

УДК 515.12

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОЙ ТОПОЛОГИИ ОЧАНОВСКОГО ТИПА

А. С. БЕДРИЦКИЙ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Исследуется связь одной топологии очановского типа с другими топологиями гиперпространства, в частности с локально конечной топологией, топологией Фелла и топологией, порожденной метрикой Хаусдорфа. Во второй части статьи решается задача непрерывного продолжения исходного отображения $X \xrightarrow{f} Y$ на гиперпространства, снабженные указанной выше очановской топологией. Доказано, что замкнутые отображения и только они допускают такое продолжение.

Ключевые слова: топология очановского типа; локально конечная топология; топология Фелла; метрика Хаусдорфа; замкнутое отображение.

ON SOME PROPERTIES OF ONE OČAN TYPE TOPOLOGY

A. S. BIADRYTSKI^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Abstract. The relation between one Očan type topology and other hyperspace topologies, such as locally-finite topology, Fell topology, Hausdorff metric topology are studied. In the second part of the article we solve the problem of continuous extension of a map $X \xrightarrow{f} Y$ on hyperspaces endowed with the Očan topology mentioned above. As a result, it's proved that closed maps and only them have such extension.

Keywords: Očan type topology; locally finite topology; Fell topology; Hausdorff metric topology; closed map.

Образец цитирования:

Бедрицкий АС. О некоторых свойствах одной топологии очановского типа. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;3:31–39. EDN: EATFLI

For citation:

Biadrytski AS. On some properties of one Očan type topology. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;3:31–39. Russian. EDN: EATFLI

Автор:

Александр Сергеевич Бедрицкий – аспирант кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент В. Л. Тимохович.

Author:

Aliaksandr S. Biadrytski, postgraduate student at the department of geometry, topology and mathematics teaching methodology, faculty of mechanics and mathematics.
bedrickias@bsu.by

Введение

Классическими и наиболее распространенными методами топологизации экспоненты $\exp X$ топологического пространства X являются задание на ней топологии Вьеториса [1; 2; 3, с. 192] и задание метрики Хаусдорфа [2; 3, с. 441] в случае метризуемости пространства X . В процессе развития теории экспоненциальных пространств возникли и другие топологии, схожие по процедуре своего задания с топологией Вьеториса (их можно назвать топологиями вьеторисовского типа), такие как топология Фелла [4], локально конечная топология [5], а также топологии «hit and miss» [6; 7], являющиеся обобщением топологий Вьеториса и Фелла.

Несколько иной подход к введению топологии на экспоненте был предложен Ю. С. Очаном в работах [8; 9] (такие топологии впоследствии названы очановскими). Топологии очановского типа и их приложения далее рассматривали Р. П. Кашуба [10], В. В. Попов [11; 12], Л. Я. Энгельсон [13] и Г. Пранинскас [14]. Отметим также, что топологией очановского типа является топология Пиксли – Роя [15, р. 51; 16], используемая при изучении экспоненты конечных множеств.

В настоящей работе исследуется одна из топологий очановского типа, определенная в [17] и обозначенная здесь через τ_O . В первой части статьи выясняется связь этой топологии с другими топологиями на экспоненте, в частности с топологией Фелла и локально конечной топологией, а во второй части статьи решается задача непрерывного продолжения отображения $X \xrightarrow{f} Y$ до отображения $\exp X \xrightarrow{g} \exp Y$, где $\exp X$ и $\exp Y$ снабжены указанной выше топологией τ_O , что «сближает» статью с публикациями [18; 19], в которых эта задача рассматривалась для экспоненты с топологией Вьеториса.

Отметим, что указанная задача относится к достаточно обширной области исследования функториальных свойств топологических конструкций. Кроме экспоненты с той или иной топологией (как в упомянутых выше работах [18; 19]) и компактных расширений (классические примеры – стоун-чеховская βX [3, с. 267] и волмэновская ωX [3, с. 272; 20] компактификации пространства X), такими конструкциями могут быть и расширения более общей природы (Ω -насыщения $s_\beta X$ [21; 22]), функциональные пространства вида $C(X, Y)$ (исходные объекты – упорядоченные пары (X, Y) топологических пространств [23–25]) и др.

Опишем основные понятия и обозначения, встречающиеся в тексте. Предполагаем, что далее все топологические пространства удовлетворяют аксиоме отделимости T_1 . Для $A \subset X$ через $[A]_X$ и $|A|$ будем обозначать замыкание множества A в пространстве X и мощность множества A соответственно. Под экспонентой (или гиперпространством) $\exp X$ топологического пространства X понимаем множество всех непустых замкнутых подмножеств пространства X . Введем следующие обозначения: $U^+ = \{F \in \exp X \mid F \subset U\}$, $U^- = \{F \in \exp X \mid F \cap U \neq \emptyset\}$, где $U \subset X$; $O(A, B) = \{F \in \exp X \mid A \subset F \subset B\}$, где $A, B \subset X$; $\hat{X} = \{\{x\} \in \exp X \mid x \in X\}$. Напомним, что предбазу топологии Вьеториса τ_V на $\exp X$ образуют множества вида U^+ и U^- , где U – открытое в X множество, а база τ_V состоит из множеств вида

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \left\{ F \in \exp X \mid F \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ и } F \cap U_i \neq \emptyset \text{ для всех } i, 1 \leq i \leq n \right\}, \text{ где } U_i \text{ – открытые в } X \text{ множе-}$$

ства. Предбаза топологии Фелла τ_F образована множествами $(X \setminus K)^+$ и U^- , где K – замкнутое компактное множество, а U – открытое в X множество. Базу τ_F составляют множества вида $\langle U_1, \dots, U_n \rangle =$

$$\left\{ F \in \exp X \mid F \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ и } F \cap U_i \neq \emptyset \text{ для всех } i, 1 \leq i \leq n \right\}, \text{ где } U_i \text{ – открытые в } X \text{ множества, а допол-}$$

нение до множества $\bigcup_{i=1}^n U_i$ компактно. Топология τ_O [17] порождена базой, состоящей из множеств

вида $O(A, U)$, где A – либо пустое, либо конечное множество в X , состоящее не менее чем из двух точек, а U – открытое в X множество. Экспоненту с топологией τ_O далее будем обозначать через $\exp_O X$.

База, образованная множествами вида $\langle A \rangle = \left\{ F \in \exp X \mid F \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \text{ и } F \cap U_\alpha \neq \emptyset \text{ для всех } \alpha \in \Lambda \right\}$, где

$\mathcal{A} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ – локально конечное семейство открытых в X множеств, порождает на экспоненте локально конечную топологию τ_{LF} [5].

Для метризуемого топологического пространства X обозначим через Ω_X множество всех допустимых (т. е. согласованных с топологией) метрик на X . Для метрики $\rho \in \Omega_X$ примем следующие обозначения:

$B_\rho(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$ – ε -окрестность точки $x \in X$ (или открытый шар); $B_\rho(A, \varepsilon) = \bigcup_{x \in A} B_\rho(x, \varepsilon)$ – ε -раздутье множества $A \subset X$ относительно метрики ρ ; $\hat{\rho}$ – соответствующая метрика Хаусдорфа на $\exp X$ ($\hat{\rho}(F, P) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid B_\rho(F, \varepsilon) \supset P, B_\rho(P, \varepsilon) \supset F\} = \max\left\{\sup_{x \in F} \rho(x, P); \sup_{y \in P} \rho(y, F)\right\}$); $\tau_{\hat{\rho}}$ – топология на $\exp X$, заданная метрикой $\hat{\rho}$ (здесь допускаем $\hat{\rho}(F, P) = \infty$ для некоторых $F, P \in \exp X$, что не влияет на определение топологии $\tau_{\hat{\rho}}$).

Для множества $\mathcal{M} = \{\tau_\rho \mid \rho \in \Omega_X\}$ в полной решетке $\mathcal{T}$ всех топологий на $\exp X$ определены инфимум $\tau_{\inf}$ и супремум $\tau_{\sup}$ ($\tau_{\inf} = \bigcap \{\tau_\rho \mid \rho \in \Omega_X\}$), а топология $\tau_{\sup}$ задана предбазой $\bigcup \{\tau_\rho \mid \rho \in \Omega_X\}$. Как оказалось, $\tau_{\sup} = \tau_{LF}$ [5]. Для инфимальной топологии $\tau_{\inf}$ справедливо соотношение $\tau_F \leq \tau_{\inf}$ (т. е. $\tau_F \subset \tau_{\inf}$), каждое из соотношений $\tau_{\inf} = \tau_F$, $\tau_V \leq \tau_{\inf}$, $\tau_{\inf} = \tau_V$ и $\tau_{\inf} = \tau_{LF}$ равносильно компактности пространства X , а соотношение $\tau_{\inf} \leq \tau_V$ равносильно наличию в X счетной базы [26; 27].

Соотношение топологии τ_O с другими экспоненциальными топологиями

Приведем некоторые свойства топологии τ_O , установленные в [17]. Отметим сначала, что отображение $X \ni x \rightarrow \{x\} \in \hat{X}$ является гомеоморфизмом пространства X и подпространства $\hat{X} \subset \exp_O X$ (экспоненциальные топологии с указанным свойством называют допустимыми [2]). Заметим, что не всякая топология очановского типа обладает этим свойством: например, очановские топологии, рассмотренные в работах [11–14], индуцируют на $\hat{X}$, как правило, дискретную топологию.

Определим далее в $\exp_O X$ подпространства $\exp_n X = \{F \in \exp_O X \mid |F| \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\exp_\infty X = \bigcup_{n=1}^\infty \exp_n X$, $\exp_\omega X = \{F \in \exp_O X \mid |F| \leq \aleph_0\}$ и сформулируем утверждение, описывающее структуру пространства $\exp_O X$.

Предложение 1 [17]. *Подпространство $\exp_n X$ при любом $n \in \mathbb{N}$ замкнуто в $\exp_O X$, подпространство $\exp_\infty X$ всюду плотно в $\exp_O X$, и при любом $n \in \mathbb{N}$ любая точка $F \in \exp_{n+1} X \setminus \exp_n X$ изолирована в $\exp_{n+1} X$.*

Кроме того, имеет место следующее предложение.

Предложение 2 [17]. *Если F – замкнутое подмножество множества X , то $\exp_O F$ – замкнутое подпространство в $\exp_O X$.*

Приведем далее утверждение об отделимости пространства $\exp_O X$.

Предложение 3 [17]. *Пространство $\exp_O X$ есть T_1 -пространство. Пространство $\exp_O X$ хаусдорфово (регулярно, вполне регулярно) тогда и только тогда, когда пространство X хаусдорфово (соответственно, регулярно, вполне регулярно).*

При хаусдорфовости пространства X случай компактности $\exp_O X$ описывает следующее предложение.

Предложение 4 [17]. *Для хаусдорфова пространства X эквивалентны условия:*

- 1) $\exp_O X$ компактно;
- 2) $\exp_O X$ счетно компактно;
- 3) X конечно.

Характером множества A в X называют минимальную мощность окрестностной базы множества A (т. е. семейства α окрестностей множества A такого, что для любой окрестности U множества A найдется множество $V \in \alpha$, содержащееся в U).

Предложение 5 [17]. *Пусть пространство X регулярно. Пространство $\exp_O X$ удовлетворяет первой аксиоме счетности тогда и только тогда, когда X не более чем счетно, а множество D всех предельных точек пространства X компактно и имеет не более чем счетный характер в X .*

Предложение 6 [17]. *Пространство $\exp_O X$ метризуемо тогда и только тогда, когда X – не более чем счетный метризуемый компакт.*

Следующая теорема сформулирована в [17] без доказательства, однако ввиду ее важности для дальнейшего изложения считаем уместным привести ниже ее полное доказательство.

Теорема 1 [17]. *Справедливо соотношение $\tau_V \leq \tau_O$. При этом топологии τ_V и τ_O совпадают тогда и только тогда, когда пространство X дискретно.*

Доказательство. Множества вида $U^+ \in \tau_V$, где U открыто в X , очевидным образом принадлежат топологии τ_O , поскольку $U^+ = O(\emptyset, U) \in \tau_O$. Рассмотрим теперь элемент предбазы топологии τ_V вида V^-

и произвольное множество $F \in V^-$. Если $F = \{x\}$, то $F \in O(\emptyset, V) \subset V^-$. Если $|F| \geq 2$, то возьмем, например, множество $O(\{x, y\}, X)$, где $x \in F \cap V$, а $y \in F \setminus \{x\}$. В таком случае $F \in O(\{x, y\}, X) \subset V^-$. Тем самым получаем, что $V^- \in \tau_0$. Так как все элементы предбазы топологии τ_V принадлежат топологии τ_0 , то $\tau_V \leq \tau_0$.

Пусть теперь $\tau_V = \tau_0$ и, в частности, $\tau_0 \leq \tau_V$. Выберем произвольным образом две различные точки $x, y \in X$ (случай одноточечного пространства X тривиален) и образуем множество $O(\{x, y\}, X)$. Исходя из условия, оно принадлежит топологии Вьеториса, значит, для множества $\{x, y\} \in O(\{x, y\}, X)$ найдется элемент базы топологии τ_V вида $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ такой, что $\{x, y\} \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \subset O(\{x, y\}, X)$. Пусть V – пересечение множеств из семейства $\{U_1, \dots, U_n\}$, содержащих точку x , а W – пересечение множеств из семейства $\{U_1, \dots, U_n\}$, содержащих точку y . Тогда будет справедливым включение $\langle V \setminus \{y\}, W \setminus \{x\} \rangle \subset \langle U_1, \dots, U_n \rangle$. Предположим, что хотя бы одно из множеств $V \setminus \{y\}, W \setminus \{x\}$ содержит более одной точки. Пусть, например, $z \in V \setminus \{y\}$ и $z \neq x$. В таком случае множество $\{z, y\}$ лежит в $\langle V \setminus \{y\}, W \setminus \{x\} \rangle$, а вместе с тем и в $O(\{x, y\}, X)$. Следовательно, $\{x, y\} \subset \{z, y\}$, откуда вытекает равенство $z = x$. Получили противоречие. Значит, открытые множества $V \setminus \{y\}, W \setminus \{x\}$ одноточечны, а из произвольности выбора точек x и y вытекает, что пространство X дискретно.

Докажем обратное утверждение. Пусть пространство X дискретно. Достаточно показать, что $\tau_0 \leq \tau_V$. Рассмотрим произвольный элемент базы топологии τ_0 вида $O(A, U)$. Если $A = \emptyset$, то $O(\emptyset, U) = U^+ \in \tau_V$. Если $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ($a_i \neq a_j$ при $i \neq j, n \geq 2$), то искомое соотношение получим, представив множество $O(A, U)$ в виде $O(A, U) = \{a_1\}^- \cap \dots \cap \{a_n\}^- \cap U^+$, где $\{a_i\}^- \in \tau_V$ для любого $i, 1 \leq i \leq n$, ввиду дискретности пространства X . Теорема доказана.

Следствие 1. *Справедливо соотношение $\tau_F \leq \tau_0$. При этом топологии τ_F и τ_0 совпадают тогда и только тогда, когда пространство X конечно.*

Доказательство. Доказательство первой части утверждения очевидным образом вытекает из теоремы 1 и соотношения $\tau_F \leq \tau_V$.

Пусть теперь $\tau_F = \tau_0$. Из этого равенства и соотношений $\tau_F \leq \tau_V$ и $\tau_V \leq \tau_0$ (см. теорему 1) следует совпадение топологий $\tau_F = \tau_0 = \tau_V$. Согласно теореме 1 равенство $\tau_0 = \tau_V$ влечет дискретность пространства X . Поскольку соотношение $\tau_F = \tau_V$ равносильно компактности пространства X (см., например, [28, р. 144]), то получаем, что пространство X является конечным.

Докажем обратное утверждение. Пусть пространство X конечно. Следовательно, $\tau_F = \tau_V$. Поскольку X также является дискретным пространством, то из теоремы 1 получаем совпадение топологий $\tau_V = \tau_0$. Следствие доказано.

Теорема 2. *Соотношение $\tau_0 \leq \tau_{LF}$ имеет место тогда и только тогда, когда пространство X дискретно.*

Доказательство. Пусть X дискретно. Тогда в силу теоремы 1 $\tau_V = \tau_0$. Далее получаем требуемое из известного соотношения $\tau_V \leq \tau_{LF}$.

Пусть теперь $\tau_0 \leq \tau_{LF}$. Выберем произвольным образом две различные точки $x, y \in X$ и образуем множество $O(\{x, y\}, X) \in \tau_0$. Исходя из условия, для множества $\{x, y\}$ найдется окрестность из базы топологии τ_{LF} вида $\langle \mathcal{A} \rangle$ такая, что $\{x, y\} \in \langle \mathcal{A} \rangle \subset O(\{x, y\}, X)$, где $\mathcal{A}$ – локально конечное семейство открытых в X множеств. Нетрудно показать, что в таком случае семейство $\mathcal{A}$ будет конечным, т. е. $\mathcal{A} = \{U_1, \dots, U_n\}$, и, следовательно, $\langle \mathcal{A} \rangle = \langle U_1, \dots, U_n \rangle \in \tau_V$. Далее рассуждения те же, что и при доказательстве второй части теоремы 1 (случай $\tau_0 \leq \tau_V$). Теорема доказана.

Теорема 3. *Соотношение $\tau_{LF} \leq \tau_0$ имеет место тогда и только тогда, когда в пространстве X любое локально конечное семейство открытых множеств конечно.*

Доказательство. Если в X любое локально конечное семейство открытых множеств конечно, то $\tau_{LF} = \tau_V$ [5]. Далее получим искомое соотношение $\tau_{LF} \leq \tau_0$, применив теорему 1.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\tau_{LF} \leq \tau_0$. Предположим, что в X существует бесконечное локально конечное семейство открытых множеств $\mathcal{A}$. В таком случае можем образовать замкнутое множество P , выбрав в каждом множестве из $\mathcal{A}$ по одной точке. Ясно, что $P \in \langle \mathcal{A} \rangle$. Исходя из условия, можно подобрать конечное множество $A \subset P$, содержащее по крайней мере две точки, и открытое в X множество U таким образом, что $P \in O(A, U) \subset \langle \mathcal{A} \rangle$. Это значит, что $A \in \langle \mathcal{A} \rangle$. Но тогда вопреки предположению получим, что семейство $\mathcal{A}$ конечно. Теорема доказана.

Из теорем 2 и 3 вытекает следствие 2.

Следствие 2. Топологии τ_{LF} и τ_O совпадают тогда и только тогда, когда пространство X конечно.

Пусть далее пространство X метризуемо, $\rho \in \Omega_X$ (т. е. ρ – некоторая допустимая метрика на X) и $\hat{\rho}$ – соответствующая метрика Хаусдорфа на $\text{exp } X$.

Теорема 4. Соотношение $\tau_{\hat{\rho}} \leq \tau_O$ имеет место тогда и только тогда, когда метрическое пространство (X, ρ) вполне ограничено.

Доказательство. Пусть $\tau_{\hat{\rho}} \leq \tau_O$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим открытый шар $B_{\hat{\rho}}(X, \varepsilon)$ в метрическом пространстве $(\text{exp } X, \hat{\rho})$. Исходя из условия, это множество принадлежит τ_O . Тогда для множества X (как элемента экспоненты) найдется окрестность вида $O(A, U)$ такая, что $X \in O(A, U) \subset B_{\hat{\rho}}(X, \varepsilon)$ (при этом U , очевидно, совпадает с X). Для конечного множества $A \subset X$ существуют две возможности: $A = \emptyset$ и $|A| \geq 2$. Рассмотрим первый случай. Тогда $O(\emptyset, X) = \text{exp } X$, и, значит, $B_{\hat{\rho}}(X, \varepsilon) = \text{exp } X$. Выберем некоторую точку $x_0 \in X$. Тогда $\hat{\rho}(\{x_0\}, X) = \sup_{x \in X} \rho(x, x_0) < \varepsilon$, и, следовательно, $\rho(x, x_0) < \varepsilon$ для любого $x \in X$. Значит, множество $\{x_0\}$ – конечная ε -сеть для пространства X . Перейдем ко второму случаю, когда $|A| \geq 2$. Из включения $O(A, X) \subset B_{\hat{\rho}}(X, \varepsilon)$ следует, что $\hat{\rho}(A, X) = \sup_{x \in X} \rho(x, A) < \varepsilon$, откуда $\rho(x, A) < \varepsilon$ для любого $x \in X$. Таким образом, множество $A \subset X$ является конечной ε -сетью для пространства X , что и требовалось доказать.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть X вполне ограничено. Рассмотрим произвольное замкнутое множество $F \in \text{exp } X$ и его окрестность (в экспоненте) $B_{\hat{\rho}}(F, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Возможны два случая: $F = \{a\}$ (т. е. множество F одноточечное) и $|F| \geq 2$. В первом случае положим, что $U = B_{\rho}(a, \varepsilon)$, и рассмотрим множество $O(\emptyset, U)$. Очевидно, что $F \in O(\emptyset, U)$, а для любого $P \in O(\emptyset, U)$ выполняются включения $P \subset B_{\rho}(F, \varepsilon)$ и $F \subset B_{\rho}(P, \varepsilon)$, откуда $\hat{\rho}(F, P) < \varepsilon$, и, следовательно, $P \in B_{\hat{\rho}}(F, \varepsilon)$. Соотношения $F \in O(\emptyset, U) \subset B_{\hat{\rho}}(F, \varepsilon)$ доказаны. Во втором случае воспользуемся тем, что любое множество в X тоже вполне ограничено (см., например, [3, с. 396]), и выберем конечное множество $A \subset F$ так, чтобы $F \subset \bigcup_{a \in A} B_{\rho}(a, \varepsilon)$. При этом можем считать, что A неодноточечно, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $n \geq 2$. Рассмотрим множество $O(A, U)$, где $U = \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \varepsilon)$. Ясно, что $F \in O(A, U)$, а для любого $P \in O(A, U)$ выполняются соотношения $P \subset B_{\rho}(A, \varepsilon) \subset B_{\rho}(F, \varepsilon)$ и $F \subset B_{\rho}(A, \varepsilon) \subset B_{\rho}(P, \varepsilon)$, откуда $\hat{\rho}(F, P) < \varepsilon$, и, следовательно, $P \in B_{\hat{\rho}}(F, \varepsilon)$. Получаем включения $F \in O(A, U) \subset B_{\hat{\rho}}(F, \varepsilon)$. Итак, в обоих случаях имеем соотношение $\tau_{\hat{\rho}} \leq \tau_O$. Теорема доказана.

Теорема 5. Соотношение $\tau_O \leq \tau_{\hat{\rho}}$ имеет место тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\rho(x, y) \geq \varepsilon$ для любых различных точек $x, y \in X$ (метрику с таким свойством можно назвать равномерно дискретной).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\tau_O \leq \tau_{\hat{\rho}}$. Предположим, что в X существует предельная точка ξ , тогда найдется последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ такая, что $x_n \neq x_k$ при $n \neq k$, $x_n \neq \xi$ и $\rho(x_n, \xi) < \frac{1}{n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Образует множества $A = \{\xi\} \cup \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ и $A_n = \{x_k | k \leq n\}$. В таком случае $\hat{\rho}(A_n, A) < \frac{2}{n}$, поскольку $B_{\rho}\left(A_n, \frac{2}{n}\right) \supset A$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т. е. A_n сходится к A относительно топологии $\tau_{\hat{\rho}}$, а значит, и относительно топологии τ_O . Но для окрестности $O(\{\xi, x_1\}, X) \in \tau_O$ множества A (как элемента $\text{exp } X$) имеет место соотношение $A_n \notin O(\{\xi, x_1\}, X)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Получили противоречие. Таким образом, пространство X дискретно.

Предположим теперь, что в X существуют последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ такие, что $x_n \neq y_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\rho(x_n, y_n) \rightarrow 0$. Можем считать, что $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что ни одна из последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ не содержит стационарной подпоследовательности. Действительно, допустим, что $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ – стационарная подпоследовательность и $x_{n_i} = z$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Тогда $y_{n_i} \rightarrow z$ и $y_{n_i} \neq z$ при любом $i \in \mathbb{N}$, что противоречит дискретности пространства X . В таком случае можно выбрать последовательность номеров $n_1 < n_2 < \dots$ так, чтобы $\{x_{n_i} | i \in \mathbb{N}\} \cap \{y_{n_i} | i \in \mathbb{N}\} = \emptyset$. Опишем процедуру выбора таких подпоследовательностей. В качестве x_{n_1} и y_{n_1} возьмем x_1 и y_1 . Пусть номера $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ выбраны таким образом, что $x_{n_i} \neq y_{n_j}$ при $i \neq j$. Поскольку последовательности $(x_n)_{n=1}^\infty$ и $(y_n)_{n=1}^\infty$ не имеют стационарных подпоследовательностей, то можно выбрать номер $m > n_k$ такой, что множества $\{x_{n_i} | 1 \leq i \leq k\} \cup \{y_{n_i} | 1 \leq i \leq k\}$ и $\{x_p | p \geq m\} \cup \{y_p | p \geq m\}$ дизъюнкты. Тогда полагаем, что $n_{k+1} = m$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $x_n \neq x_k$ при $n \neq k$, $y_n \neq y_k$ при $n \neq k$ и $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cap \{y_n | n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$.

Далее пусть $D = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$, $D_n = D \cup \{y_k | k \geq n\}$. Тогда из неравенства $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ вытекает оценка $\hat{\rho}(D, D_n) = \sup_{k \geq n} \rho(y_k, D) \leq \frac{1}{n}$, а с ней вытекает и сходимость D_n к D относительно топологии $\tau_{\hat{\rho}}$ и (как следствие соотношения $\tau_0 \leq \tau_{\hat{\rho}}$) относительно топологии τ_0 . Но для окрестности $O(\emptyset, D) \in \tau_0$ множества D имеем $D_n \notin O(\emptyset, D)$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Получили противоречие. Необходимость доказана.

Достаточность. Исходя из условия, выберем такое $\varepsilon > 0$, что $\rho(x, y) \geq \varepsilon$ для любых различных точек $x, y \in X$, и для произвольного множества $F \in \exp X$ рассмотрим окрестность $B_{\hat{\rho}}(F, \varepsilon)$. Пусть $P \in B_{\hat{\rho}}(F, \varepsilon)$, т. е. $\hat{\rho}(F, P) < \varepsilon$. Тогда имеем: 1) $\rho(x, P) < \varepsilon$ для любого $x \in F$; 2) $\rho(y, F) < \varepsilon$ для любого $y \in P$. Ввиду выбора $\varepsilon > 0$ из 1) получаем, что $F \subset P$, а из 2) следует включение $P \subset F$. Таким образом, $B_{\hat{\rho}}(F, \varepsilon) = \{F\}$, откуда вытекает дискретность пространства $(\exp X, \hat{\rho})$, что в свою очередь влечет искомое соотношение $\tau_0 \leq \tau_{\hat{\rho}}$. Теорема доказана.

Следствие 3. Топологии τ_0 и $\tau_{\hat{\rho}}$ совпадают в том и только в том случае, когда пространство X конечно.

Исследуем далее взаимосвязь топологий τ_0 и $\tau_{\inf}$. Приведем некоторые свойства $\tau_{\inf}$, которые понадобятся в последующем изложении.

Напомним, что пространство X называется секвенциальным, если для любого не замкнутого в X множества A найдутся точка $x \in X \setminus A$ и последовательность $(a_n)_{n=1}^\infty \subset A$, сходящаяся к x .

Будем писать $F_n \xrightarrow[\tau_{\inf}]{\hat{\rho}} F$ ($F_n \xrightarrow[\hat{\rho}]{\tau_{\inf}} F$), если последовательность $(F_n)_{n=1}^\infty \subset \exp X$ сходится к F относительно топологии $\tau_{\inf}$ (метрики Хаусдорфа $\hat{\rho}$ соответственно).

Предложение 7 [27]. Пространство $\exp X$ с топологией $\tau_{\inf}$ секвенциально.

Следующее предложение описывает связь между сходимостью в $\tau_{\inf}$ и сходимостью по метрике Хаусдорфа.

Предложение 8 [27]. Если $(F_n)_{n=1}^\infty \subset \exp X$, $F \in \exp X$ и $F_n \xrightarrow[\tau_{\inf}]{\hat{\rho}} F$, то найдутся метрика $\rho \in \Omega_X$ и подпоследовательность $(F_{n_i})_{i=1}^\infty$, для которых $F_{n_i} \xrightarrow[\hat{\rho}]{\rho} F$.

Следующие предложения описывают связь топологии $\tau_{\inf}$ с топологиями Вьеториса τ_V и Фелла τ_F .

Предложение 9 [27]. Справедливо соотношение $\tau_F \leq \tau_{\inf}$.

Предложение 10 [27]. Для метризуемого пространства X равносильны условия:

- 1) $\tau_{\inf} = \tau_V$;
- 2) $\tau_V \leq \tau_{\inf}$;
- 3) X компактно;
- 4) $\tau_{\inf} = \tau_F$.

Теорема 6. Соотношение $\tau_{\inf} \leq \tau_0$ имеет место тогда и только тогда, когда пространство X обладает счетной базой.

Доказательство. Пусть X обладает счетной базой. В таком случае X допускает вполне ограниченную метрику ρ (см., например, [3, с. 398]). Тогда из теоремы 4 получаем соотношение $\tau_{\hat{\rho}} \leq \tau_0$, откуда в свою очередь вытекает $\tau_{\inf} \leq \tau_0$.

Идея доказательства обратного утверждения та же, что и в [27, теорема 9]. Предположим, что в X нет счетной базы. Тогда, поскольку X имеет σ -дискретную базу (см., например, [3, с. 418]), в X можно выбрать вполне упорядоченное замкнутое дискретное (как подпространство) множество $A = \{a_\lambda | \lambda < \omega_1\}$ ($a_\alpha \neq a_\beta$ при $\alpha \neq \beta$), где ω_1 – первый несчетный ординал. Пусть $A_\lambda = \{a_\alpha | \alpha < \lambda\}$, $\mathcal{H} = \{A_\lambda | \lambda < \omega_1\}$. Ясно,

что $A \notin \mathcal{H}$, но при этом $A \in [\mathcal{H}]_0$ (замыкание множества $\mathcal{H}$ в τ_0), а так как $\tau_{\inf} \leq \tau_0$, то $A \in [\mathcal{H}]_{\inf}$ (замыкание множества $\mathcal{H}$ в $\tau_{\inf}$). Ввиду предложений 7 и 8 найдутся множество $B \in \exp X \setminus \mathcal{H}$, последовательность $(A_{\lambda_n})_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ и метрика $\rho \in \Omega_X$ такие, что $A_{\lambda_n} \xrightarrow{\hat{\rho}} B$.

Исследуем далее взаимное расположение множеств A и B . Предположим сначала, что множество $B \setminus A$ не пусто. В таком случае фиксируем некоторую точку $b_0 \in B \setminus A$. Обозначим $\varepsilon_0 = \rho(b_0, A)$. Ясно, что $\varepsilon_0 > 0$. Тогда для любого множества A_{λ_n} справедлива оценка $\sup_{b \in B} \rho(b, A_{\lambda_n}) \geq \rho(b_0, A_{\lambda_n}) \geq \rho(b_0, A) = \varepsilon_0$, откуда $\hat{\rho}(B, A_{\lambda_n}) \geq \varepsilon_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, что противоречит сходимости $A_{\lambda_n} \xrightarrow{\hat{\rho}} B$. Таким образом, $B \subset A$.

Далее предположим, что найдутся точки $a_{\alpha} \notin B$ и $a_{\beta} \in B$ такие, что $\alpha < \beta$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $B_{\rho}(a_{\alpha}, \varepsilon) \cap A = \{a_{\alpha}\}$ и $B_{\rho}(a_{\beta}, \varepsilon) \cap A = \{a_{\beta}\}$. Для всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого номера, $\hat{\rho}(B, A_{\lambda_n}) < \varepsilon$, и, следовательно, $a_{\beta} \in A_{\lambda_n}$. Поскольку $a_{\alpha} \in A_{\lambda_n}$ (так как $\alpha < \beta$) и $\hat{\rho}(B, A_{\lambda_n}) < \varepsilon$, то $a_{\alpha} \in B$. Получили противоречие. Таким образом, если $a_{\beta} \in B$, то $a_{\alpha} \in B$ для всех $\alpha < \beta$.

Пусть далее существует не более чем счетный ординал λ_0 такой, что $\lambda < \lambda_0$ для любой точки $a_{\lambda} \in B$. Можно полагать, что λ_0 – первый ординал среди таких ординалов, и тогда $B = A_{\lambda_0}$, что невозможно, поскольку $B \in \exp X \setminus \mathcal{H}$.

Итак, получаем равенство $B = A$. Известно (см., например, [3, с. 25]), что для всякой последовательности ординалов $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, меньших, чем ω_1 , найдется такой ординал $\lambda_0 < \omega_1$, что $\lambda_i < \lambda_0$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$, при котором $B_{\rho}(a_{\lambda_0}, \varepsilon) \cap A = \{a_{\lambda_0}\}$. Поскольку $B = A$, то $\hat{\rho}(B, A_{\lambda_n}) \geq \varepsilon$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, что противоречит сходимости $A_{\lambda_n} \xrightarrow{\hat{\rho}} B$. Теорема доказана.

Следствие 4. Для метризуемого пространства X равносильны условия:

- 1) $\tau_0 \leq \tau_{\inf}$;
- 2) X конечно;
- 3) $\tau_0 = \tau_{\inf}$.

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2). Так как $\tau_v \leq \tau_0$ (см. теорему 1), то $\tau_v \leq \tau_{\inf}$, что равносильно $\tau_{\inf} = \tau_F$ (см. предложение 10), откуда получаем равенство $\tau_F = \tau_0$, которое (см. следствие 1) эквивалентно конечности пространства X . Импликация 2) $\Rightarrow$ 3). Поскольку пространство X конечно, то $\exp X$ – конечное множество, и, следовательно, в силу выполнения для τ_0 и $\tau_{\inf}$ аксиомы отделимости T_1 , τ_0 и $\tau_{\inf}$ – одна и та же дискретная топология. Импликация 3) $\Rightarrow$ 1) очевидна. Следствие доказано.

Следствие 5. Топологии $\tau_{\inf}$ и τ_0 несравнимы тогда и только тогда, когда вес пространства X не-считен.

Непрерывное продолжение отображения на экспоненты с топологией τ_0

Исследуем вопрос об условиях существования непрерывного продолжения $\exp_0 X \xrightarrow{g} \exp_0 Y$ отображения $X \xrightarrow{f} Y$. Отображение $\exp X \xrightarrow{g} \exp Y$ будем называть продолжением отображения $X \xrightarrow{f} Y$ на экспоненты $\exp X$ и $\exp Y$, если $g(\{x\}) = \{f(x)\}$ для любого $\{x\} \in \exp X$. Если, кроме того, $g(F) = [f(F)]_Y$ для любого $F \in \exp X$, то отображение $\exp X \xrightarrow{g} \exp Y$ назовем каноническим продолжением. Далее каноническое продолжение будем обозначать через $\bar{f}$. Выясним условия «каноничности» непрерывного продолжения для топологии τ_0 .

Теорема 7. Пусть для непрерывного продолжения $\exp_0 X \xrightarrow{g} \exp_0 Y$ отображения $X \xrightarrow{f} Y$ имеет место равенство $g(A) = f(A)$ для любого конечного подмножества A пространства X . Тогда $g = \bar{f}$.

Доказательство. Пусть $F \in \exp X$ и $|F| = \infty$. Вначале отметим, что если $F \in O(\emptyset, U)$, где U открыто в X , то $F \in O(A, U) \subset O(\emptyset, U)$ для любого конечного множества $A \subset F$ такого, что $|A| \geq 2$. Рассмотрим окрестность V (в Y) некоторой точки $\xi \in g(F)$. Множество V^- есть окрестность $g(F)$ в $\exp_0 Y$ ввиду соотношения $\tau_v \leq \tau_0$ (см. теорему 1). Из непрерывности отображения g для множества F (как элемента экспоненты) можно подобрать окрестность вида $O(A, U)$ так, чтобы $g(O(A, U)) \subset V^-$, где $|A| \geq 2$. Поскольку $A \in O(A, U)$, то $g(A) = f(A) \in V^-$, т. е. $f(A) \cap V \neq \emptyset$, откуда $f(F) \cap V \neq \emptyset$. Ввиду произвольности выбора окрестности V получаем, что $\xi \in [f(F)]_Y$, и, следовательно, $g(F) \subset [f(F)]_Y$. Далее предположим, что существует точка $\eta \in [f(F)]_Y \setminus g(F)$. Так как множество $g(F)$ замкнуто, то

найдется также точка $y \in f(F) \setminus g(F)$. Рассмотрим окрестность $O(\emptyset, Y \setminus \{y\})$ множества $g(F)$ в $\text{exp}_O Y$. В силу непрерывности отображения g для множества F можно подобрать окрестность вида $O(A, U)$, где $|A| \geq 2$, так, чтобы $g(O(A, U)) \subset O(\emptyset, Y \setminus \{y\})$. Выберем далее точку $x \in f^{-1}(y) \cap F$. Тогда множество $\{x\} \cup A \in \text{exp}_O X$ является элементом $O(A, U)$, значит, $g(\{x\} \cup A) = f(\{x\} \cup A) \in O(\emptyset, Y \setminus \{y\})$, т. е. $f(x) \in f(\{x\} \cup A) \subset Y \setminus \{y\}$. Таким образом, получили противоречие (так как $y = f(x)$). Следовательно, имеет место включение $[f(F)]_Y \subset g(F)$. Итак, $g(F) = [f(F)]_Y$. Теорема доказана.

Выясним теперь условия непрерывности канонического продолжения $\bar{f}$. Исходное отображение $X \xrightarrow{f} Y$ считаем далее непрерывным.

Теорема 8. *Отображение $\text{exp}_O X \xrightarrow{\bar{f}} \text{exp}_O Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда отображение $X \xrightarrow{f} Y$ замкнуто (т. е. $f(F)$ замкнуто в Y для любого замкнутого в X множества F).*

Доказательство. Необходимость. Пусть отображение $\bar{f}$ непрерывно. Предположим, что существует замкнутое множество $F \subset X$, для которого $[f(F)]_Y \setminus f(F) \neq \emptyset$. Выберем точки $\xi \in [f(F)]_Y \setminus f(F)$ и $y \in f(F)$ и образуем в $\text{exp}_O Y$ окрестность $O(\{\xi, y\}, Y)$ множества $\bar{f}(F) = [f(F)]_Y$. Тогда, исходя из непрерывности $\bar{f}$, найдется окрестность множества F вида $O(A, U)$ такая, что $\bar{f}(O(A, U)) \subset O(\{\xi, y\}, Y)$. В случае если $A = \emptyset$, рассмотрим множество $\{x\} \in O(\emptyset, U)$, где $x \in F$ и $f(x) = y$. Тогда $\bar{f}(\{x\}) = \{f(x)\} \in O(\{\xi, y\}, Y)$, и, значит, $\{\xi, y\} \subset \{f(x)\} = \{y\}$, что невозможно. Если $|A| \geq 2$, то $\bar{f}(A) = f(A) \in O(\{\xi, y\}, Y)$, следовательно, множество $f(A)$ содержит множество $\{\xi, y\}$, откуда (ввиду включения $f(A) \subset f(F)$) получаем, что $\xi \in f(F)$ вопреки предположению. Значит, $[f(F)]_Y = f(F)$. Замкнутость отображения $X \xrightarrow{f} Y$ доказана.

Достаточность. Пусть отображение $X \xrightarrow{f} Y$ замкнуто. Для образа $\bar{f}(F) = f(F)$ точки F (в экспоненте) рассмотрим произвольную окрестность вида $O(B, V)$. Если множество B пусто, то в силу замкнутости отображения f имеет место включение $\bar{f}(O(\emptyset, U)) \subset O(B, V)$, где $U = f^{-1}(V)$. Пусть теперь $|B| \geq 2$. В таком случае для множества B можно подобрать конечное множество $A \subset F$ так, чтобы $f(A) = B$. Тогда для множества F образуем окрестность вида $O(A, U)$, где $U = f^{-1}(V)$. Замкнутость функции f обеспечит включение $\bar{f}(O(A, U)) \subset O(B, V)$. Теорема доказана.

В завершение рассмотрим отображение exp_O из категории CLOS топологических T_1 -пространств и непрерывных замкнутых отображений в категорию TOP₁ топологических T_1 -пространств и непрерывных отображений, сопоставляющее каждому объекту X из категории CLOS его экспоненту $\text{exp}_O X$, а каждому морфизму $X \xrightarrow{f} Y$ категории CLOS его непрерывное продолжение $\text{exp}_O X \xrightarrow{\bar{f}} \text{exp}_O Y$. Теорема 8 позволяет сформулировать следствие 5.

Следствие 5. *Отображение exp_O является ковариантным функтором из категории CLOS в категорию TOP₁.*

Замечание. В силу теоремы 8 категорию CLOS можно считать естественной (т. е. максимальной в рамках категории TOP₁) областью определения функтора exp_O .

Библиографические ссылки

1. Vietoris L. Bereiche zweiter Ordnung. *Monatshefte für Mathematik und Physik*. 1922;32:258–280. DOI: 10.1007/BF01696886.
2. Michael E. Topologies on spaces of subsets. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1951;71:152–182.
3. Энгелькинг Р. *Общая топология*. Антоновский МЯ, Архангельский АВ, переводчики. Москва: Мир; 1986. 744 с.
4. Fell JMG. A Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact non-Hausdorff space. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1962;13(3):472–476. DOI: 10.2307/2034964.
5. Beer GA, Himmelberg CJ, Prikry K, van Vleck FS. The locally finite topology on 2^X . *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1987;101(1):168–172. DOI: 10.2307/2046570.
6. Beer GA, Tamaki RK. On hit-and-miss hyperspace topologies. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*. 1993;34(4):717–728.
7. Holá L, Levi S. Decomposition properties of hyperspace topologies. *Set-Valued Analysis*. 1997;5:309–321.
8. Очан ЮС. Пространство подмножеств топологического пространства. *Доклады Академии наук СССР*. 1941;32(2):107–109.

9. Очан ЮС. Пространство подмножеств топологического пространства. *Математический сборник*. 1943;12(3):340–352.
10. Kašuba RP. The generalized Očan topology on sets of subsets and topological Boolean rings. *Mathematische Nachrichten*. 1980;97(1):47–56. DOI: 10.1002/mana.19800970106.
11. Попов ВВ. О нормальности экспоненты в топологиях очановского типа. *Математические заметки*. 1982;32(3):375–484.
12. Попов ВВ. О строении экспоненты дискретного пространства. *Математические заметки*. 1984;35(5):757–767.
13. Энгельсон ЛЯ. Точно-экспоненциальная топология. *Ученые записки Латвийского университета*. 1976;257(2):121–126.
14. Пранинскас Г. О топологической характеристике некоторых свойств мер посредством очановских топологий. *Lietuvos matematikos rinkinys*. 2010;51:75–79.
15. Hart KP, Nagata J, Vaughan JE. *Encyclopedia of general topology*. [S. l.]: Elsevier; 2003. 526 p. DOI: 10.1016/B978-0-444-50355-8.x5000-4.
16. van Douwen EK. The Pixley – Roy topology on spaces of subsets. In: Reed GM, editor. *Set-theoretic topology*. Cambridge: Academic Press; 1977. p. 111–134.
17. Кукрак ГО, Тимохович ВЛ. Об экспоненциальном пространстве с топологией очановского типа. *Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова*. 1999;2–3(3):94–97.
18. Кукрак ГО, Тимохович ВЛ. Расширение Волмэна и экспонента. Функториальные свойства. *Труды Института математики*. 2022;30(1–2):37–43.
19. Бедрицкий АС, Тимохович ВЛ. Модификация условия (WO) Харриса и функториальные свойства экспоненты и расширения Волмэна. *Труды Института математики*. 2022;30(1–2):4–11.
20. Harris D. The Wallman compactification as a functor. *General Topology and its Applications*. 1971;1(3):273–281. DOI: 10.1016/0016-660X(71)90098-5.
21. Бедрицкий АС, Тимохович ВЛ. Функториальные свойства Ω -насыщения топологического пространства. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2023;1:31–37.
22. Бедрицкий АС. О функториальных свойствах Ω -насыщения топологического T_1 -пространства. *Труды Института математики*. 2023;31(1):6–13.
23. Кукрак ГО, Тимохович ВЛ, Фролова ДС. Некоторые топологические свойства функтора $C(X, Y)$. *Труды Института математики*. 2018;26(1):71–78.
24. Кукрак ГО, Тимохович ВЛ. О непрерывности функторов вида $C(X, Y)$. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2020;1:22–29. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-1-22-29.
25. Кукрак ГО, Тимохович ВЛ. Ограниченная топология и функтор $C(X, Y)$. *Труды Института математики*. 2020;28(1–2):57–62.
26. Costantini C, Vitolo P. On the infimum of the Hausdorff metric topologies. *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1995;70(2):441–480. DOI: 10.1112/plms/s3-70.2.441.
27. Бедрицкий АС, Тимохович ВЛ. О топологиях экспоненты метризуемого топологического пространства. *Труды Института математики*. 2023;31(2):15–27.
28. Beer G. *Topologies on closed and closed convex sets*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers; 1993. 340 p.

Получена 11.04.2024 / исправлена 06.10.2024 / принята 06.10.2024.
Received 11.04.2024 / revised 06.10.2024 / accepted 06.10.2024.