УДК 517.948.32:517.544

ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. П. ШИЛИН [1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Изучено линейное уравнение на кривой, расположенной на комплексной плоскости. Уравнение содержит искомую функцию, ее производные 1-го и 2-го порядков, а также гиперсингулярные интегралы с искомой функцией. Коэффициенты уравнения имеют специальную структуру. Уравнение сведено к краевой задаче Римана для аналитических функций и двум линейным дифференциальным уравнениям 2-го порядка. Краевая задача решена с помощью формул Ф. Д. Гахова, а дифференциальные уравнения – методом вариации произвольных постоянных. Решение исходного уравнения построено в квадратурах. Результат сформулирован в виде теоремы. Приведен пример.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение; гиперсингулярный интеграл; краевая задача Римана; линейное дифференциальное уравнение.

EXPLICIT SOLUTION OF ONE HYPERSINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER

A. P. SHILIN [a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

The linear equation on the curve located on the complex plane is studied. The equation contains the desired function, its derivatives of the first and second orders, as well as hypersingular integrals with the desired function. The coefficients of the equation have a special structure. The equation is reduced to the Riemann boundary value problem for analytic functions and two second order linear differential equations. The boundary value problem is solved by Gakhov formulas, and the differential equations are solved by the method of variation of arbitrary constants. The solution of the original equation is constructed in quadratures. The result is formulated as a theorem. An example is given.

Keywords: integro-differential equation; hypersingular integral; Riemann boundary value problem; linear differential equation.

Гиперсингулярные интегральные уравнения, интегралы в которых понимаются в смысле конечной части по Адамару, возникают, например, в задачах аэро- и гидродинамики, квантовой физики, трещиноустойчивости. Основным способом решения таких уравнений являются численные методы [1; 2], точное аналитическое решение возможно в редких случаях.

Образец цитирования:
Шилин АП. Явное решение одного гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;2:67–72.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-67-72

For citation:
Shilin AP. Explicit solution of one hypersingular integro-differential equation of the second order. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;2:67–72. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-67-72

Автор:
Андрей Петрович Шилин – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики и математической физики физического факультета.

Author:
Andrei P. Shilin, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higner mathematics and mathematical physics, faculty of physics.
a.p.shilin@gmail.com

Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами рассмотрено и решено явно в работе Э. И. Зверовича [3]. Некоторые случаи переменных коэффициентов в подобных уравнениях изучены в [4] и продолжают исследоваться в настоящей работе.

Пусть L – простая замкнутая гладкая кривая на расширенной комплексной плоскости. Обозначим $D_\pm$ области, для которых кривая L является границей, $0 \in D_+$, $\infty \in D_-$. Ориентируем кривую L так, чтобы область D_+ оставалась слева.

Зададим H-непрерывные функции $a(t) \neq 0,\ b(t) \neq 0,\ f(t),\ t \in L$. Зададим функции $p_1(z),\ p_2(z)$, аналитические в области D_+ и H-непрерывные вместе со своими производными 1-го и 2-го порядков вплоть до кривой L. Зададим еще функции $q_1(z),\ q_2(z)$, аналитические в области D_- и также H-непрерывные вместе со своими производными 1-го и 2-го порядков вплоть до кривой L. Предположим, что $W\left(p_1(z),\ p_2(z)\right) \neq 0,\ z \in D_+ \cup L$, где (и везде далее) буквой W обозначен вронскиан соответствующих функций. Пусть $W\left(q_1(z),\ q_2(z)\right) \neq 0,\ z \in D_- \cup L,\ z \neq \infty$. Заметим, что для аналитических функций $q_1(z),\ q_2(z)$ всегда $W\left(q_1(\infty),\ q_2(\infty)\right) = 0$.

Рассмотрим уравнение с искомой функцией $\varphi(t)$, H-непрерывной вместе со своими производными 1-го и 2-го порядков:

$$\begin{gathered}\left[a(t)W\left(p_1'(t),\ p_2'(t)\right) + b(t)W\left(q_1'(t),\ q_2'(t)\right)\right]\varphi(t) - \\ - \left[a(t)W'\left(p_1(t),\ p_2(t)\right) + b(t)W'\left(q_1(t),\ q_2(t)\right)\right]\varphi'(t) + \\ + \left[a(t)W\left(p_1(t),\ p_2(t)\right) + b(t)W\left(q_1(t),\ q_2(t)\right)\right]\varphi''(t) + \\ + \left[a(t)W\left(p_1'(t),\ p_2'(t)\right) - b(t)W\left(q_1'(t),\ q_2'(t)\right)\right]\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} - \\ - \left[a(t)W'\left(p_1(t),\ p_2(t)\right) - b(t)W'\left(q_1(t),\ q_2(t)\right)\right]\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^2} + \\ + \left[a(t)W\left(p_1(t),\ p_2(t)\right) - b(t)W\left(q_1(t),\ q_2(t)\right)\right]\frac{2}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^3} = f(t),\ \ t \in L. \qquad (1)\end{gathered}$$

Введем кусочно-аналитическую функцию

$$\Phi_\pm(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - z},\ \ z \in D_\pm. \qquad (2)$$

Используя для предельных значений на кривой L этой функции и ее производных обобщенные формулы Сохоцкого [5]

$$\Phi_+^{(k)}(t) - \Phi_-^{(k)}(t) = \varphi^{(k)}(t),\ \ \Phi_+^{(k)}(t) + \Phi_-^{(k)}(t) = \frac{k!}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^{k+1}},\ \ k = 0, 1, 2,$$

сведем уравнение (1) к краевой задаче линейного сопряжения:

$$\begin{gathered}2a(t)\left[W\left(p_1(t),\ p_2(t)\right)\Phi_+''(t) - W'\left(p_1(t),\ p_2(t)\right)\Phi_+'(t) + W\left(p_1'(t),\ p_2'(t)\right)\Phi_+(t)\right] = \\ = 2b(t)\left[W\left(q_1(t),\ q_2(t)\right)\Phi_-''(t) - W'\left(q_1(t),\ q_2(t)\right)\Phi_-'(t) + W\left(q_1'(t),\ q_2'(t)\right)\Phi_-(t)\right] + f(t),\ t \in L. \qquad (3)\end{gathered}$$

Введем новые неизвестные функции

$$\begin{gathered}\Psi_+(z) = W\left(p_1(z),\ p_2(z)\right)\Phi_+''(z) - W'\left(p_1(z),\ p_2(z)\right)\Phi_+'(z) + \\ + W\left(p_1'(z),\ p_2'(z)\right)\Phi_+(z),\ \ z \in D_+, \qquad (4)\end{gathered}$$

$$\Psi_-(z) = W\left(q_1(z),\, q_2(z)\right)\Phi''_-(z) - W'\left(q_1(z),\, q_2(z)\right)\Phi'_-(z) +$$
$$+\, W\left(q'_1(z),\, q'_2(z)\right)\Phi_-(z),\; z \in D_-. \tag{5}$$

При исходных предположениях это будут, очевидно, аналитические функции в соответствующих областях, имеющие H-непрерывные предельные значения $\Psi_\pm(t)$, $t \in L$. Следовательно, краевое условие (3) есть краевое условие задачи Римана

$$\Psi_+(t) = \frac{b(t)}{a(t)}\Psi_-(t) + \frac{f(t)}{2a(t)},\; t \in L. \tag{6}$$

Для решения этой задачи следует уточнить поведение функции $\Psi_-(z)$ на бесконечности.

Предположим, что разложение функций $q_j(z)$ в ряд Тейлора в окрестности бесконечности имеет вид $q_j(z) = k_j + \frac{l_j}{z} + \ldots,\; j = 1,\, 2.$ Будем считать в дальнейшем, что коэффициенты этого разложения удовлетворяют неравенству

$$k_2 l_1 - k_1 l_2 \neq 0. \tag{7}$$

В этом случае легко установить, что $W\left(q_1(z),\, q_2(z)\right) \sim \frac{k}{z^2}$ при $z \to \infty$, где $k = k_2 l_1 - k_1 l_2$.

Функция $\Phi_-(z)$, введенная посредством интеграла типа Коши (2), должна иметь на бесконечности нуль по меньшей мере 1-го порядка. Тогда из равенства (5) вытекает, что $\Psi_-(\infty) = 0$, причем наименьший порядок нуля на бесконечности у функции $\Psi_-(z)$ будет при наименьшем порядке нуля у функции $\Phi_-(z)$. Пусть $\Phi_-(z) \sim \frac{l}{z}$ при $z \to \infty$ для некоторой ненулевой постоянной l. При $z \to \infty$ получим

$$W\left(q_1(z),\, q_2(z)\right)\Phi''_-(z) \sim \frac{2kl}{z^5},\; W'\left(q_1(z),\, q_2(z)\right)\Phi'_-(z) \sim \frac{2kl}{z^5},$$
$$W\left(q'_1(z),\, q'_2(z)\right)\Phi_-(z) = O\left(\frac{1}{z^6}\right),$$

тогда из равенства (5) вытекает, что $\Psi_-(z) = O\left(\frac{1}{z^6}\right)$.

Итак, краевую задачу Римана (6) следует решать в классе функций, имеющих на бесконечности нуль по меньшей мере 6-го порядка.

Предположим, что краевая задача (6) разрешима и функции $\Psi_\pm(z)$ найдены. Тогда соотношения (4), (5) станут линейными дифференциальными уравнениями 2-го порядка. Начнем с решения уравнения (4). Ему можно придать вид

$$\begin{vmatrix} p_1(z) & p_2(z) & \Phi_+(z) \\ p'_1(z) & p'_2(z) & \Phi'_+(z) \\ p''_1(z) & p''_2(z) & \Phi''_+(z) \end{vmatrix} = \Psi_+(z), \tag{8}$$

откуда понятно, что исходные функции $p_1(z)$, $p_2(z)$ будут играть роль фундаментальной системы решений соответствующего однородного уравнения. Далее можно применить метод вариации произвольных постоянных, он даст решение

$$\Phi_+(z) = C_1 p_1(z) + C_2 p_2(z) - p_1(z)\int_0^z \frac{p_2(\zeta)\Psi_+(\zeta)d\zeta}{W^2\left(p_1(\zeta),\, p_2(\zeta)\right)} + p_2(z)\int_0^z \frac{p_1(\zeta)\Psi_+(\zeta)d\zeta}{W^2\left(p_1(\zeta),\, p_2(\zeta)\right)},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, а путь интегрирования лежит в D_+.

Теперь приступим к решению уравнения (5). Записывая его аналогично уравнению (4) через определитель

$$\begin{vmatrix} q_1(z) & q_2(z) & \Phi_-(z) \\ q'_1(z) & q'_2(z) & \Phi'_-(z) \\ q''_1(z) & q''_2(z) & \Phi''_-(z) \end{vmatrix} = \Psi_-(z), \tag{9}$$

делаем вывод, что функции $q_1(z)$, $q_2(z)$ представляют собой фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения. Метод вариации произвольных постоянных приводит к решению

$$\Phi_-(z) = C_3 q_1(z) + C_4 q_2(z) - q_1(z)\int_\infty^z \frac{q_2(\zeta)\Psi_-(\zeta)d\zeta}{W^2(q_1(\zeta),\, q_2(\zeta))} + q_2(z)\int_\infty^z \frac{q_1(\zeta)\Psi_-(\zeta)d\zeta}{W^2(q_1(\zeta),\, q_2(\zeta))} \tag{10}$$

с произвольными постоянными C_3, C_4, путь интегрирования лежит в D_-.

Важно заметить, что при $z \to \infty$

$$q_j(\zeta) = O(1),\ \ \Psi_-(\zeta) = O\left(\frac{1}{\zeta^6}\right),\ W^2(q_1(\zeta),\, q_2(\zeta)) \sim \frac{k^2}{\zeta^4},$$

поэтому $\dfrac{q_j(\zeta)\Psi_-(\zeta)}{W^2(q_1(\zeta),\, q_2(\zeta))} = O\left(\dfrac{1}{\zeta^2}\right)$, $j = 1, 2$, так что интегралы в формуле (10) будут сходиться и давать те первообразные подынтегральных функций, которые равны нулю на бесконечности.

Добиваясь выполнения условия $\Phi_-(\infty) = 0$, мы должны потребовать, чтобы в формуле (10) постоянные C_3, C_4 были связаны равенством

$$C_3 q_1(\infty) + C_4 q_2(\infty) = 0, \tag{11}$$

или с использованием прежних обозначений $C_3 k_1 + C_4 k_2 = 0$. Из предположения (7) получаем, что обе постоянные k_1, k_2 одновременно в нуль не обращаются. Для определенности будем считать $k_2 = q_2(\infty) \neq 0$, тогда из равенства (11) получим $C_4 = -\dfrac{C_3 q_1(\infty)}{q_2(\infty)}$, а постоянная C_3 останется произвольной.

Таким образом, необходимыми и достаточными условиями разрешимости исходного уравнения (1) будут необходимые и достаточные условия разрешимости краевой задачи Римана (6). В случае разрешимости этой задачи мы всегда сумеем решить дифференциальные уравнения (4), (5) и затем записать искомую функцию по формуле $\varphi(t) = \Phi_+(t) - \Phi_-(t)$. Отразим это в виде теоремы, использующей формулы Ф. Д. Гахова [6] для решения краевой задачи Римана; при этом $\alpha = \mathrm{Ind}_L \dfrac{b(t)}{a(t)}$, $X_\pm(z)$ – канонические функции данной задачи.

Теорема. *При* $\alpha \geq 5$ *уравнение (1) безусловно разрешимо. При* $\alpha < 5$ *для его разрешимости необходимо и достаточно выполнение* $5 - \alpha$ *условий разрешимости*

$$\int_L \frac{f(\tau)\tau^j d\tau}{a(\tau)X_+(\tau)} = 0,\ \ j = 0, 1, \ldots, 4 - \alpha.$$

Решение уравнения (1) в случае его разрешимости содержит $3 + \max(0, \alpha - 5)$ *произвольных постоянных и находится по формуле*

$$\varphi(t) = C_1 p_1(t) + C_2 p_2(t) - p_1(t)\int_0^t \frac{p_2(z)\Psi_+(z)dz}{W^2(p_1(z),\, p_2(z))} + p_2(t)\int_0^t \frac{p_1(z)\Psi_+(z)dz}{W^2(p_1(z),\, p_2(z))} +$$

$$+ C_3\left(\frac{q_1(\infty)}{q_2(\infty)} q_2(t) - q_1(t)\right) + q_1(t)\int_\infty^t \frac{q_2(z)\Psi_-(z)dz}{W^2(q_1(z),\, q_2(z))} - q_2(t)\int_\infty^t \frac{q_1(z)\Psi_-(z)dz}{W^2(q_1(z),\, q_2(z))},$$

где C_1, C_2, C_3 *– произвольные постоянные,*

$$\Psi_\pm(z) = X_\pm(z)\left(\frac{1}{4\pi i}\int_L \frac{f(\tau)d\tau}{a(\tau)X_+(\tau)(\tau - z)} + P(z)\right),$$

где $P(z)$ *– многочлен степени* $\alpha - 6$ *с произвольными коэффициентами при* $\alpha \geq 6$, $P(z) \equiv 0$ *при* $\alpha < 6$.

Пример. Рассмотрим пример уравнения (1) на единичной окружности. Пусть $p_1(z) = \ln(z + 2)$, $p_2(z) = 2\sqrt{z + 2}$ (берем в замкнутой области $|z| \leq 1$ однозначные непрерывные ветви), $q_1(z) = e^{1/z}$,

$q_2(z)=e^{2/z}$, $a(t)=b(t)=1$, $f(t)=2\left(\ln(t+2)-2\right)^2-\frac{2}{t^6}$. Легко проверить, что все указанные ранее требования для таких функций выполняются, а само уравнение приобретает вид

$$\left(\frac{1}{2(t+2)^2\sqrt{t+2}}-\frac{2e^{3/t}}{t^6}\right)\varphi(t)-\left(\frac{2-\ln(t+2)}{2(t+2)\sqrt{t+2}}+\frac{e^{3/t}(3+2t)}{t^4}\right)\varphi'(t)+$$

$$+\left(\frac{\ln(t+2)-2}{\sqrt{t+2}}-\frac{e^{3/t}}{t^2}\right)\varphi''(t)+\left(\frac{1}{2(t+2)^2\sqrt{t+2}}+\frac{2e^{3/t}}{t^6}\right)\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}-$$

$$-\left(\frac{2-\ln(t+2)}{2(t+2)\sqrt{t+2}}-\frac{e^{3/t}(3+2t)}{t^4}\right)\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}+$$

$$+\left(\frac{\ln(t+2)-2}{\sqrt{t+2}}+\frac{e^{3/t}}{t^2}\right)\frac{2}{\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^3}=2\left(\ln(t+2)-2\right)^2-\frac{2}{t^6},\ |t|=1.$$

Краевая задача Римана (6) станет для указанного примера задачей о скачке. Представляется интересным привести краевое условие этой задачи с помощью определителей такого вида, как в соотношениях (8), (9):

$$\frac{\sqrt{t+2}}{2(t+2)^3}\begin{vmatrix}\ln(t+2) & 2 & \Phi_+(t)\\ 1 & 1 & (t+2)\Phi'_+(t)\\ -2 & -1 & 2(t+2)^2\Phi''_+(t)\end{vmatrix}=\frac{e^{3/t}}{t^6}\begin{vmatrix}1 & 1 & \Phi_-(t)\\ -1 & -2 & t^2\Phi'_-(t)\\ 1+2t & 4(1+t) & t^4\Phi''_-(t)\end{vmatrix}+$$

$$+\left(\ln(t+2)-2\right)^2-\frac{1}{t^6},\ |t|=1.$$

Укажем также, в каком виде могут быть записаны соответствующие дифференциальные уравнения (4), (5):

$$\Phi''_+(z)+\frac{\ln(z+2)-4}{2(z+2)\left(\ln(z+2)-2\right)}\Phi'_+(z)+\frac{1}{2(z+2)^2\left(\ln(z+2)-2\right)}\Phi_+(z)=$$

$$=\left(\ln(z+2)-2\right)\sqrt{z+2},\ |z|<1,$$

$$\Phi''_-(z)+\left(\frac{3}{z^2}+\frac{2}{z}\right)\Phi'_-(z)+\frac{2}{z^4}\Phi_-(z)=-\frac{e^{-3/z}}{z^4},\ |z|>1.$$

На основании доказанной теоремы устанавливается безусловная разрешимость уравнения в примере, а вычисления приводят к следующему его общему решению:

$$\varphi(t)=\left(C_1-\frac{4}{5}\sqrt{t+2}\,(t+2)^2\right)\ln(t+2)+\left((t+2)^2\left(\ln(t+2)-\frac{1}{2}\right)+C_2\right)\sqrt{t+2}+$$

$$+C_3e^{2/t}-\left(C_3+\frac{1}{20}\right)e^{1/t}+\frac{1}{20}e^{3/t}.$$

Библиографические ссылки

1. Boykov IV, Ventsel ES, Boykova AI. An approximate solution of hypersingular integral equations. *Applied Numerical Mathematics*. 2010;60(6):607–628. DOI: 10.1016/j.apnum.2010.03.003.

2. Chan Y-S, Fannjiang AC, Paulino GH. Integral equations with hypersingular kernels – theory and applications to fracture mechanics. *International Journal of Engineering Science*. 2003;41(7):683–720. DOI: 10.1016/S0020-7225(02)00134-9.

3. Зверович ЭИ. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. *Доклады Национальной академии наук Беларуси*. 2010;54(6):5–8.
4. Зверович ЭИ, Шилин АП. Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2018; 54(4):404–407. DOI: 10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407.
5. Зверович ЭИ. Обобщение формул Сохоцкого. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2012;2:24–28.
6. Гахов ФД. *Краевые задачи*. Москва: Наука; 1977. 640 с.

References

1. Boykov IV, Ventsel ES, Boykova AI. An approximate solution of hypersingular integral equations. *Applied Numerical Mathematics*. 2010;60(6):607–628. DOI: 10.1016/j.apnum.2010.03.003.
2. Chan Y-S, Fannjiang AC, Paulino GH. Integral equations with hypersingular kernels – theory and applications to fracture mechanics. *International Journal of Engineering Science*. 2003;41(7):683–720. DOI: 10.1016/S0020-7225(02)00134-9.
3. Zverovich EI. [Solution of the hypersingular integro-differential equation with constant coefficients]. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 2010;54(6):5–8. Russian.
4. Zverovich EI, Shilin AP. [Solution of the integro-differential equations with a singular and hypersingular integrals]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2018;54(4):404–407. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407.
5. Zverovich EI. Generalization of Sohotsky formulas. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2012;2:24–28. Russian.
6. Gakhov FD. *Kraevye zadachi* [Boundary value problems]. Moscow: Nauka; 1977. 640 p. Russian.

Статья поступила в редколлегию 15.01.2019.
Received by editorial board 15.01.2019.