

УДК 519.632.4, 519.624.2

ПРИМЕНЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В РАЗРЫВНОМ МЕТОДЕ ГАЛЁРКИНА НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

М. С. МАКСИМОВ¹⁾, С. В. ЛЕМЕШЕВСКИЙ²⁾

¹⁾Институт математики НАН Беларуси, ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Беларусь

²⁾Научно-технический центр «Симмэйкерс», территория инновационного центра «Сколково»,
бул. Большой, 42, стр. 1, 121205, г. Москва, Россия

Аннотация. Для решения задачи в неограниченной области, соответствующей уравнению Пуассона в сферически-симметричном случае, построен численный метод, основанный на разрывном методе Галёркина, и проведен его анализ. Для работы с неограниченной областью были использованы рациональные функции, полученные из композиции полиномов с алгебраическим преобразованием полубесконечного интервала. Среди особенностей данного варианта анализа можно выделить использование пространств Соболева с различными весами в зависимости от производных.

Ключевые слова: разрывный метод Галёркина; полубесконечный интервал; уравнение Пуассона; весовые пространства Соболева; полиномиальная аппроксимация с весами; анализ сходимости.

Образец цитирования:

Максимов МС, Лемешевский СВ. Применение рациональной аппроксимации в разрывном методе Галёркина на полубесконечном интервале. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025;1: 23–39.
EDN: GMWWQR

For citation:

Maksimau MS, Lemeshevsky SV. Application of a rational approximation in the discontinuous Galerkin method on a semi-infinite interval. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;1:23–39. Russian.
EDN: GMWWQR

Авторы:

Михаил Сергеевич Максимов – младший научный сотрудник отдела вычислительной математики и математического моделирования.

Сергей Владимирович Лемешевский – кандидат физико-математических наук; научный сотрудник.

Authors:

Mikhail S. Maksimau, junior researcher at the department of computational mathematics and mathematical modelling.
maksimau.mikhail@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0000-2344-4403>

Sergey V. Lemeshevsky, PhD (physics and mathematics); researcher.
sergey.lemeshevsky@simmakers.ru
<https://orcid.org/0000-0001-6213-4176>

APPLICATION OF A RATIONAL APPROXIMATION IN THE DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD ON A SEMI-INFINITE INTERVAL

M. S. MAKSIMAU^a, S. V. LEMESHEVSKY^b

^a*Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus,
11 Surganova Street, Minsk 220072, Belarus*

^b*Simmakers, Innovation Centre «Skolkovo», 42 Bolshoj Boulevard, 1 building, Moscow 121205, Russia*

Corresponding author: M. S. Maksimau (maksimau.mikhail@gmail.com)

Abstract. To solve a problem on an unbounded domain corresponding to the Poisson equation in the spherically symmetric case, a numerical method based on the discontinuous Galerkin method was developed and analysed. To address the unbounded domain, the rational functions were constructed by composing polynomials with an algebraic mapping of a semi-infinite interval. A notable feature of this approach is the use of Sobolev spaces with different weights depending on the derivatives.

Keywords: discontinuous Galerkin method; semi-infinite interval; Poisson equation; weighted Sobolev spaces; polynomial approximation with weights; convergence analysis.

Введение

Многие физические модели, описывающие различные явления, формулируются в неограниченных областях. Примеры таких моделей встречаются в квантовой механике [1; 2], астрофизике [3; 4], электрохимии [5] и др. В некоторых случаях модель предполагает решение уравнения Пуассона.

При решении задач в неограниченной области можно использовать спектральные методы, обзор которых приведен в работах [6; 7]. Применяя один из описанных подходов, заключающийся в использовании отображений полиномов Якоби (или неклассических полиномов), можно строить многодоменные спектральные методы [8], в которых часть элементов разбиения области решения являются неограниченными.

Разрывный метод Галёркина в эллиптических задачах позволяет без особых трудностей вводить базисные функции, узлы которых не совпадают на соседних элементах разбиения области решения, что является привлекательным свойством при использовании базисов высоких порядков [9]. Методы декомпозиции области решения также часто формулируются в рамках разрывного метода Галёркина [10; 11]. Можно отметить большую популярность разрывного метода в нестационарных задачах (в частности, связанных с гидродинамикой в астрофизике [12; 13]). В некоторых случаях результаты, полученные для эллиптических задач, затем используются и в нестационарных задачах [9].

Численному решению уравнения Пуассона в сферических координатах в неограниченной области посвящено много работ в сфере вычислительной физики (см., например, [14–18]). Часто эти методы основаны на разложении решения u в ряд по сферическим функциям $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Так как сферические функции являются собственными функциями сферической части оператора Лапласа (или оператора Лапласа – Бельтрами [19]), после разложения и интегрирования получается набор обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для $\hat{u}_{lm}(r)$. Однако во всех приведенных работах отсутствует анализ сходимости решения. Ниже перечислены публикации, в которых предлагаются различные методы решения ОДУ указанного типа.

В работе [17] для построения решения используется функция Грина, в которой предполагается аппроксимировать интегралы. В более современной публикации того же автора [16] применяется метод конечных объемов второго порядка с последующим быстрым преобразованием Фурье для проведения расчетов. При аппроксимации по r для граничного условия на бесконечности используется асимптотическое выражение, полученное при определенных предположениях о функции. Как указано в работе [16], метод конечных объемов в данной задаче позволяет строить консервативные методы для определенных уравнений ньютоновской гидродинамики [20]. В этом контексте разрывные методы Галёркина можно рассматривать как расширение методов конечных объемов [21] и ожидать от них большей эффективности при правильном построении для конкретных случаев.

В статье [15] используется аналогичное приведенному в настоящей работе преобразование полубесконечного интервала в ограниченный, после чего применяется семиточечная конечно-разностная схема. Этот вариант можно рассматривать как один из самых простых подходов к решению подобных ОДУ, но с ограниченной эффективностью.

В публикации [18] используется разложение с помощью спектральных форм, введенных в указанной работе. Для быстрой сходимости предполагается высокая гладкость решения.

В работе [14] область решения разбивается на три части: первая из них (*kernel*) включает начало координат, вторая (*shell*) состоит из отрезков, а третья (*external*) представляет собой полубесконечный интервал. На каждой из этих частей функция аппроксимируется суммой отображенных на соответствующий интервал полиномов Чебышева. Данный подход ближе всего к приведенному в настоящей работе. Основные отличия состоят в разных отображениях на полубесконечном интервале и использовании разрывной аппроксимации с соответствующей билинейной формой.

Работы, посвященные численному анализу приближенных методов решения дифференциальных уравнений в неограниченной области, в основном касаются спектральных однодоменных методов [6], но в контексте практических методов, описанных выше, часто более предпочтительными оказываются многодоменные, консервативные методы. Кроме того, применяя схему анализа сходимости [22], можно ожидать, что часть разработанной теории может быть использована и при рассмотрении задач на собственные значения в неограниченной области.

В данной работе исследуются вопросы аппроксимации в неограниченной области. Чтобы сфокусироваться на основной идее, по примеру публикации [23] будем рассматривать случай центральной симметрии, т. е. уравнение, соответствующее $\hat{u}_{00}(r)$. Можно отметить, что, как и в указанной публикации, решение рассматривается в неравномерных (*nonuniform*) пространствах Соболева. Расчетный метод Галёркина, предлагаемый в настоящей работе, основывается на главной формулировке (*primal formulation*) и соответствует варианту SIPG метода [21].

Работа построена следующим образом. В разделе «Модельная задача» приведены постановка задачи и используемые обозначения. В разделе «Дискретизация разрывным методом Галёркина» построены дискретная задача, билинейная форма численного метода. В разделе «Вспомогательные результаты» представлены необходимые при анализе неравенства. В разделах «Коэрцитивность и непрерывность билинейной формы численного метода» и «Оценка скорости сходимости» исследованы свойства билинейной формы численного метода и приведена оценка скорости сходимости приближенного решения к точному. В разделе «Тестовые расчеты» выполнены тестовые расчеты для некоторых простых физических моделей.

Модельная задача

В настоящей работе рассматривается следующая задача: для $r^2 f \in L^2(\Omega)$ найти u такое, что

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du(r)}{dr} \right) &= f(r) \text{ в } \Omega, \\ \lim_{r \rightarrow 0^+} r^2 \frac{du(r)}{dr} &= 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Omega = (0, \infty)$.

Обозначим слабую производную через $\partial : L^1_{\text{loc}}(U) \rightarrow L^1_{\text{loc}}(U)$, где U – открытое множество. В качестве пространств Соболева, в которых исследуются решения задачи, будем рассматривать вариант с различными весами для каждой из производных:

$$H^\alpha(U, \omega) = \{u \in L^2(U, \omega_0) : \partial^i u \in L^2(U, \omega_i), i \in \{1, \dots, \alpha\}\}.$$

Пространства Соболева с используемыми в работе весами являются полными пространствами [24]. Соответствие между $H^1(U, \omega)$, локально абсолютно непрерывными функциями $AC_{\text{loc}}(U)$ и их производными можно показать, основываясь на публикации [25].

Введем обозначение $\mathcal{H} = H^1(\Omega, \omega)$ с весовой функцией ω , которая имеет вид $\omega_i = r^{2i}$, т. е. сами функции интегрируются с весом $\omega_0 = 1$, производные – с весом $\omega_1 = r^2$ и т. д.

При выборе нормы $\|u\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^\infty u^2 dr + \int_0^\infty r^2 (\partial u)^2 dr$, используя неравенство Харди [26, формула (9.9.10)], можно показать, что норма $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ эквивалентна норме $\|u\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^\infty r^2 (\partial u)^2 dr$, с которой пространство $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ имеет все нужные свойства.

Слабая формулировка, соответствующая задаче (1), состоит в том, чтобы найти $u \in \mathcal{H}$ такое, что

$$B(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathcal{H}, \quad (2)$$

$$B(u, v) = \int_0^\infty r^2 \partial u \partial v dr, \quad l(v) = \int_0^\infty r^2 f v dr = (r^2 f, v)_\Omega. \quad (3)$$

Из приведенных определений непосредственно следует непрерывность и коэрцитивность билинейной формы: $|B(u, v)| \leq \|u\|_{\mathcal{H}} \|v\|_{\mathcal{H}}$, $B(u, u) \geq \|u\|_{\mathcal{H}}^2$, откуда на основании теоремы Лакса – Мильграма [24] вытекает существование и единственность решения задачи (2), (3) в пространстве $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$.

В задаче (2) из существования решения $u \in H^1(\Omega, \omega)$ следует, что $u \in H^2(\Omega, \omega)$. Для того чтобы убедиться, что $r^2 \partial^2 u \in L^2(\Omega)$, достаточно записать выражение

$$\int_0^\infty r^2 \partial u \partial \psi dr = \int_0^\infty r^2 f \psi dr, \quad \psi(r) = \int_r^\infty \frac{1}{s^2} \partial \varphi(s) ds, \quad \psi \in H^1(\Omega, \omega), \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Используя $r^2 f = \partial \int_0^r s^2 f(s) ds$ и интегрирование по частям, приходим к $\int_0^\infty \partial \left(\int_0^r s^2 f ds \right) \left(\int_r^\infty \frac{\partial \varphi}{s^2} ds \right) dr = \int_0^\infty \left(\int_0^r s^2 f ds \right) \frac{\partial \varphi}{r^2} dr$, откуда следует, что $\int_0^\infty \partial u \partial \varphi dr = \int_0^\infty \partial \left(\frac{1}{r^2} \int_0^r s^2 f ds \right) \varphi dr$. Учитывая неравенство (9.9.1) из работы [26], получаем оценку

$$\int_0^\infty r^4 (\partial^2 u)^2 dr \leq \int_0^\infty r^4 \left(|f(r)| + \frac{2}{r^3} \int_0^r |s^2 f| ds \right)^2 dr \leq 2 \int_0^\infty r^4 f^2 dr + 8 \int_0^\infty \left(\frac{1}{r} \int_0^r |s^2 f| ds \right)^2 dr \leq 34 \int_0^\infty r^4 f^2 dr.$$

Дискретизация разрывным методом Галёркина

Перед тем как ввести пространства функций, которые будут использоваться для построения и анализа решения, определим разбиение области $\mathcal{T}$ на интервалы K_i :

$$\mathcal{T} = \{K_i\}_{i=1, \dots, n}, \quad K_i = \begin{cases} (r_{i-1}, r_i), & i=1, \dots, n-1, \\ (r_{n-1}, \infty), & i=n, \end{cases} \quad r_i \in \mathbb{R}, \quad r_0 = 0, \quad r_{i-1} < r_i, \quad r_{n-1} \geq 1.$$

Затем припишем каждому из них набор параметров

$$k = \{k_i\}_{i=1, \dots, n}, \quad p = \{p_i\}_{i=1, \dots, n}, \quad h = \{h_i\}_{i=1, \dots, n}, \quad h_i = \begin{cases} r_i - r_{i-1}, & i=1, \dots, n-1, \\ 1, & i=n, \end{cases}$$

где k_i будет соответствовать гладкости решения u на интервале K_i , а p_i – размерности аппроксимирующего пространства на интервале K_i .

Предполагается, что существуют константы C_T и C_G , для которых выполняются неравенства

$$C_T d(K_i) \leq d(r_i) \leq C_G d(K_i), \quad d(K_i) = \frac{h_i}{p_i^2}, \quad d(r_i) = \frac{1}{2} \frac{h_i + h_{i+1}}{p_i^2 + p_{i+1}^2}. \quad (4)$$

В дальнейшем будем говорить о конечномерных пространствах, которые строятся с помощью множества полиномов $P_n(I)$, заданных на интервале $I = (-1, 1)$, и преобразования $\xi_K: I \rightarrow K$, $\xi_K \in C^\infty(I)$. В качестве функций ξ_K используются два отображения:

$$\xi_{(a,b)}(x) = qx + p, \quad \xi_{(a,b)}^{-1}(r) = \frac{r-p}{q}, \quad q = \frac{b-a}{2}, \quad p = \frac{b+a}{2},$$

для ограниченного интервала и

$$\xi_{(a,\infty)}(x) = \frac{2a}{1-x}, \quad \xi_{(a,\infty)}^{-1}(r) = \frac{r-2a}{r}$$

для полубесконечного интервала. Отображение $\xi_{(a,\infty)}$ соответствует алгебраическому отображению (*algebraic mapping*) [7; 27] $L \frac{1+x}{1-x}$, модифицированному для описываемого метода.

Введем конечномерное пространство

$$S_{hp}(\Omega, \mathcal{T}, \omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega, \omega_0) : v|_{K_i} \in V_{p_i}(K_i, \xi_{K_i}, \omega) \right\},$$

где $v|_{K_i}$ обозначает сужение функции v на интервал K_i и

$$V_{p_i}(K_i, \xi_{K_i}, \omega) = \left\{ v \in L^2(K_i, \omega_0) : v \in H^2(K_i, \omega) \cap (v \circ \xi_{K_i} \in P_{p_i}(I)) \right\}.$$

В сужениях содержатся все рациональные функции (в композиции с ξ_{K_i} являющиеся полиномами), которые при этом принадлежат соответствующему бесконечномерному пространству. С использованием веса ω определим также пространства Соболева специального вида (*broken Sobolev spaces*) (будут использоваться в дальнейшем)

$$H^k(\Omega, \mathcal{T}, \omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega, \omega_0) : v|_{K_i} \in H^{k_i}(K_i, \omega) \quad \forall K_i \in \mathcal{T} \right\},$$

для которых верно, что $S_{hp}(\Omega, \mathcal{T}, \omega) \subset H^k(\Omega, \mathcal{T}, \omega)$.

Кроме стандартных для введенных пространств норм и полунорм, определенных через суммы норм функции на каждом из элементов разбиения,

$$\|u\|_{H^k(\Omega, \mathcal{T}, \omega)}^2 = \sum_{i=1}^n \|u\|_{H^{k_i}(K_i, \mathcal{T}, \omega)}^2, \quad |u|_{H^k(\Omega, \mathcal{T}, \omega)}^2 = \sum_{i=1}^n |u|_{H^{k_i}(K_i, \mathcal{T}, \omega)}^2,$$

введем норму $\|\cdot\|$ в пространствах $H^k(\Omega, \mathcal{T}, \omega)$, $S_{hp}(\Omega, \mathcal{T}, \omega)$.

$$\|u\|^2 = |u|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}, \omega)}^2 + J^\sigma(u, u), \quad J^\sigma(u, v) = \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 \sigma(r_i) [u]_{r_i} [v]_{r_i}, \quad (5)$$

где $[u]_r = u(r^-) - u(r^+)$; $\sigma(r_i) = \frac{C_\sigma}{d(r_i)}$.

В данном варианте разрывного метода Галёркина используется билинейная форма $A(u, v)$, определенная следующим образом:

$$A(u, v) = a(u, v) + J^\sigma(u, v), \quad a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{K_i} r^2 \partial u \partial v dr - \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 \left(\langle \partial u \rangle_{r_i} [v]_{r_i} + \langle \partial v \rangle_{r_i} [u]_{r_i} \right), \quad (6)$$

где $\langle u \rangle_r = \frac{1}{2} (u(r^-) + u(r^+))$.

Численный метод заключается в том, чтобы найти $u_h \in S_{hp}(\Omega, \mathcal{T}, \omega)$ такое, что

$$A(u_h, v_h) = (r^2 f, v_h)_\Omega \quad \forall v_h \in S_{hp}(\Omega, \mathcal{T}, \omega).$$

Введение штрафного слагаемого $J^\sigma(u, v)$ в норму $\|\cdot\|$ и билинейной форме $A(u, v)$ обусловлено тем, что в разрывных пространствах только при достаточно большом значении штрафного параметра C_σ билинейная форма будет коэрцитивной [9].

Ниже показаны непрерывность и коэрцитивность формы $A(\cdot, \cdot)$. Из этих свойств на основании теоремы Лакса – Мильграма [24] следует существование и единственность численного решения в пространстве $(S_{hp}(\Omega, \mathcal{T}, \omega), \|\cdot\|)$. Также из непрерывности и коэрцитивности формы $A(\cdot, \cdot)$ получена оценка выражения $\|u_h - u\|$ через параметры h, p , что дает оценку скорости сходимости метода. Аналогичный подход описан в публикациях [9; 21] и многих других работах.

Вспомогательные результаты

Неравенства Маркова. Приведем оценки со значениями констант, связывающих нормы полиномов и их производных. Далее в работе будет видно, что наличие таких оценок позволяет оценить и константу штрафного слагаемого C_σ . С помощью оценок для полиномов Якоби из статьи [28] можно получить неравенства для $v \in V_n(K, \xi_K, \omega)$:

$$\|\partial v\|_{L^2(K, r^2)} \leq \frac{c_{ab} n^2}{b-a} \|v\|_{L^2(K, r^2)}, \quad K = (a, b), \quad c_{ab} = 4\sqrt{\frac{5}{3}}, \quad (7)$$

$$\|\partial v\|_{L^2(K)} \leq c_a n^2 \|v\|_{L^2(K, r^{-4})}, \quad K = (a, \infty), \quad c_a = 2\sqrt{10}a.$$

Поведение функций на границах интервалов. В данном разделе символ u обозначает элемент пространства Соболева, не обязательно являющийся решением задачи (1). При рассмотрении значений функций на границах интервалов имеются в виду соответствующие пределы. Нетрудно показать, что для $u \in H^2((0, a), \omega)$ справедливы равенства $\lim_{r \rightarrow 0^+} ru(r) = 0$, $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^2 \partial u(r) = 0$, а для $u \in H^2((a, \infty), \omega)$ справедливы равенства $\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = 0$, $\lim_{r \rightarrow \infty} r \partial u(r) = 0$.

Для получения оценок граничных значений функций при различных вариантах локально абсолютно непрерывных функций $f \in AC_{loc}(K)$ и $p \in C^\infty(K)$ используется формула

$$pf^2 \Big|_a^b = \int_a^b f^2 \partial p dr + 2 \int_a^b pf \partial f dr. \quad (8)$$

Лемма 1. Пусть $u \in H^2((0, a), \omega)$. Тогда на границах интервала для функции u и ее производной выполняются неравенства

$$a^2 u^2(a) \leq \frac{2}{a^3} \int_0^a r^4 u^2 dr + \frac{2}{a^2} \left(\int_0^a r^4 u^2 dr \right)^{1/2} \left(\int_0^a v^2 dr \right)^{1/2}, \quad (9)$$

$$a^2 (\partial u(a))^2 \leq 8u^2 + \frac{4}{a^3} \int_0^a v^2 dr + \frac{4}{a^2} \left(\int_0^a v^2 dr \right)^{1/2} \left(\int_0^a (\partial v)^2 dr \right)^{1/2}, \quad (10)$$

где $v = \partial(r^2 u(r))$.

Доказательство. Используем равенство (8) с $p = \frac{2r}{b} - 1$, $f(r) = r^2 u(r)$ при $a = \frac{1}{n}$, $b = a - \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Тогда, исходя из поведения функций на границе интервалов и теоремы о монотонной сходимости, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^4 u^2 \Big|_{\frac{1}{n}}^{a - \frac{1}{n}} = a^4 u^2(a), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{a - \frac{1}{n}} |r^2 u| |\partial(r^2 u)| dr = \int_0^a |r^2 u| |\partial(r^2 u)| dr,$$

откуда при использовании равенства (8) непосредственно следует неравенство (9).

Оценка для производной получается аналогично. Снова используем равенство (8), но в этот раз с $f(r) = \partial(r^2 u(r))$. Перенесем некоторые слагаемые в правую часть, чтобы получить $a^4 (\partial u(a))^2 \leq \int_a^b f^2 \partial p dr + 2 \int_a^b pf \partial f dr - 4a^4 u^2(a) + 4a^3 |u(a)| |\partial u(a)|$, после чего остается применить к $4a^3 |u(a)| |\partial u(a)|$ неравенство Юнга с $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

Оценки для граничных значений на интервале (a, b) общеизвестны:

$$u^2(a) + u^2(b) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b u^2 dr + 2 \left(\int_a^b u^2 dr \right)^{1/2} \left(\int_a^b (\partial u)^2 dr \right)^{1/2}, \quad (11)$$

$$(\partial u(r))^2(b) + (\partial u(r))^2(a) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b (\partial u)^2 dr + 2 \left(\int_a^b (\partial u)^2 dr \right)^{1/2} \left(\int_a^b (\partial^2 u)^2 dr \right)^{1/2}. \quad (12)$$

Из-за ограничений, накладываемых в дальнейшем оценкой полиномиальной аппроксимации, понадобится оценка нормы $\|\partial u\|_{L^2((a, \infty), r^2)}$ через норму $\|\partial(r^2 \partial u)\|_{L^2((a, \infty))}$.

Лемма 2. Пусть $u \in H^2((a, \infty), \omega)$. Тогда для нормы $\|\partial u\|_{L^2((a, \infty), r^2)}$ справедлива оценка

$$\|\partial u\|_{L^2((a, \infty), r^2)}^2 \leq 2a^3 (\partial u(a))^2 + 8 \|\partial(r^2 \partial u)\|_{L^2((a, \infty))}^2, \quad (13)$$

а для граничных значений выполняются неравенства

$$u^2(a) \leq 4a^3 \int_a^\infty \frac{1}{r^4} u^2 dr + 2a^2 \left(\int_a^\infty \frac{1}{r^4} u^2 dr \right)^{1/2} \left(\int_a^\infty (\partial u)^2 dr \right)^{1/2}, \quad (14)$$

$$(\partial u(a))^2 \leq 4a^{-1} \int_a^\infty (\partial u)^2 dr + 2a^{-2} \left(\int_a^\infty (\partial u)^2 dr \right)^{1/2} \left(\int_a^\infty (\partial(r^2 \partial u))^2 dr \right)^{1/2}. \quad (15)$$

Доказательство. Начнем с оценки нормы в $L^2((a, \infty), r^2)$. Из того, что $\partial u \in AC_{loc}((a, \infty))$, следует равенство $r^2 \partial u(r) = a^2 \partial u(a) + \int_a^r \partial(s^2 \partial u(s)) ds$.

Используем неравенство Коши для интеграла

$$|r^2 \partial u(r)| \leq |a^2 \partial u(a)| + \left(\int_a^r s^{-1/2} ds \right)^{1/2} \left(\int_a^r s^{1/2} (\partial(s^2 \partial u(s)))^2 ds \right)^{1/2}.$$

Возведем выражение в квадрат и приведем к нужному виду:

$$r^4 (\partial u(r))^2 \leq 2a^4 (\partial u(a))^2 + 4(r^{1/2} - a^{1/2}) \int_a^r s^{1/2} (\partial(s^2 \partial u(s)))^2 ds.$$

Проинтегрируем неравенство от a до ∞ и изменим порядок интегрирования:

$$\int_a^\infty r^2 (\partial u(r))^2 dr \leq 2a^3 (\partial u(a))^2 + 4 \int_a^\infty s^{1/2} (\partial(s^2 \partial u(s)))^2 \int_s^\infty r^{-2} (r^{1/2} - a^{1/2}) dr ds,$$

откуда следует оценка (13).

Оценки граничных значений получим с помощью равенства (8). В случае с $u^2(a)$ выберем $p = r^{-2}(1 - 2ar^{-1})$, $f = u$, а в случае с $(\partial u(a))^2$ возьмем такое же p и $f(r) = r^2 \partial u$.

Для интегралов на интервале $(0, a)$ используем следующие обозначения:

$$A_1 = \int_0^{r_1} r^4 u^2 dr, \quad B_1 = \int_0^{r_1} (\partial(r^2 u))^2 dr, \quad C_1 = \int_0^{r_1} (\partial^2(r^2 u))^2 dr.$$

Тогда неравенства (9), (10) можно переписать в виде

$$r_1^2 u^2(r_1) \leq \frac{2}{r_1^3} A_1 + \frac{2}{r_1^2} A_1^{1/2} B_1^{1/2}, \quad r_1^2 (\partial u(r_1))^2 \leq \frac{16}{r_1^5} A_1 + \frac{16}{r_1^4} A_1^{1/2} B_1^{1/2} + \frac{4}{r_1^3} B_1 + \frac{2}{r_1^2} B_1^{1/2} C_1^{1/2}.$$

Для интегралов на интервале (a, b) введем обозначения

$$A_i = \int_{r_i}^{r_{i+1}} u^2 dr, \quad B_i = \int_{r_i}^{r_{i+1}} (\partial u)^2 dr, \quad C_i = \int_{r_i}^{r_{i+1}} (\partial^2 u)^2 dr, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

при которых неравенства (11), (12) принимают вид

$$u^2(r_i) + u^2(r_{i+1}) \leq \frac{2}{h_i} A_i + 2A_i^{1/2} B_i^{1/2}, \quad (\partial u(r_i))^2 + (\partial u(r_{i+1}))^2 \leq \frac{2}{h_i} B_i + 2B_i^{1/2} C_i^{1/2}.$$

Для интегралов на полубесконечном интервале (a, ∞) используем обозначения

$$A_n = \int_{r_{n-1}}^\infty \frac{u^2}{r^4} dr, \quad B_n = \int_{r_{n-1}}^\infty (\partial u)^2 dr, \quad C_n = \int_{r_{n-1}}^\infty (\partial(r^2 \partial u))^2 dr,$$

с которыми неравенства (14), (15), а также оценку (13) можно переписать в виде

$$u^2(r_{n-1}) \leq 4r_{n-1}^3 A_n + 2r_{n-1}^2 A_n^{1/2} B_n^{1/2}, \quad (\partial u(r_{n-1}))^2 \leq 4r_{n-1}^{-1} B_n + 2r_{n-1}^{-2} B_n^{1/2} C_n^{1/2},$$

$$\|\partial u\|_{L^2(K_n, r^2)}^2 \leq 8r_{n-1}^2 B_n + 4r_{n-1} B_n^{1/2} C_n^{1/2} + 8C_n.$$

Лемма 3. Для $v \in V_n(K, \xi_K, \omega)$ выполняются неравенства

$$\|v\|_{L^2(\partial K, r^2)}^2 \leq \frac{2}{b-a} \|v\|_{L^2(K, r^2)}^2 (3 + c_{ab} n^2), \quad K = (a, b), \quad (16)$$

$$a^2 v^2(a^+) \leq 4a \|v\|_{L^2(K, r^{-4})}^2 (1 + \sqrt{10} n^2), \quad K = (a, \infty). \quad (17)$$

Доказательство. В обеих частях доказательства $\hat{v} = v \circ \xi_K \in P_n(I)$. Для доказательства на ограниченном интервале запишем равенство (8) при $p = x(qx + p)^2$, $f(x) = \hat{v}(x)$, $a = -1$, $b = 1$:

$$b^2 \hat{v}^2(1^-) + a^2 \hat{v}^2(-1^+) = \int_{-1}^1 (qx + p)(3qx + p) \hat{v}^2 dx + 2 \int_{-1}^1 x(qx + p)^2 \hat{v} \partial \hat{v} dx.$$

Из этого можно получить неравенство

$$b^2 \hat{v}^2(1^-) + a^2 \hat{v}^2(-1^+) \leq 3 \int_{-1}^1 (qx + p)^2 \hat{v}^2 dx + 2 \int_{-1}^1 |x| (qx + p)^2 |\hat{v}| |\partial \hat{v}| dx.$$

Используем неравенство Коши и перейдем к интервалу (a, b) с помощью $\xi_{(a,b)}^{-1}$:

$$b^2 v^2(b^-) + a^2 v^2(a^+) \leq \frac{6}{b-a} \int_a^b r^2 v^2 dr + 2 \left(\int_a^b r^2 v^2 dr \right)^{1/2} \left(\int_a^b r^2 (\partial v)^2 dr \right)^{1/2},$$

после чего остается воспользоваться неравенством (7).

Для полубесконечного интервала (a, ∞) доказательство проводится аналогично при $p = x(1-x)^2$.

Полиномиальная аппроксимация в пространствах Соболева. В разрывных методах Галёркина данный вопрос является более сложным, чем в непрерывных методах Галёркина, из-за необходимости оценки погрешности аппроксимации до второй производной включительно, что может быть сложнее ее оценки только до первой производной. В статье [7] приведены некоторые подходы к анализу полиномиальных аппроксимаций в неограниченной области, но они работают только для оценок функции и ее первой производной.

В качестве теоретической основы для оценки полиномиальной аппроксимации возьмем работу [29], в которой используется следующий вариант пространства Соболева:

$$W_p^n([-1, 1], \omega_\alpha^\beta) = \left\{ f \in C^{n-1}([-1, 1]) : \partial^n f \in L^p(\omega_\alpha^\beta) \right\}.$$

Также в ней приведена следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\alpha, \beta > -1$ и $f \in W_2^n([-1, 1], \omega_\alpha^\beta)$. Тогда существует полином $p \in P_n([-1, 1])$ такой, что

$$\|f^{(k)} - p^{(k)}\|_{L^2([-1, 1], \omega_\alpha^\beta)} \leq c n^{s-k} \|f^{(s)}\|_{L^2([-1, 1], \omega_\alpha^\beta)}, \quad 0 \leq k \leq s,$$

при выполнении условия $\alpha = 0$ или $\beta = 0$.

Введем обозначение $D = r^2 \partial$. Основываясь на указанной теореме, можно сформулировать следствие об аппроксимации.

Следствие 1. При $s \geq k$ и $s \geq 2$ выполняются следующие оценки полиномиальной аппроксимации:

- для $u_1 \in H^s(K_1, \omega)$ существует $P_1 \in V_n(K_1, \xi_{(0, r_1)}, \omega)$ такое, что

$$\|\partial^k(r^2 u_1) - \partial^k P_1\|_{L^2(K_1)} \leq c_1 \cdot 2^{k-s} \frac{p_1^{k-s}}{h_1^{k-s}} \|\partial^s(r^2 u_1)\|_{L^2(K_1)}, \quad K_1 = (0, r_1); \quad (18)$$

- для $u_2 \in H^s(K_i, \omega)$ существует $P_2 \in V_n(K_i, \xi_{(r_{i-1}, r_i)}, \omega)$, $i = 2, \dots, n-1$, такое, что

$$\|\partial^k u_2 - \partial^k P_2\|_{L^2(K_i)} \leq c_2 \cdot 2^{k-s} \frac{p_i^{k-s}}{h_i^{k-s}} \|\partial^s u_2\|_{L^2(K_i)}, \quad K_i = (r_i, r_{i+1}); \quad (19)$$

• для $u_3 \in H^s(K_n, \omega)$ существует $P_3 \in V_n(K_n, \xi_{(a, \infty)}, \omega)$ такое, что при $k \geq 1$

$$\|D^k u_3 - D^k P_3\|_{L^2(K_n, r^{-4})} \leq c_3 \cdot 2^{k-s} r_{n-1}^{k-s} p_n^{k-s} \|D^s u_3\|_{L^2(K_n, r^{-4})}, \quad K_n = (r_n, \infty), \quad (20)$$

а при $k = 0$

$$\|u_3 - P_3\|_{L^2(K_n, r^{-4})} \leq c_4 \sum_{j=0}^2 2^{-s} r_{n-1}^{-s} p_n^{j-s} \|D^{j+s} u_3\|_{L^2(K_n, r^{-4})}, \quad K_n = (r_n, \infty). \quad (21)$$

Первые три неравенства можно получить, перейдя к интервалу $(-1, 1)$ и применив теорему 1, а для получения последнего неравенства достаточно рассмотреть аппроксимирующий полином $p_n(x) = \mathcal{S}_{n, \theta}^{\alpha-s, \beta-s} f(x) - \mathcal{S}_{n, \theta}^{\alpha-s, \beta-s} f(1)$, где $\mathcal{S}_{n, \theta}^{\alpha-s, \beta-s} f$ является частичной суммой разложения f в ряд Фурье с ортогональными функциями, определенными в работе [29]:

$$\mathcal{S}_{n, \theta}^{\alpha-s, \beta-s} f := \sum_{k=0}^n \hat{f}_k^{\alpha-s, \beta-s} J_{k, \theta}^{\alpha-s, \beta-s}, \quad J_{k, \theta}^{\alpha-s, \beta-s} := \begin{cases} \frac{(x-\theta)^n}{n!}, & 0 \leq n \leq s-1, \\ \int_{\theta}^x \frac{(x-t)^{s-1}}{(s-1)!} J_{n-s}^{\alpha-s, \beta-s}(t) dt, & n \geq s, \end{cases}$$

здесь $J_{n-s}^{\alpha-s, \beta-s}$ — полиномы Якоби.

Коэрцитивность и непрерывность билинейной формы численного метода

Билинейную форму $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть коэрцитивной относительно нормы $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, если существует такое $C > 0$, что выполняется неравенство $a(v, v) \geq C \|v\|^2 \forall v \in V$.

Лемма 4. Пусть выполняются неравенства (4), а также $C_\sigma \geq 4C_G C_{ab}^a$. Тогда справедливо неравенство $A(v, v) \geq \frac{1}{2} \|v\|^2 \forall v \in S_{hp}(\Omega, \mathcal{T}, \omega)$ ($A(v, v)$ и $\|v\|$ определены в формулах (6) и (5) соответственно).

Доказательство. Для билинейной формы $a(v, v)$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \int_{K_i} r^2 (\partial v)^2 dr - 2 \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 \langle \partial v \rangle_{r_i} [v]_{r_i} &\geq |v|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}, \omega)}^2 - 2 \sqrt{\frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 \langle \partial v \rangle_{r_i}^2} \sqrt{\delta \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 [v]_{r_i}^2} \geq \\ &\geq \overbrace{|v|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}, \omega)}^2}^{\chi_1} - \overbrace{\frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{n-1} d(r_i) r_i^2 \langle \partial v \rangle_{r_i}^2}^{\chi_2} - \delta \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{d(r_i)} r_i^2 [v]_{r_i}^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Оценим слагаемое χ_2 из последней части неравенства (22) через норму χ_1 .

Учитывая условия на сетку (4), можно получить неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1} d(r_i) r_i^2 \langle \partial v \rangle_{r_i}^2 \leq C_G \overbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-1} d(K_i) \|\partial v\|_{L^2([r_{i-1}, r_i], r^2)}^2 + d(K_n) r_{n-1}^2 (\partial v(r_{n-1}^+))^2 \right)}^{\chi(v)}. \quad (23)$$

Используя оценки (16) и (17), выражение $\chi(v)$ из неравенства (23) можно оценить следующим образом:

$$\chi(v) \leq 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i}{p_i^2} h_i^{-1} |v|_{H^1(K_i, r^2)}^2 (3 + c_{ab} p_i^2) + 4 \frac{r_{n-1}}{p_n^2} \|\partial v\|_{L^2(K_n)}^2 (1 + \sqrt{10} p_n^2).$$

Исходя из того, что $p_i^2 > 1$, $r_{n-1} \geq 1$ и $\int_{r_{n-1}}^{\infty} (\partial v)^2 dr \leq r_{n-1}^{-2} \int_{r_{n-1}}^{\infty} r^2 (\partial v)^2 dr$, получаем

$$\chi(v) \leq 2 \sum_{i=1}^{n-1} |v|_{H^1(K_i, r^2)}^2 (3 + c_{ab}) + 4 |v|_{H^1(K_n, r^2)}^2 (1 + \sqrt{10}).$$

Вынесем константу $C_{ab}^a = \max\left(2(3 + c_{ab}), 4(1 + \sqrt{10})\right)$ и получим необходимую оценку через норму производной:

$$\sum_{i=1}^{n-1} d(r_i) r_i^2 \langle \partial v \rangle_{r_i}^2 \leq C_G C_{ab}^a |v|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}, \omega)}^2. \quad (24)$$

Возвращаясь к неравенству (22) с $\delta = 2C_G C_{ab}^a$, имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq |v|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}, \omega)}^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d(r_i)}{\delta} r_i^2 \langle \partial v \rangle_{r_i}^2 - \frac{\delta}{C_\sigma} \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(r_i) r_i^2 [v]_{r_i}^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{2} |v|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}, \omega)}^2 - 2 \frac{C_G C_{ab}^a}{C_\sigma} \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(r_i) r_i^2 [v]_{r_i}^2 \geq \frac{1}{2} \left(|v|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}, \omega)}^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(r_i) r_i^2 [v]_{r_i}^2 \right). \end{aligned}$$

Тогда из определения формы $A(\cdot, \cdot)$ следует, что

$$A(v, v) \geq \frac{1}{2} \left(|v|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}, \omega)}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(r_i) r_i^2 [v]_{r_i}^2 \right) = \frac{1}{2} \|v\|^2 \quad \forall v \in \mathcal{S}_{hp}(\Omega, \mathcal{T}, \omega).$$

Для того чтобы показать сходимость метода, также потребуются различные неравенства для $a(u, v)$, $J^\sigma(u, v)$, $\|\cdot\|_{1,\sigma}$, которые приведены ниже.

Для билинейной формы $a(u, v)$ выполняется неравенство

$$a(u, v) \leq \|u\|_{1,\sigma} \|v\|_{1,\sigma} \quad \forall u, v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}, \omega), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,\sigma}^2 &= \|u\|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (\sigma(r_i))^{-1} r_i^2 \langle \partial u \rangle_{r_i}^2 = \\ &= |u|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}, \omega)}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(r_i) r_i^2 [u]_{r_i}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (\sigma(r_i))^{-1} r_i^2 \langle \partial u \rangle_{r_i}^2, \end{aligned}$$

что можно увидеть, проведя доказательство по аналогии с доказательством, описанным в работе [21].

Лемма 5. Для $u, v \in H^1(\Omega, \mathcal{T}, \omega)$ справедливы следующие неравенства:

$$|J^\sigma(u, v)| \leq \sqrt{J^\sigma(u, u)} \sqrt{J^\sigma(v, v)}, \quad J^\sigma(u, u) \leq \|u\|_{1,\sigma}^2, \quad (26)$$

$$J^\sigma(u, u) \leq C_\sigma C_T^{-1} \left(\xi_1(u) + \sum_{i=2}^{n-1} r_i^2 \xi_i(u) + r_{n-1}^2 \xi_n(u) \right), \quad (27)$$

где при $i = 2, \dots, n-1$

$$\xi_1(u) = 3 \frac{p_1^3}{h_1^4} A_1 + \frac{p_1}{h_1^2} B_1, \quad \xi_i(u) = 3 \frac{p_i^3}{h_i^2} A_i + p_i B_i, \quad \xi_n(u) = 5 p_n^3 r_{n-1}^4 A_n + p_n B_n.$$

Доказательство. По аналогии с неравенством (23) можно получить неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sigma(r_i) r_i^2 [u]_{r_i}^2 \leq C_\sigma C_T^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (d(K_i))^{-1} \overbrace{\|u\|_{L^2(\partial[r_{i-1}, r_i], r^2)}^2}^{\chi_1} + (d(K_n))^{-1} \overbrace{r_{n-1}^2 u^2(r_{n-1}^+)}^{\chi_2} \right). \quad (28)$$

Применив оценки (9), (11) к χ_1 и оценку (14) к χ_2 из неравенства (28), имеем

$$\begin{aligned} J^\sigma(u, u) &\leq C_\sigma C_T^{-1} \left(\xi'_1 + \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 \xi'_i + r_{n-1}^2 \xi'_n \right), \quad \xi'_i = \frac{p_i^2}{h_i} \left(\frac{2}{h_i} A_i + 2 A_i^{1/2} B_i^{1/2} \right), \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \xi'_1 &= \frac{p_1^2}{h_1} \left(\frac{2}{h_1^3} A_1 + \frac{2}{h_1^2} A_1^{1/2} B_1^{1/2} \right), \quad \xi'_n = p_n^2 (4 r_{n-1}^3 A_n + 2 r_{n-1}^2 A_n^{1/2} B_n^{1/2}). \end{aligned}$$

Используя неравенство Юнга и перераспределив некоторые множители, получим искомый результат.

Лемма 6. Для $u \in H^2(\Omega, T, \omega)$ и $v_h \in S_{hp}(\Omega, T, \omega)$ справедливы неравенства

$$\|u\|_{1,\sigma} \leq \sqrt{C_r R(u)}, \quad \|v_h\|_{1,\sigma} \leq \sqrt{\left(1 + \frac{C_G C_{ab}^a}{C_\sigma}\right)} \|v_h\|, \quad (29)$$

где $C_r = \max(C_\sigma C_T^{-1}, C_\sigma^{-1} C_G, 1)$, а $R(u) = \eta_1(u) + \sum_{i=2}^{n-1} r_i^2 \eta_i(u) + r_{n-1}^2 \eta_n(u)$,

$$\eta_1(u) = 27 \frac{p_1^3}{h_1^4} A_1 + 15 \frac{p_1}{h_1^2} B_1 + \frac{2}{p_1^2} C_1, \quad \eta_n(u) = 5 p_n^3 r_{n-1}^6 A_n + 16 p_n r_{n-1}^2 B_n + (p_n^{-2} + 10) C_n,$$

$$\eta_i(u) = 3 \frac{p_i^3}{h_i^2} A_i + 4 p_i B_i + \frac{h_i^2}{p_i^2} C_i, \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Доказательство. Запишем еще раз определение нормы $\|u\|_{1,\sigma}$:

$$\|u\|_{1,\sigma}^2 = |u|_{H^1(\Omega, T, \omega)}^2 + \overbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \sigma(r_i) r_i^2 [u]_{r_i}^2}^{\chi_1} + \overbrace{\sum_{i=1}^{n-1} (\sigma(r_i))^{-1} r_i^2 \langle \partial u \rangle_{r_i}^2}^{\chi_2}.$$

Чтобы получить нужный результат, оценим слагаемое χ_2 и воспользуемся неравенством (27) для слагаемого χ_1 .

Выражение χ_2 аналогично неравенству (23) с отличием в том, что теперь функции u могут принадлежать бесконечномерному пространству. Как и в неравенстве (23), введем обозначение $\chi(u)$ и воспользуемся неравенствами (10), (12), (15), чтобы получить

$$\chi_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d(r_i)}{C_\sigma} r_i^2 \langle \partial u \rangle_{r_i}^2 \leq \frac{C_G}{C_\sigma} \chi(u) \leq \frac{C_G}{C_\sigma} \left(\eta_1'' + \sum_{i=2}^{n-1} r_i^2 \eta_i'' + r_{n-1}^2 \eta_n'' \right), \quad (30)$$

$$\eta_1'' = \frac{h_1}{p_1^2} \left(\frac{16}{h_1^5} A_1 + \frac{16}{h_1^4} A_1^{1/2} B_1^{1/2} + \frac{4}{h_1^3} B_1 + \frac{4}{h_1^2} B_1^{1/2} C_1^{1/2} \right), \quad \eta_n'' = p_n^{-2} (4 r_{n-1}^2 B_n + 2 B_n^{1/2} C_n^{1/2}),$$

$$\eta_i'' = \frac{h_i}{p_i^2} \left(\frac{2}{h_i} B_i + 2 B_i^{1/2} C_i^{1/2} \right), \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Применим неравенство Юнга к произведениям норм:

$$\eta_1'' \leq \eta_1' = \frac{1}{p_1^2} \left(\frac{24}{h_1^4} A_1 + \frac{14}{h_1^2} B_1 + 2 C_1 \right), \quad \eta_n'' \leq \eta_n' = p_n^{-2} (5 r_{n-1}^2 B_n + C_n),$$

$$\eta_i'' \leq \eta_i' = \frac{3}{p_i^2} B_i + \frac{h_i^2}{p_i^2} C_i, \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Из неравенства (27) для χ_1 и неравенства (30) (с учетом применения неравенства Юнга) для χ_2 следует, что

$$\|u\|_{1,\sigma}^2 \leq |u|_{H^1(\Omega, T, \omega)}^2 + \frac{C_\sigma}{C_T} \left(\xi_1 + \sum_{i=2}^{n-1} r_i^2 \xi_i + r_{n-1}^2 \xi_n \right) + \frac{C_G}{C_\sigma} \left(\eta_1' + \sum_{i=2}^{n-1} r_i^2 \eta_i' + r_{n-1}^2 \eta_n' \right),$$

откуда после вынесения констант с учетом оценки (13) для $|u|_{H^1(\Omega, T, \omega)}^2$ получим искомое выражение.

В случае с конечномерным пространством используем неравенство (24), чтобы получить искомое неравенство

$$\|v_h\|_{1,\sigma}^2 \leq \left(1 + \frac{C_G C_{ab}^a}{C_\sigma} \right) |v_h|_{H^1(\Omega, T, \omega)}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(r_i) r_i^2 [v_h]_{r_i}^2 \leq \left(1 + \frac{C_G C_{ab}^a}{C_\sigma} \right) \|v_h\|^2.$$

Следствие 2. Пусть $u \in H^2(\Omega, T, \omega)$ и $v_h \in S_{hp}(\Omega, T, \omega)$. Тогда для $A(u, v_h)$ справедливо неравенство

$$|A(u, v_h)| \leq 2 \sqrt{C_r \left(1 + \frac{C_G C_{ab}^a}{C_\sigma} R(u) \right)} \|v_h\|. \quad (31)$$

Доказательство. Из неравенства (25) для $a(u, v)$ и неравенства (26) для $J^\sigma(u, v)$ следует, что

$$\begin{aligned} |A(u, v_h)| &\leq |a(u, v_h)| + |J^\sigma(u, v_h)| \leq \|u\|_{1,\sigma} \|v_h\|_{1,\sigma} + \sqrt{J^\sigma(u, u)} \sqrt{J^\sigma(v_h, v_h)}, \\ |A(u, v_h)| &\leq 2 \|u\|_{1,\sigma} \|v_h\|_{1,\sigma}. \end{aligned} \quad (32)$$

Применив оценки (29) к неравенству (32), получим искомое выражение.

Следствием результатов данного раздела также является то, что для каждого $f \in L^2(\Omega, r^4)$ существует единственное решение $u_h \in S_{hp}(\Omega, T, \omega)$, определяемое равенством

$$A(u_h, v_h) = (r^2 f, v_h)_\Omega \quad \forall v_h \in S_{hp}(\Omega, T, \omega).$$

Доказательство следует непосредственно из теоремы Лакса – Мильграма, коэрцитивности билинейной формы (лемма 4) и неравенства $A(u_h, v_h) \leq 2 \left(1 + \frac{C_G C_{ab}^a}{C_\sigma} \right) \|u_h\| \|v_h\|$, которое получается из неравенств (29) и (32).

Оценка скорости сходимости

По аналогии с работой [22] определим операторы точного и численного решения:

- $T : L^2(\Omega, r^4) \rightarrow H^2(\Omega, \omega)$ такой, что $B(Tf, v) = (r^2 f, v)_\Omega \quad \forall v \in H^1(\Omega, \omega)$;
 - $T_h : L^2(\Omega, r^4) \rightarrow S_{hp}(\Omega, T, \omega)$ такой, что $A(T_h f, v_h) = (r^2 f, v_h)_\Omega \quad \forall v_h \in S_{hp}(\Omega, T, \omega)$.
- Нетрудно показать, что для всех $f \in L^2(\Omega, r^4)$

$$A(Tf - T_h f, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in S_{hp}(\Omega, T, \omega). \quad (33)$$

Теорема 2. Пусть $f \in L^2(\Omega, r^4)$, $u = Tf$, $u_h = T_h f$, $C_\sigma \geq 4C_G C_{ab}^a$. Тогда существуют оператор $\mathcal{I} : H^2(\Omega, T, \omega) \rightarrow S_{hp}(\Omega, T, \omega)$ и константа C_{AE} такая, что

$$\|u - u_h\|^2 \leq C_{AE} R(\mathcal{I}u - u). \quad (34)$$

Доказательство. Представим погрешность e метода в виде

$$e = u_h - u = \xi + \eta, \quad \xi = u_h - \mathcal{I}u, \quad \eta = \mathcal{I}u - u,$$

где $\xi \in S_{hp}(\Omega, T, \omega)$, $\eta \in H^2(\Omega, T, \omega)$.

Из выражения (33) следует равенство $A(\xi, v_h) + A(\eta, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in S_{hp}(\Omega, T, \omega)$, а из неравенства (31) и коэрцитивности билинейной формы (лемма 4) – неравенство

$$|A(\eta, \xi)| \leq 2 \sqrt{C_r \left(1 + \frac{C_G C_{ab}^a}{C_\sigma} R(\eta) \right)} \|\xi\|, \quad \|\xi\| \leq 4 \sqrt{C_r \left(1 + \frac{C_G C_{ab}^a}{C_\sigma} R(\eta) \right)}.$$

Из первого из неравенств (29) и того, что $\|\eta\| \leq \|\eta\|_{1,\sigma}$, получаем $\|\eta\| \leq \sqrt{C_r R(\eta)}$.

Возвращаясь к оценке погрешности, имеем

$$\|e\|^2 \leq 2 \|\eta\|^2 + 2 \|\xi\|^2 \leq 2C_r \left(16 \left(1 + \frac{C_G C_{ab}^a}{\sigma} \right) + 1 \right) R(\eta).$$

Теорема 3. Для решений $u = Tf \in H^2(\Omega, \omega)$, $u_h = T_h f \in S_{hp}(\Omega, T, \omega)$ при выполнении условия $C_\sigma \geq 4C_G C_{ab}^a$ справедливо неравенство

$$\|u_h - u\|^2 \leq C_R \left(2^{-2s_1+4} \frac{h_i^{2s_1-4}}{p_i^{2s_1-3}} \|\partial^{s_1}(r^2 u)\|_{L^2(K_1)}^2 + \sum_{i=2}^{n-1} 2^{-2s_i+4} r_i^2 \frac{h_i^{2s_i-2}}{p_i^{2s_i-3}} \|\partial^{s_i} u\|_{L^2(K_i)}^2 + \varepsilon_n \right), \quad (35)$$

$$\varepsilon_n = 2^{-2s_n+4} r_{n-1}^{-2s_n+10} p_n^{-2s_n+11} \sum_{i=0}^2 \|D^{s_n-i} u\|_{L^2(K_n, r^{-4})}^2,$$

для $s_i = 2$ и $s_i > 2$, $i = 1, \dots, n$, при условии существования соответствующих норм.

Доказательство теоремы следует из неравенства (34), определения $R(\eta)$ и оценок полиномиальной аппроксимации (18)–(21).

Воспользуемся билинейной формой из слабой постановки задачи $B: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$, так что новая задача будет иметь вид

$$\int_0^\infty r^2 \partial u \partial v dr = \int_0^\infty f v dr \quad \forall v \in \mathcal{H} \quad (36)$$

для $u \in \mathcal{H}$, $f \in L^2(\Omega)$. В такой постановке видно, что для $f \in L^2(\Omega)$ существует единственное решение $u \in \mathcal{H}$, $\partial(r^2 \partial u) \in L^2(\Omega)$, $r^2 \partial^2 u \in L^2(\Omega)$, и выполняются равенства $\partial(r^2 \partial u) = -f$,

$$A(u, v_h) = (f, v_h)_\Omega \quad \forall v_h \in H^2(\Omega, T, \omega).$$

Используя задачу (36), можно получить оценку погрешности в норме L^2 : возьмем в качестве правой части равенства (36) $e = T_h f - Tf \in H^2(\Omega, T, \omega)$, а соответствующее решение обозначим через ψ . Применив элементарные преобразования к $A(\psi, e_h) = (e_h, e_h)_\Omega$, можно получить

$$\int_0^\infty e^2 dr \leq \left(\sum_{i=1}^n \int_{K_i} r^2 (\partial e)^2 dr \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \int_{K_i} r^2 (\partial \psi)^2 dr \right)^{1/2} - \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 \langle \partial \psi \rangle_{r_i} [e]_{r_i}.$$

Так как ψ является решением задачи, можно перейти к неравенству

$$\int_0^\infty e^2 dr \leq |e|_{H^1(\Omega, T, \omega)} \|e\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 |\partial \psi_{r_i}| [e]_{r_i}.$$

Из $\partial(r^2 \partial \psi) = e$ и $r^2 \partial \psi_{r_i} = \int_0^{r_i} \partial(r^2 \partial \psi) dr$ следует, что $\int_0^\infty e^2 dr \leq |e|_{H^1(\Omega, T, \omega)} \|e\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^{r_i} |e| dr [e]_{r_i}$, откуда получаем оценку погрешности в норме L^2 :

$$\|e\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2|e|_{H^1(\Omega, T, \omega)}^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 \sigma(r_i) [e]_{r_i}^2.$$

Тестовые расчеты

Проведем численные расчеты для некоторых астрофизических и квантово-механических задач. Во всех расчетах $f(r)$ из задачи (1) соответствует плотности, умноженной на 4π , а решение задачи (1) соответствует потенциалу.

Классические подходы к расчету основных состояний многоэлектронных атомов включают в себя метод Хартри – Фока (HF), теорию функционала плотности (DFT) [30]. В этих методах итеративно происходит приближенный поиск решения. На каждой итерации можно выделить этап, на котором выполняется

расчет интеграла $v(\mathbf{r}) = \int \frac{f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$. В зависимости от метода этот интеграл называется самосогласован-

ным потенциалом, потенциалом Хартри. Часто расчет этого интеграла заменяют на решение уравнения Пуассона $\Delta v(\mathbf{r}) = -4\pi f(\mathbf{r})$, которое в сферически-симметричном случае соответствует задаче (1).

В качестве начального приближения для атома гелия в методах HF, DFT можно использовать плотность, соответствующую двум электронам на уровне $1s$. Тогда плотность распределения электронов и потенциал определяются следующим образом:

$$f_{\text{Hartree}}(r) = \pi^{-1} e^{-2r}, \quad v_{\text{Hartree}} = r^{-1} (1 - e^{-2r} (1 + r)).$$

При решении вида v_{Hartree} все производные, входящие в оценку численного метода, ограничены, и можно ожидать, что увеличение степеней аппроксимации будет наиболее эффективным способом повышения точности приближенного решения.

Из области астрофизики рассмотрим некоторые модельные задачи, описанные в работе [4], при единичных значениях параметров моделей. Кроме того, для тестирования различного поведения численного алгоритма рассмотрим модель распределения плотности темной материи, основанную на модели *broken power law* (BPL) [31].

Одними из самых простых моделей для численного метода являются однородная сфера с плотностью и потенциалом вида

$$\rho_{\text{sphere}}(r) = \begin{cases} 1, & r \leq 1, \\ 0, & r > 1, \end{cases} \quad v_{\text{sphere}}(r) = \begin{cases} \frac{2\pi}{3}(3 - r^2), & r \leq 1, \\ \frac{4\pi}{3r}, & r > 1, \end{cases}$$

и модель Пламмера с плотностью и потенциалом вида

$$\rho_{\text{Plummer}}(r) = \frac{3}{(1 + r^2)^{5/2}}, \quad v_{\text{Plummer}}(r) = \frac{4\pi}{\sqrt{1 + r^2}}.$$

В случае с однородной сферой можно ожидать, что численный метод будет давать точное решение. В случае с моделью Пламмера все производные из оценки сходимости численного метода ограничены, и характер сходимости должен быть аналогичен характеру сходимости в случае с потенциалом Хартри.

На рис. 1–3 приведены графики погрешностей численного метода. Погрешности (*error*) соответствуют выражениям $\int_0^\infty (u(r) - u_h(r))^2 dr$, где $u(r)$ и $u_h(r)$ – точное и приближенное решения соответствующих задач.

На большинстве графиков используются две величины для оси абсцисс – количество степеней свободы (количество всех базисных функций, которые аппроксимируют решение) и количество ненулевых элементов в матрице, получающейся в результате выбора базиса. Для базисов одинакового размера матрица может заметно отличаться – от трехдиагональной матрицы в случае с методами низкого порядка аппроксимации до полной матрицы в случае со спектральными чебышевскими матрицами дифференцирования [27]. Количество операций для решения системы линейных алгебраических уравнений или умножения таких матриц на вектор значительно отличается. Часто лучшим будет вариант базиса, который при одинаковой погрешности решения имеет матрицу с меньшим количеством ненулевых элементов.

На рис. 1 приведены погрешности для потенциалов v_{Plummer} , v_{sphere} , v_{Hartree} .

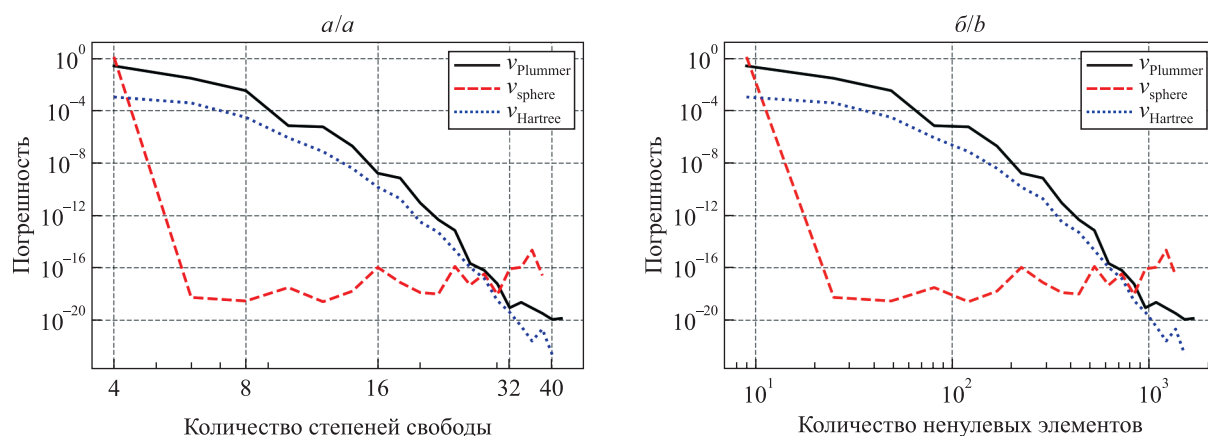


Рис. 1. Зависимость погрешности численного решения от количества степеней свободы (а), количества ненулевых элементов в матрице численного метода (б).

В легенде v_{Plummer} , v_{sphere} , v_{Hartree} соответствуют описанным в разделе потенциалам различных физических моделей

Fig. 1. Dependence of the error in the numerical solution on the number of degrees of freedom (а), amount of non-zero elements in the matrix of numerical method (б).

In the legend, v_{Plummer} , v_{sphere} , v_{Hartree} corresponds to the potentials of various physical models described in the section

В случае с однородной сферой при выборе разбиения, соответствующего задаче, приближенное решение совпадает с точным решением при $p > 2$. Также видно, как рост числа обусловленности матрицы (и, возможно, других вычислительных ошибок) вызывает увеличение погрешности.

В случае с моделью Пламмера и потенциалом Хартри область решения разбивалась на две части и увеличивалась степень аппроксимации. При этом точка разбиения выбиралась так, чтобы минимизировать погрешность. Из рис. 1 видно, что скорость сходимости возрастает по мере увеличения степени аппроксимации, что согласуется с оценками.

Вместо популярной модели NFW [32] была рассмотрена модель BPL [31], которая при параметрах $\alpha = 2$, $\beta = 3$ имеет плотность и потенциал вида

$$\rho_{\text{BPL}}(r) = \begin{cases} r^{-2}, & r \leq 1, \\ r^{-3}, & r > 1, \end{cases} \quad v_{\text{BPL}}(r) = \begin{cases} 4\pi(2 - \ln(r)), & r \leq 1, \\ 4\pi(2 + \ln(r))r^{-1}, & r > 1. \end{cases}$$

Поведение модели BPL на бесконечности аналогично поведению модели NFW, к которой добавляется неограниченность решения в нуле. Из оценки сходимости численного метода видно, что выражение $\|\delta^{s_1}(r^2 u)\|_{L^2(K_1)}$ не ограничено при $s_1 \geq 3$, что снижает эффективность аппроксимации высоких порядков в данной области.

Погрешности расчетов для модели BPL приведены на рис. 2 и 3.

Из рис. 2 видно, как выбор сетки и степеней аппроксимации каждого элемента может влиять на скорость сходимости метода. В качестве разбиения для случая с неоптимизированной фиксированной сеткой ($v_{\text{BPL}}^{\text{fixed } p}$) использовались узлы $0, 10^{-14}, 10^{-13}, \dots, 10^2, 10^3, \infty$. В случае с оптимизированными порядками аппроксимации ($v_{\text{BPL}}^{\text{optimised } p}$) степени фиксировались после достижения определенной точности на данном элементе.

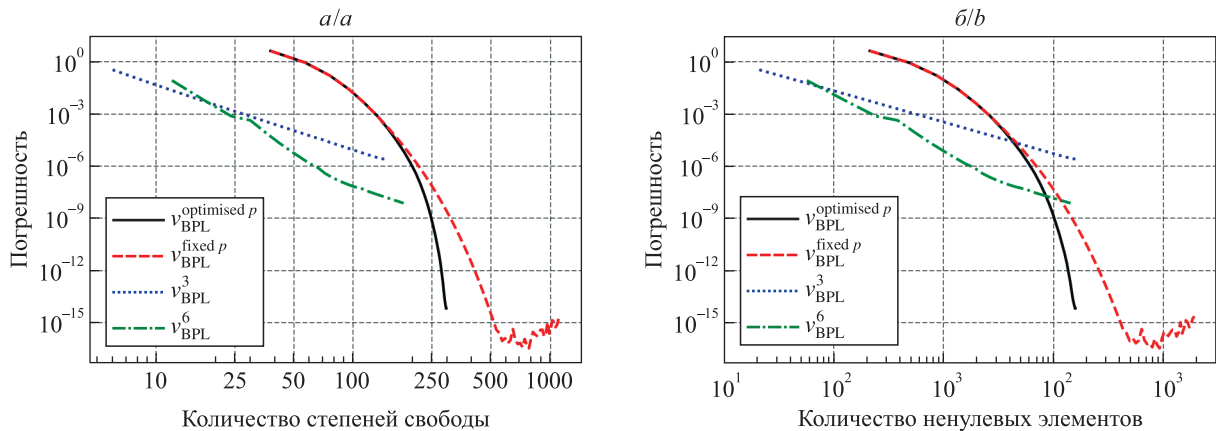


Рис. 2. Зависимость погрешности численного решения от количества степеней свободы (а), количества ненулевых элементов в матрице численного метода (б).

В легенде v_{BPL}^3 , v_{BPL}^6 соответствуют численным решениям при оптимальном разбиении области на 3, 6 частей, $v_{\text{BPL}}^{\text{optimised } p}$, $v_{\text{BPL}}^{\text{fixed } p}$ соответствуют численным решениям при фиксированном разбиении области на 19 частей (в случае с fixed p порядок аппроксимации на каждом элементе одинаковый, а в случае с optimised p порядки аппроксимации различные)

Fig. 2. Dependence of the error in the numerical solution on the number of degrees of freedom (a), amount of non-zero elements in the matrix of the numerical method (b).

In the legend, v_{BPL}^3 , v_{BPL}^6 correspond to the numerical solutions with an optimal partitioning of the domain into 3, 6 parts, $v_{\text{BPL}}^{\text{optimised } p}$, $v_{\text{BPL}}^{\text{fixed } p}$ correspond to the numerical solutions with a fixed partitioning of the domain into 19 parts (in the case of fixed p , the order of approximation on each element is the same, while in the case of optimised p , the orders of approximation are distinct)

На рис. 3 для вычисления влияния одиночного элемента на погрешность была взята сетка, на которой уже достигнута большая точность решения, после чего степень аппроксимации выбранного элемента уменьшалась.

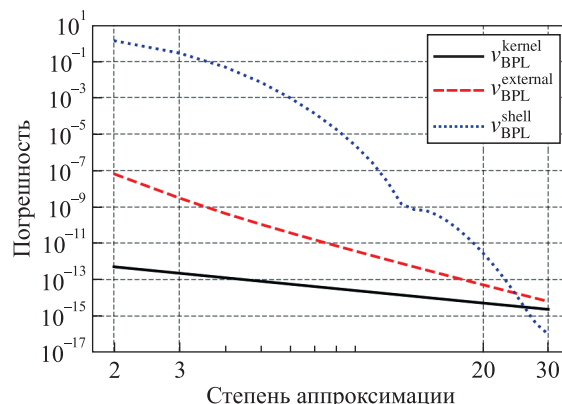


Рис. 3. Зависимость погрешности численного решения от степени аппроксимации соответствующего элемента. В легенде $v_{\text{BPL}}^{\text{kernel}}$ соответствует вкладу погрешности от элемента на интервале $(0, 10^{-12})$, $v_{\text{BPL}}^{\text{shell}}$ – вкладу погрешности от элемента на интервале $(1, 10)$, $v_{\text{BPL}}^{\text{external}}$ – вкладу погрешности от элемента на полубесконечном интервале $(10^2, \infty)$.

Разбиение области решения, кроме интервалов $v_{\text{BPL}}^{\text{kernel}}$ и $v_{\text{BPL}}^{\text{external}}$, совпадает с разбиением, использованным для $v_{\text{BPL}}^{\text{fixed } p}$.

Fig. 3. Dependence of the error in the numerical solution on the degree of approximation of the corresponding element. In the legend, $v_{\text{BPL}}^{\text{kernel}}$ corresponds to the contribution of the error from the element in the interval $(0, 10^{-12})$,

$v_{\text{BPL}}^{\text{shell}}$ corresponds to the contribution of the error from the element in the interval $(1, 10)$,

$v_{\text{BPL}}^{\text{external}}$ corresponds to the contribution of the error from the element in the semi-infinite interval $(10^2, \infty)$.

The solution domain partitioning, except for intervals $v_{\text{BPL}}^{\text{kernel}}$ and $v_{\text{BPL}}^{\text{external}}$, coincides with the partitioning used for $v_{\text{BPL}}^{\text{fixed } p}$.

В случае с $v_{\text{BPL}}^{\text{shell}}$ все производные ограничены и растут не слишком быстро, так что сходимость решения ускоряется при увеличении степени аппроксимации. В случае с $v_{\text{BPL}}^{\text{kernel}}$ экспериментальная скорость сходимости (p^{-2}) оказалась быстрее полученной из оценки (35) скорости сходимости (p^{-1}). В случае с $v_{\text{BPL}}^{\text{external}}$ экспериментальная скорость сходимости близка к p^{-6} , а теоретическая – к p^7 , это говорит о том, что полученная оценка достаточно грубая. Теоретическая оценка скорости сходимости дает отрицательные степени при p только при существовании норм с $s_n \geq 6$.

Заключение

В работе построен разрывный метод Галёркина для уравнения Пуассона в неограниченной области и проведен его анализ. Из тестовых расчетов видно, что в некоторых случаях экспериментальная сходимость заметно лучше теоретической. Скорее всего, это связано с ограничениями, наложенными на веса теоремой о полиномиальной аппроксимации. Представляется возможным улучшить оценку погрешности, применяя теорию, связанную с ортогональными полиномами Соболева [33], модифицируя теорию из работы [29] или используя полиномы Якоби с отрицательными параметрами [34].

Предполагается провести анализ численного метода для многомерного случая в сферических координатах с использованием теории аппроксимации на сферах [19].

Библиографические ссылки

1. Hartree DR. *The calculation of atomic structures*. New York: John Wiley & Sons; 1957. XIV, 181 p. (Goeppert Mayer M, editor. Structure of matter series). Co-published by the «Chapman & Hall».
2. Kohn W, Sham LJ. Self-consistent equations including exchange and correlation effects. *Physical Review*. 1965;140(4A): A1133–A1138. DOI: 10.1103/PhysRev.140.A1133.
3. Truelove JK, Klein RI, McKee CF, Holliman JH 2nd, Howell LH, Greenough JA, et al. Self-gravitational hydrodynamics with three-dimensional adaptive mesh refinement: methodology and applications to molecular cloud collapse and fragmentation. *The Astrophysical Journal*. 1998;495(2):821–852. DOI: 10.1086/305329.
4. Binney J, Tremaine S. *Galactic dynamics*. 2nd edition. Princeton: Princeton University Press; 2011. XVI, 885 p. (Spergel DN, editor. Princeton series in astrophysics).

5. Lu B, Zhou YC. Poisson – Nernst – Planck equations for simulating biomolecular diffusion-reaction processes II: size effects on ionic distributions and diffusion-reaction rates. *Biophysical Journal*. 2011;100(10):2475–2485.
6. Guo B. Some progress in spectral methods. *Science China Mathematics*. 2013;56(12):2411–2438. DOI: 10.1007/s11425-013-4660-7.
7. Shen J, Wang L-L. Some recent advances on spectral methods for unbounded domains. *Communications in Computational Physics*. 2009;5(2–4):195–241.
8. Canuto C, Hussaini MY, Quarteroni A, Zang TA. *Spectral methods: evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics*. Berlin: Springer; 2007. XXX, 596 p. (Chattot J-J, Colella P, E W, Glowinski R, Holt M, Hussaini Y, et al., editors. Scientific computation). DOI: 10.1007/978-3-540-30728-0.
9. Arnold DN, Brezzi F, Cockburn B, Marini LD. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM Journal of Numerical Analysis*. 2002;39(5):1749–1779. DOI: 10.1137/S0036142901384162.
10. do Carmo EGD, Duarte AVC. A discontinuous finite element-based domain decomposition method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2000;190(8–10):825–843. DOI: 10.1016/S0045-7825(00)00216-4.
11. Becker R, Hansbo P, Stenberg R. A finite element method for domain decomposition with non-matching grids. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 2003;37(2):209–225. DOI: 10.1051/m2an:2003023.
12. Radice D, Rezzolla L. Discontinuous Galerkin methods for general-relativistic hydrodynamics: formulation and application to spherically symmetric spacetimes. *Physical Review D*. 2011;84(2):024010. DOI: 10.1103/PhysRevD.84.024010.
13. Zhang W, Xing Y, Endeve E. Energy conserving and well-balanced discontinuous Galerkin methods for the Euler – Poisson equations in spherical symmetry. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2022;514(1):370–389. DOI: 10.1093/mnras/stac1257.
14. Grandclément P, Bonazzola S,ourgoulhon E, Marck J-A. A multidomain spectral method for scalar and vectorial Poisson equations with noncompact sources. *Journal of Computational Physics*. 2001;170(1):231–260. DOI: 10.1006/jcph.2001.6734.
15. Becke AD, Dickson RM. Numerical solution of Poisson’s equation in polyatomic molecules. *The Journal of Chemical Physics*. 1988;89(5):2993–2997. DOI: 10.1063/1.455005.
16. Müller B, Chan C. An FFT-based solution method for the Poisson equation on 3D spherical polar grids. *The Astrophysical Journal*. 2019;870(1):43. DOI: 10.3847/1538-4357/aaf100.
17. Müller E, Steinmetz M. Simulating self-gravitating hydrodynamic flows. *Computer Physics Communications*. 1995;89(1–3):45–58. DOI: 10.1016/0010-4655(94)00185-5.
18. Weatherford C, Red E, Hoggan P. Solution of Poisson’s equation using spectral forms. *Molecular Physics*. 2005;103(15–16):2169–2172. DOI: 10.1080/00268970500137261.
19. Dai F, Xu Y. *Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls*. New York: Springer; 2013. XVIII, 440 p. (Springer monographs in mathematics).
20. Mueller B, Janka H-T, Dimmelmeier H. A new multi-dimensional general relativistic neutrino hydrodynamics code for core-collapse supernovae. I. Method and code tests in spherical symmetry. arXiv:1001.4841 [Preprint]. 2010 [cited 2023 July 17]: [37 p.]. Available from: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1001.4841>.
21. Dolejší V, Feistauer M. *Discontinuous Galerkin method: analysis and applications to compressible flow*. Cham: Springer; 2015. XIV, 572 p. (Springer series in computational mathematics; volume 48). DOI: 10.1007/978-3-319-19267-3.
22. Antonietti PF, Buffa A, Perugia I. Discontinuous Galerkin approximation of the Laplace eigenproblem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2006;195(25–28):3483–3503. DOI: 10.1016/j.cma.2005.06.023.
23. Guo B-Y, Zhang X-Y. A new generalized Laguerre spectral approximation and its applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2005;181(2):342–363. DOI: 10.1016/j.cam.2004.12.008.
24. Evans LC. *Partial differential equations*. 2nd edition. Providence: American Mathematical Society; 2010. XXI, 749 p. (Graduate studies in mathematics; volume 19).
25. Leoni G. *A first course in Sobolev spaces*. Providence: American Mathematical Society; 2009. XVI, 607 p. (Graduate studies in mathematics; volume 105).
26. Hardy GH, Littlewood JE, Pólya G. *Inequalities*. 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press; 1952. XII, 324 p. (Cambridge mathematical library).
27. Boyd JP. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. 2nd edition. Mineola: Dover Publications; 2001. XVI, 668 p.
28. Draux A, Moalla B, Sadik M. Generalized qd algorithm and Markov – Bernstein inequalities for Jacobi weight. *Numerical Algorithms*. 2009;51(4):429–447. DOI: 10.1007/s11075-008-9241-4.
29. Xu Y. Approximation by polynomials in Sobolev spaces with Jacobi weight. *Journal of Fourier Analysis and Applications*. 2018;24(6):1438–1459. DOI: 10.1007/s00041-017-9581-3.
30. Thijssen JM. *Computational physics*. 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press; 2007. XVI, 620 p.
31. Baes M, Camps P. The dynamical structure of broken power-law and double power-law models for dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2021;503(2):2955–2965. DOI: 10.1093/mnras/stab634.
32. Navarro JF, Frenk CS, White SDM. The structure of cold dark matter halos. *The Astrophysical Journal*. 1996;462(2):563–575. DOI: 10.1086/177173.
33. Marcellán F, Xu Y. On Sobolev orthogonal polynomials. *Expositiones Mathematicae*. 2015;33(3):308–352. DOI: 10.1016/j.exmath.2014.10.002.
34. Guo B-Y, Shen J, Wang L-L. Generalized Jacobi polynomials/functions and their applications. *Applied Numerical Mathematics*. 2009;59(5):1011–1028. DOI: 10.1016/j.apnum.2008.04.003.