon-\eta}.$$

Тогда произведение мнемофункций

$$R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^+}\right)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^-}\right)=\frac{1}{x+i\varepsilon-\xi}\,\frac{1}{x-i\varepsilon-\eta}=\frac{1}{\xi-\eta-2i\varepsilon}\,\frac{1}{x+i\varepsilon-\xi}-$$
$$-\frac{1}{\xi-\eta-2i\varepsilon}\,\frac{1}{x-i\varepsilon-\eta}=\frac{c(\xi;\,\eta;\,\varepsilon)}{x+i\varepsilon-\xi}-\frac{c(\xi;\,\eta;\,\varepsilon)}{x-i\varepsilon-\eta},\tag{7}$$

где

$$c(\xi;\,\eta;\,\varepsilon)=\frac{1}{\xi-\eta-2i\varepsilon}.$$

Таким образом, выделив аппроксимирующие семейства распределений $\frac{1}{(z-\xi)^+}$ и $\frac{1}{(z-\eta)^-}$ в последней части равенства (7), получаем требуемое.

Замечание. Следует отметить, что на уровне аппроксимирующих семейств применение операторов $P^{\pm}$ к произведению аналитических представлений рациональных распределений свелось к разложению произведения аппроксимирующих семейств на элементарные дроби, что позволило получить явное выражение для этого произведения.

Следующая теорема дает полное описание алгебры рациональных мнемофункций.

Теорема 2. *Алгебра рациональных мнемофункций* $\Re(\mathbb{R})$ *состоит из элементов вида*

$$\sum_{k=1}^{n^+}\sum_{j=1}^{p_k^+}\frac{A_{kj}^+(\varepsilon)}{\left(x+i\varepsilon-\xi_k\right)^j}+\sum_{k=1}^{n^-}\sum_{j=1}^{p_k^-}\frac{B_{kj}^-(\varepsilon)}{\left(x-i\varepsilon-\eta_k\right)^j},$$

где $\operatorname{Im}\xi_k\le 0$; $\operatorname{Im}\eta_k\ge 0$; $A_{kj}^+(\varepsilon)\in\mathbb{C}^*$, $B_{kj}^-(\varepsilon)\in\mathbb{C}^*$.

В этой алгебре элементы $\frac{1}{x+i\varepsilon-\xi}$ *и* $\frac{1}{x-i\varepsilon-\eta}$ *являются образующими, и правило умножения однозначно определяется формулами (4)–(6).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть рациональное распределение f имеет аналитическое представление $f=\left(f^+,\ f^-\right)$, где

$$f^+(z)=\sum_{k=1}^{n^+}\sum_{j=1}^{p_k^+}\frac{A_{kj}^+}{\left(z-z_k\right)^j},\ \operatorname{Im}z_k\le 0,\ \text{и}\ f^-(z)=\sum_{k=1}^{n^-}\sum_{j=1}^{p_k^-}\frac{A_{kj}^-}{\left(z-z_k\right)^j},\ \operatorname{Im}z_k\ge 0.$$

И рациональное распределение $g=\left(g^+,\ g^-\right)$, где

$$g^+(z)=\sum_{k=1}^{m^+}\sum_{j=1}^{q_k^+}\frac{B_{kj}^+}{\left(z-\xi_k\right)^j},\ \operatorname{Im}\xi_k\le 0,\ \text{и}\ g^-(z)=\sum_{k=1}^{m^-}\sum_{j=1}^{q_k^-}\frac{B_{kj}^-}{\left(z-\xi_k\right)^j},\ \operatorname{Im}\xi_k\ge 0.$$

Из вида аналитических представлений функций f и g следует, что правило умножения рациональных распределений сводится к определению произведений вида $\frac{1}{(z-\xi)^{n+}}\frac{1}{(z-\eta)^{m+}}$, $\frac{1}{(z-\xi)^{n-}}\frac{1}{(z-\eta)^{m-}}$ и $\frac{1}{(z-\xi)^{n+}}\frac{1}{(z-\eta)^{m-}}$.

Согласно следствию 1 из теоремы 1 произведение распределений $\frac{1}{(z-\xi)^{n+}}$ и $\frac{1}{(z-\eta)^{m+}}$, где $\operatorname{Im}\xi \le 0$, $\operatorname{Im}\eta \le 0$, определено для любых m, n и находится следующим образом:

$$\frac{1}{(z-\xi)^{n+}}\frac{1}{(z-\eta)^{m+}} = \left(\frac{1}{(z-\xi)^{n}(z-\eta)^{m}},\ 0\right).$$

Аналогично для распределений $\frac{1}{(z-\xi)^{n-}}$ и $\frac{1}{(z-\eta)^{m-}}$, где $\operatorname{Im}\xi \ge 0$, $\operatorname{Im}\eta \ge 0$, произведение определено согласно следствию 2 из теоремы 1 и находится по правилу

$$\frac{1}{(z-\xi)^{n-}}\frac{1}{(z-\eta)^{m-}} = \left(0,\ -\frac{1}{(z-\xi)^{n}(z-\eta)^{m}}\right).$$

Покажем, что произведения рациональных распределений с аналитическими представлениями $\left(\frac{1}{(z-\xi)^{n}}, 0\right)$ и $\left(0, -\frac{1}{(z-\eta)^{m}}\right)$ находятся с помощью равенства (6).

Пусть $m = 1$, $n = 2$:

$$R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{2+}}\right)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{-}}\right) = R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{+}}\right)\left(c(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{+}}\right) - c(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{-}}\right)\right) =$$

$$= c(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{2+}}\right) - c^2(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{+}}\right) + c^2(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{-}}\right).$$

Пусть $m = 2$, $n = 1$:

$$R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{+}}\right)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{2-}}\right) = R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{-}}\right)\left(c(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{+}}\right) - c(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{-}}\right)\right) =$$

$$= c^2(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{+}}\right) - c^2(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{-}}\right) - c(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{2-}}\right).$$

Следовательно, произведение второй и первой степеней находится через произведение первых степеней. Таким же образом, т. е. через соотношение (6), находится произведение вторых степеней распределений.

Пусть $m = 2$, $n = 2$:

$$R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{2+}}\right)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{2-}}\right) = \left(c(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{2+}}\right) - c^2(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{+}}\right) +\right.$$

$$\left.+\, c^2(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{-}}\right)\right)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{-}}\right) = c^2(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{2+}}\right) -$$

$$-\, 2c^3(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{+}}\right) + 2c^3(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{-}}\right) + c^2(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{2-}}\right).$$

Произведения других степеней получаются аналогично с помощью рекуррентных соотношений через произведение первых степеней. Следовательно, выражение (6) задает правило умножения распределений вида $\frac{1}{(z-\xi)^{n+}}$ и $\frac{1}{(z-\eta)^{m-}}$.

Исходя из вышесказанного, произведение распределений в алгебре $\Re(\mathbb{R})$ определено, и элементы $\frac{1}{x+i\varepsilon-\xi}$ и $\frac{1}{x-i\varepsilon-\eta}$ являются в ней образующими.

Произведения рациональных распределений, ассоциированные с распределениями

Проведем детальный анализ произведения (6) из леммы 1.

Если $\xi \neq \eta$, то существует конечный предел коэффициента $c(\xi;\ \eta;\ \varepsilon)$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} c(\xi;\ \eta;\ \varepsilon) = \frac{1}{\xi-\eta}.$$

Это значит, что произведение распределений $\frac{1}{(z-\xi)^{+}}$ и $\frac{1}{(z-\eta)^{-}}$ будет ассоциировано с распределением, имеющим аналитическое представление

$$\left(\frac{1}{\xi-\eta}\frac{1}{z-\xi},\ \frac{1}{\xi-\eta}\frac{1}{z-\eta}\right).$$

Наиболее интересен случай, когда $\xi = \eta$ и $\xi \in \mathbb{R}$, т. е. когда рассматриваемые распределения имеют особенности в одной точке. Тогда произведение (6) не ассоциировано с распределением, так как коэффициент $c(\xi;\ \eta;\ \varepsilon) = c(\varepsilon) = -\frac{1}{2i\varepsilon}$ является бесконечно большим при $\varepsilon \to 0$. Однако в алгебре мнемофункций это произведение равно дельта-функции с бесконечно большим коэффициентом, а именно $\frac{\pi}{\varepsilon}R_a(\delta_\xi)$, что вытекает из равенства (7) и аналитического представления дельта-функции, сосредоточенной в точке $\xi \in \mathbb{R}$, которое получено из формул Сохоцкого [4]:

$$\delta_\xi = \left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\xi},\ -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\xi}\right).$$

Тогда мнемофункция, ассоциированная с δ_ξ, есть

$$R_a(\delta_\xi) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i\varepsilon-\xi} - \frac{1}{x-i\varepsilon-\xi}\right),$$

и

$$R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{+}}\right)R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{-}}\right) = \frac{\pi}{\varepsilon}\left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{x+i\varepsilon-\xi} + \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{x-i\varepsilon-\xi}\right) = \frac{\pi}{\varepsilon}R_a(\delta_\xi).$$

В общем случае асимптотическое разложение сингулярных распределений содержит бесконечно большие коэффициенты, но рассмотренный пример показывает, что для таких распределений возможны случаи, когда их произведение ассоциировано с распределением.

В книге [7] приведены только три примера, когда произведением распределений с особенностью в одной точке является распределение. Это произведения $\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right)\delta$, $\left(\delta + \frac{1}{\pi i}\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$, $\left(\delta - \frac{1}{\pi}\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(\delta + \frac{1}{\pi}\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, где

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{v.\,p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)\,dx}{x}.$$

Рассмотрим эти примеры с позиции рациональных распределений.

Аналитическое представление дельта-функции имеет вид

$$\delta = \left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z},\ -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\right),$$

оно порождает мнемофункцию

$$R_a(\delta) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i\varepsilon} - \frac{1}{x-i\varepsilon}\right).$$

Аналитическое представление $\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right)$:

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{2}\frac{1}{z},\ -\frac{1}{2}\frac{1}{z}\right),$$

тогда мнемофункция, соответствующая распределению $\mathbf{P}\left(x^{-1}\right)$,

$$R_a\left(\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+i\varepsilon} + \frac{1}{x-i\varepsilon}\right).$$

Для производных справедливы следующие соотношения:

$$R_a\left(\delta^{(n)}\right) = \frac{(-1)^{n+1}n!}{2\pi i}\left(\frac{1}{(x+i\varepsilon)^{n+1}} - \frac{1}{(x-i\varepsilon)^{n+1}}\right), \tag{8}$$

$$R_a\left(\mathbf{P}\left(\frac{1}{x^n}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+i\varepsilon)^n} + \frac{1}{(x-i\varepsilon)^n}\right). \tag{9}$$

Таким образом, исследование примеров Антосика – Микусинского – Сикорского сводится к определению условия, когда произведение мнемофункций

$$\left(\frac{A}{x+i\varepsilon} + \frac{B}{x-i\varepsilon}\right)\left(\frac{C}{x+i\varepsilon} + \frac{D}{x-i\varepsilon}\right) \tag{10}$$

ассоциировано с распределением.

Лемма 2. *Произведение мнемофункций вида (10) ассоциировано с распределением тогда и только тогда, когда для коэффициентов выполнено условие*

$$AD + BC = 0. \tag{11}$$

Доказательство. После преобразования выражение (10) равносильно следующему:

$$\frac{AC}{(x+i\varepsilon)^2} + \frac{BD}{(x-i\varepsilon)^2} + \frac{AD+BC}{(x+i\varepsilon)(x-i\varepsilon)}.$$

Из соотношений (8) и (9) следует, что сумма первых двух слагаемых ассоциирована с распределением

$$(AC+BD)\mathbf{P}\left(\frac{1}{x^2}\right) + (AC-BD)i\pi\delta'.$$

Последнее слагаемое согласно (7) расписывается в виде

$$(AD+BC)\left(-\frac{1}{2i\varepsilon}\frac{1}{x+i\varepsilon} + \frac{1}{2i\varepsilon}\frac{1}{x-i\varepsilon}\right),$$

следовательно, ему соответствует распределение с бесконечно большим коэффициентом. Таким образом, чтобы (10) было ассоциировано с распределением, необходимо и достаточно, чтобы это слагаемое обращалось в нуль, т. е. выполнялось условие (11). Что и требовалось доказать.

Из леммы следует, что, для того чтобы (10) было ассоциировано с распределением, коэффициенты должны быть связаны соотношением $(A, B) = (tC,\ -tD)$, т. е. по коэффициентам A, B коэффициенты C, D

определяются однозначно с точностью до сомножителя t. Таким образом, получили, что решением уравнения (11) является трехпараметрическое множество, и, значит, примеры конечных произведений Антосика – Микусинского – Сикорского есть только частные случаи данного утверждения. Покажем это.

Пример 1.

$$\left(\delta + \frac{1}{\pi i}\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{1}{\pi i}\frac{1}{x - i\varepsilon}\right)^2 = -\frac{1}{\pi i}\delta' - \frac{1}{\pi^2}\mathbf{P}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Имеем коэффициенты $A = C = 0$, $B = D = \dfrac{1}{\pi i}$, и, следовательно, условие (11) выполнено.

Пример 2.

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right)\delta = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x + i\varepsilon} + \frac{1}{2}\frac{1}{x - i\varepsilon}\right)\left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{x + i\varepsilon} + \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{x - i\varepsilon}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{4\pi i}\left(\frac{1}{(x - i\varepsilon)^2} - \frac{1}{(x + i\varepsilon)^2}\right) = -\frac{1}{2}\delta'.$$

В этом примере $A = B = \dfrac{1}{2}$, $C = -D = -\dfrac{1}{2\pi i}$, очевидно, что условие (11) выполнено.

Пример 3.

$$\left(\delta - \frac{1}{\pi}\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(\delta + \frac{1}{\pi}\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{1}{\pi^2}\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{(x + i\varepsilon)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x - i\varepsilon)^2}\right) = -\frac{1}{\pi^2}\mathbf{P}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Для данного примера $D = -A = \dfrac{1 + i}{2\pi i}$, $C = -B = \dfrac{i - 1}{2\pi i}$.

Лемма 2 позволяет построить много других примеров конечных произведений с особенностью в одной точке. Опишем общий случай, когда произведение рациональных распределений является распределением.

Пусть рациональное распределение f имеет сингулярный носитель $S_f = \{\xi_k : \operatorname{Im}\xi_k = 0\}$, а множество $S_g = \{\eta_k : \operatorname{Im}\eta_k = 0\}$ есть сингулярный носитель рационального распределения g. Напомним, что сингулярным носителем распределения называется дополнение множества точек, в окрестности которых распределение совпадает с некоторой бесконечно дифференцируемой функцией.

Заметим, что если точка ξ принадлежит сингулярному носителю рационального распределения и имеет кратность n, то в аналитическом представлении этого распределения будет выражение $\left(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{A_k^+}{(z - \xi)^k}, \sum_{k=1}^{n}\dfrac{A_k^-}{(z - \xi)^k}\right)$. Так, например, рациональной функции $\dfrac{1}{x}$ соответствует семейство распределений, имеющих аналитические представления $\left(\dfrac{c}{z}, \dfrac{c - 1}{z}\right)$, где c – произвольная постоянная.

Обозначим $S = S_f \cap S_g = \{z_1, \ldots, z_m\}$ пересечение сингулярных носителей распределений f и g. Не ограничивая общности, считаем, что кратность n_k точек z_k, $1 \le k \le m$, одинакова для распределений f и g. Тогда $f = (f^+, f^-)$, где

$$f^+ = \sum_{z_k \in S}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{A_{kj}^+}{(z - z_k)^j} + \sum_{\xi_k \in S_f \setminus S}\sum_{j=1}^{q_k}\frac{C_{kj}^+}{(z - \xi_k)^j} + \sum_{k=1}^{n^+}\sum_{j=1}^{p_k^+}\frac{D_{kj}^+}{(z - \upsilon_k)^j},\ \operatorname{Im}\upsilon_k < 0,$$

$$f^- = \sum_{z_k \in S}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{A_{kj}^-}{(z - z_k)^j} + \sum_{\xi_k \in S_f \setminus S}\sum_{j=1}^{q_k}\frac{C_{kj}^-}{(z - \xi_k)^j} + \sum_{k=1}^{n^-}\sum_{j=1}^{p_k^-}\frac{D_{kj}^-}{(z - \tilde{\upsilon}_k)^j},\ \operatorname{Im}\tilde{\upsilon}_k > 0.$$

И распределение $g = (g^+, g^-)$, где

$$g^+ = \sum_{z_k \in S}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{B_{kj}^+}{(z - z_k)^j} + \sum_{\eta_k \in S_g \setminus S}\sum_{j=1}^{r_k}\frac{\tilde{C}_{kj}^+}{(z - \eta_k)^j} + \sum_{k=1}^{s^+}\sum_{j=1}^{l_k^+}\frac{\tilde{D}_{kj}^+}{(z - \mu_k)^j},\ \operatorname{Im}\mu_k < 0,$$

$$g^- = \sum_{z_k \in S} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{B_{kj}^-}{(z - z_k)^j} + \sum_{\eta_k \in S_g \setminus S} \sum_{j=1}^{r_k} \frac{\tilde{C}_{kj}^-}{(z - \eta_k)^j} + \sum_{k=1}^{s^-} \sum_{j=1}^{l_k^-} \frac{\tilde{D}_{kj}^-}{(z - \tilde{\mu}_k)^j}, \ \operatorname{Im} \tilde{\mu}_k > 0.$$

Для рациональных распределений f и g, описанных выше, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Произведение рациональных мнемофункций* $R_a(f)R_a(g)$ *ассоциировано с некоторым распределением тогда и только тогда, когда для каждого* k, $1 \le k \le m$, *существует число* t_k *такое, что для коэффициентов выполняются следующие соотношения:*

$$B_{kj}^+ = t_k A_{kj}^+, \ B_{kj}^- = -t_k A_{kj}^-. \tag{12}$$

Доказательство. Как было показано ранее, бесконечно большие мнемофункции возникают при произведениях вида $\frac{1}{(z-\xi)^{n+}} \frac{1}{(z-\eta)^{m-}}$, когда $\xi = \eta$. При $\xi \ne \eta$ результатом произведения является распределение. Поэтому бесконечно большие слагаемые в произведение вносят только выражения вида

$$\sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_{kj}^+}{(x + i\varepsilon - z_k)^j} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{B_{kj}^-}{(x - i\varepsilon - z_k)^j} + \sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_{kj}^-}{(x - i\varepsilon - z_k)^j} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{B_{kj}^+}{(x + i\varepsilon - z_k)^j}, \ z_k \in S. \tag{13}$$

Очевидно, что если выражение (13) тождественно равно нулю, то бесконечно больших слагаемых нет. Получим условия, когда выражение (13) обращается в нуль.

Рассмотрим многочлены $p_{n_k}^+(v) = \sum_{j=1}^{n_k} A_{kj}^+ v^j$, $p_{n_k}^-(y) = \sum_{j=1}^{n_k} A_{kj}^- y^j$, $q_{n_k}^+(v) = \sum_{j=1}^{n_k} B_{kj}^+ v^j$, $q_{n_k}^-(y) = \sum_{j=1}^{n_k} B_{kj}^- y^j$. Заметим, что умножение сумм, входящих в выражение (13), происходит по тому же правилу, что и умножение этих многочленов, причем

$$vy = w(v - y), \text{ где } w = c(\varepsilon) = -\frac{1}{2i\varepsilon}. \tag{14}$$

Поэтому обращение в нуль выражения (13) равносильно выполнению равенства

$$p_{n_k}^+(v) q_{n_k}^-(y) + p_{n_k}^-(y) q_{n_k}^+(v) = 0. \tag{15}$$

Разделив переменные в (15), получаем, что

$$\frac{q_{n_k}^+(v)}{p_{n_k}^+(v)} = -\frac{q_{n_k}^-(y)}{p_{n_k}^-(y)} = t_k.$$

Откуда следует, что

$$q_{n_k}^+(v) = t_k p_{n_k}^+(v), \ q_{n_k}^-(y) = -t_k p_{n_k}^-(y).$$

И значит, коэффициенты многочленов $p_{n_k}^+(v)$ и $q_{n_k}^+(v)$, а также $p_{n_k}^-(y)$ и $q_{n_k}^-(y)$ пропорциональны, т. е. выполняются соотношения (12).

Проверим необходимость условия, т. е. покажем, что если хотя бы одно из условий (12) не выполнено, то асимптотическое разложение произведения мнемофункций $R_a(f)R_a(g)$ будет содержать бесконечно большие члены.

Применяя условие (14), преобразуем левую часть равенства (15):

$$p_{n_k}^+(v) q_{n_k}^-(y) + p_{n_k}^-(y) q_{n_k}^+(v) = \sum_{j,\, l=1}^{n_k} \left(A_{kj}^+ B_{kl}^- + A_{kl}^- B_{kj}^+\right) v^j y^l = P_{n_k}(w, v) + Q_{n_k}(w, y), \tag{16}$$

где $P_{n_k}(w, v)$, $Q_{n_k}(w, y)$ есть многочлены от двух переменных. В силу того что все бесконечно большие слагаемые должны уничтожиться, коэффициенты при степенях w в (16) равны нулю. Соберем коэффициенты при w:

$$\sum_{j=1}^{n_k} \left(A_{kj}^+ B_{k1}^- + A_{k1}^- B_{kj}^+\right) v^j - \sum_{j=1}^{n_k} \left(A_{k1}^+ B_{kj}^- + A_{kj}^- B_{k1}^+\right) y^j.$$

Из того, что коэффициент при w равен нулю, следует, что

$$\begin{cases} A_{kj}^{+}B_{k1}^{-} + A_{k1}^{-}B_{kj}^{+} = 0, \ j = \overline{1, n_k}, \\ A_{k1}^{+}B_{kj}^{-} + A_{kj}^{-}B_{k1}^{+} = 0, \ j = \overline{2, n_k}. \end{cases} \tag{17}$$

При выполнении условия (17) некоторые слагаемые, содержащие w^2, уничтожаются, поэтому соберем оставшиеся коэффициенты при w^2:

$$\sum_{j=2}^{n_k} \left(A_{kj}^{+}B_{k2}^{-} + A_{k2}^{-}B_{kj}^{+} \right) v^j + \sum_{j=2}^{n_k} \left(A_{k2}^{+}B_{kj}^{-} + A_{kj}^{-}B_{k2}^{+} \right) y^j.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} A_{kj}^{+}B_{k2}^{-} + A_{k2}^{-}B_{kj}^{+} = 0, \ j = \overline{2, n_k}, \\ A_{k2}^{+}B_{kj}^{-} + A_{kj}^{-}B_{k2}^{+} = 0, \ j = \overline{3, n_k}. \end{cases}$$

Последовательно уничтожая члены, содержащие степени w, получим, что при w^n останется только коэффициент

$$\left(A_{kn_k}^{+}B_{kn_k}^{-} + A_{kn_k}^{-}B_{kn_k}^{+} \right) \left(v^n + (-1)^n y^n \right),$$

и, значит,

$$A_{kn_k}^{+}B_{kn_k}^{-} + A_{kn_k}^{-}B_{kn_k}^{+} = 0.$$

Следовательно, для того чтобы мнемофункция $R_a(f)R_a(g)$ была ассоциирована с некоторым распределением, необходимо и достаточно, чтобы выражение (13) тождественно равнялось нулю, а это равносильно выполнению условий (12).

Библиографические ссылки

1. Colombeau JF. *New generalized functions and multiplication of distributions.* Amsterdam: North-Holland; 1984. 374 p.
2. Егоров ЮВ. К теории обобщенных функций. *Успехи математических наук.* 1990;45(5):3–40.
3. Антоневич АБ, Радыно ЯВ. Об общем методе построения алгебр обобщенных функций. *Доклады АН СССР.* 1991; 318(2):267–270.
4. Владимиров ВС. *Обобщенные функции в математической физике.* Москва: Наука; 1979. 320 с.
5. Бремерман Г. *Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье.* Москва: Мир; 1968. 276 с.
6. Антоневич АБ, Шагова ТГ. Вложения распределений в алгебру мнемофункций на окружности. *Проблемы физики, математики и техники.* 2018;4(37):52–61.
7. Антосик П, Микусинский Я, Сикорский Р. *Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход.* Москва: Мир; 1976. 311 с.

References

1. Colombeau JF. *New generalized functions and multiplication of distributions.* Amsterdam: North-Holland; 1984. 374 p.
2. Egorov YuV. [A contribution to the theory of generalized functions]. *Uspekhi matematicheskikh nauk.* 1990;45(5):3–40. Russian.
3. Antonevich AB, Radyno YaV. [A general method for constructing algebras of generalized functions]. *Doklady AN SSSR.* 1991; 318(2):267–270. Russian.
4. Vladimirov VS. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoi fizike* [Generalized functions in mathematical physics]. Moscow: Nauka; 1979. 320 p. Russian.
5. Bremermann H. *Distributions, complex variables, and Fourier transforms.* Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company; 1965. 186 p.
Russian edition: Bremerman G. *Raspredeleniya, kompleksnye peremennye i preobrazovaniya Fur'e.* Moscow: Mir; 1968. 276 p.
6. Antonevich AB, Shahava TR. [The embeddings of distributions into the algebra of mnemofunctions on circle]. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki.* 2018;4(37):52–61. Russian.
7. Antosik P, Mikusinski Ja, Sikorski R. *Theory of distributions. The sequential approach.* Amsterdam: Elsevier; 1973.
Russian edition: Antosik P, Mikusinskii Ya, Sikorskii R. *Teoriya obobshchennykh funktsii. Sekventsial'nyi podkhod.* Moscow: Mir; 1976. 311 p.

Статья поступила в редколлегию 22.01.2019.
Received by editorial board 22.01.2019.