ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

УДК 519.4

ПОСТРОЕНИЕ D -ОПТИМАЛЬНЫХ ПЛАНОВ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ С НЕРАВНОТОЧНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

В. П. КИРЛИЦА¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Исследуется проблема построения D -оптимальных планов экспериментов для линейной множественной регрессии в случае, когда дисперсия ошибок наблюдений зависит от точки, в которой проводится наблюдение. Определен класс функций, описывающих изменение дисперсии неравноточных наблюдений, для которых можно построить непрерывные D -оптимальные планы экспериментов. Для линейной множественной регрессии с тремя факторами построены пять типов непрерывных D -оптимальных планов экспериментов с неравноточными наблюдениями. Для каждого из этих типов выделен свой собственный класс функций, описывающих изменение дисперсии наблюдений.

Ключевые слова: точные D -оптимальные планы экспериментов; линейная множественная регрессия; равноточные наблюдения; неравноточные наблюдения; насыщенные оптимальные планы.

Образец цитирования:

Кирлица ВП. Построение D -оптимальных планов экспериментов для линейной множественной регрессии с неравноточными наблюдениями. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2019;2:27–33.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-27-33>

For citation:

Kirlitsa VP. Construction D -optimal designs of experiments for linear multiple regression with heteroscedastic observations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;2:27–33. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-27-33>

Автор:

Валерий Петрович Кирлица – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики.

Author:

Valery P. Kirlitsa, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of mathematical modeling and data analysis, faculty of applied mathematics and computer science.
kirlitsa@bsu.by

CONSTRUCTION D -OPTIMAL DESIGNS OF EXPERIMENTS FOR LINEAR MULTIPLE REGRESSION WITH HETEROSCEDASTIC OBSERVATIONS

V. P. KIRLITSA^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

In article the problem of construction exact D -optimal designs of experiments for linear multiple regression in a case when variance of errors of observations depend on a point in which is made is investigated. Class of functions which describe change variance of heteroscedastic observations is defined for which it is possible construct D -optimal continues designs of experiments. For linear multiple regression with three factors it is constructed five different types of D -optimal continues designs of experiments with heteroscedastic observations. For each of these types the own class of functions describing change variance of observations is defined.

Keywords: exact D -optimal designs of experiments; linear multiple regressions; homoscedastic observations; heteroscedastic observations; saturated optimal designs.

Рассмотрим линейную модель множественной регрессии

$$y_j = \theta_1 x_{j1} + \dots + \theta_m x_{jm} + \varepsilon(x^{(j)}), \quad j = \overline{1, n}, \quad n \geq m, \quad (1)$$

где y_i – наблюдаемые переменные; $x^{(j)} = (x_{j1}, \dots, x_{jm})$ – m -векторы контролируемых переменных, компоненты которых принадлежат единичному m -мерному кубу: $|x_i| \leq 1, i = \overline{1, m}$; $\theta_1, \dots, \theta_m$ – неизвестные параметры; $\varepsilon(x^{(j)})$ – некоррелированные случайные ошибки наблюдений с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями, зависящими от точки наблюдения $x^{(j)}$:

$$D\{\varepsilon(x^{(j)})\} = d(x^{(j)}) > 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где $d(x_1, \dots, x_m)$ – некоторая непрерывная функция. Функция $d(x^{(j)})$ в (2) должна быть такой, чтобы в вершинах единичного m -мерного куба неравенство (2) обращалось в равенство.

Для равнооточных наблюдений ($d(x) = d = \text{const}$) проблема построения точных D -оптимальных планов экспериментов для модели наблюдений (1) довольно полно изучена [1]. В [2] построены точные D -оптимальные планы экспериментов для линейной модели парной регрессии с неравнооточными наблюдениями. В [3] исследовалась проблема построения таких планов для модели (1) при линейном изменении дисперсии наблюдений:

$$d(x^{(j)}) = a_0 + a_1 x_{j1} + \dots + a_m x_{jm} > 0, \quad a_0 > 0, \quad |a_1| + \dots + |a_m| < a_0. \quad (3)$$

В статье [4] результаты построения точных D -оптимальных планов экспериментов для модели наблюдений (1), полученные в [3], были обобщены для более широкого класса дисперсий неравнооточных наблюдений:

$$D\{\varepsilon(x^{(j)})\} = d(x^{(j)}) \geq a_0 + a_1 x_{j1} + \dots + a_m x_{jm} > 0 \quad (4)$$

для каждой точки наблюдения $x^{(j)}$. Функция $d(x_1, \dots, x_m)$ в (4) должна быть такой, чтобы в вершинах единичного m -мерного куба ($|x_j| \leq 1, j = \overline{1, m}$) неравенство (4) обращалось в равенство. Как отмечалось в [4], класс функций $d(x_1, \dots, x_m)$, описываемых неравенством (4), обширен. К нему принадлежат постоянные функции (равноточные наблюдения), функции с линейным изменением вида (3), а также вогнутые функции, удовлетворяющие (4).

В статье [4] построение точных D -оптимальных планов экспериментов для модели наблюдений (1) основывалось на теоремах 1 и 2.

Теорема 1. Для модели наблюдений (1), (4) существует точный D -оптимальный план ε^0 экспериментов, все точки спектра которого лежат в вершинах единичного m -мерного куба.

Как следствие, из теоремы 1 вытекает теорема 2.

Теорема 2. Для модели (1) с некоррелированными ошибками наблюдений, имеющими средние значения 0 и дисперсии

$$D\{\varepsilon(x^{(j)})\} = d(x^{(j)}) \geq a_0, \quad a_0 > 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (5)$$

для функций $d(x)$ таких, что неравенство (5) обращается в равенство в вершинах единичного m -мерного куба, точные D -оптимальные планы экспериментов остаются такими же, как и для равноточных наблюдений.

В данной статье получены некоторые обобщения результатов построения D -оптимальных планов экспериментов, предложенных в работах [2–4].

Обозначим через $X = (x_{ij})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, матрицу плана экспериментов, i -я строка этой матрицы – координаты i -й точки $x^{(i)}$, в которой планируется проводить наблюдение.

Для модели (1) с неравноточными наблюдениями непрерывные D -оптимальные планы экспериментов можно построить в случае, когда дисперсия ошибок наблюдений $d(x_1, \dots, x_m)$ удовлетворяет неравенству

$$d(x_1, \dots, x_m) \geq \frac{\sigma^2}{m} (x_1^2 + \dots + x_m^2), \quad \sigma \neq 0, \quad (6)$$

в котором не все $x_1, \dots, x_m$ одновременно обращаются в нуль, и в вершинах единичного m -мерного куба неравенство (6) обращается в равенство. Неравенству (6) удовлетворяют, например, функции:

$$d(x) = \left(\frac{\sigma^2}{m} \right) (2m - x_1^2 - \dots - x_m^2); \quad d(x) = \sigma^2 \text{ (равноточные наблюдения) и ряд других.}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. Для модели наблюдений (1), (6) матрица плана экспериментов X со взаимно ортогональными столбцами и элементами, равными ± 1 , определяет непрерывный D -оптимальный план экспериментов

$$\varepsilon^0 = \left\{ x^{(i)}, p_i = \frac{1}{n}, i = \overline{1, n} \right\},$$

где p_i – веса наблюдений в точке $x^{(i)}$.

Доказательство. Информационная матрица $M(\varepsilon^0)$ непрерывного плана ε^0 в силу того, что взаимно ортогональны столбцы матрицы X и все элементы равны ± 1 , преобразуется к виду

$$M(\varepsilon^0) = \frac{1}{n\sigma^2} \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{im} \end{pmatrix} (x_{i1}, \dots, x_{im}) = \frac{1}{n\sigma^2} X'X = \frac{1}{\sigma^2} E_m, \quad (7)$$

где E_m – единичная матрица размерности m . Оптимальность плана ε^0 будет доказана, если согласно теореме эквивалентности Кифера – Вольфовица [5, с. 109] будет установлено, что

$$\max \frac{1}{d(x_1, \dots, x_m)} (x_1, \dots, x_m) M^{-1}(\varepsilon^0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = m, \quad (8)$$

где максимум вычисляется по всем точкам единичного m -мерного куба. С учетом (6) и (7) имеем

$$\frac{1}{d(x_1, \dots, x_m)} (x_1, \dots, x_m) M^{-1}(\varepsilon^0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \frac{\sigma^2}{d(x_1, \dots, x_m)} (x_1^2 + \dots + x_m^2) \leq m. \quad (9)$$

В (9) верхняя граница m достигается в вершинах m -мерного единичного куба, что и обосновывает выполнимость утверждения (8). Теорема 3 доказана.

В качестве примера непрерывного D -оптимального плана ε^0 для модели наблюдений (1), (6) можно привести план, соответствующий полному факторному эксперименту, в котором точки спектра сосредоточены во всех 2^m вершинах единичного m -мерного куба с равными весами $\frac{1}{2^m}$. Недостатком таких планов при их практическом применении является то, что при больших значениях m они содержат

чрезмерно большое число точек. Поэтому представляет интерес построение D -оптимальных планов с наименьшим числом точек в своем спектре. Такие планы в теории планирования экспериментов называются насыщенными. Для модели наблюдений (1) насыщенный план должен содержать m точек. Подбор матрицы X плана эксперимента, удовлетворяющей теореме 3, но с меньшим чем 2^m числом точек, тесно связан с построением матриц Адамара. Так, например, для модели наблюдений (1), (6) с четырьмя факторами D -оптимальный план может содержать четыре точки: $x^{(1)} = (1, 1, 1, 1)$, $x^{(2)} = (1, -1, 1, -1)$, $x^{(3)} = (1, 1, -1, -1)$, $x^{(4)} = (1, -1, -1, 1)$, а не 16 точек.

Для частного случая модели наблюдений (1), (2)

$$y_i = \theta_0 + \theta_1 x_{i1} + \theta_2 x_{i2} + \varepsilon(x^{(i)}), \quad i = \overline{1, n}, \quad n \geq 3, \quad (10)$$

можно получить дополнительные результаты по построению D -оптимальных планов экспериментов с неравноточными наблюдениями. Модель наблюдений (10) следует из (1), если в ней первую компоненту в векторе переменных положить фиктивной переменной, тождественно равной 1. В модели наблюдений (10) будем считать, что ошибки наблюдений некоррелированные, имеют средние значения, равные 0, и дисперсии $d(x_1, x_2)$, удовлетворяющие неравенству

$$d(x_1, x_2) \geq \frac{\sigma^2}{3}(1 + x_1^2 + x_2^2), \quad \sigma \neq 0, \quad (11)$$

причем в (11) равенство выполняется в вершинах единичного квадрата: $x^{(1)} = (1, 1)$, $x^{(2)} = (-1, 1)$, $x^{(3)} = (-1, -1)$, $x^{(4)} = (1, -1)$.

Как частный случай теоремы 3 получаем следующую теорему.

Теорема 4. *Непрерывный D -оптимальный план экспериментов для модели наблюдений (10), (11) имеет вид*

$$\varepsilon^0 = \left\{ \begin{matrix} x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(3)}, & x^{(4)} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \end{matrix} \right\}, \quad (12)$$

где $\frac{1}{4}$ – веса наблюдений.

Матрица X плана экспериментов (12), строки которой – координаты вершин единичного квадрата, удовлетворяет условиям теоремы 3. Число точек плана (12) равно 4, что в два раза меньше числа точек полного факторного эксперимента.

На основе непрерывного плана (12) можно строить точные D -оптимальные планы для модели наблюдений (10), (11) при фиксированном числе наблюдений, кратном 4: $n = 4s$, $s = 1, 2, \dots$.

В этом случае в каждой вершине единичного квадрата надо проводить по s наблюдений.

Для модели наблюдений (10) с неравноточными наблюдениями можно сконструировать еще четыре непрерывных D -оптимальных плана экспериментов, точки спектра которых будут лежать в трех вершинах единичного квадрата. Введем обозначения: $d(x^{(1)}) = d_1$, $d(x^{(2)}) = d_2$, $d(x^{(3)}) = d_3$, $d(x^{(4)}) = d_4$.

Теорема 5. *Для модели наблюдений (10) с некоррелированными ошибками наблюдений, имеющими средние значения 0 и дисперсии $d(x_1, x_2)$, непрерывными D -оптимальными планами являются следующие.*

План

$$\varepsilon_1^0 = \left\{ \begin{matrix} x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(3)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{matrix} \right\} \quad (13)$$

с дисперсиями наблюдений

$$d(x_1, x_2) \geq \frac{1}{4}(d_1 + d_3 + 2d_1x_1 - 2d_3x_2 - 2d_2x_1x_2 + (d_1 + d_2)x_1^2 + (d_2 + d_3)x_2^2). \quad (14)$$

План

$$\varepsilon_2^0 = \left\{ \begin{matrix} x^{(2)}, & x^{(3)}, & x^{(4)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{matrix} \right\} \quad (15)$$

с дисперсиями наблюдений

$$d(x_1, x_2) \geq \frac{1}{4}(d_2 + d_4 + 2d_4x_1 + 2d_2x_2 + 2d_3x_1x_2 + (d_3 + d_4)x_1^2 + (d_2 + d_3)x_2^2). \quad (16)$$

План

$$\epsilon_3^0 = \begin{Bmatrix} x^{(1)}, & x^{(3)}, & x^{(4)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

с дисперсиями наблюдений

$$d(x_1, x_2) \geq \frac{1}{4}(d_1 + d_3 - 2d_3x_1 + 2d_1x_2 - 2d_4x_1x_2 + (d_3 + d_4)x_1^2 + (d_1 + d_4)x_2^2). \quad (18)$$

План

$$\epsilon_4^0 = \begin{Bmatrix} x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(4)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

с дисперсиями наблюдений

$$d(x_1, x_2) \geq \frac{1}{4}(d_2 + d_4 - 2d_2x_1 - 2d_4x_2 + 2d_1x_1x_2 + (d_1 + d_2)x_1^2 + (d_1 + d_4)x_2^2). \quad (20)$$

Доказательство. Опишем вначале процесс построения непрерывного D -оптимального плана ϵ_1^0 для модели неравноточных наблюдений (10) с точками спектра $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ и дисперсиями наблюдений в этих точках d_1, d_2, d_3 . Для оптимального плана ϵ_1^0 по теореме эквивалентности Кифера – Вольфовица [5] выполняется неравенство

$$\frac{1}{d(x_1, x_2)}(1, x_1, x_2)M^{-1}(\epsilon_1^0) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq 3, \quad |x_1| \leq 1, \quad |x_2| \leq 1, \quad (21)$$

где $d(x_1, x_2)$ – непрерывная функция, определяющая дисперсию ошибки наблюдения в точке (x_1, x_2) ; $M(\epsilon_1^0)$ – информационная матрица плана экспериментов. В точках спектра плана ϵ_1^0 неравенство (21), как необходимое условие, обращается в равенство. Исходя из этого, построим класс функций $d(x_1, x_2)$, определяющих поведение дисперсии ошибок наблюдений для плана ϵ_1^0 . Информационная матрица плана ϵ_1^0 равна

$$M(\epsilon_1^0) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{d_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, 1, 1) + \frac{1}{d_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, 1) + \frac{1}{d_3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} (1, -1, -1) \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & e \\ c & e & a \end{pmatrix},$$

где

$$a = d_1^{-1} + d_2^{-1} + d_3^{-1}; \quad b = d_1^{-1} - d_2^{-1} - d_3^{-1}; \quad c = d_1^{-1} + d_2^{-1} - d_3^{-1}; \quad e = d_1^{-1} - d_2^{-1} + d_3^{-1}. \quad (22)$$

Матрица, обратная к матрице $M(\epsilon_1^0)$, имеет вид

$$M^{-1}(\epsilon_1^0) = \frac{3}{a^3 + 2bce - a(b^2 + c^2 + e^2)} \begin{pmatrix} a^2 - e^2 & ce - ab & be - ac \\ ce - ab & a^2 - c^2 & bc - ae \\ be - ac & bc - ae & a^2 - b^2 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Разрешая неравенство (21) относительно $d(x_1, x_2)$ с учетом (23), получим класс функций $d(x_1, x_2)$, определяющих изменение дисперсии наблюдений в плане ϵ_1^0 :

$$d(x_1, x_2) \geq f(x_1, x_2), \quad (24)$$

где

$$f(x_1, x_2) = \frac{(a^2 - c^2)x_1^2 + (a^2 - b^2)x_2^2 + 2(bc - ae)x_1x_2 + 2(ce - ab)x_1 + 2(be - ac)x_2 + a^2 - e^2}{a^3 + 2bce - a(b^2 + c^2 + e^2)}.$$

Если теперь в функции $f(x_1, x_2)$ вернуться к исходным обозначениям (22), то неравенство (24) обратится в неравенство (14). Необходимое условие оптимальности плана ϵ_1^0 также выполняется, так как в точках спектра плана $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ неравенство (14) обращается в равенство.

Аналогичным образом обосновывается оптимальность остальных планов (15), (17), (19). При этом каждый раз будут меняться обозначения (22). А именно для плана (15)

$$a = d_2^{-1} + d_3^{-1} + d_4^{-1}, \quad b = -d_2^{-1} - d_3^{-1} + d_4^{-1}, \quad c = d_2^{-1} - d_3^{-1} - d_4^{-1}, \quad e = -d_2^{-1} + d_3^{-1} - d_4^{-1}.$$

Для плана (17)

$$a = d_1^{-1} + d_3^{-1} + d_4^{-1}, \quad b = d_1^{-1} - d_3^{-1} + d_4^{-1}, \quad c = d_1^{-1} - d_3^{-1} - d_4^{-1}, \quad e = d_1^{-1} + d_3^{-1} - d_4^{-1}.$$

Для плана (19)

$$a = d_1^{-1} + d_2^{-1} + d_4^{-1}, \quad b = d_1^{-1} - d_2^{-1} + d_4^{-1}, \quad c = d_1^{-1} + d_2^{-1} - d_4^{-1}, \quad e = d_1^{-1} - d_2^{-1} - d_4^{-1}.$$

Необходимые условия оптимальности планов (15), (17), (19) выполняются, так как в точках спектров этих планов неравенства (16), (18), (20) обращаются в равенства. Доказательство теоремы 5 завершено.

На основе планов (13), (15), (17), (19) можно строить точные D -оптимальные планы экспериментов для наблюдений, кратных 3 ($n = 3s$). Например, план

$$\epsilon^0 = \begin{Bmatrix} x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(3)} \\ s, & s, & s \end{Bmatrix}$$

определяет D -оптимальный план экспериментов для модели неравноточных наблюдений (10) с дисперсиями $d(x_1, x_2)$, удовлетворяющими неравенству

$$d(x_1, x_2) \geq 2 + 3x_1 - x_2 - 2x_1x_2 + \frac{5}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 \quad (25)$$

и условиям $d(x^{(1)}) = 6$, $d(x^{(2)}) = 4$, $d(x^{(3)}) = 2$. Неравенство (14) в данном случае обращается в неравенство (25). Примерами функций $d(x_1, x_2)$, удовлетворяющих (25), могут служить: $d(x_1, x_2) = 2,5x_1^2 + 1,5x_2^2 - 2x_1x_2 + 3x_1 - x_2 + 2$; $d(x_1, x_2) = -0,5x_1^2 - 1,5x_2^2 - 2x_1x_2 + 3x_1 - x_2 + 8$ и ряд других.

Для модели (10) с неравноточными наблюдениями можно строить насыщенные D -оптимальные планы экспериментов на основе теорем 1 и 2. Так, для модели наблюдений (10), дисперсии которых $d(x_1, x_2)$ определяются неравенством

$$d(x_1, x_2) \geq 4 - x_1 - x_2, \quad (26)$$

в котором равенство достигается во всех вершинах единичного квадрата, насыщенный D -оптимальный план имеет вид

$$\epsilon^0 = \begin{Bmatrix} x^{(2)}, & x^{(3)}, & x^{(4)} \\ 1, & 1, & 1 \end{Bmatrix}.$$

Функциями, удовлетворяющими (26), могут быть: $d(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 - x_1 - x_2 + 6$; $d(x_1, x_2) = 4 - x_1 - x_2$ и ряд других.

Для модели неравноточных наблюдений (10), кратных трем ($n = 3s$), с дисперсиями $d(x_1, x_2)$, удовлетворяющими неравенству

$$d(x_1, x_2) \geq \sigma^2, \quad \sigma \neq 0, \quad (27)$$

которое обращается в равенство во всех вершинах единичного квадрата, можно построить четыре насыщенных D -оптимальных плана экспериментов с точками спектра, располагающимися в трех разных вершинах единичного квадрата, по s в каждой вершине. Функциями $d(x_1, x_2)$, удовлетворяющими (27), могут быть: $d(x_1, x_2) = \sigma^2$ (равноточные наблюдения); $d(x_1, x_2) = -kx_1^2 - kx_2^2 + \sigma^2 + 2k$, $k > 0$, и ряд других. Более того, при специальном выборе функции $d(x_1, x_2)$ в неравенстве (27), как показано в [4], можно построить бесконечное, несчетное множество насыщенных планов экспериментов для модели наблюдений (10).

Для модели (10) с наблюдениями, кратными четырем ($n = 4s$), при построении D -оптимальных планов экспериментов можно использовать теоремы 1, 2 и 4. Так, для модели наблюдений (10) с дисперсиями, удовлетворяющими (11), нужно во всех вершинах единичного квадрата проводить по s наблюдений. Примеры таких функций: $d(x_1, x_2) = \sigma^2$; $d(x_1, x_2) = \frac{7 - 2x_1^2 - 2x_2^2}{3}$ и ряд других.

Если в модели (10) проводится четыре наблюдения с дисперсиями $d(x_1, x_2)$, удовлетворяющими неравенству $d(x_1, x_2) \geq 10 + 6x_1 + 3x_2$, которое обращается в равенство во всех вершинах единичного квадрата, то наблюдения надо проводить во всех вершинах единичного квадрата. Примеры таких функций: $d(x_1, x_2) = 10 + 6x_1 + 3x_2$; $d(x_1, x_2) = -x_1^2 - 9x_2^2 + 6x_1 + 3x_2 + 20$ и ряд других.

Для модели (10) с пятью неравноточными наблюдениями D -оптимальные планы можно строить на основе теорем 1 и 2. Пусть, например, дисперсии наблюдений удовлетворяют неравенству $d(x_1, x_2) \geq 4 + x_1 + x_2$, которое обращается в равенство в вершинах единичного квадрата. В этом случае точки спектра оптимального плана должны располагаться во всех вершинах единичного квадрата, причем в вершине $x^{(2)}$ их две. Примеры таких функций: $d(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + x_2 + 6$; $d(x_1, x_2) = 4 + x_1 + x_2$.

Для модели (10) с пятью наблюдениями, дисперсии которых удовлетворяют неравенству $d(x_1, x_2) \geq 4 + x_1$, которое обращается в равенство в вершинах единичного квадрата, можно построить два оптимальных плана экспериментов. Точки спектра этих планов находятся во всех вершинах единичного квадрата. Причем в первом плане вершина $x^{(2)}$, а во втором плане вершина $x^{(3)}$ содержатся дважды. Примеры функций $d(x_1, x_2)$: $d(x_1, x_2) = 4 + x_1$; $d(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_1 + 5$.

Для модели (10) с пятью наблюдениями, дисперсии которых удовлетворяют неравенству $d(x_1, x_2) \geq 4$, которое обращается в равенство в вершинах единичного квадрата, можно построить четыре оптимальных плана экспериментов. Точки спектра этих планов находятся во всех вершинах единичного квадрата, но одна из вершин повторяется дважды. Эти планы совпадают с классическими D -оптимальными планами, которые строятся для равноточных наблюдений. Примеры таких функций: $d(x_1, x_2) = -x_1^2 + 6$; $d(x_1, x_2) = -x_2^2 + 5$; $d(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 6$; $d(x_1, x_2) = 4$.

Библиографические ссылки

1. Moyssiadis C, Kounias S. Exact D -optimal N observations 2^k designs of resolution III, when $N \equiv 1$ or $2 \pmod{4}$. *Mathematische Operationsforschung und Statistik Series Statistics*. 1983;14(3):367–379. DOI: 10.1080/02331888308801711.
2. Кирлица ВП. Точные D -оптимальные планы экспериментов для линейной модели парной регрессии. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика*. 2016;2:116–122.
3. Kirlitsa VP. Exact D -optimal designs of experiments for linear multiple model with linear variance of observations. In: *Computer Data Analysis and Modeling. Robustness and Computer Intensive Methods. Proceedings of the Seventh International Conference; 2004 September 6–10; Minsk, Belarus. Volume 1*. Minsk: Belarusian State University; 2004. p. 165–167.
4. Кирлица ВП. Точные D -оптимальные планы экспериментов для линейной множественной регрессии с неравноточными наблюдениями. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2017;3:53–59.
5. Ермаков СМ, Жиглявский АА. *Математическая теория оптимального эксперимента*. Москва: Наука; 1987. 320 с.

References

1. Moyssiadis C, Kounias S. Exact D -optimal N observations 2^k designs of resolution III, when $N \equiv 1$ or $2 \pmod{4}$. *Mathematische Operationsforschung und Statistik Series Statistics*. 1983;14(3):367–379. DOI: 10.1080/02331888308801711.
2. Kirlitsa VP. Exact D -optimal designs of experiments for linear pair regression. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika*. 2016;2:116–122. Russian.
3. Kirlitsa VP. Exact D -optimal designs of experiments for linear multiple model with linear variance of observations. In: *Computer Data Analysis and Modeling. Robustness and Computer Intensive Methods. Proceedings of the Seventh International Conference; 2004 September 6–10; Minsk, Belarus. Volume 1*. Minsk: Belarusian State University; 2004. p. 165–167.
4. Kirlitsa VP. Exact D -optimal designs of experiments for lineal multiple regression with heteroscedastic observations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2017;3:53–59. Russian.
5. Ermakov SM, Zhiglyavskii AA. *Matematicheskaya teoriya optimal'nogo eksperimenta* [The mathematical theory of optimal design]. Moscow: Nauka; 1987. 320 p. Russian.

Статья поступила в редакцию 22.02.2019.
Received by editorial board 22.02.2019.