УДК 512.542

КВАЗИНОРМАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ФИТТИНГА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А. В. МАРЦИНКЕВИЧ[1)]

[1)]*Витебский государственный университет им. П. М. Машерова, пр. Московский, 33, 210038, г. Витебск, Беларусь*

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, Z_n – циклическая группа порядка n и $X \text{ wr } Z_n$ – регулярное сплетение группы X с Z_n. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется квазинормальным в классе конечных групп $\mathfrak{X}$, или $\mathfrak{X}$-квазинормальным, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и из $G \in \mathfrak{F}$, $G \text{ wr } Z_p \in \mathfrak{X}$, где $p \in \mathbb{P}$, следует $G^m \text{ wr } Z_p \in \mathfrak{F}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Если $\mathfrak{X}$ – класс всех разрешимых групп, то $\mathfrak{F}$ – нормальный класс Фиттинга. В работе получено обобщение известной в теории нормальных классов Фиттинга теоремы Блессеноля – Гашюца: доказано, что пересечение любого множества неединичных $\mathfrak{X}$-квазинормальных классов Фиттинга является неединичным $\mathfrak{X}$-квазинормальным классом Фиттинга. В частности, существует наименьший неединичный $\mathfrak{X}$-квазинормальный класс Фиттинга. Также подтвержден обобщенный вариант гипотезы Локетта о структуре класса Фиттинга для $\mathfrak{X}$-квазинормальных классов в случае, когда $\mathfrak{X}$ – локальный класс Фиттинга конечных частично разрешимых групп.

Ключевые слова: класс Фиттинга; квазинормальный класс Фиттинга; гипотеза Локетта; локальный класс Фиттинга.

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф17М-064).

Автор выражает искреннюю благодарность профессору Н. Т. Воробьеву за постановку задачи и обсуждение результатов работы.

Образец цитирования:
Марцинкевич АВ. Квазинормальные классы Фиттинга конечных групп. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;2:18–26.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-18-26

For citation:
Martsinkevich AV. Quasinormal Fitting classes of finite groups. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;2:18–26. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-18-26

Автор:
Анна Веславовна Марцинкевич – аспирантка кафедры алгебры и методики преподавания математики факультета математики и информационных технологий. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Н. Т. Воробьев.

Author:
Anna V. Martsinkevich, postgraduate student at the department of algebra and methods of teaching mathematics, faculty of mathematics and information technology.
anna.martsinkevich@tut.by
https://orcid.org/0000-0002-2930-1056

QUASINORMAL FITTING CLASSES OF FINITE GROUPS

A. V. MARTSINKEVICH [a]

[a] *P. M. Masherov Vitebsk State University, 33 Maskoŭski Avenue, Vitebsk 210038, Belarus*

Let $\mathbb{P}$ be the set of all primes, Z_n a cyclic group of order n and $X\ wr\ Z_n$ the regular wreath product of the group X with Z_n. A Fitting class $\mathfrak{F}$ is said to be $\mathfrak{X}$-quasinormal (or quasinormal in a class of groups $\mathfrak{X}$) if $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, p is a prime, groups $G \in \mathfrak{F}$ and $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{X}$, then there exists a natural number m such that $G^m\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}$. If $\mathfrak{X}$ is the class of all soluble groups, then $\mathfrak{F}$ is normal Fitting class. In this paper we generalize the well-known theorem of Blessenohl and Gaschütz in the theory of normal Fitting classes. It is proved, that the intersection of any set of nontrivial $\mathfrak{X}$-quasinormal Fitting classes is a nontrivial $\mathfrak{X}$-quasinormal Fitting class. In particular, there exists the smallest nontrivial $\mathfrak{X}$-quasinormal Fitting class. We confirm a generalized version of the Lockett conjecture about the structure of a Fitting class for the case of $\mathfrak{X}$-quasinormal classes, where $\mathfrak{X}$ is a local Fitting class of partially soluble groups.

Keywords: Fitting class; quasinormal Fitting class; the Lockett conjecture; local Fitting class.

Acknowledgements. Research is supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (grant No. Ф17М-064).

The author would like to express sincere gratitude to professor N. T. Vorob'ev for the formulation of the problem and discussion of the results of work.

Введение

В работе рассматриваются только конечные группы, если не оговорено обратное. Множество групп $\mathfrak{X}$ называют *классом групп* [1, определение II, (1.1)], если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ и всякой группы $H \cong G$ следует $H \in \mathfrak{X}$.

Классом Фиттинга [1, определение II, (2.8) (a)] называют класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то для любой группы G существует наибольшая из нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп G, ее называют *$\mathfrak{F}$-радикалом* G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

В построении и развитии структурной теории классов Фиттинга многие исследования связаны с применением так называемых нормальных классов Фиттинга (см. главы IX–XI в [1]).

Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется нормальным в $\mathfrak{X}$, или $\mathfrak{X}$-*нормальным* [2, определение 1.1], если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ ее $\mathfrak{F}$-радикал $\mathfrak{F}$-максимален в G. В случае когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп, $\mathfrak{F}$ называют нормальным классом Фиттинга.

Пусть G и H – группы. Тогда символами $G\ wr\ H$ и G^* будем обозначать *регулярное сплетение* G с H и базисную группу $G\ wr\ H$ соответственно. Если $K \leq G$, то K^* – подгруппа базисной группы $G\ wr\ H$, которая изоморфна прямому произведению $|H|$ копий группы K.

Основополагающими результатами в теории разрешимых нормальных классов Фиттинга являются теоремы Блессеноля – Гашюца [3, теорема 6.2] и Блессеноля – Гашюца – Макана [4]. В первой из них было установлено, что *пересечение любого множества неединичных нормальных классов Фиттинга есть неединичный нормальный класс Фиттинга. В частности, в $\mathfrak{S}$ существует наименьший неединичный нормальный класс Фиттинга $\mathfrak{S}_*$.* Во второй получена следующая характеризация свойства нормальности в терминах регулярных сплетений групп: *класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является нормальным тогда и только тогда, когда для любой группы $G \in \mathfrak{S}$ и каждого простого p из условия $G \in \mathfrak{F}$ следует $G^n\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}$ для некоторого натурального n.* Данная характеризация была использована П. Хауком (в универсуме $\mathfrak{S}$) для обобщения понятия нормального класса Фиттинга в смысле следующего определения [5, определение 5.1].

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется квазинормальным в классе групп $\mathfrak{X}$, или $\mathfrak{X}$-*квазинормальным*, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и из $G \in \mathfrak{F}$, $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{X}$, где $p \in \mathbb{P}$, следует $G^m\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

Очевидно, что если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$, то $\mathfrak{F}$ – нормальный класс Фиттинга.

В настоящей работе установлено, что существуют $\mathfrak{X}$-нормальные классы Фиттинга, которые не $\mathfrak{X}$-квазинормальны, и $\mathfrak{X}$-квазинормальные классы Фиттинга, которые не $\mathfrak{X}$-нормальны (см. теорему 1).

В связи с этим возникает следующий вопрос.

Вопрос 1. *Верно ли, что пересечение любого множества неединичных квазинормальных в $\mathfrak{X}$ классов Фиттинга – неединичный квазинормальный в $\mathfrak{X}$ класс Фиттинга?*

Положительный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1. *Пересечение любого множества неединичных $\mathfrak{X}$-квазинормальных классов Фиттинга является неединичным $\mathfrak{X}$-квазинормальным классом Фиттинга. В частности, существует наименьший неединичный $\mathfrak{X}$-квазинормальный класс Фиттинга $\mathfrak{X}_{\oplus}$.*

Заметим, что в случае $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ следствием теоремы 1 является теорема Блессеноля – Гашюца. Кроме того, как показано в [6, пример 0.2], аналог этой теоремы для $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга в общем случае неверен.

Ф. П. Локеттом [7] были определены операторы «*» и «$_*$». Напомним, что оператор «*» сопоставляет каждому непустому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ наименьший из классов Фиттинга $\mathfrak{F}^*$, содержащий $\mathfrak{F}$, такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$, а оператор «$_*$» сопоставляет $\mathfrak{F}$ класс групп $\mathfrak{F}_* = \bigcap \left\{\mathfrak{X} : \mathfrak{X} \text{ – класс Фиттинга, } \mathfrak{F}^* = \mathfrak{X}^*\right\}$. Если класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$, то $\mathfrak{F}$ называют *классом Локетта* [1, определение X, (1.12)].

Произведением классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \left(G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}\right)$. Хорошо известно, что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна [1, IX, (1.12) (a), (c)].

Отображение $f : \mathbb{P} \to \{\text{классы Фиттинга}\}$ называют *функцией Хартли*, или H-функцией [8]. Множество $Supp(f) = \{p \in \mathbb{P} : f(p) \neq \varnothing\}$ – носитель H-функции f. Пусть $LR(f)$ – класс Фиттинга такой, что $LR(f) = \mathfrak{E}_{\pi} \cap \left(\bigcap_{p \in \pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}\right)$, где $p' = \mathbb{P}\setminus\{p\}$, $\pi = Supp(f)$ и $\mathfrak{E}_{\pi}$, $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{E}_{p'}$ – классы всех π-, p- и p'-групп соответственно. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *локальным*, если $\mathfrak{F} = LR(f)$ для некоторой H-функции f.

Класс групп $\mathfrak{X}$ имеют разрешимым, если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$.

Важное место в описании структуры классов групп занимает следующая проблема Локетта (см. [7, с. 135, проблема]), известная под названием гипотезы Локетта.

Гипотеза Локетта. *Каждый разрешимый класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется равенством $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ – некоторый нормальный класс Фиттинга.*

Гипотеза Локетта была подтверждена Р. А. Брайсом и Дж. Косси [9] для локальных классов Фиттинга, замкнутых относительно подгрупп; Дж. С. Бейдельманом и П. Хауком [10] для локальных классов Фиттинга вида $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{S}_{\pi'}$ ($\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{S}_{\pi}$ – классы всех нильпотентных групп и разрешимых π-групп соответственно); Н. Т. Воробьевым [11] для произвольных локальных классов Фиттинга. Класс Фиттинга, для которого верна гипотеза Локетта, называют $\mathfrak{L}$-классом [12].

Р. А. Брайсом и Дж. Косси было доказано [1, предложение X, (6.1)], что класс Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ является $\mathfrak{L}$-классом в классе групп $\mathfrak{X}$, т. е. $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$-классом, в точности тогда, когда $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{X}_*$.

Как следует из теоремы 1, в общем случае $\mathfrak{F}_* \neq \mathfrak{F}_{\oplus}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – классы Фиттинга и $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$. Естественной является постановка следующих взаимосвязанных вопросов.

Вопрос 2. *Каковы классы $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}_{\oplus}$?*

Вопрос 3. *Для каких классов $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ справедлива $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$-гипотеза Локетта?*

Для решения вопросов 2 и 3 мы будем использовать следующие понятия, связанные со свойствами сплетений групп, которые были предложены П. Хауком [5].

Пусть $p \in \mathbb{P}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *классом с ограниченным p-свойством сплетения*, если из условия $1 \neq G \in \mathfrak{F}$ и $O^{p'}(G) = G$ следует $G^n \; wr \; Z_p \in \mathfrak{F}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем *классом с ограниченным π-свойством сплетения*, если для каждого $p \in \pi$ из условия $1 \neq G \in \mathfrak{F}$ и $O^{p'}(G) = G$ следует $G^n \; wr \; Z_p \in \mathfrak{F}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. В случае когда $\pi = \mathbb{P}$, $\mathfrak{F}$ называют *классом Фиттинга с ограниченным свойством сплетения* [5, определение 2.7].

Следующая теорема дает ответ на вопросы 2 и 3 для класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ частично разрешимых групп (в частности, разрешимых групп) в случае, когда $\mathfrak{X}^*$ – класс Фиттинга с ограниченным π-свойством сплетения, и подтверждает обобщенный вариант гипотезы Локетта для широкого семейства квазинормальных классов Фиттинга, когда $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – локальные классы Фиттинга. Доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ таковы, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}_{\pi}$ и $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) если $\mathfrak{X}^*$ является классом с ограниченным π-свойством сплетения, то $\mathfrak{X}_{\oplus} = \mathfrak{X}_*$;

(2) если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – локальные классы Фиттинга, то $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$-классом.

Следствие 1. *Если классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ таковы, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$ и $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$, тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) если $\mathfrak{X}^*$ является классом с ограниченным свойством сплетения, то $\mathfrak{X}_{\oplus} = \mathfrak{X}_*$;

(2) если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – локальные классы Фиттинга, то $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$-классом.

В случае когда $\pi = \mathbb{P}$ и $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$, получаем основной результат работы [11].

Следствие 2 [11, с. 166, теорема]. *Гипотеза Локетта верна для любого локального разрешимого класса Фиттинга.*

Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют наследственным, если для любой группы $G \in \mathfrak{F}$ и $H \le G$ верно $H \in \mathfrak{F}$.

Каждый класс Фиттинга будем считать 0-кратно локальным. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют n-кратно локальным ($n \ge 1$) [8], если все непустые значения его локальной H-функции являются $(n-1)$-кратно локальными классами Фиттинга. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *тотально локальным* [8], если $\mathfrak{F}$ n-кратно локален для любого натурального n.

Как установлено в [13, теорема 1.1], каждый разрешимый наследственный класс Фиттинга является формацией. По теореме из [14] получаем, что каждый непустой разрешимый наследственный класс Фиттинга является локальным. Кроме того, непустой разрешимый класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является наследственным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ тотально локален [8] или в терминологии Брайса – Косси является примитивной насыщенной формацией. Поэтому из теоремы 2 получаем третье следствие.

Следствие 3 [9, теорема 4.1]. *Каждая разрешимая примитивная насыщенная формация Фиттинга удовлетворяет гипотезе Локетта.*

Предварительные сведения

Мы будем использовать результаты П. Хаука [15] о свойствах сплетений групп в теории классов Фиттинга, которые приведем в качестве лемм.

Лемма 1 [1, теорема X, (2.9)]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и $G \in \mathfrak{F}$; P_0 – неединичная p-группа для некоторого $p \in \mathbb{P}$ и $G \text{ wr } P_0 \in \mathfrak{F}^*$. Тогда для любой p-группы P справедливы следующие утверждения:*

(1) $G^2 \text{ wr } P \in \mathfrak{F}$;

(2) если $p \ne 2$, то $G \text{ wr } P \in \mathfrak{F}$.

Лемма 2. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) [1, лемма X, (2.3)] если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, G – группа, H – нильпотентная группа и $G \text{ wr } H \in \mathfrak{F}$, то $G^n \text{ wr } H \in \mathfrak{F}$ для любого $n \in \mathbb{N}$;

(2) [16, следствие 2.2] пусть G – группа, $N \trianglelefteq G$ и C – добавление к N в G такое, что $C/(C \cap N)$ нильпотентна и $N \cap C$ центрально в N. Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ замкнут относительно подпрямых произведений и $G \in \mathfrak{F}$, то $C \in \mathfrak{F}$.

Лемма 3. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) [1, предложение X, (2.1) (a)] если $\mathfrak{F}$ – класс Локетта, G – группа и $G \notin \mathfrak{F}$, то $(G \text{ wr } H)_{\mathfrak{F}} = (G_{\mathfrak{F}})^*$ для любой группы H;

(2) [1, лемма A, (18.2) (d)] если G и H – группы, $W = G \text{ wr } H$ и $K \trianglelefteq G$, то $W/K^* \cong (G/K) \text{ wr } H$;

(3) [1, лемма A, (18.2) (c)] если G и H – группы, $W = G \text{ wr } H$ и $K \le G$, то $K^*H \cong K \text{ wr } H \le W$.

Лемма 4 [1, лемма X, (2.4)]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, G – группа и H – нильпотентная группа. Если существует натуральное число m такое, что $G^m \text{ wr } H \in \mathfrak{F}$, то $G^n \text{ wr } H \in \mathfrak{F}^*$ для любого $n \in \mathbb{N}$.*

Характеристикой класса $\mathfrak{F}$ называют множество $Char(\mathfrak{F}) = \{p \in \mathbb{P} : Z_p \in \mathfrak{F}\}$.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F} = LR(f)$ для некоторой H-функции f с носителем π. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) [17, лемма 2.3] $\pi = Char(\mathfrak{F})$;

(2) [18, теорема 1] $LR(f) = LR(f^*)$, где f^* – такая H-функция, что $f^*(p) = (f(p))^*$ для всех $p \in \pi$;

(3) [11, лемма 5] $\mathfrak{F}$ – класс Локетта.

Лемма 6 [7, лемма 2.1 (c)]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и G – группа. Тогда $\mathrm{Aut}(G_{\mathfrak{F}^*})$ централизует факторгруппу $G_{\mathfrak{F}^*}/G_{\mathfrak{F}}$.*

Лемма 7 [1, теорема X, (3.7)]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимый класс Фиттинга. Класс $\mathfrak{F}$ является нормальным тогда и только тогда, когда для любой группы $G \in \mathfrak{S}$ и всех $p \in \mathbb{P}$ из условия $G \in \mathfrak{F}$ следует $G^n \text{ wr } Z_p \in \mathfrak{F}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.*

Напомним, что через $\mathrm{Soc}(G)$ обозначают цоколь группы G, т. е. произведение всех минимальных нормальных подгрупп G, $\mathrm{F}(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G, т. е. $\mathfrak{N}$-радикал G.

Лемма 8 [1, теорема IX, (2.8)]. *Пусть $\mathfrak{X} = (G : \mathrm{Soc}(G) \le Z(G))$. Тогда $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга, замкнутый относительно подпрямых произведений.*

Лемма 9 [19, лемма 3]. *Пусть A – разрешимая группа нильпотентной длины t, B – разрешимая группа подстановок нильпотентной длины v и $G = A \ wr \ B$ – регулярное подстановочное сплетение A с B. Тогда нильпотентная длина группы G равна $t + v - 1$ только в случае, когда A имеет нильпотентную цепь длины t, первая секция которой – p-группа, и B имеет нильпотентную цепь длины v, последняя секция которой – p-группа, для $p \in \mathbb{P}$.*

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется гомоморфом, если каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F}$ – гомоморф, тогда $\mathfrak{F}$ называется насыщенным, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует $G \in \mathfrak{F}$, где $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G.

Свойства операторов Локетта «*» и «$_*$» представляет следующая лемма.

Лемма 10. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) [1, теоремы X, (1.15) и (1.8) (a)] $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F}_*)^* = (\mathfrak{F}^*)^*$;

(2) [1, теорема X, (1.8) (b)] если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{H}^*$;

(3) [11, лемма 3] если $\mathfrak{H}$ – насыщенный гомоморф, то $(\mathfrak{F}\mathfrak{H})^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{H}$.

Лемма 11 [20, теорема 3]. *Каждый локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$-классом.*

$\mathfrak{X}$-нормальные и $\mathfrak{X}$-квазинормальные классы

Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. Подгруппу V группы G называют *$\mathfrak{X}$-инъектором* G, если $V \cap N$ является $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппой для любой субнормальной подгруппы N группы G.

Теорема 3. *Существуют $\mathfrak{X}$-квазинормальные классы Фиттинга, которые не $\mathfrak{X}$-нормальны, и $\mathfrak{X}$-нормальные классы Фиттинга, которые не $\mathfrak{X}$-квазинормальны.*

Доказательство. Покажем вначале, что существуют $\mathfrak{X}$-квазинормальные классы Фиттинга, которые не $\mathfrak{X}$-нормальны.

Пусть $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп и $\mathfrak{X} = (G : \mathrm{Soc}(G) \leq Z(G))$.

Докажем, что класс $\mathfrak{N}$ является $\mathfrak{X}$-квазинормальным. Для этого достаточно установить, что $\mathfrak{N}$ квазинормален в $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}^2$. Из леммы 8 следует, что $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}^2$ – разрешимый класс Фиттинга. Пусть $G \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}^2$ и $p \in \mathbb{P}$ таковы, что $G \ wr \ Z_p \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}^2$. Докажем, что G – p-группа.

Если $G \ wr \ Z_p \in \mathfrak{N}$, то по лемме 9 G – p-группа. Предположим, что $G \ wr \ Z_p \in (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}^2) \setminus \mathfrak{N}$. Тогда согласно утверждению (1) леммы 3 $\mathrm{F}(G \ wr \ Z_p) = \mathrm{F}(G^*) = \mathrm{F}(G)^*$. Ввиду леммы 9 $(G \ wr \ Z_p)/\mathrm{F}(G \ wr \ Z_p) \cong$ $\cong G/\mathrm{F}(G) \ wr \ Z_p$ – p-группа.

Пусть $O_{p'}(\mathrm{F}(G \ wr \ Z_p)) \neq 1$. Тогда $O_{p'}(\mathrm{F}(G)) \neq 1$ и для простого $q \neq p$ существует минимальная нормальная q-подгруппа N группы G. Так как $N \leq Z(G)$, то $N^*Z_p/(G^* \cap N^*Z_p) = N^*Z_p/N^* \in \mathfrak{N}$ и $G^* \cap N^*Z_p =$ $= N^* \leq Z(G^*)$. Таким образом, N^*Z_p – дополнение к G^* в группе $G \ wr \ Z_p \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}^2$. Исходя из леммы 8 и утверждения (2) леммы 2, получаем $N^*Z_p \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}^2$. Значит, $N^*Z_p \cong N \ wr \ Z_p$. Так как $q \neq p$, $N^* \leq \mathrm{Soc}(N^*Z_p)$. Отсюда $N^* \leq Z(N^*Z_p)$. Следовательно, $N^*Z_p \cong N \ wr \ Z_p$ – абелева группа, что невозможно ввиду $N \neq 1$. Данное противоречие доказывает, что $\mathrm{F}(G \ wr \ Z_p)$ – p-группа.

Так как $(G \ wr \ Z_p)/\mathrm{F}(G \ wr \ Z_p)$ – p-группа, то G – p-группа и $G \in \mathfrak{N}$. Следовательно, класс $\mathfrak{N}$ квазинормален в $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}^2$, и поэтому $\mathfrak{N}$ – $\mathfrak{X}$-квазинормальный класс Фиттинга.

Докажем, что $\mathfrak{N}$ не является $\mathfrak{X}$-нормальным классом Фиттинга. Так как $GL(2, 3) \in \mathfrak{X}$, то 2-силовская подгруппа $GL(2, 3)$ выступает $\mathfrak{N}$-инъектором $GL(2, 3)$. Но 2-силовская подгруппа группы $GL(2, 3)$ ненормальна в $GL(2, 3)$, и, следовательно, класс $\mathfrak{N}$ не является $\mathfrak{X}$-нормальным.

Докажем существование $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга, которые не $\mathfrak{X}$-квазинормальны. Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, $\mathfrak{E}_\pi$ – класс всех π-групп и $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'} \cap \mathfrak{S}^\pi$, где $\mathfrak{S}^\pi$ – класс всех π-разрешимых групп.

Покажем, что $\mathfrak{E}_\pi$ является $\mathfrak{X}$-нормальным классом Фиттинга. Пусть $G \in \mathfrak{X}$ и V – $\mathfrak{E}_\pi$-инъектор группы G. Тогда V – холлова π-подгруппа G. Так как $G/G_{\mathfrak{E}_\pi} \in \mathfrak{E}_{\pi'}$, то по теореме Чунихина [21] $G_\pi \leq G_{\mathfrak{E}_\pi} \leq V \leq G_\pi$ и $V = G_{\mathfrak{E}_\pi}$. Следовательно, $V \trianglelefteq G$ и $\mathfrak{E}_\pi$ является $\mathfrak{X}$-нормальным классом Фиттинга.

Докажем, что класс $\mathfrak{E}_\pi$ не является квазинормальным в $\mathfrak{X}$. Пусть $G \in \mathfrak{E}_\pi$ и $G \ wr \ Z_p \in \mathfrak{X}$ для $p \in \mathbb{P}$. Если $W = G^2 \ wr \ Z_p$ и $p \in \pi'$, то $W/(G^2)^* \cong Z_p \in \mathfrak{E}_{\pi'}$. Так как $(G^2)^* \in \mathfrak{E}_\pi$, то $W \in \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$. Поскольку $\mathfrak{E}_\pi \subset \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$ и $\pi' \neq \varnothing$, то $W \notin \mathfrak{E}_\pi$. Значит, $\mathfrak{E}_\pi$ не является квазинормальным в $\mathfrak{X}$. Теорема доказана.

Замечание. Методы построения $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга, которые не являются $\mathfrak{X}$-квазинормальными, и $\mathfrak{X}$-квазинормальных классов Фиттинга, которые не являются $\mathfrak{X}$-нормальными, в универсуме $\mathfrak{E}$ всех групп можно описать, используя [22, замечание 3.20]. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга всех групп, неабелева компонента цоколя которых – прямой фактор. Тогда $\mathfrak{F}$ нормален в $\mathfrak{E}$ и не является $\mathfrak{E}$-квазинормальным. С другой стороны, для множества простых π такого, что $|\pi| \geq 2$, класс $\mathfrak{S}_\pi$ – $\mathfrak{E}_\pi$-квазинормальный, но при этом не $\mathfrak{E}_\pi$-нормален.

Обобщение теоремы Блессеноля – Гашюца

Доказательство теоремы 1. Пусть $\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in I}$ – семейство неединичных классов Фиттинга таких, что $\mathfrak{F}_i$ квазинормален в $\mathfrak{X}$ для любого $i \in I$, и $\mathfrak{F} = \bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$. Докажем, что $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$.

Очевидно, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Пусть группа $G \in \mathfrak{F}$ и $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{X}$ для $p \in \mathbb{P}$. Покажем, что существует натуральное число m такое, что $G^m\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}$.

Ввиду выбора группы G имеем $G \in \mathfrak{F}_i$ для всех $i \in I$. Так как $\mathfrak{F}_i$ квазинормален в $\mathfrak{X}$ для любого $i \in I$, то существует натуральное число m такое, что $G^m\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}_i$ для всех $i \in I$. Таким образом, $G^m\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$.

Покажем, что класс $\mathfrak{F} \neq (1)$, где (1) – класс всех единичных групп. Для этого докажем, что $Char(\mathfrak{F}_i) = Char(\mathfrak{X})$ для любого $i \in I$. Предположим, что существует простое $p \in Char(\mathfrak{X}) \backslash Char(\mathfrak{F}_i)$ для $i \in I$. Тогда $1\ wr\ Z_p \in \mathfrak{X} \backslash \mathfrak{F}_i$. Поэтому $\mathfrak{F}_i$ не является $\mathfrak{X}$-квазинормальным для $i \in I$. Полученное противоречие показывает, что $Char(\mathfrak{X}) \subseteq Char(\mathfrak{F}_i)$ для всех $i \in I$. Включение $Char(\mathfrak{F}_i) \subseteq Char(\mathfrak{X})$ очевидно. Следовательно, $Char(\mathfrak{F}_i) = Char(\mathfrak{X})$ для любого $i \in I$.

Так как $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$, то $Char(\mathfrak{F}) = Char(\mathfrak{X}) = Char(\mathfrak{F}_i)$ для любого $i \in I$. По условию $\mathfrak{F}_i \neq (1)$ для всех $i \in I$. Значит, существует простое p такое, что $Z_p \in \mathfrak{F}_i$ для любого $i \in I$. Следовательно, $Z_p \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \neq (1)$. Это доказывает существование наименьшего нетривиального $\mathfrak{X}$-квазинормального класса $\mathfrak{X}_\oplus$. Теорема доказана.

Операторы «$_*$» и «$_\oplus$»

Предварительно установим некоторые общие свойства квазинормальных классов Фиттинга, которые мы будем использовать.

Лемма 12. *Если классы Фиттинга $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ таковы, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_1^* = \mathfrak{F}_2^*$, то $\mathfrak{F}_1$ квазинормален в $\mathfrak{F}_2$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}_1$ и $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}_2$ для $p \in \mathbb{P}$. Докажем, что существует натуральное число m такое, что $G^m\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}_1$. По условию $\mathfrak{F}_1^* = \mathfrak{F}_2^*$. Значит, $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_2^* = \mathfrak{F}_1^*$. Согласно лемме 1 имеем $G^2\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}_1$. Лемма доказана.

Лемма 13. *Отношение квазинормальности транзитивно.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_3$ – классы Фиттинга такие, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_3$. Докажем, что если $\mathfrak{F}_1$ квазинормален в $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_2$ квазинормален в $\mathfrak{F}_3$, то $\mathfrak{F}_1$ квазинормален в $\mathfrak{F}_3$.

Заметим, что ввиду [1, теорема X, (2.12)] определение $\mathfrak{X}$-квазинормального класса Фиттинга равносильно следующему: класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется квазинормальным в классе групп $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и из $G \in \mathfrak{F}$, $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{X}$, где $p \in \mathbb{P}$, следует $G^2\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}_1$ и $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}_3$ для $p \in \mathbb{P}$. Докажем, что $G^2\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}_1$.

Так как $\mathfrak{F}_2$ квазинормален в $\mathfrak{F}_3$, то из $G \in \mathfrak{F}_2$ и $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}_3$ для $p \in \mathbb{P}$ следует $G^2\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}_2$. Ввиду того что $G^2\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}_2$ и $G^* Z_p$ субнормально вложена в $(G^2)^* Z_p = (G^*)^2 Z_p$, получаем $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}_2$. Теперь из квазинормальности $\mathfrak{F}_1$ в $\mathfrak{F}_2$ имеем $G^2\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}_1$. Следовательно, $\mathfrak{F}_1$ квазинормален в $\mathfrak{F}_3$. Лемма доказана.

Лемма 14. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга. Если $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{Y}$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F}$ и $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{Y}$ для $p \in \mathbb{P}$. Докажем, что $G^m\ wr\ Z_p \in \mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. По условию $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$. Значит, из $G \in \mathfrak{F}$ и $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$ ($p \in \mathbb{P}$) следует $G^m\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}$ для $m \in \mathbb{N}$. Ввиду утверждения (1) леммы 2 $G^m\ wr\ Z_p \in \mathfrak{Y}$. Следовательно, $G^m\ wr\ Z_p \in \mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{Y}$. Лемма доказана.

Лемма 15. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – классы Фиттинга. Если $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}^*$.*

Доказательство. По утверждению (1) леммы 10 имеем $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}^*$ и $\left(\mathfrak{X}^*\right)^* = \mathfrak{X}^*$. Значит, используя лемму 12, получаем, что $\mathfrak{X}$ квазинормален в $\mathfrak{X}^*$. Следовательно, по лемме 13 $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}^*$. Лемма доказана.

Многие свойства оператора Локетта «$_*$» (см. [1, теорема X, (1.15)]) аналогичны свойствам оператора «$_\oplus$».

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F}_\oplus \subseteq \mathfrak{X}_\oplus$;

(2) $\mathfrak{X}_\oplus = \left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_\oplus$;

(3) $\left(\mathfrak{X}_*\right)_\oplus = \left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_*$;

(4) если $\mathfrak{X}_\oplus \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F}_\oplus = \mathfrak{X}_\oplus$.

Доказательство. (1) По определению оператора «$_\oplus$» имеем, что $\mathfrak{X}_\oplus$ квазинормален в $\mathfrak{X}$. Ввиду леммы 14 $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}_\oplus$ квазинормален в $\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}_\oplus$ – наименьший из классов Фиттинга, квазинормальных в $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}_\oplus \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}_\oplus \subseteq \mathfrak{X}_\oplus$. Следовательно, $\mathfrak{F}_\oplus \subseteq \mathfrak{X}_\oplus$. Утверждение (1) доказано.

(2) Так как $\left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_\oplus$ и $\mathfrak{X}_\oplus$ квазинормальны в $\mathfrak{X}_\oplus$ и $\mathfrak{X}$ соответственно, то по лемме 13 $\left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_\oplus$ квазинормален в $\mathfrak{X}$. Поскольку $\mathfrak{X}_\oplus$ – наименьший из классов Фиттинга, квазинормальных в $\mathfrak{X}$, имеем $\mathfrak{X}_\oplus \subseteq \left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_\oplus$. Очевидно, что $\left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_\oplus \subseteq \mathfrak{X}_\oplus$. Итак, $\mathfrak{X}_\oplus = \left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_\oplus$. Утверждение (2) доказано.

(3) По утверждению (1) леммы 10 получаем $\left(\left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_*\right)^* = \left(\mathfrak{X}_\oplus\right)^*$. Применяя лемму 12, имеем, что $\left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_*$ квазинормален в $\mathfrak{X}_\oplus$. Ввиду леммы 13 $\left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_*$ квазинормален в $\mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{X}_\oplus$ – наименьший из классов Фиттинга, квазинормальных в $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{X}_\oplus \subseteq \left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_*$. По утверждению (1) леммы 10 $\left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_* \subseteq \mathfrak{X}_\oplus$. Следовательно, $\left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_* = \mathfrak{X}_\oplus$.

По лемме 12 $\mathfrak{X}_*$ квазинормален в $\mathfrak{X}$. Следовательно, $\mathfrak{X}_\oplus \subseteq \mathfrak{X}_* \subseteq \mathfrak{X}$, и, используя утверждение (1), получаем $\left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_\oplus \subseteq \left(\mathfrak{X}_*\right)_\oplus \subseteq \mathfrak{X}_\oplus$. По утверждению (2) $\mathfrak{X}_\oplus = \left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_\oplus$. Таким образом, $\mathfrak{X}_\oplus = \left(\mathfrak{X}_*\right)_\oplus = \left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_*$. Утверждение (3) доказано.

(4) Пусть $\mathfrak{X}_\oplus \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. По утверждению (1) имеем $\mathfrak{X}_\oplus = \left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_\oplus \subseteq \mathfrak{F}_\oplus \subseteq \mathfrak{X}_\oplus$. Значит, $\mathfrak{X}_\oplus = \mathfrak{F}_\oplus$. Утверждение (4) доказано. Теорема доказана.

Гипотеза Локетта для квазинормальных классов

Доказательство теоремы 2. (1) Пусть $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$. Предположим, что $\mathfrak{X}^* \neq \mathfrak{F}^*$ и G – группа минимального порядка из класса $\mathfrak{X}^* \setminus \mathfrak{F}^*$. Так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}_\pi$, то по утверждениям (2) и (3) леммы 10 $\mathfrak{X}^* \subseteq \left(\mathfrak{F}\mathfrak{S}_\pi\right)^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\pi$. Значит, $G/G_{\mathfrak{F}^*} \in \mathfrak{S}_\pi$ и $\left|G/G_{\mathfrak{F}^*}\right| = p$ для некоторого простого $p \in \pi$.

По условию $\mathfrak{X}^*$ – класс с ограниченным π-свойством сплетения. Следовательно, для группы $1 \neq G \in \mathfrak{X}^*$ с $O^{p'}(G) = G$ для любого простого $p \in \pi$ существует натуральное n такое, что $G^n \textit{ wr } Z_p \in \mathfrak{X}^*$.

Ввиду леммы 6 $G_{\mathfrak{F}^*}/G_{\mathfrak{F}} \leq Z\left(G/G_{\mathfrak{F}}\right)$. Так как $G_{\mathfrak{F}^*}$ – единственная максимальная нормальная подгруппа G, то $G/G_{\mathfrak{F}}$ – циклическая p-группа. Значит, по утверждению (3) леммы 3 $G_{\mathfrak{F}} \textit{ wr } Z_p \cong \left(G_{\mathfrak{F}}\right)^* Z_p \trianglelefteq\trianglelefteq G^* Z_p \cong$ $\cong G \textit{ wr } Z_p \in \mathfrak{X}^*$. Так как $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$, то по лемме 15 $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}^*$. Таким образом, $\left(G_{\mathfrak{F}}\right)^2 \textit{ wr } Z_p \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$. Следовательно, исходя из леммы 4, имеем $G_{\mathfrak{F}} \textit{ wr } Z_p \in \mathfrak{F}^*$. Поскольку согласно утверждению (3) леммы 3 $\left(G_{\mathfrak{F}}\right)^* Z_p \in \mathfrak{F}^*$ и $\left(G_{\mathfrak{F}}\right)^* Z_p \trianglelefteq\trianglelefteq G^* Z_p \cong G \textit{ wr } Z_p$, $\left(G_{\mathfrak{F}}\right)^* Z_p \leq \left(G \textit{ wr } Z_p\right)_{\mathfrak{F}^*}$. По условию $G \notin \mathfrak{F}^*$. Следовательно, по утверждению (1) леммы 3 $\left(G \textit{ wr } Z_p\right)_{\mathfrak{F}^*} = \left(G_{\mathfrak{F}^*}\right)^*$. Получили противоречие.

Значит, $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{X}_* \subseteq \mathfrak{F}$. Так как по лемме 12 $\mathfrak{X}_*$ квазинормален в $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{X}_\oplus = \mathfrak{X}_*$.

Поскольку $\mathfrak{F}$ – произвольный квазинормальный класс Фиттинга в $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{X}^*$, $\mathfrak{X}_\oplus$ содержится в секции Локетта $\mathfrak{X}$. Следовательно, $\mathfrak{X}_\oplus$ содержит наименьший элемент секции Локетта $\mathfrak{X}_*$ и $\mathfrak{X}_\oplus = \mathfrak{X}_*$. Утверждение (1) доказано.

(2) Так как $\mathfrak{F}$ – локальный класс Фиттинга, то $\mathfrak{F} = LR(f)$ для некоторой H-функции f с носителем π. Покажем вначале, что $\mathfrak{F}$ обладает ограниченным π-свойством сплетения.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$ с комонолитом M индекса p ($p \in \pi$) и $W = G \ wr \ Z_p$. Так как $\mathfrak{F}$ – локальный класс Фиттинга, то $G \in \mathfrak{E}_\pi \cap \left(\bigcap_{p \in \pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'} \right)$.

Очевидно, что $O^{p'}(G) \neq 1$. Действительно, если $O^{p'}(G) < G$, то $O^{p'}(G) \leq M$ и $|G:M| = p'$. Получили противоречие с выбором G. Следовательно, $O^{p'}(G) = G$ для всех $p \in \pi$. Так как $G \in \mathfrak{E}_\pi$, то по утверждению (1) леммы 5 получаем $W \in \mathfrak{E}_\pi$.

Покажем, что $W \in \bigcap_{p \in \pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ для всех $p \in \pi$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G \in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ для любого $p \in \pi$. По утверждению (2) леммы 5 и утверждению (1) леммы 10 получаем $f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'} = f^*(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ и $f^*(p) = \left(f^*(p)\right)^*$ для всех $p \in \pi$. Следовательно, без ограничения общности мы можем предположить, что f – H-функция такая, что $f(p)$ – класс Локетта для всех $p \in \pi$.

Если $G \in f(p)$, то $G \in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. Пусть $G \in f(p)\mathfrak{N}_p \backslash f(p)$. Тогда по утверждению (1) леммы 3 $W_{f(p)} = \left(G_{f(p)}\right)^*$ и $W/W_{f(p)} = W/\left(G_{f(p)}\right)^*$. Следовательно, по утверждению (2) леммы 3 $W/W_{f(p)} \cong$ $\cong \left(G/G_{f(p)}\right) wr \ Z_p$. Значит, $W \in f(p)\mathfrak{N}_p \subseteq f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$.

Если $G \in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'} \backslash f(p)\mathfrak{N}_p$, то аналогичным образом получаем $W/W_{f(p)\mathfrak{N}_p} \cong \left(G/G_{f(p)\mathfrak{N}_p}\right) wr \ Z_p$. Так как $1 \neq O^{p'}(G) = G$, то $W \in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ и $W = G \ wr \ Z_p \in \mathfrak{F}$. Следовательно, по утверждению (1) леммы 2 $G^n \ wr \ Z_p \in \mathfrak{F}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Значит, $\mathfrak{F}$ обладает ограниченным π-свойством сплетения. Исходя из утверждения (3) леммы 5, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{F}^*$ обладает ограниченным π-свойством сплетения. Следовательно, по утверждению (1) теоремы получаем $\mathfrak{F}_\oplus = \mathfrak{F}_*$.

Пусть $\mathfrak{X} = LR(x)$ и $\sigma = Supp(x)$. Так как класс $\mathfrak{X}$ локален и квазинормален в $\mathfrak{X}$, то, рассуждая аналогично, получаем, что $\mathfrak{X}^*$ обладает ограниченным σ-свойством сплетения. Следовательно, по утверждению (1) теоремы имеем $\mathfrak{X}_\oplus = \mathfrak{X}_*$.

Ввиду леммы 11 локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в классе $\mathfrak{X}$, т. е. $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{X}_*$. Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. Doerk K, Hawkes T. *Finite Soluble Groups.* Berlin: Walter de Gruyter; 1992.
2. Laue H. Über nichtauflösbare normale Fittingklassen. *Journal of Algebra.* 1977;45(2):274–283. DOI: 10.1016/0021-8693(77)90327-1.
3. Blessenohl D, Gaschütz W. Über normale Schunck- und Fittingklassen. *Mathematische Zeitschrift.* 1970;118(1):1–8. DOI: 10.1007/BF01109888.
4. Makan AR. Fitting classes with the wreath product property are normal. *Journal of the London Mathematical Society.* 1974; s2-8(2):245–246. DOI: 10.1112/jlms/s2-8.2.245.
5. Hauck P. Zur Theorie der Fittingklassen endlicher auflösbarer Gruppen [dissertation]. Mainz: [s. n.]; 1977.
6. Марцинкевич АВ. О проблеме Дёрка – Хоукса для локально нормальных классов Фиттинга. *Проблемы физики, математики и техники.* 2018;4(37):90–97.
7. Lockett FP. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$. *Mathematische Zeitschrift.* 1974;137(2):131–136. DOI: 10.1007/BF01214854.
8. Воробьев НТ. О предположении Хоукса для радикальных классов. *Сибирский математический журнал.* 1996;37(6): 1296–1302.
9. Bryce RA, Cossey J. A problem in the theory of normal Fitting classes. *Mathematische Zeitschrift.* 1975;141(2):99–110. DOI: 10.1007/BF01218821.
10. Beidleman JC, Hauck P. Über Fittingklassen und die Lockett-vermutung. *Mathematische Zeitschrift.* 1979;167(2):161–167. DOI: 10.1007/BF01215119.
11. Воробьев НТ. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта. *Математические заметки.* 1988;43(2):161–168.
12. Zhu L, Yang N, Vorob'ev NT. On Lockett pairs and Lockett conjecture for π-soluble Fitting classes. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society.* 2013;36(3):825–832.
13. Bryce RA, Cossey J. Subgroup closed Fitting classes are formations. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* 1982;91(2):225–258. DOI: 10.1017/S0305004100059272.
14. Воробьев НТ. Локальность разрешимых наследственных классов Фиттинга. *Математические заметки.* 1992;51(3):3–8.
15. Hauck P. Fittingklassen und Kranzprodukte. *Journal of Algebra.* 1979;59(2):313–329. DOI: 10.1016/0021-8693(79)90130-3.
16. Bryce RA, Cossey J. Subdirect product closed Fitting classes. In: Newman MF, editor. Proceedings of the Second International Conference on the Theory of Groups; 1973 August 13–24; Canberra, Australia. [S. l.]: Springer; 1974. p. 158–164.
17. Guo W, Liu X, Li B. On $\mathfrak{F}$-radicals of finite π-soluble groups. *Algebra and Discrete Mathematics.* 2006;3:49–54.
18. Воробьев НТ. О максимальных и минимальных групповых функциях локальных классов Фиттинга. *Вопросы алгебры.* 1992;7:60–69.

19. Frick M, Newman MF. Soluble linear groups. *Bulletin of the Australian Mathematical Society.* 1972;6(1):31–44. DOI: 10.1017/S0004972700044233.

20. Залесская ЕН, Воробьев НН. О решетках частично локальных классов Фиттинга. *Сибирский математический журнал.* 2009;50(6):1319–1327.

21. Чунихин СА. *Подгруппы конечных групп.* Минск: Наука и техника; 1964. 157 с.

22. Pérez-Ramos MD. On A-normality, strong normality and $\mathfrak{F}$-dual pronormal subgroups in Fitting classes. *Journal of Group Theory.* 2000;3(2):127–145. DOI: 10.1515/jgth.2000.011.

References

1. Doerk K, Hawkes T. *Finite Soluble Groups.* Berlin: Walter de Gruyter; 1992.

2. Laue H. Über nichtauflösbare normale Fittingklassen. *Journal of Algebra.* 1977;45(2):274–283. DOI: 10.1016/0021-8693(77)90327-1.

3. Blessenohl D, Gaschütz W. Über normale Schunck- und Fittingklassen. *Mathematische Zeitschrift.* 1970;118(1):1–8. DOI: 10.1007/BF01109888.

4. Makan AR. Fitting classes with the wreath product property are normal. *Journal of the London Mathematical Society.* 1974; s2-8(2):245–246. DOI: 10.1112/jlms/s2-8.2.245.

5. Hauck P. Zur Theorie der Fittingklassen endlicher auflösbarer Gruppen [dissertation]. Mainz: [s. n.]; 1977.

6. Martsinkevich AV. [On the problem of Doerk and Hawkes for locally normal Fitting classes]. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki.* 2018;4(37):90–97. Russian.

7. Lockett FP. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$. *Mathematische Zeitschrift.* 1974;137(2):131–136. DOI: 10.1007/BF01214854.

8. Vorob'ev NT. [On Hawkes's conjecture for radical classes]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal.* 1996;37(6):1296–1302. Russian.

9. Bryce RA, Cossey J. A problem in the theory of normal Fitting classes. *Mathematische Zeitschrift.* 1975;141(2):99–110. DOI: 10.1007/BF01218821.

10. Beidleman JC, Hauck P. Über Fittingklassen und die Lockett-vermutung. *Mathematische Zeitschrift.* 1979;167(2):161–167. DOI: 10.1007/BF01215119.

11. Vorob'ev NT. Radical classes of finite groups with the Lockett condition. *Mathematical Notes.* 1988;43(2):161–168. Russian.

12. Zhu L, Yang N, Vorob'ev NT. On Lockett pairs and Lockett conjecture for π-soluble Fitting classes. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society.* 2013;36(3):825–832.

13. Bryce RA, Cossey J. Subgroup closed Fitting classes are formations. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* 1982;91(2):225–258. DOI: 10.1017/S0305004100059272.

14. Vorob'ev NT. [Locality of solvable subgroup-closed Fitting classes]. *Matematicheskie zametki.* 1992;51(3):3–8. Russian.

15. Hauck P. Fittingklassen und Kranzprodukte. *Journal of Algebra.* 1979;59(2):313–329. DOI: 10.1016/0021-8693(79)90130-3.

16. Bryce RA, Cossey J. Subdirect product closed Fitting classes. In: Newman MF, editor. Proceedings of the Second International Conference on the Theory of Groups; 1973 August 13–24; Canberra, Australia. [S. l.]: Springer; 1974. p. 158–164.

17. Guo W, Liu X, Li B. On $\mathfrak{F}$-radicals of finite π-soluble groups. *Algebra and Discrete Mathematics.* 2006;3:49–54.

18. Vorob'ev NT. [On maximal and minimal group functions of local Fitting classes]. *Voprosy algebry.* 1992;7:60–69. Russian.

19. Frick M, Newman MF. Soluble linear groups. *Bulletin of the Australian Mathematical Society.* 1972;6(1):31–44. DOI: 10.1017/S0004972700044233.

20. Zalesskaya EN, Vorob'ev NN. [Lattices of partially local Fitting classes]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal.* 2009;50(6):1319–1327. Russian.

21. Chunikhin SA. *Podgruppy konechnykh grupp* [Subgroups of finite groups]. Minsk: Nauka i tekhnika; 1964. 157 p. Russian.

22. Pérez-Ramos MD. On A-normality, strong normality and $\mathfrak{F}$-dual pronormal subgroups in Fitting classes. *Journal of Group Theory.* 2000;3(2):127–145. DOI: 10.1515/jgth.2000.011.

Статья поступила в редколлегию 21.02.2019.
Received by editorial board 21.02.2019.