УДК 539.3

ПОЛЕ НАПРЯЖЕНИЙ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ АНИЗОТРОПНОГО ДИСКА ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ, НАГРУЖЕННОГО СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ ПО ВНЕШНЕМУ КОНТУРУ

В. В. КОРОЛЕВИЧ[1)]

[1)]*Международный центр современного образования,*
ул. Штепанска, 61, 110 00, г. Прага 1, Чехия

Приводится решение плоской задачи теории упругости для вращающегося полярно-ортотропного диска переменной толщины. На внешнем контуре диск нагружен системой одинаковых сосредоточенных сил, приложенных равномерно по ободу и симметричных относительно диаметра. Диск посажен с натягом на гибкий вал, так что на внутреннем контуре действует постоянное контактное давление. Напряжения и деформации, возникающие в таком вращающемся анизотропном кольцевом диске, будут неосесимметричными. Выводится дифференциальное уравнение 4-го порядка в частных производных для функции усилий. Его общее решение разыскивается в виде ряда Фурье по косинусам с четными номерами. В результате получается бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов ряда. Данным дифференциальным уравнениям ставятся в соответствие линейные интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода, которые решаются с помощью резольвент. Постоянные интегрирования определяются из граничных условий. По известным формулам записываются выражения для компонент напряжений через функцию усилий. Интегрированием уравнений закона Гука для полярно-ортотропной пластины определяются компоненты вектора перемещения в диске. Зная последние, по дифференциальным соотношениям Коши легко вычислить компоненты деформаций в кольцевом анизотропном

Образец цитирования:
Королевич ВВ. Поле напряжений вращающегося анизотропного диска переменной толщины, нагруженного сосредоточенными силами по внешнему контуру. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;2:40–51.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-40-51

For citation:
Karalevich UV. The field of tensions of a rotating anisotropic disc of a variable thickness loaded with undistracted forces on the outer contour. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;2:40–51. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-40-51

Автор:
Владимир Васильевич Королевич – преподаватель.

Author:
Uladzimir V. Karalevich, lecturer.
v.korolevich@mail.ru

диске. Полученные формулы для напряжений, деформаций и перемещений полностью описывают напряженно-деформированное состояние вращающегося полярно-ортотропного диска переменной толщины с системой сосредоточенных сил по внешнему контуру.

Ключевые слова: полярно-ортотропный диск переменной толщины; сосредоточенная сила; дифференциальные уравнения; интегральные уравнения; резольвента; напряжения в диске; деформации в диске; перемещения в диске.

THE FIELD OF TENSIONS OF A ROTATING ANISOTROPIC DISC OF A VARIABLE THICKNESS LOADED WITH UNDISTRACTED FORCES ON THE OUTER CONTOUR

U. V. KARALEVICH [a]

[a]*International Center of Modern Education, 61 Štěpánská, Prague 1, PSČ 110 00, Czech*

The work gives a solution of the plane elasticity problem for rotating polar-orthotropic annular disks of a variable thickness. The disk is loaded with a system of equal focused forces on the outer contour applied evenly along the rim and symmetric concerning the diameter. The disk is seated with an interference fit on the flexible shaft so that a constant contact pressure acts on the interior contour. The stresses and deformations arising in such a rotating anisotropic annular disk will be non-axisymmetric. A conclusion of a fourth-order partial differential equation for the effort function is drawn. Its general solution is searched out in the form of a Fourier series of cosines with even numbers. As a result, an infinite system of ordinary differential equations is solved for the coefficients of the series. These differential equations correspond to the linear Volterra integral equations of the 2nd kind, which are solved using resolvents. Constants of integration are determined from the border conditions. Expressions for the stress components are written through the effort function by the well-known formulas. We find the components of the displacement vector in the disk by the integration of the Hooke's law equations for the polar-orthotropic plate. We calculate the deformation components in a ring anisotropic disk by Cauchy differential relations if we know the displacements. The solved formulas for stresses, deformations and displacements completely describe the stress-deformed state in a rotating polar-orthotropic disc of variable thickness with a system of focused forces on the outer contour. The results of the work can be used in the design of working disks of turbomachines and turbo compressors, as well as rotors of centrifugal stands.

Keywords: polar-orthotropic disk of variable thickness; focused force; differential equations; integral equations; resolvent; stresses in the disc; deformations in the disc; displacements in the disc.

Введение

В современном турбостроении [1] диски рабочих колес турбомашин и турбокомпрессоров являются наиболее ответственными деталями этих конструкций. В работах [2; 3] исследовано напряженно-деформированное состояние вращающихся облопаченных анизотропных турбинных дисков постоянной толщины степенного, конического и экспоненциального профилей. Получены точные решения плоской задачи теории упругости для вращающихся анизотропных дисков с указанными профилями, нагруженных на внешнем контуре системой сосредоточенных сил.

Сосредоточенная сила – это сила инерции i-й лопатки $F_i^{л}$, возникающая при вращении диска с угловой скоростью ω и равная: $F_i^{л} = m_{л}\omega^2 R^{л}_{ц.\,т}$, где $m_{л}$ – масса лопатки; $R^{л}_{ц.\,т}$ – расстояние от оси вращения до центра тяжести лопатки. Эти силы приложены на малых участках внешней поверхности обода.

Во всех вышеприведенных работах, как и в данной, рассматривается режим *стационарного* вращения турбинного диска с определенной рабочей частотой, не совпадающей ни с одной из собственных частот колебаний диска или других элементов конструкции турбомашины.

Для более сложных профилей диска решение задачи возможно только численными методами.

В настоящей работе для решения плоской задачи теории упругости для вращающихся облопаченных анизотропных турбинных дисков переменной толщины $h(r)$, зависящей от радиуса r, применяется метод линейных интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода. Толщина $h(r)$ должна быть непрерывной функцией, без скачков и изломов, плавно изменяющейся вдоль радиуса r. Обычно при проектировании турбинных дисков задают функцию толщины $h(r)$, а также значения толщины диска h_0 на внутреннем контуре радиусом r_0 и h_1 на внешнем контуре радиусом R. Параметры функции $h(r)$ должны выражаться через эти четыре заданные геометрические величины – h_0, h_1, r_0, R. Отрицательный знак первой производной функции толщины $h(r)$ ($h'(r) < 0$) указывает на убывание, а положительный ($h'(r) > 0$) – на ее возрастание на интервале изменения радиуса r от r_0 до R. Если толщина диска $h(r)$ задается не одной функцией, а, например, двумя, т. е. на первом участке $\left[r_0, r^*\right]$ функция $h_1(r)$, а на втором участке $\left[r^*, R\right]$ – $h_2(r)$, то в точке перехода r^* значения этих функций и их первых производных должны совпадать: $h_1(r^*) = h_2(r^*)$ и $h_1'(r^*) = h_2'(r^*)$. Аналогичные условия наблюдаются в точках переходов, если задано несколько функций толщины на более чем двух участках.

В статье рассматривается ротор турбины в виде анизотропного кольцевого диска переменной толщины $h(r)$, который на внешнем контуре радиусом R соединен с ободом. На внешней боковой поверхности обода радиусом R_1 установлено четное количество N равноотстоящих одинаковых лопаток. Диск насаживается с натягом на вал, так что на внутреннем его контуре радиусом r_0 действует контактное давление p_0.

Напряженно-деформированное состояние в таком облопаченном анизотропном кольцевом диске переменной толщины будет *плоским* и *неосесимметричным*.

Постановка задачи и основные уравнения

Пусть материал диска обладает цилиндрической анизотропией, причем ось анизотропии совпадает с геометрической осью диска, и в каждой точке диска имеются три взаимно ортогональные плоскости упругой симметрии. Облопаченный диск вращается равномерно с угловой скоростью ω вокруг оси, совпадающей с осью анизотропии и перпендикулярной к срединной плоскости диска. На внешнем контуре диск соединен с ободом, который нагружен системой N одинаковых сосредоточенных сил $F_i^{\text{л}}$ ($i = \overline{1,\ N}$), а на внутреннем контуре действует контактное давление p_0.

Требуется найти распределение напряжений, деформаций и перемещений в данном вращающемся анизотропном кольцевом диске переменной толщины $h(r)$ и в ободе.

Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z, поместив начало в точке пересечения оси анизотропии со срединной плоскостью диска. Ось z направим вертикально вверх.

Вращающийся диск с ободом нагружен сосредоточенными силами, приложенными к его внешней боковой границе параллельно плоскости диска; центробежные силы действуют в той же плоскости, а поверхности диска свободны от нагрузок. Все действующие силы постоянные по толщине диска. Тогда нормальное напряжение σ_z и касательные напряжения $\tau_{rz} = \tau_{zr}$ и $\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta}$ полагают равными нулю. Остальные компоненты напряжений σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ не зависят от координаты z и являются функциями только координат r и θ. В этом случае в диске реализовано *плоское напряженное состояние* [4].

Выделим из диска двумя меридиональными плоскостями, образующими с координатной плоскостью rz углы θ и $\theta + d\theta$, и двумя цилиндрическими поверхностями радиусами r и $r + dr$, нормальными к срединной плоскости, бесконечно малый элемент. Запишем уравнения равновесия в усилиях для этого элемента диска [5]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{N_r - N_\theta}{r} + h(r)\rho\omega^2 r = 0, \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{2T_{r\theta}}{r} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $N_r(r, \theta) = h(r)\sigma_r(r, \theta)$ – радиальное усилие; $N_\theta(r, \theta) = h(r)\sigma_\theta(r, \theta)$ – тангенциальное усилие; $T_{r\theta}(r, \theta) = h(r)\tau_{r\theta}(r, \theta)$ – касательное усилие; ρ – плотность материала диска.

Выразим усилия $N_r(r, \theta)$, $N_\theta(r, \theta)$, $T_{r\theta}(r, \theta)$ через функцию усилий $F(r, \theta)$ по формулам

$$\begin{cases} N_r(r, \theta) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F(r, \theta)}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 F(r, \theta)}{\partial \theta^2}, \\ N_\theta(r, \theta) = \dfrac{\partial^2 F(r, \theta)}{\partial r^2} + h(r)\rho\omega^2 r^2, \\ T_{r\theta}(r, \theta) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial F(r, \theta)}{\partial \theta} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 F(r, \theta)}{\partial r \partial \theta}. \end{cases} \tag{2}$$

Подстановкой выражений (2) в уравнения равновесия (1) убеждаемся, что они тождественно выполняются.

Из формул (2) получим зависимости компонент напряжений $\sigma_r(r,\theta)$, $\sigma_\theta(r,\theta)$, $\tau_{r\theta}(r,\theta)$ от функции усилий $F(r,\theta)$:

$$\begin{cases} \sigma_r(r,\theta)=\dfrac{1}{h(r)}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F(r,\theta)}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 F(r,\theta)}{\partial \theta^2}\right), \\ \sigma_\theta(r,\theta)=\dfrac{1}{h(r)}\dfrac{\partial^2 F(r,\theta)}{\partial r^2}+\rho\omega^2 r^2, \\ \tau_{r\theta}(r,\theta)=\dfrac{1}{h(r)}\left(\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial F(r,\theta)}{\partial \theta}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 F(r,\theta)}{\partial r\partial \theta}\right). \end{cases} \tag{3}$$

Закон Гука для полярно-ортотропной пластины имеет вид [7]

$$\begin{cases} \varepsilon_\theta(r,\theta)=\dfrac{1}{E_r}\sigma_r(r,\theta)-\dfrac{\nu_{\theta r}}{E_\theta}\sigma_\theta(r,\theta), \\ \varepsilon_r(r,\theta)=-\dfrac{\nu_{r\theta}}{E_r}\sigma_r(r,\theta)+\dfrac{1}{E_\theta}\sigma_\theta(r,\theta), \\ \gamma_{r\theta}(r,\theta)=\dfrac{1}{G_{r\theta}}\tau_{r\theta}(r,\theta), \end{cases} \tag{4}$$

где $\varepsilon_r(r,\theta)$, $\varepsilon_\theta(r,\theta)$ – радиальная и тангенциальная компоненты деформаций соответственно; $\gamma_{r\theta}(r,\theta)$ – деформация сдвига; E_r, E_θ – модули упругости при растяжении (сжатии) анизотропного тела в радиальном и тангенциальном направлениях соответственно; $\nu_{r\theta}$, $\nu_{\theta r}$ – коэффициенты Пуассона; $G_{r\theta}$ – модуль сдвига.

Для полярно-ортотропной пластины справедливо следующее равенство:

$$\frac{\nu_{r\theta}}{E_r}=\frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta}.$$

Подставляя выражения (3) для компонент напряжений $\sigma_r(r,\theta)$, $\sigma_\theta(r,\theta)$, $\tau_{r\theta}(r,\theta)$ в уравнения закона Гука (4), получим зависимости компонент деформаций $\varepsilon_r(r,\theta)$, $\varepsilon_\theta(r,\theta)$, $\gamma_{r\theta}(r,\theta)$ от функции усилий $F(r,\theta)$:

$$\begin{cases} \varepsilon_r(r,\theta)=\dfrac{1}{E_\theta}\left[k^2\sigma_r(r,\theta)-\nu_{\theta r}\cdot\sigma_r(r,\theta)\right]= \\ =\dfrac{1}{E_\theta h(r)}\left[-\nu_{\theta r}\dfrac{\partial^2 F(r,\theta)}{\partial r^2}+\dfrac{k^2}{r^2}\dfrac{\partial^2 F(r,\theta)}{\partial \theta^2}+\dfrac{k^2}{r}\dfrac{\partial F(r,\theta)}{\partial r}\right]-\nu_{\theta r}\dfrac{\rho\omega^2 r^2}{E_\theta}, \\ \varepsilon_\theta(r,\theta)=\dfrac{1}{E_\theta}\left[-\nu_{\theta r}\sigma_r(r,\theta)+\sigma_\theta(r,\theta)\right]= \\ =\dfrac{1}{E_\theta h(r)}\left[\dfrac{\partial^2 F(r,\theta)}{\partial r^2}-\dfrac{\nu_{\theta r}}{r^2}\dfrac{\partial^2 F(r,\theta)}{\partial \theta^2}-\dfrac{\nu_{\theta r}}{r}\dfrac{\partial F(r,\theta)}{\partial r}\right]+\dfrac{\rho\omega^2 r^2}{E_\theta}, \\ \gamma_{r\theta}(r,\theta)=\dfrac{1}{G_{r\theta}h(r)}\left(\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial F(r,\theta)}{\partial \theta}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 F(r,\theta)}{\partial r\partial \theta}\right), \end{cases} \tag{5}$$

где $k^2=\dfrac{E_\theta}{E_r}$.

Обозначим компоненты вектора перемещения $\vec{U}$ в радиальном направлении через $u(r,\theta)$, а в тангенциальном – через $v(r,\theta)$.

Связь компонент деформаций $\varepsilon_r(r, \theta)$, $\varepsilon_\theta(r, \theta)$, $\gamma_{r\theta}(r, \theta)$ с компонентами $u(r, \theta)$ и $v(r, \theta)$ вектора перемещения $\overrightarrow{U}$ задается дифференциальными соотношениями Коши [4; 6]

$$\varepsilon_r(r, \theta) = \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r}, \ \ \varepsilon_\theta(r, \theta) = \frac{u(r, \theta)}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v(r, \theta)}{\partial \theta},$$

$$\gamma_{r\theta}(r, \theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial v(r, \theta)}{\partial r} - \frac{v(r, \theta)}{r}. \tag{6}$$

Из первых двух соотношений (6) найдем радиальное $u(r, \theta)$ и тангенциальное $v(r, \theta)$ перемещения:

$$u(r, \theta) = \int \varepsilon_r(r, \theta)dr + \chi_1(\theta),$$

$$v(r, \theta) = \int \left[r\varepsilon_\theta(r, \theta) - u(r, \theta)\right]d\theta + \chi_2(r),$$

которые должны удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial v(r, \theta)}{\partial r} - \frac{v(r, \theta)}{r} = \frac{1}{G_{r\theta}}\tau_{r\theta}(r, \theta). \tag{7}$$

Неизвестные функции $\chi_1(\theta)$, $\chi_2(r)$ находятся из решения уравнения (7).

Исключая компоненты $u(r, \theta)$ и $v(r, \theta)$ вектора перемещения $\overrightarrow{U}$ из соотношений (6), получим уравнение совместности деформаций

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varepsilon_r(r, \theta)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2\left(r\varepsilon_\theta(r, \theta)\right)}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\left(r\gamma_{r\theta}(r, \theta)\right)}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial \varepsilon_r(r, \theta)}{\partial r} = 0. \tag{8}$$

Подстановка в уравнение (8) выражений для компонент деформаций $\varepsilon_r(r, \theta)$, $\varepsilon_\theta(r, \theta)$, $\gamma_{r\theta}(r, \theta)$ из (5) приводит к неоднородному дифференциальному уравнению 4-го порядка в частных производных для функции усилий $F(r, \theta)$:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}} - 2\nu_{\theta r}\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 F}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{k^2}{r^4}\frac{\partial^4 F}{\partial \theta^4} - 2\left[\frac{h'(r)}{h(r)} - \frac{1}{r}\right]\frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}} - 2\nu_{\theta r}\right)\left[\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r}\right]\times$$

$$\times\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2} - \left\{\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)' - \left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2\right] + \frac{(2 - \nu_{\theta r})}{r}\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{k^2}{r^2}\right\}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \left\{\nu_{\theta r}\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)' - \left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2\right] +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}} - 2\nu_{\theta r}\right)\frac{1}{r}\left[\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r}\right] + \frac{k^2}{r}\left[\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{2}{r}\right]\right\}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \left\{\nu_{\theta r}\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)' - \left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2\right] +\right.$$

$$\left. + \frac{k^2}{r}\left[\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r}\right]\right\}\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} = -2(3 + \nu_{\theta r})h(r)\rho\omega^2. \tag{9}$$

Поскольку на внешнем контуре диска с ободом приложено четное количество N равноотстоящих одинаковых и симметричных относительно диаметра сосредоточенных сил $F_i^{л}$ $(i = \overline{1, N})$, то разложим функцию усилий $F(r,\theta)$ в ряд Фурье по косинусам с четными номерами:

$$F(r, \theta) = \Phi_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty}\Phi_{Nn}(r)\cos Nn\theta. \tag{10}$$

Подставляя разложение (10) в уравнение (9), получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов ряда $\Phi_0(r)$, $\Phi_{Nn}(r)$:

$$(n=0)\ \frac{d^4\Phi_0}{dr^4} - 2\left[\frac{h'(r)}{h(r)} - \frac{1}{r}\right]\frac{d^3\Phi_0}{dr^3} - \left\{\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)' - \left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2\right] + \frac{(2-\nu_{\theta r})}{r}\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{k^2}{r^2}\right\}\frac{d^2\Phi_0}{dr^2} +$$

$$+\left\{\frac{\nu_{\theta r}}{r}\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)' - 2\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2\right] + \frac{k^2}{r^2}\left[\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r}\right]\right\}\frac{d\Phi_0}{dr} = -2(3+\nu_{\theta r})h(r)\rho\omega^2. \quad (11)$$

$$(n\ge 1)\ \frac{d^4\Phi_{Nn}}{dr^4} - 2\left[\frac{h'(r)}{h(r)} - \frac{1}{r}\right]\frac{d^3\Phi_{Nn}}{dr^3} - \left\{\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)' - \left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2\right] + \frac{(2-\nu_{\theta r})}{r}\frac{h'(r)}{h(r)} +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}} - 2\nu_{\theta r}\right)\left((Nn)^2 + k^2\right)\frac{1}{r^2}\right\}\frac{d^2\Phi_{Nn}}{dr^2} + \left\{\frac{\nu_{\theta r}}{r}\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)' - \left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2\right] +\right.$$

$$+\left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}} - 2\nu_{\theta r}\right)(Nn)^2 + k^2\right]\left[\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r}\right]\frac{1}{r^2}\Bigg\}\frac{d\Phi_{Nn}}{dr} - (Nn)^2\left\{\nu_{\theta r}\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)' - \left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2\right] +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}} - 2\nu_{\theta r}\right)\left[\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r}\right]\frac{1}{r^3} + \frac{k^2}{r}\left[\frac{h'(r)}{h(r)} - \frac{\left((Nn)^2 - 2\right)}{r}\right]\right\}\frac{1}{r^2}\Phi_{Nn}(r) = 0. \quad (12)$$

Пусть обод шириной $\delta_к$ и толщиной $h_к$ нагружен N равными сосредоточенными силами $F_i^л$ $(i=\overline{1,\ N})$, симметричными относительно диаметра диска. Разлагая эту нагрузку в ряд Фурье по косинусам с четными номерами, получим для распределенной нагрузки интенсивностью $q_N(R,\ \theta)$ выражение [7]:

$$q_N(R_1,\ \theta) = \frac{NF^л}{2\pi R_1 h_к}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos Nn\theta\right).$$

Рассматривая обод как соединенное с диском кольцо, которое нагружено центробежными силами, а также радиальными напряжениями $\sigma_r^н = q_N(R,\ \theta)$ на наружной и $\sigma_r^в = \sigma_r(R,\ \theta)$ на внутренней поверхности, вычислим возникающее в нем окружное напряжение $\sigma_t^к(\theta)$. Из условия равновесия половины кольца имеем

$$\sigma_t^к(\theta) = \frac{1}{S_к}\left[q_N(R_1,\ \theta)h_к R_1 - \sigma_r(R,\ \theta)h_1 R + \frac{1}{3}h_к\rho_к\omega^2\left(R_1^3 - R^3\right)\right],$$

где $S_к = h_к\delta_к$ – площадь поперечного сечения кольца; R_1 – внешний радиус обода; h_1 – толщина диска на внешнем контуре; $\sigma_r(R,\ \theta)$ – радиальное напряжение в диске на внешнем контуре; $\rho_к$ – плотность материала обода.

Зная напряжение $\sigma_t^к(\theta)$, из закона Гука сначала определяем окружную деформацию $\varepsilon_t^к(\theta)$. Затем находим радиальное перемещение $u_к(\theta)$, считая напряженное состояние в кольце одноосным:

$$u_к(\theta) = \frac{R}{E}\sigma_t^к(\theta) = \frac{R}{S_к}\left[q_N(R_1,\ \theta)h_к R_1 - \sigma_r(R,\ \theta)h_1 R + \frac{1}{3}h_к\rho_к\omega^2\left(R_1^3 - R^3\right)\right],$$

где $E_к$ – модуль упругости материала обода.

Таким образом, решение плоской задачи теории упругости для вращающегося анизотропного диска переменной толщины $h(r)$ с ободом, нагруженного на внешней боковой границе обода системой сосредоточенных сил, свелось к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений (10), (11) с граничными условиями вида

$$\sigma_r(r_0, \theta) = -p_0,\ \tau_{r\theta}(r_0, \theta) = 0,\ u(R, \theta) = u_к(\theta),\ v(R, \theta) = 0. \tag{13}$$

Решение плоской задачи теории упругости методом линейных интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода

Сведем решения дифференциальных уравнений (11) и (12) к решению соответствующих им линейных интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода. Полагаем

$$\frac{d^4\Phi_0}{dr^4} = \varphi_0(r),\ \frac{d^4\Phi_{Nn}}{dr^4} = \varphi_{Nn}(r). \tag{14}$$

Последовательно интегрируя выражения (14), получим

$$\frac{d^3\Phi_0}{dr^3} = \int_{r_0}^{r} \varphi_0(s)\,ds + \dddot{\Phi}_0(r_0),\ \frac{d^3\Phi_{Nn}}{dr^3} = \int_{r_0}^{r} \varphi_{Nn}(s)\,ds + \dddot{\Phi}_{Nn}(r_0),$$

$$\frac{d^2\Phi_0}{dr^2} = \int_{r_0}^{r} (r-s)\varphi_0(s)\,ds + \dddot{\Phi}_0(r_0)(r-r_0) + \ddot{\Phi}_0(r_0),$$

$$\frac{d^2\Phi_{Nn}}{dr^2} = \int_{r_0}^{r} (r-s)\,\varphi_{Nn}(s)\,ds + \dddot{\Phi}_{Nn}(r_0)(r-r_0) + \ddot{\Phi}_{Nn}(r_0), \tag{15}$$

$$\frac{d\Phi_0}{dr} = \frac{1}{2}\int_{r_0}^{r} (r-s)^2\,\varphi_0(s)\,ds + \frac{1}{2}\dddot{\Phi}_0(r_0)(r-r_0)^2 + \ddot{\Phi}_0(r_0)(r-r_0) + \dot{\Phi}_0(r_0),$$

$$\frac{d\Phi_{Nn}}{dr} = \frac{1}{2}\int_{r_0}^{r} (r-s)^2\,\varphi_{Nn}(s)\,ds + \frac{1}{2}\dddot{\Phi}_{Nn}(r_0)(r-r_0)^2 + \ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)(r-r_0) + \dot{\Phi}_{Nn}(r_0),$$

$$\Phi_0(r) = \frac{1}{6}\int_{r_0}^{r} (r-s)^3\,\varphi_0(s)\,ds + \frac{1}{6}\dddot{\Phi}_0(r_0)(r-r_0)^3 + \frac{1}{2}\ddot{\Phi}_0(r_0)(r-r_0)^2 + \dot{\Phi}_0(r_0)(r-r_0) + \Phi_0(r_0),$$

$$\Phi_{Nn}(r) = \frac{1}{6}\int_{r_0}^{r} (r-s)^3\,\varphi_{Nn}(s)\,ds + \frac{1}{6}\dddot{\Phi}_{Nn}(r_0)(r-r_0)^3 + \frac{1}{2}\ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)(r-r_0)^2 + \dot{\Phi}_{Nn}(r_0)(r-r_0) + \Phi_{Nn}(r_0).$$

Здесь использовалось известное тождество Дирихле

$$\int_{r_0}^{r} dr_1 \int_{r_0}^{r_1} dr_2 \ldots \int_{r_0}^{r_{n-1}} f(r_n)\,dr_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_{r_0}^{r} (r-s)^{n-1} f(s)\,ds.$$

Подставим в дифференциальные уравнения (11), (12) вместо функций $\Phi_0(r)$, $\Phi_{Nn}(r)$ и их производных правые части выражений (14), (15). В результате получим искомые линейные интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода [8]:

$$\varphi_0(r) = \lambda\int_{r_0}^{r} K_0(r, s)\varphi_0(s)\,ds + g_0(r), \tag{16}$$

$$\varphi_{Nn}(r) = \lambda\int_{r_0}^{r} K_{Nn}(r, s)\varphi_{Nn}(s)\,ds + g_{Nn}(r), \tag{17}$$

где λ – числовой параметр, $\lambda = -1$; $K_0(r, s)$, $K_{Nn}(r, s)$ – ядра интегральных уравнений, имеющие вид

$$K_0(r,s)=\left\{2\left[\frac{h'(r)}{h(r)}-\frac{1}{r}\right]+\left\{\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)'-\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2+\frac{(2-\nu_{\theta r})}{r}\frac{h'(r)}{h(r)}\right]+\frac{k^2}{r^2}\right\}(r-s)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left\{\frac{\nu_{\theta r}}{r}\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)'-2\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2\right]+\frac{k^2}{r^2}\left[\frac{h'(r)}{h(r)}+\frac{1}{r}\right]\right\}(r-s)^2\right\},$$

$$K_{Nn}(r,s)=\left\{2\left[\frac{h'(r)}{h(r)}-\frac{1}{r}\right]+\left\{\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)'-\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2+\frac{(2-\nu_{\theta r})}{r}\frac{h'(r)}{h(r)}\right]+\left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\times(Nn)^2+k^2\right]\frac{1}{r^2}\right\}(r-s)-\frac{1}{2}\left\{\frac{\nu_{\theta r}}{r}\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)'-\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2\right]+\left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)(Nn)^2+k^2\right]\times$$

$$\left.\times\left[\frac{h'(r)}{h(r)}+\frac{1}{r}\right]\frac{1}{r^2}\right\}(r-s)^2+\frac{(Nn)^2}{6}\left\{\frac{\nu_{\theta r}}{r^2}\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)'-\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2\right]+\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)\times\right.$$

$$\left.\left.\times\left[\frac{h'(r)}{h(r)}+\frac{1}{r}\right]\frac{1}{r^3}+\frac{k^2}{r^3}\left[\frac{h'(r)}{h(r)}-\frac{(Nn)^2-2}{r}\right]\right\}(r-s)^3\right\};$$

$g_0(r)$ и $g_{Nn}(r)$ – свободные члены интегральных уравнений, явные выражения которых есть

$$g_0(r)=\frac{\partial^2K_0(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_0(r_0)-\frac{\partial K_0(r,r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_0(r_0)+K_0(r,r_0)\dddot{\Phi}_0(r_0)-2(3+\nu_{\theta r})h(r)\rho\omega^2,$$

$$g_{Nn}(r)=-\left[\frac{\partial^3K_{Nn}(r,r_0)}{\partial s^2}\Phi_0(r_0)-\frac{\partial^2K_{Nn}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_0(r_0)+\frac{\partial K_{Nn}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_0(r_0)-K_{Nn}(r,r_0)\dddot{\Phi}_0(r_0)\right].$$

Здесь введены обозначения

$$\frac{\partial^iK_0(r,r_0)}{\partial s^i}=\left.\frac{\partial^iK_0(r,s)}{\partial s^i}\right|_{s=r_0}\quad(i=\overline{1,2}),\quad\frac{\partial^jK_{Nn}(r,r_0)}{\partial s^j}=\left.\frac{\partial^jK_{Nn}(r,s)}{\partial s^j}\right|_{s=r_0}\quad(j=\overline{1,3}).$$

Общие решения линейных интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода (16), (17) записываются с помощью резольвент $R_0(r,s;\lambda)$ и $R_{Nn}(r,s;\lambda)$ в виде [8]

$$\varphi_0(r)=\lambda\int_{r_0}^{r}R_0(r,s;\lambda)g_0(s)ds+g_0(r),\tag{18}$$

$$\varphi_{Nn}(r)=\lambda\int_{r_0}^{r}R_{Nn}(r,s;\lambda)g_{Nn}(s)ds+g_{Nn}(r),\tag{19}$$

где функции $R_0(r,s;\lambda)$ и $R_{Nn}(r,s;\lambda)$ определяются функциональными рядами:

$$R_0(r,s;\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^mK_{m+1}^{(0)}(r,s),\quad R_{Nn}(r,s;\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^mK_{m+1}^{(Nn)}(r,s).\tag{20}$$

Для непрерывных ядер $K_0(r,s)$, $K_{Nn}(r,s)$ ряды (20) сходятся абсолютно и равномерно.

Повторяющиеся, или *итерированные*, *ядра* $K_m^{(0)}(r, s)$, $K_m^{(Nn)}(r, s)$ определяются по следующим рекуррентным формулам [9]:

$$K_1^{(0)}(r, s) = K_0(r, s), \qquad K_1^{(Nn)}(r, s) = K_{Nn}(r, s),$$

$$K_2^{(0)}(r, s) = \int_{r_0}^{r} K_0(r, t) K_1^{(0)}(t, s)\,dt, \qquad K_2^{(Nn)}(r, s) = \int_{r_0}^{r} K_{Nn}(r, t) K_1^{(Nn)}(t, s)\,dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$K_m^{(0)}(r, s) = \int_{r_0}^{r} K_0(r, t) K_{m-1}^{(0)}(t, s)\,dt, \qquad K_m^{(Nn)}(r, s) = \int_{r_0}^{r} K_{Nn}(r, t) K_{m-1}^{(Nn)}(t, s)\,dt.$$

Если свободные члены $g_0(r)$, $g_{Nn}(r)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ непрерывны в $[r_0, R]$ и ядра $K_0(r, s)$, $K_{Nn}(r, s)$ непрерывны при $r_0 \le r \le R$, $r_0 \le s \le r$, то линейные интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода (16), (17) имеют при любом параметре λ $(\lambda \ne 0)$ единственные непрерывные решения, определяемые формулами (18), (19).

Отметим, что линейные интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода можно решать и другими аналитическими методами, а также численными методами, указанными, например, в книге [9].

Представим компоненты напряжений $\sigma_r(r, \theta)$, $\sigma_\theta(r, \theta)$, $\tau_{r\theta}(r, \theta)$, деформаций $\varepsilon_r(r, \theta)$, $\varepsilon_\theta(r, \theta)$, $\gamma_{r\theta}(r, \theta)$ и перемещений $u(r, \theta)$, $v(r, \theta)$ в виде следующих рядов Фурье по косинусам и синусам с четными номерами:

$$\sigma_r(r, \theta) = \sigma_r^{(0)}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_r^{(Nn)}(r) \cos Nn\theta, \quad \sigma_\theta(r, \theta) = \sigma_\theta^{(0)}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_\theta^{(Nn)}(r) \cos Nn\theta,$$

$$\tau_{r\theta}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{r\theta}^{(Nn)}(r) \sin Nn\theta, \quad \varepsilon_r(r, \theta) = \varepsilon_r^{(0)}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_r^{(Nn)}(r) \cos Nn\theta,$$

$$\varepsilon_\theta(r, \theta) = \varepsilon_\theta^{(0)}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_\theta^{(Nn)}(r) \cos Nn\theta, \quad \gamma_{r\theta}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{r\theta}^{(Nn)}(r) \sin Nn\theta, \tag{21}$$

$$u(r, \theta) = u_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} u_{Nn}(r) \cos Nn\theta, \quad v(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{Nn}(r) \sin Nn\theta.$$

Здесь коэффициенты разложений $\sigma_r^{(0)}(r)$, $\sigma_r^{(Nn)}(r)$, $\sigma_\theta^{(0)}(r)$, $\sigma_\theta^{(Nn)}(r)$, $\tau_{r\theta}^{(Nn)}(r)$, $\varepsilon_r^{(0)}(r)$, $\varepsilon_r^{(Nn)}(r)$, $\varepsilon_\theta^{(0)}(r)$, $\varepsilon_\theta^{(Nn)}(r)$, $\gamma_{r\theta}^{(Nn)}(r)$, $u_0(r)$, $u_{Nn}(r)$, $v_{Nn}(r)$ выражаются через разрешающие функции $\varphi_0(r)$ и $\varphi_{Nn}(r)$ по формулам

$$\sigma_r^{(0)}(r) = \frac{1}{rh(r)}\left[\frac{1}{2}\int_{r_0}^{r}(r - s)^2 \varphi_0(s)\,ds + \frac{1}{2}\ddot{\Phi}_0(r_0)(r - r_0)^2 + \ddot{\Phi}_0(r_0)(r - r_0) + \dot{\Phi}_0(r_0)\right],$$

$$\sigma_r^{(Nn)}(r) = \frac{1}{rh(r)}\left[\int_{r_0}^{r} K_{\sigma_r}^{(Nn)}(r, s)\varphi_{Nn}(s)\,ds + K_{\sigma_r}^{(Nn)}(r, r_0)\ddot{\Phi}_{Nn}(r_0) - \frac{\partial K_{\sigma_r}^{(Nn)}(r, r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_{Nn}(r_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 K_{\sigma_r}^{(Nn)}(r, r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_{Nn}(r_0) - \frac{\partial^3 K_{\sigma_r}^{(Nn)}(r, r_0)}{\partial s^2}\Phi_{Nn}(r_0)\right],$$

$$\sigma_\theta^{(0)}(r) = \frac{1}{h(r)}\left[\int_{r_0}^{r}(r - s)\varphi_0(s)\,ds + \ddot{\Phi}_0(r_0)(r - r_0) + \ddot{\Phi}_0(r_0)\right] + \rho\omega^2 r^2,$$

$$\sigma_\theta^{(Nn)}(r) = \frac{1}{h(r)}\left[\int_{r_0}^{r}(r - s)\varphi_{Nn}(s)\,ds + \ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)(r - r_0) + \ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)\right],$$

$$\tau_{r\theta}^{(Nn)}(r)=\frac{1}{rh(r)}\left[\int_{r_0}^{r}K_{\tau_{r\theta}}^{(Nn)}(r,s)\varphi_{Nn}(s)ds+K_{\tau_{r\theta}}^{(Nn)}(r,r_0)\dddot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\frac{\partial K_{\tau_{r\theta}}^{(Nn)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 K_{\tau_{r\theta}}^{(Nn)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\frac{\partial^3 K_{\tau_{r\theta}}^{(Nn)}(r,r_0)}{\partial s^2}\Phi_{Nn}(r_0)\right],$$

$$\varepsilon_{r}^{(0)}(r)=\frac{1}{E_\theta h(r)}\left[\int_{r_0}^{r}K_{\varepsilon_r}^{(0)}(r,s)\varphi_{0}(s)ds+K_{\varepsilon_r}^{(0)}(r,r_0)\dddot{\Phi}_{0}(r_0)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial K_{\varepsilon_r}^{(0)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_{0}(r_0)+\frac{\partial^2 K_{\varepsilon_r}^{(0)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_{0}(r_0)\right]-\nu_{\theta r}\frac{\rho\omega^2 r^2}{E_\theta},$$

$$\varepsilon_{r}^{(Nn)}(r)=\frac{1}{E_\theta h(r)}\left[\int_{r_0}^{r}K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r,s)\varphi_{Nn}(s)ds+K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r,r_0)\dddot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)+\frac{\partial^2 K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\frac{\partial^3 K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r,r_0)}{\partial s^2}\Phi_{Nn}(r_0)\right],$$

$$\varepsilon_{\theta}^{(0)}(r)=\frac{1}{E_\theta h(r)}\left[\int_{r_0}^{r}K_{\varepsilon_\theta}^{(0)}(r,s)\varphi_{0}(s)ds+K_{\varepsilon_\theta}^{(0)}(r,r_0)\dddot{\Phi}_{0}(r_0)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial K_{\varepsilon_\theta}^{(0)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_{0}(r_0)+\frac{\partial^2 K_{\varepsilon_\theta}^{(0)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_{0}(r_0)\right]-\frac{\rho\omega^2 r^2}{E_\theta}, \tag{22}$$

$$\varepsilon_{\theta}^{(Nn)}(r)=\frac{1}{E_\theta h(r)}\left[\int_{r_0}^{r}K_{\varepsilon_\theta}^{(Nn)}(r,s)\varphi_{Nn}(s)ds+K_{\varepsilon_\theta}^{(Nn)}(r,r_0)\dddot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial K_{\varepsilon_\theta}^{(Nn)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)+\frac{\partial^2 K_{\varepsilon_\theta}^{(Nn)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\frac{\partial^3 K_{\varepsilon_\theta}^{(Nn)}(r,r_0)}{\partial s^2}\Phi_{Nn}(r_0)\right],$$

$$\gamma_{r\theta}^{(Nn)}(r)=\frac{1}{G_{r\theta}rh(r)}\left[\int_{r_0}^{r}K_{\tau_{r\theta}}^{(Nn)}(r,s)\varphi_{Nn}(s)ds+K_{\tau_{r\theta}}^{(Nn)}(r,r_0)\dddot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial K_{\tau_{r\theta}}^{(Nn)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)+\frac{\partial^2 K_{\tau_{r\theta}}^{(Nn)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\frac{\partial^3 K_{\tau_{r\theta}}^{(Nn)}(r,r_0)}{\partial s^2}\Phi_{Nn}(r_0)\right],$$

$$u_{0}(r)=\frac{r}{E_\theta h(r)}\left[\int_{r_0}^{r}K_{\varepsilon_\theta}^{(0)}(r,s)\varphi_{0}(s)ds+K_{\varepsilon_\theta}^{(0)}(r,r_0)\dddot{\Phi}_{0}(r_0)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial K_{\varepsilon_\theta}^{(0)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_{0}(r_0)+\frac{\partial^2 K_{\varepsilon_\theta}^{(0)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_{0}(r_0)\right]-\frac{\rho\omega^2 r^3}{E_\theta},$$

$$u_{Nn}(r)=\frac{1}{E_\theta}\int_{r_0}^{r}\frac{1}{h(r_1)}\left[\int_{r_0}^{r_1}K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r_1,s)\varphi_{Nn}(s)ds+K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r_1,r_0)\dddot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\frac{\partial K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r_1,r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r_1,r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\frac{\partial^3 K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r_1,r_0)}{\partial s^2}\Phi_{Nn}(r_0)\right]dr_1+u_{Nn}(r_0),$$

$$v_{Nn}(r)=\frac{1}{Nn}\left[r\varepsilon_\theta^{(Nn)}(r)-u_{Nn}(r)\right]=\frac{1}{Nn}\left\{\frac{r}{E_\theta h(r)}\left[\int_{r_0}^{r}K_{\varepsilon_\theta}^{(Nn)}(r,s)\varphi_{Nn}(s)ds+K_{\varepsilon_\theta}^{(Nn)}(r,r_0)\dddot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\partial K_{\varepsilon_\theta}^{(Nn)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)+\frac{\partial^2 K_{\varepsilon_\theta}^{(Nn)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\frac{\partial^3 K_{\varepsilon_\theta}^{(Nn)}(r,r_0)}{\partial s^2}\Phi_{Nn}(r_0)\right]-\frac{1}{E_\theta}\int_{r_0}^{r}\frac{1}{h(r_1)}\times$$

$$\times\left[\int_{r_0}^{r_1}K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r_1,s)\varphi_{Nn}(s)ds+K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r_1,r_0)\dddot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\frac{\partial K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r_1,r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial^2 K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r_1,r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\frac{\partial^3 K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r_1,r_0)}{\partial s^2}\Phi_{Nn}(r_0)\right]dr_1+u_{Nn}(r_0)\right\},$$

где передаточные (весовые) функции имеют вид

$$K_{\sigma_r}^{(Nn)}(r,s)=\left[\frac{1}{2}(r-s)^2-\frac{1}{6}\frac{(Nn)^2}{r}(r-s)^3\right],$$

$$K_{\tau_{r\theta}}^{(Nn)}(r,s)=Nn\left[\frac{1}{2r}(r-s)^2-\frac{1}{6r^2}(r-s)^3\right],$$

$$K_{\varepsilon_r}^{(0)}(r,s)=\left[-\nu_{\theta r}(r-s)+\frac{k^2}{2r}(r-s)^2\right],$$

$$K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r,s)=\left[-\nu_{\theta r}(r-s)+\frac{k^2}{2r}(r-s)^2-(Nn)^2\frac{k^2}{6r^2}(r-s)^3\right],$$

$$K_{\varepsilon_\theta}^{(0)}(r,s)=\left[(r-s)-\frac{\nu_{\theta r}}{2r}(r-s)^2\right],$$

$$K_{\varepsilon_\theta}^{(Nn)}(r,s)=\left[(r-s)-\frac{\nu_{\theta r}}{2r}(r-s)^2+(Nn)^2\frac{k^2}{6r^2}(r-s)^3\right].$$

Постоянные $\dot{\Phi}_0(r_0),\ \ddot{\Phi}_0(r_0),\ \dddot{\Phi}_0(r_0),\ \Phi_{Nn}(r_0),\ \dot{\Phi}_{Nn}(r_0),\ \ddot{\Phi}_{Nn}(r_0),\ \dddot{\Phi}_{Nn}(r_0),\ u_{Nn}(r_0)$ находятся из граничных условий (13).

Заключение

Полученные формулы (21), (22) полностью описывают напряженно-деформированное состояние вращающихся анизотропных дисков произвольных профилей, нагруженных системой сосредоточенных сил на внешнем контуре. Результаты данной работы могут быть использованы при проектировании дисков турбомашин и турбокомпрессоров, а также роторов центробежных стендов.

Библиографические ссылки

1. Малинин НН. *Прочность турбомашин. 2-е издание.* Москва: Юрайт; 2018. 291 с.

2. Королевич ВВ, Медведев ДГ. Напряженно-деформированное состояние вращающегося полярно-ортотропного диска постоянной толщины, нагруженного сосредоточенными силами по внешнему контуру. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;3:46–58.

3. Королевич ВВ, Медведев ДГ. Влияние дискретного расположения лопаток на напряженное состояние анизотропного турбинного диска степенного профиля. В: *Динамика, прочность и моделирование в машиностроении. Тезисы докладов I Международной научно-технической конференции; 10–14 сентября 2018 г.; Харьков, Украина.* Харьков: Институт проблем машиностроения имени А. Н. Подгорного НАН Украины; 2018. с. 36–37.

4. Тимошенко СП, Гудьер Дж. *Теория упругости.* Москва: Наука; 1979. 560 с.

5. Коваленко АД. *Круглые пластины переменной толщины.* Москва: Физматгиз; 1959. 294 с.

6. Лехницкий СГ. *Анизотропные пластинки.* Москва: ОГИЗ; 1947. 355 с. Совместное издание с Гостехиздатом.

7. Бояршинов СВ. *Основы строительной механики машин.* Москва: Машиностроение; 1973. 456 с.

8. Краснов МЛ, Киселев АИ, Макаренко ГИ. *Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями.* Москва: КомКнига; 2007. 192 с.

9. Верлань АФ, Сизиков ВС. *Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы.* Киев: Наукова думка; 1986. 543 с.

References

1. Malinin NN. *Prochnost' turbomashin. 2-e izdanie* [The strength of turbomachinery. 2nd edition]. Moscow: Yurait; 2018. 291 p. Russian.

2. Karalevich UV, Medvedev DG. Stressed-deformed state of a rotating polar-orthotropic disk of constant thickness loaded with undistracted forces on the outer contour. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;3:46–58. Russian.

3. Korolevich VV, Medvedev DG. [The influence of the discrete arrangement of the blades on the stress state of the anisotropic turbine disk of an exponent profile]. In: *Dinamika, prochnost' i modelirovanie v mashinostroenii. Tezisy dokladov I Mezhdunarodnoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii; 10–14 sentyabrya 2018 g.; Khar'kov, Ukraina* [Dynamics, strength and modeling in mechanical engineering. Collection of abstracts of the I International, scientific and technical conference; 2018 September 10–14; Kharkov, Ukraine]. Kharkov: A. N. Pidgorny Institute of Mechanical Engineering Problems, National Academy of Sciences of Ukraine; 2018. p. 36–37. Russian.

4. Timoshenko SP, Goodyer J. *Teoriya uprugosti* [The theory of elasticity]. Moscow: Nauka; 1979. 560 p. Russian.

5. Kovalenko AD. *Kruglye plastiny peremennoi tolshchiny* [Round plates of variable thickness]. Moscow: Fizmatgiz; 1959. 294 p. Russian.

6. Lehnitsky SG. *Anizotropnye plastinki* [Anisotropic plates]. Moscow: OGIZ; 1947. 355 p. Co-published by the Gostekhizdat. Russian.

7. Boyarshinov SV. *Osnovy stroitel'noi mekhaniki mashin* [Basics of building mechanics machines]. Moscow: Mashinostroenie; 1973. 456 p. Russian.

8. Krasnov ML, Kiselev AI, Makarenko GI. *Integral'nye uravneniya: zadachi i primery s podrobnymi resheniyami* [Integral equations: problems and examples with detailed solutions]. Moscow: KomKniga; 2007. 192 p. Russian.

9. Verlan AF, Sizikov VS. *Integral'nye uravneniya: metody, algoritmy, programmy* [Integral equations: methods, algorithms, programs]. Kiev: Naukova dumka; 1986. 543 p. Russian.

Статья поступила в редколлегию 04.12.2018.
Received by editorial board 04.12.2018.