
Вещественный, комплексный и функциональный анализ

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

УДК 517.538.52 + 517.538.53 + 517.518.84

РАЦИОНАЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ СТЕПЕННЫХ, ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ И РЯДОВ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЧЕБЫШЕВА

А. П. СТАРОВОЙТОВ¹⁾, И. В. КРУГЛИКОВ¹⁾, Т. М. ОСНАЧ¹⁾

¹⁾Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины,
ул. Советская, 104, 246028, г. Гомель, Беларусь

Аннотация. Для тригонометрических рядов и рядов по многочленам Чебышева определены тригонометрические аппроксимации Эрмита – Паде и Эрмита – Якоби, линейные и нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышева. Установлен критерий существования и единственности тригонометрических многочленов Эрмита – Паде, ассоциированных с произвольным набором из k тригонометрических рядов, описан явный вид указанных многочленов.

Образец цитирования:

Старовойтов АП, Кругликов ИВ, Оснач ТМ. Рациональные аппроксимации степенных, тригонометрических рядов и рядов по многочленам Чебышева. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2024;3:6–21.
EDN: FDWJFQ

For citation:

Starovoitov AP, Kruglikov IV, Osnach TM. Rational approximations of power series, trigonometric series and series of Chebyshev polynomials. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2024;3:6–21. Russian.
EDN: FDWJFQ

Авторы:

Александр Павлович Старовойтов – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений факультета математики и технологий программирования.

Игорь Викторович Кругликов – студент факультета математики и технологий программирования. Научный руководитель – А. П. Старовойтов.

Татьяна Михайловна Оснач – аспирантка кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений факультета математики и технологий программирования. Научный руководитель – А. П. Старовойтов.

Authors:

Alexander P. Starovoitov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of mathematical analysis and differential equations, faculty of mathematics and technologies of programming.

svoitov@gsu.by

<https://orcid.org/0000-0002-1067-5744>

Igor V. Kruglikov, student at the faculty of mathematics and technologies of programming.

igor.v.kruglikov@gmail.com

Tatyana M. Osnach, postgraduate student at the department of mathematical analysis and differential equations, faculty of mathematics and technologies of programming.

osnach@gsu.by

Аналогичные результаты получены для линейных аппроксимаций Эрмита – Чебышева. Построены примеры систем функций, для которых существуют тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби и нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышева.

Ключевые слова: аппроксимации Эрмита – Паде; аппроксимации Паде – Чебышева; тригонометрические ряды; ряды по многочленам Чебышева.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025».

RATIONAL APPROXIMATIONS OF POWER SERIES, TRIGONOMETRIC SERIES AND SERIES OF CHEBYSHEV POLYNOMIALS

A. P. STAROVOITOV^a, I. V. KRUGLIKOV^a, T. M. OSNACH^a

^aFrancisk Skorina Gomel State University, 104 Savieckaja Street, Gomel 246028, Belarus

Corresponding author: A. P. Starovoitov (svoitov@gsu.by)

Abstract. In this paper, we defined trigonometric Hermite – Pade and Hermite – Jacobi approximations as well as linear and nonlinear Hermite – Chebyshev approximations for trigonometric and Chebyshev series. We established the criterion of the existence and uniqueness of trigonometric Hermite – Pade polynomials, associated with an arbitrary set of k trigonometric series, and we found the explicit form of these polynomials. Similar results were obtained for linear Hermite – Chebyshev approximations. We made examples of systems of functions for which trigonometrical Hermite – Jacobi approximations existed which were not the same as trigonometric Hermite – Pade approximations. Similar examples were represented for linear and nonlinear Hermite – Chebyshev approximations.

Keywords: Hermite – Pade approximations; Pade – Chebyshev approximations; trigonometric series; series of Chebyshev polynomials.

Acknowledgements. This work was supported by the state programme of scientific research «Convergence-2025».

Введение

Теория аппроксимаций Паде является одним из интенсивно развивающихся разделов комплексного анализа. Конструкция построения таких аппроксимаций в некотором смысле универсальна: их аналогии можно построить, в частности, для тригонометрических рядов, рядов по многочленам Чебышева и многочленам Фабера. В последние годы такого рода обобщения нашли многочисленные применения в различных задачах анализа, прикладной математики, теоретической физики, механики, геофизики (см., например, [1–6]). Аппроксимации Паде – Чебышева наряду с классическими аппроксимациями Паде фактически стали [7] неотъемлемой частью научных и технических расчетов, отражением этого является создание специальных программ для их нахождения в известных компьютерных системах [3; 8].

Появлению двух различных подходов при определении аппроксимаций Паде мы обязаны Г. Фробениусу [9] и К. Якоби [10]. Эти два подхода, приводящие к разным аппроксимациям, сохраняются и при построении их аналогов для тригонометрических рядов и рядов по многочленам Чебышева. Причем если для степенных рядов различия в вопросах существования и единственности между двумя видами таких аппроксимаций хорошо изучены [11], то для их обобщений в этом направлении сделаны лишь первые шаги [7; 11; 12].

Конструкция, аналогичная конструкции К. Якоби [10], но предназначенная для одновременной интерполяции нескольких функций, была разработана Ш. Эрмитом [13] и легла в основу его доказательства трансцендентности числа e . В работе [13] впервые появились рациональные дроби, которые в настоящее время принято называть аппроксимациями Эрмита – Паде. Следует сказать, что аппроксимации Эрмита – Паде для системы функций также могут быть двух видов. Далее будем их называть аппроксимациями Эрмита – Паде и аппроксимациями Эрмита – Якоби. Изначально Ш. Эрмит рассматривал одновременную интерполяцию нескольких экспоненциальных функций. В этом случае обе конструкции рациональных дробей совпадают. Для произвольной системы функций это не так. Отметим также, что в настоящее время аппроксимации Эрмита – Паде достаточно хорошо изучены [11; 14; 15] и нашли многочисленные приложения в различных областях алгебры, анализа и современной физики [16–26]. Вместе с тем основные свойства их обобщений, например, для тригонометрических рядов и рядов по многочленам Чебышева, насколько нам известно, остаются пока не исследованными.

Настоящая работа посвящена построению аналогов аппроксимаций Эрмита – Паде и Эрмита – Якоби для тригонометрических рядов и рядов по многочленам Чебышева. С формальной точки зрения определение новых конструкций рациональных дробей для таких рядов особых трудностей не представляет. Вместе с тем с получением каких-либо содержательных результатов о существовании и единственности новых аппроксимаций дело обстоит не так просто, как в случае со степенными рядами [6; 7; 11; 27–29].

Аппроксимации Эрмита – Паде

Приведем некоторые хорошо известные факты теории аппроксимаций Эрмита – Паде. Для произвольной функции $f(z)$, представленной степенным рядом

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l z^l, \quad (1)$$

и каждой пары (n, m) целых неотрицательных чисел существуют алгебраические многочлены $Q_m(z)$, $\deg Q_m \leq m$, $P_n(z)$, $\deg P_n \leq n$, для которых

$$Q_m(z)f(z) - P_n(z) = O(z^{n+m+1}). \quad (2)$$

Здесь и далее под $O(z^p)$ понимаем степенной ряд вида $c_1 z^p + c_2 z^{p+1} + \dots$. Многочлены $Q_m(z)$ и $P_n(z)$

условием (2) определяются не единственным образом, однако дроби $\pi_{n,m}(z) = \pi_{n,m}(z; f) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ опре-

деляют одну и ту же рациональную функцию независимо от того, какие бы многочлены $Q_m(z)$, $P_n(z)$, удовлетворяющие (2), мы не взяли [15, гл. 2]. Рациональные дроби $\pi_{n,m}(z)$ принято называть аппроксимациями Паде или Фробениуса – Паде (в качестве определения $\pi_{n,m}(z; f)$ соотношения (2) впервые были предложены Г. Фробениусом [9], авторство А. Паде основывается на его диссертации [30] 1892 г.). Еще раньше (в 1846 г.) похожая задача изучалась К. Якоби [10], который обобщил результат О. Коши о рациональной интерполяции функции, заданной в $n + m + 1$ различных точках. К. Якоби рассмотрел $(n + m + 1)$ -кратную рациональную интерполяцию в одной точке. Его конструкция приводит к следующему определению.

Определение 1. Рациональную дробь $\hat{\pi}_{n,m}(z) = \hat{\pi}_{n,m}(z; f) = \frac{\hat{P}_n(z)}{\hat{Q}_m(z)}$, в которой алгебраические многочлены $\hat{Q}_m(z)$, $\hat{P}_n(z)$ имеют степени соответственно не выше m и n , будем называть аппроксимацией Паде – Якоби для пары (n, m) и функции $f(z)$, если

$$f(z) - \frac{\hat{P}_n(z)}{\hat{Q}_m(z)} = O(z^{n+m+1}).$$

Аппроксимации Паде – Якоби $\hat{\pi}_{n,m}(z; f)$ могут не существовать [11, гл. 1, § 1.4]. Первый значимый результат в исследовании условий, при которых $\hat{\pi}_{n,m}(z; f)$ существует, был получен К. Якоби [10]. Введем в рассмотрение определители Адамара

$$H_{n,m} = \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \cdots & f_n \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \cdots & f_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+m-1} \end{vmatrix}, \quad (3)$$

элементами которых являются коэффициенты ряда (1). При $l < 0$ в (3) считаем, что $f_l = 0$.

Теорема 1 [10]. Если определитель $H_{n,m} \neq 0$, то аппроксимации Паде – Якоби $\hat{\pi}_{n,m}(z; f)$ существуют и $\hat{\pi}_{n,m}(z; f) = \pi_{n,m}(z; f)$.

Полное исследование условий, при которых $\hat{\pi}_{n,m}(z; f)$ существует, провел Дж. Бейкер [11, гл. 1, § 1.4]. В этой связи $\hat{\pi}_{n,m}(z; f)$ называют также аппроксимациями Паде в смысле Бейкера.

Рассмотрим систему функций $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k)$, представленных степенными рядами

$$f_j(z) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l^j z^l, \quad j = 1, \dots, k.$$

Множество k -мерных мультииндексов, являющихся упорядоченным набором k целых неотрицательных чисел, обозначим через $\mathbb{Z}_+^k$. Порядок мультииндекса $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ — это сумма $m = m_1 + \dots + m_k$. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$ и рассмотрим задачу, в частном случае поставленную и решенную Ш. Эрмитом, а в окончательном виде сформулированную К. Малером [14] (подробнее см. [15, гл. 4, § 1, задача А]).

Задача А. Найти тождественно не равный нулю многочлен $Q_m(z) = Q_{n, \vec{m}}(z; \mathbf{f})$, $\deg Q_m \leq m$, и многочлены $P_{n_j}^j(z) = P_{n, \vec{m}}^j(z; \mathbf{f})$, $\deg P_{n_j}^j \leq n_j$, $n_j = n + m - m_j$, чтобы

$$R_{n, \vec{m}}^j(z) := Q_m(z) f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = O(z^{n+m+1}), \quad j = 1, \dots, k. \quad (4)$$

Определение 2. Многочлены $Q_m(z)$, $P_{n_1}^1(z)$, $\dots$, $P_{n_k}^k(z)$, удовлетворяющие условию (4) (решение задачи А всегда существует [15]), и рациональные дроби

$$\pi_j(z; \mathbf{f}) = \pi_{n_j, n, \vec{m}}^j(z; \mathbf{f}) = \frac{P_{n_j}^j(z)}{Q_m(z)}, \quad j = 1, \dots, k,$$

называют соответственно многочленами Эрмита – Паде и аппроксимациями Эрмита – Паде для мультииндекса $(n, \vec{m})$ и системы $\mathbf{f}$.

Особый интерес представляют системы $\mathbf{f}$, для которых дроби $\{\pi_j(z; \mathbf{f})\}_{j=1}^k$ однозначно определяются условиями (4) для любого мультииндекса $(n, \vec{m})$. Важным примером таких систем являются совершенные системы [15]. Совершенной является система $\mathbf{E}_k = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где λ_j — различные не равные нулю комплексные числа [15]. Примеры систем, отличных от совершенных, для которых дроби $\{\pi_j(z; \mathbf{f})\}_{j=1}^k$ определяются однозначно, приведены в [31; 32]. В этих работах найдены необходимые и достаточные условия, при которых задача А имеет единственное решение.

Аппроксимации Эрмита – Якоби

Введем в рассмотрение кратные аналоги дробей К. Якоби [10].

Определение 3. Рациональные функции вида

$$\hat{\pi}_j(z; \mathbf{f}) = \hat{\pi}_{n_j, n, \vec{m}}^j(z; \mathbf{f}) = \frac{\hat{P}_{n_j}^j(z)}{\hat{Q}_m(z)}, \quad j = 1, \dots, k,$$

где алгебраические многочлены $\hat{Q}_m(z) = \hat{Q}_{n, \vec{m}}(z; \mathbf{f})$, $\hat{P}_{n_j}^j(z) = \hat{P}_{n, \vec{m}}^j(z; \mathbf{f})$ имеют степени соответственно не выше m и n_j , $n_j = n + m - m_j$, будем называть аппроксимациями Эрмита – Якоби для мультииндекса $(n, \vec{m})$ и системы функций $\mathbf{f}$, если

$$f_j(z) - \frac{\hat{P}_{n_j}^j(z)}{\hat{Q}_m(z)} = O(z^{n+m+1}). \quad (5)$$

Многочлены $\hat{Q}_m(z)$, $\hat{P}_{n_1}^1(z)$, $\dots$, $\hat{P}_{n_k}^k(z)$, удовлетворяющие условиям (5) (их будем называть многочленами Эрмита – Якоби), как и аппроксимации Эрмита – Якоби, могут не существовать. Приведем соответствующий пример.

Пример 1. Пусть $k = 2$, $n = 1$, $m_1 = m_2 = 1$, $f_1(z) = 2 + z + 2z^2 + z^3 + 2z^4 + z^5 + \dots$, $f_2(z) = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + 5z^5 + \dots$.

Тогда $m = 2$, $n_1 = n_2 = 2$, а многочлены, удовлетворяющие условиям (5), при подходящем выборе нормирующего множителя должны иметь вид $\hat{Q}_2(z) = z - 2z^2$, $\hat{P}_2^1(z) = 2z - 3z^2$, $\hat{P}_2^2(z) = z - z^2$. Между тем для таких многочленов

$$f_1(z) - \frac{2z - 3z^2}{z - 2z^2} \neq O(z^4), \quad f_2(z) - \frac{z - z^2}{z - 2z^2} \neq O(z^4).$$

Замечание 1. Из определений следует, что если для $(n, \vec{m})$ и $\mathbf{f}$ существуют аппроксимации Эрмита – Якоби, то они являются и аппроксимациями Эрмита – Паде. Пример 1 показывает, что обратное утверждение не верно.

Обобщение теоремы Якоби

Введем новые обозначения. Для индекса $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и ненулевого мультииндекса $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$ рассмотрим определитель

$$H_{n, \vec{m}} = \det \begin{pmatrix} H^1 \\ H^2 \\ \vdots \\ H^k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} f_{n-m_1+1}^1 & f_{n-m_1+2}^1 & \cdots & f_{n_1}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n^1 & f_{n+1}^1 & \cdots & f_{n+m-1}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n-m_k+1}^k & f_{n-m_k+2}^k & \cdots & f_{n_k}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n^k & f_{n+1}^k & \cdots & f_{n+m-1}^k \end{vmatrix},$$

при $m_j \neq 0$ состоящий из блоков H^j , расположенных друг над другом. При $l < 0$ здесь полагаем $f_l^j = 0$. По определению считаем, что при $m_j = 0$ $H_{n, \vec{m}}$ не содержит блок H^j .

Имеет место следующий кратный аналог теоремы Якоби.

Теорема 2 [33]. Пусть для мультииндекса $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\vec{m} \neq (0, \dots, 0)$, и системы функций $\mathbf{f}$ определитель $H_{n, \vec{m}} \neq 0$. Тогда для $(n, \vec{m})$ и $\mathbf{f}$ аппроксимации Эрмита – Якоби существуют, определяются единственным образом и справедливы равенства

$$\hat{\pi}_j(z; \mathbf{f}) = \pi_j(z; \mathbf{f}), \quad j = 1, \dots, k. \quad (6)$$

Определение 4. Систему $\mathbf{f}$ назовем вполне совершенной, если для любого мультииндекса $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ и для $j = 1, \dots, k$ $\deg Q_m = m$, $\deg P_{n_j}^j = n_j$, НОД $(Q_m, P_{n_j}^j) = 1$.

В [32] доказано, что если система вполне совершенна, то для любого мультииндекса $(n, \vec{m})$ определитель $H_{n, \vec{m}} \neq 0$. Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. Если система $\mathbf{f}$ вполне совершенна, то для любого мультииндекса $(n, \vec{m})$ существуют аппроксимации Эрмита – Якоби и справедливы равенства (6).

Вполне совершенной системой является, например, упомянутая выше система экспонент $\mathbf{E}_k = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$. Рассмотрим другой пример системы функций, удовлетворяющей условиям теоремы 2. Пусть $\mathbf{E}_{k, \gamma} = \{E_\gamma(\lambda_j z)\}_{j=1}^k$, где $E_\gamma(z)$ представима степенным рядом

$$E_\gamma(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{(\gamma)_p}. \quad (7)$$

В определении $\mathbf{E}_{k, \gamma}$ и выражении (7) предполагается, что параметр $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, \dots\}$, $(\gamma)_0 = 1$, $(\gamma)_p = \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+p-1)$ – символ Похгаммера, а $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные не равные нулю действительные числа. Функции $E_\gamma(z)$ введены М. Миттаг-Леффлером [34] в качестве обобщения показательной функции, в частности $E_1(z) = \exp z$. Равномерная сходимость аппроксимаций Эрмита – Паде $\pi_j(z; \mathbf{E}_{k, \gamma})$ к функции $E_\gamma(\lambda_j z)$ на компактах в $\mathbb{C}$ при $k = 1$ доказана М. де Брюеном [36], а при $k > 1$ – А. И. Аптекаревым [35]. Асимптотика этой сходимости исследовалась в [37]. В [35] доказано, что при $n \geq m_j - 1$ и $j = 1, \dots, k$

$$Q_m(z; \mathbf{E}_{k, \gamma}) = \frac{z^{n+m+\gamma}}{\Gamma(n+m+\gamma)} \int_0^{+\infty} U_\gamma(x) e^{-zx} dx, \quad (8)$$

$$R_{n, \vec{m}}^j(z; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma}) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+m+1}}{\lambda_j^{\gamma-1}(\gamma)_{n+m}} \int_0^{\lambda_j} U_\gamma(x) e^{-zx} dx, \quad (9)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера, а

$$U_\gamma(x) = x^{n+\gamma-1} \prod_{p=1}^k (x - \lambda_p)^{m_p}. \quad (10)$$

Раскрывая в (10) скобки, получим $U_\gamma(x) = x^{n+m+\gamma-1} + \dots + bx^{n+\gamma-1}$, $b \neq 0$. Так как

$$\int_0^{+\infty} x^{k+\gamma-1} e^{-zx} dx = \frac{\Gamma(k+\gamma)}{z^{k+\gamma}}, \quad k=1, 2, \dots,$$

то $Q_m(z; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma}) = 1 + \dots + b \frac{\Gamma(n+\gamma)}{\Gamma(n+m+\gamma)} z^m$ – многочлен степени m и $Q_m(0; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma}) = 1$. Отсюда при $n \geq m_j - 1$

следует [35], что $H_{n, \vec{m}} \neq 0$. Тогда согласно теореме 2 для $(n, \vec{m})$ при $n \geq m_j - 1$ в некоторой окрестности нуля

$$E_\gamma(\lambda_j z) - \frac{P_{n_j}^j(z; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma})}{Q_{n, \vec{m}}(z; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma})} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{a}_l^j z^l, \quad j=1, \dots, k. \quad (11)$$

Важно, что при достаточно больших n в качестве такой окрестности можно взять открытый круг с центром в нуле, радиус которого больше значения 1. Это утверждение является следствием основной леммы работы [35]: согласно лемме нули $Q_{n, \vec{m}}(z; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma})$ при достаточно больших n лежат за пределами указанного круга. Из формулы (9) получаем

$$\tilde{a}_{n+m+1}^j = \frac{1}{\lambda_j^{\gamma-1}(\gamma)_{n+m}} \int_0^{\lambda_j} U_\gamma(x) dx.$$

Тригонометрические аппроксимации Эрмита – Паде

Пусть $\mathbf{f}^t = (f_1^t, \dots, f_k^t)$ – набор тригонометрических рядов

$$f_j^t(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} (a_l^j \cos lx + b_l^j \sin lx), \quad j=1, \dots, k, \quad (12)$$

с действительными коэффициентами. Считаем, что ряды (12) сходятся поточечно при всех $x \in \mathbb{R}$. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$ и рассмотрим следующую задачу.

Задача А^t. Для набора тригонометрических рядов (12) найти тождественно не равный нулю тригонометрический многочлен $Q_m^t(x) = Q_{n, \vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t)$, $\deg Q_m^t \leq m$, и такие тригонометрические многочлены $P_j^t(x) = P_{n_j, n, \vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t)$, $\deg P_j^t \leq n_j$, $n_j = n + m - m_j$, чтобы

$$R_j^t(x) := Q_m^t(x) f_j^t(x) - P_j^t(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} (\tilde{a}_l^j \cos lx + \tilde{b}_l^j \sin lx), \quad j=1, \dots, k. \quad (13)$$

Очевидно, что многочлены $Q_m^t(x)$, $P_j^t(x)$ определяются неоднозначно: если пара (Q_m^t, P^t) , где $P^t := (P_1^t, \dots, P_k^t)$, удовлетворяет (13), то для любого отличного от нуля числа λ новая пара $(\lambda Q_m^t, \lambda P^t)$, где $\lambda P^t := (\lambda P_1^t, \dots, \lambda P_k^t)$, также удовлетворяет (13). Неединственность может быть и более существенной.

Пример 2. Пусть $k=1$, $n=2$, $m=1$, а $f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos lx$, где

$$a_l = \begin{cases} 2, & \text{если } l = 1, 2, 4, \\ 4, & \text{если } l = 3, \\ \frac{1}{l!}, & \text{если } l > 4. \end{cases}$$

Тогда любое решение задачи $\mathbf{A}^t$ имеет вид $(\lambda Q_1^t, \lambda P_1^t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, где многочлены $Q_1^t(x)$, $P_1^t(x)$ в комплексной форме записи определяются равенствами

$$Q_1^t(x) = ae^{-ix} - \frac{a+b}{2} + be^{ix},$$

$$P_1^t(x) = \frac{a+3b}{2}e^{-i2x} + \frac{b-a}{2}e^{-ix} + a+b + \frac{a-b}{2}e^{ix} + \frac{3a+b}{2}e^{i2x},$$

в которых a и b – произвольные действительные числа, не равные нулю одновременно.

Определение 5. Будем говорить, что задача $\mathbf{A}^t$ имеет единственное решение, если для любых ее решений $(\bar{Q}_m^t, \bar{P}^t)$ и $(\bar{Q}_m^t, \bar{P}^t)$ найдется число λ такое, что $(\bar{Q}_m^t, \bar{P}^t) = (\lambda \bar{Q}_m^t, \lambda \bar{P}^t)$.

Определение 6. Пусть пара (Q_m^t, P^t) , где $P^t = (P_1^t, \dots, P_k^t)$, является решением задачи $\mathbf{A}^t$. Тогда многочлены $Q_m^t(x)$, $P_1^t(x)$, $\dots$, $P_k^t(x)$ и рациональные дроби

$$\pi_j^t(x; \mathbf{f}^t) = \pi_{j,n,\vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t) = \frac{P_j^t(x)}{Q_m^t(x)}, \quad j = 1, \dots, k,$$

будем называть соответственно тригонометрическими многочленами Эрмита – Паде и аппроксимациями Эрмита – Паде для мультииндекса $(n, \vec{m})$ и системы $\mathbf{f}^t$.

Если задача $\mathbf{A}^t$ имеет единственное решение, то аппроксимации $\{\pi_j^t(x; \mathbf{f}^t)\}_{j=1}^k$ определяются однозначно. При $k = 1$ достаточное условие единственности решения задачи $\mathbf{A}^t$ получено в [38]: для единственности достаточно, чтобы определитель $\Delta^1(n, m) \neq 0$ (см. далее определение $\Delta^1(n, m)$). В [38] найдены явные детерминантные формулы для многочленов $Q_m^t(x)$, $P_1^t(x)$, аналогичные формулам для алгебраических многочленов Паде $Q_m(z)$, $P_n(z)$ [11]. При $k = 1$ дроби $\pi_{1,n,\vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t) =: \pi_{n,m}^t(x)$ называют также тригонометрическими аппроксимациями Паде. Отметим одно важное отличие $\pi_{n,m}^t(x)$ от $\pi_{n,m}(z)$. Для любой пары индексов (n, m) аппроксимации $\pi_{n,m}(z)$ определяются однозначно. Тригонометрические аппроксимации Паде $\pi_{n,m}^t(x)$ этим свойством не обладают. Такое заключение можно сделать, опираясь на пример 2.

Запишем ряды (12) и многочлены $Q_m^t(x)$, $P_j^t(x)$ в комплексной форме:

$$f_j^t(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l^j e^{ilx}, \quad j = 1, \dots, k, \quad (14)$$

$$Q_m^t(x) = \sum_{p=-m}^m u_p e^{ipx}, \quad j = 1, \dots, k, \quad P_j^t(x) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} v_p^j e^{ipx}, \quad (15)$$

где $u_p, v_p^j \in \mathbb{C}$, $c_0^j = \frac{a_0^j}{2}$, $c_l^j = \frac{a_l^j - ib_l^j}{2}$, $c_{-l}^j = \bar{c}_l^j$, $j = 1, \dots, k$; $l = 1, 2, \dots$. Тогда

$$R_j^t(x) = \sum_{l=n+m+1}^{+\infty} (\tilde{c}_l^j e^{ilx} + \tilde{c}_{-l}^j e^{-ilx}), \quad j = 1, \dots, k. \quad (16)$$

Каждому $l \in \mathbb{Z}$ поставим в соответствие матрицы-строки, состоящие из коэффициентов рядов (14):

$$\mathbb{C}_l^j = (c_{l+m}^j \quad c_{l+m-1}^j \quad \dots \quad c_{l+1}^j \quad c_l^j \quad c_{l-1}^j \quad \dots \quad c_{l-m+1}^j \quad c_{l-m}^j), \quad j = 1, \dots, k,$$

а числу x – матрицу-строку $E_m^t(x) = (e^{-imx} \quad e^{-i(m-1)x} \quad \dots \quad e^{-ix} \quad 1 \quad e^{ix} \quad \dots \quad e^{i(m-1)x} \quad e^{imx})$. Для заданного $j \in \{1, \dots, k\}$, фиксированных индекса $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и ненулевого мультииндекса $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$ в предположении, что $m_j \neq 0$, определим матрицы порядка $m_j \times (2m+1)$

$$F_+^j := \begin{pmatrix} c_{n_j+m+m_j}^j & c_{n_j+m+m_j-1}^j & \dots & c_{n_j-m+m_j}^j \\ c_{n_j+m+m_j-1}^j & c_{n_j+m+m_j-2}^j & \dots & c_{n_j-m+m_j-1}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n_j+m+1}^j & c_{n_j+m}^j & \dots & c_{n_j-m+1}^j \end{pmatrix},$$

$$F_-^j := \begin{pmatrix} c_{-n_j+m-1}^j & c_{-n_j+m-2}^j & \dots & c_{-n_j-m-1}^j \\ c_{-n_j+m-2}^j & c_{-n_j+m-3}^j & \dots & c_{-n_j-m-2}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n_j+m-m_j}^j & c_{-n_j+m-m_j-1}^j & \dots & c_{-n_j-m-m_j}^j \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим определитель порядка $2m+1$

$$D(n, \vec{m}; x) := \det \begin{bmatrix} F_+^k \\ \vdots \\ F_+^1 \\ E_m^t(x) \\ F_-^1 \\ \vdots \\ F_-^k \end{bmatrix}.$$

В случае если $m_j = 0$, считаем, что определитель $D(n, \vec{m}; x)$ не содержит блок-матриц $F_\pm^j$. Обозначим через $H_{n, \vec{m}}^t$ матрицу порядка $2m \times (2m+1)$, полученную из элементов определителя $D(n, \vec{m}; x)$ после удаления в нем $(m+1)$ -й строки $E_m^t(x)$. Если в определителе $D(n, \vec{m}; x)$ строку $E_m^t(x)$ заменить на строку C_j^j , получим новый определитель $d_l^j(n, \vec{m})$. Обозначим через $\Delta^k(n, \vec{m})$ определитель порядка $2m$, полученный в результате вычеркивания в определителе $D(n, \vec{m}; x)$ $(m+1)$ -й строки и $(m+1)$ -го столбца.

Определение 7. Мультииндекс $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\vec{m} \neq (0, \dots, 0)$, будем называть слаборнормальным для $\mathbf{f}^t$, если $H_{n, \vec{m}}^t$ является матрицей полного ранга, т. е. $\text{rank } H_{n, \vec{m}}^t = 2m$.

Определение 8. Систему $\mathbf{f}^t$ назовем слабосовершенной, если все мультииндексы $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\vec{m} \neq (0, \dots, 0)$, являются слаборнормальными для $\mathbf{f}^t$.

Теорема 3. Для того чтобы для фиксированного мультииндекса $(n, \vec{m})$, $\vec{m} \neq (0, \dots, 0)$, и системы $\mathbf{f}^t$ задача $\mathbf{A}^t$ имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы мультииндекс $(n, \vec{m})$ был слаборнормальным для $\mathbf{f}^t$, т. е. $\text{rank } H_{n, \vec{m}}^t = 2m$. Если $\text{rank } H_{n, \vec{m}}^t = 2m$, то при выборе соответствующего нормирующего множителя для решений задачи $\mathbf{A}^t$ справедливы представления ($j = 1, \dots, k$)

$$Q_m^t(x) = D(n, \vec{m}; x), \quad (17)$$

$$P_j^t(x) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} d_p^j(n, \vec{m}) e^{ipx}, \quad (18)$$

$$R_j^t(x) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} (d_p^j(n, \vec{m}) e^{ipx} + d_{-p}^j(n, \vec{m}) e^{-ipx}). \quad (19)$$

Доказательство. Пусть искомым многочлен $Q_m^t(x)$ имеет вид (15). После преобразований получаем

$$Q_m^t(x) f_j^t(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{p=-m}^m c_{l-p}^j u_p \right) e^{ilx} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_l^j e^{ilx},$$

где

$$\tilde{c}_l^j = \sum_{p=-m}^m c_{l-p}^j u_p, l \in \mathbb{Z}. \quad (20)$$

Выберем коэффициенты u_p , $p = \overline{-m, m}$, многочлена $Q_m^t(x)$ так, чтобы

$$\tilde{c}_l^j = 0, l = \pm(n_j + 1), \dots, \pm(n_j + m_j), j = 1, \dots, k,$$

и допустим, что $P_j^t(x) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} \tilde{c}_p^j e^{ipx}$. Очевидно, что выбранные таким образом многочлены $Q_m^t(x)$, $P_j^t(x)$ удовлетворяют условиям (13) и (16). Остается исследовать совместность системы линейных уравнений

$$\sum_{p=-m}^m c_{l-p}^j u_p = 0, l = \pm(n_j + 1), \dots, \pm(n_j + m_j), j = 1, \dots, k. \quad (21)$$

Систему (21) можно записать в матричной форме $H_{n, \vec{m}}^t u^T = \theta^T$, где $u = (u_{-m} \dots u_{-1} u_0 u_1 \dots u_m)$ – матрица-строка неизвестных коэффициентов, а θ – матрица-строка порядка $1 \times (2m + 1)$, все элементы которой нулевые. Поскольку система (21) является однородной и в ней число неизвестных $2m + 1$ на единицу больше числа уравнений $2m$, то из теоремы Кронекера – Капелли следует, что у системы (21) имеется ненулевое решение. Более того, множество всех линейно независимых решений системы (21) состоит из одного фундаментального решения тогда и только тогда, когда $\text{rank } H_{n, \vec{m}}^t = 2m$. В данном случае остальные ненулевые решения получают домножением этого фундаментального решения на число $\lambda \neq 0$. Первая часть теоремы 3 доказана.

Докажем теперь равенства (17)–(19). Так как по предположению ранг матрицы $H_{n, \vec{m}}^t$ равен $2m$, то при некотором $s \in \{1, \dots, 2m + 1\}$ определитель, полученный из элементов матрицы $H_{n, \vec{m}}^t$ в результате вычеркивания в ней s -го столбца, является отличным от нуля. Для определенности предположим, что $s = m + 1$. Тогда, зафиксировав неизвестное u_0 , получим квадратную неоднородную систему

$$\sum_{p=-m}^{-1} c_{l-p}^j u_p + \sum_{p=1}^m c_{l-p}^j u_p = -c_l^j u_0, l = \pm(n_j + 1), \dots, \pm(n_j + m_j), j = 1, \dots, k, \quad (22)$$

главный определитель которой есть $\Delta^k(n, \vec{m}) \neq 0$. Заметим, что $u_0 \neq 0$. В противном случае система (22), а значит, и система (21) имели бы только нулевые решения. Система (22) имеет единственное ненулевое решение, и найти его можно по формулам Крамера:

$$u_p = \frac{\Delta_p^k(n, \vec{m})}{\Delta^k(n, \vec{m})}, p = \overline{-m, m}, p \neq 0,$$

где $\Delta_p^k(n, \vec{m})$ – определитель, полученный из определителя $\Delta^k(n, \vec{m})$ заменой в нем p -го столбца на столбец свободных членов. Если допустить, что $\Delta_0^k(n, \vec{m}) := u_0 \Delta^k(n, \vec{m})$, то

$$Q_m^t(x) = \sum_{p=-m}^m u_p e^{ipx} = \sum_{p=-m}^m \frac{\Delta_p^k(n, \vec{m})}{\Delta^k(n, \vec{m})} e^{ipx}. \quad (23)$$

Разлагая определитель $D(n, \vec{m}; x)$ по элементам $(m + 1)$ -й строки и сравнивая с (23), делаем вывод, что

$$Q_m^t(x) = u_0 \frac{D(n, \vec{m}; x)}{\Delta^k(n, \vec{m})}. \quad (24)$$

Сопоставив (20) и (23), замечаем, что для отыскания $\tilde{c}_p^j$ следует в (23) e^{ipx} заменить на c_{l-p}^j . Учитывая обозначения, получаем, что $\tilde{c}_p^j = u_0 \frac{d_p^j(n, \vec{m}; x)}{\Delta^k(n, \vec{m})}$. Следовательно, многочлен $P_j^t(x)$ и остаточный член $R_j^t(x)$ можно представить в виде

$$P_j'(x) = \frac{u_0}{\Delta^k(n, \bar{m})} \sum_{p=-n_j}^{n_j} d_p^j(n, \bar{m}) e^{ipx}, \quad (25)$$

$$R_j'(x) = \frac{u_0}{\Delta^k(n, \bar{m})} \sum_{p=n+m+1}^{\infty} (d_p^j(n, \bar{m}) e^{ipx} + d_{-p}^j(n, \bar{m}) e^{-ipx}). \quad (26)$$

Умножая равенства (24)–(26) на $\frac{\Delta^k(n, \bar{m})}{u_0}$, получим (17)–(19).

Если при вычеркивании в $H_{n, \bar{m}}^t$ столбца с номером $s \neq t+1$ получим ненулевой определитель, то, рассуждая аналогично, приходим к (17)–(19). Поскольку $\text{rank } H_{n, \bar{m}}^t = 2m$, то определитель $D(n, \bar{m}; x)$ не может быть тождественно равным нулю. Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Из представления (17) следует, что компонента m_j мультииндекса $\bar{m}$ определяет число коэффициентов ряда $f_j^t(x)$, которые учитываются при построении многочлена $Q_m^t(x)$. В частности, если $m_j = 0$, то определитель $D(n, \bar{m}; x)$ не содержит блоки $F_{\pm}^j$ и, следовательно, при построении многочлена $Q_m^t(x)$ ряд $f_j^t(x)$ не рассматривается. Например, если $\bar{m} = (m_1, 0, \dots, 0)$, то $m = m_1$, и, как и в случае с $k = 1$, при нахождении $Q_m^t(x)$ учитываются только коэффициенты ряда $f_1^t(x)$. Тогда формула (17) в точности совпадает с формулой для знаменателя $\pi_{n, m}^t(x; f_1^t)$, полученной в [38].

Замечание 3. Если $\bar{m} = (0, \dots, 0)$, то решение задачи A^t очевидно: с точностью до числового множителя $Q_m^t(x) \equiv 1$, а $P_j^t(x)$ совпадает с n -й частной суммой ряда $f_j^t(x)$.

Замечание 4. При доказательстве теоремы 3 не учитывалось наше предположение о сходимости рядов (12). Поэтому все утверждения теоремы остаются в силе, если ряды (12) являются формальными.

Пример 2 показывает, что для мультииндекса $(n, \bar{m})$, который не является слабонормальным, коэффициенты многочленов $Q_m^t(x)$, $P_j^t(x)$ могут быть комплексными числами. Для слабонормального мультииндекса это не так.

Следствие 2. Пусть мультииндекс $(n, \bar{m})$ является слабонормальным для системы f^t . Тогда многочлены $Q_m^t(x)$, $P_1^t(x)$, ..., $P_k^t(x)$ – решения задачи A^t – являются действительными тригонометрическими многочленами.

Доказательство. По предположению коэффициенты тригонометрических рядов (12) являются действительными числами. Поэтому справедливы равенства $c_{-p}^j = \overline{c_p^j}$, $j = 1, \dots, k$; $p = 1, 2, \dots$. Тогда $\overline{D(n, \bar{m}; x)} = D(n, \bar{m}; x)$, $\overline{d_p^j(n, \bar{m})} = d_{-p}^j(n, \bar{m})$. Чтобы убедиться в этом, достаточно поменять местами равноотстоящие от краев строки и столбцы соответствующих определителей. Из этих равенств и формул (17), (18) вытекает утверждение следствия 2.

Следствие 3. Для того чтобы задача A^t имела единственное решение для любого $(n, \bar{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, необходимо и достаточно, чтобы система f^t была слабосовершенной.

Тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби

Введем в рассмотрение тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби.

Определение 9. Рациональные функции вида

$$\hat{\pi}_j^t(x; f^t) = \hat{\pi}_{j, n, \bar{m}}^t(x; f^t) = \frac{\hat{P}_j^t(x)}{\hat{Q}_m^t(x)}, \quad j = 1, \dots, k,$$

где $\hat{Q}_m^t(x) = \hat{Q}_{n, \bar{m}}^t(x; f^t)$, $\hat{P}_j^t(x) = \hat{P}_{n_j, n, \bar{m}}^t(x; f^t)$ – тригонометрические многочлены, степени которых соответственно не выше m и n_j , $n_j = n + m - m_j$, будем называть тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Якоби для мультииндекса $(n, \bar{m})$ и системы функций f^t , если каждая дробь $\hat{\pi}_j^t(x; f^t)$ представляется тригонометрическим рядом и справедливы равенства

$$f_j^t(x) - \frac{\hat{P}_j^t(x)}{\hat{Q}_m^t(x)} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} (\tilde{a}_l^j \cos lx + \tilde{b}_l^j \sin lx). \quad (27)$$

Многочлены $\hat{Q}_m^t(x)$, $\hat{P}_1^t(x)$, ..., $\hat{P}_k^t(x)$, удовлетворяющие условиям (27), будем называть тригонометрическими многочленами Эрмита – Якоби для $(n, \bar{m})$ и f^t .

Тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби могут не существовать [38]. В работе [39] исследован эффект Гиббса для аппроксимаций Паде функции знака $\operatorname{sgn} x$ и, в частности, при $k = 1$ найдены явные выражения для дробей $\pi'_{n,m}(x; s) := \pi'_{1,n,m}(x; s)$, $\hat{\pi}'_{n,m}(x; s) := \hat{\pi}'_{1,n,m}(x; s)$, где $s(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$, из которых следует, что эти дроби различны при всех $m \geq 1$. При $k = 1$ примеры функций, для которых тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби не существуют, а также примеры функций, для которых тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби существуют, но не совпадают с тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Паде, можно построить, основываясь на результатах работ [7; 18; 40]. В [41] при произвольных $k \geq 1$ построены примеры систем функций, для которых тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби существуют, но не совпадают с тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Паде. Результаты работы [41] можно дополнить, если вместо экспонент взять

функции Миттаг-Леффлера. Рассмотрим семейства тригонометрических рядов $G_\gamma(x; \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{(\gamma)_l} \cos lx$,

зависящих от параметров $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$. Нетрудно заметить, что $G_\gamma(x; \lambda)$ является действительной частью функции $E_\gamma(\lambda e^{ix})$. Считая, что $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные не равные нулю действительные числа, опре-

делим новую систему функций $\mathbf{G}_{\mathbf{k}, \gamma} = \{G_\gamma(x; \lambda_j)\}_{j=1}^k$.

Теорема 4. При всех n , начиная с некоторого n_0 , для мультииндекса $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\vec{m} \neq (0, \dots, 0)$, удовлетворяющего условию $n \geq m_j$, $j = 1, \dots, k$, существуют тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби $\{\hat{\pi}'_j(x; \mathbf{G}_{\mathbf{k}, \gamma})\}_{j=1}^k$, и при соответствующей нормировке их знаменатель представим в виде

$$\hat{Q}'_m(x; \mathbf{G}_{\mathbf{k}, \gamma}) = Q_m(e^{ix}; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma}) \overline{Q_m(e^{ix}; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma})} = \frac{1}{\Gamma^2(n + m + \gamma)} \left| \int_0^{+\infty} U_\gamma(t) e^{-t(\cos x + i \sin x)} dt \right|^2.$$

Если $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k$, то среди $\{\hat{\pi}'_j(x; \mathbf{G}_{\mathbf{k}, \gamma})\}_{j=1}^k$ найдется аппроксимация Эрмита – Якоби $\hat{\pi}'_j(x; \mathbf{G}_{\mathbf{k}, \gamma})$, которая не является аппроксимацией Эрмита – Паде $\pi'_j(x; \mathbf{G}_{\mathbf{k}, \gamma})$.

Доказательство. Многочлен $Q_m(z; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma})$ представим формулой (8), и в круге $|z| \leq 1$ справедливы равенства (11). Допустим, что в (11) $z = e^{ix}$, а затем приравняем действительные части от выражений, стоящих слева и справа от нового знака равенства. Тогда

$$G_\gamma(x; \lambda_j) - \operatorname{Re} \left\{ \frac{P_{n_j}^j(e^{ix}; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma})}{Q_m(e^{ix}; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma})} \right\} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{a}_l^j \cos lx. \quad (28)$$

Остается показать, что при $n \geq \max\{m_j : 1 \leq j \leq k\}$

$$\hat{\pi}'_j(x; \mathbf{G}_{\mathbf{k}, \gamma}) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{P_{n_j}^j(e^{ix}; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma})}{Q_m(e^{ix}; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma})} \right\}. \quad (29)$$

Для этого представим многочлены $Q_m(z; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma})$, $P_{n_j}^j(z; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma})$ в виде

$$Q_m(z; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma}) = \sum_{p=0}^m b_p z^p = 1 + \dots + b \frac{\Gamma(n + \gamma)}{\Gamma(n + m + \gamma)} z^m, \quad P_{n_j}^j(z; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma}) = \sum_{p=0}^{n_j} a_p^j z^p.$$

Поскольку b_p и a_p^j – действительные числа, то при $z = e^{ix}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \pi'_{n_j, n, \vec{m}}(e^{ix}; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma}) \right\} &= \frac{1}{2} \left(\frac{P_{n_j}^j(z)}{Q_m(z)} + \overline{\frac{P_{n_j}^j(z)}{Q_m(z)}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sum_{p=0}^{n_j} a_p^j e^{ipx} \sum_{l=0}^m b_l e^{-ilx} + \sum_{p=0}^{n_j} a_p^j e^{-ipx} \sum_{s=0}^m b_s e^{isx}}{\sum_{s=0}^m b_s e^{isx} \sum_{p=0}^m b_p e^{-ipx}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Заметим, что

$$\sum_{s=0}^m b_s e^{isx} \sum_{l=0}^m b_l e^{-ilx} = \sum_{s=0}^m \sum_{l=0}^m b_s b_l \cos(s-l)x,$$

$$\sum_{p=0}^{n_j} a_p^j e^{ipx} \sum_{l=0}^m b_l e^{-ilx} + \sum_{p=0}^{n_j} a_p^j e^{-ipx} \sum_{s=0}^m b_s e^{isx} = 2 \sum_{p=0}^{n_j} \sum_{l=0}^m a_p^j b_l \cos(p-l)x.$$

Следовательно, из формулы (30) при $j = 1, \dots, k$ получим

$$\operatorname{Re} \left\{ \pi_{n_j, n, \vec{m}}^j(e^{ix}, \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma}) \right\} = \frac{\sum_{p=0}^{n_j} \sum_{l=0}^m a_p^j b_l \cos(p-l)x}{\sum_{s=0}^m \sum_{l=0}^m b_s b_l \cos(s-l)x} =: \frac{\tilde{P}_j'(x)}{\tilde{Q}_m'(x)}. \quad (31)$$

Из условия $n \geq m_j$ ($j = 1, \dots, k$) для мультииндекса $(n, \vec{m})$ следует, что $n_j \geq m$. Принимая во внимание (31), получаем, что $\deg \tilde{Q}_m' \leq m$, $\deg \tilde{P}_j' \leq n_j$, $j = 1, \dots, k$. Значит, тождество (29) и первая часть теоремы 4 доказаны.

Докажем вторую часть теоремы. Из (28) и (31) следует, что

$$G_\gamma(x; \lambda_j) - \hat{\pi}_j'(x; \mathbf{G}_{\mathbf{k}, \gamma}) = G_\gamma(x; \lambda_j) - \frac{\tilde{P}_j'(x)}{\tilde{Q}_m'(x)} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{a}_l^j \cos lx.$$

Воспользовавшись тригонометрической формулой для произведения двух косинусов, из последнего равенства и из (9) и (31) получаем

$$\tilde{Q}_m'(x) G_\gamma(x; \lambda_j) - \tilde{P}_j'(x) = \alpha_{n+1}^j \cos(n+1)x + \alpha_{n+2}^j \cos(n+2)x + \dots, \quad (32)$$

где $\alpha_{n+1}^j = 2b_m b_0 \tilde{a}_{n+m+1}^j$. Напомним, что

$$b_0 = 1, b_m = b \frac{\Gamma(n+\gamma)}{\Gamma(n+m+\gamma)}, \tilde{a}_{n+m+1}^j = \frac{1}{\lambda_j^{\gamma-1}(\gamma)_{n+m}} \int_0^{\lambda_j} U_\gamma(x) dx.$$

Если $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k$, то нетрудно показать, что, например, $\tilde{a}_{n+m+1}^1 \neq 0$, и тогда в (32) $\alpha_{n+1}^1 \neq 0$. Из определений следует, что $\hat{\pi}_1'(x; \mathbf{G}_{\mathbf{k}, \gamma}) \neq \pi_1'(x; \mathbf{G}_{\mathbf{k}, \gamma})$. Теорема 4 доказана.

Линейные аппроксимации Эрмита – Чебышева

В этом разделе терминология частично заимствована из работы [7]. Пусть набор $\mathbf{f}^{\text{ch}} = (f_1^{\text{ch}}, \dots, f_k^{\text{ch}})$ состоит из функций, представленных рядами Фурье по многочленам Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ вида

$$f_j^{\text{ch}}(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l^j T_l(x), \quad j = 1, \dots, k \quad (33)$$

с действительными коэффициентами. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$ и рассмотрим следующую задачу.

Задача $\mathbf{A}^{\text{ch}}$. Для системы функций $\mathbf{f}^{\text{ch}}$ найти тождественно не равный нулю многочлен $Q_m^{\text{ch}}(x) = Q_{n, \vec{m}}^{\text{ch}}(x; \mathbf{f}^{\text{ch}}) = \sum_{p=0}^m u_p T_p(x)$ и такие многочлены $P_j^{\text{ch}}(x) = P_{n_j, n, \vec{m}}^{\text{ch}}(x; \mathbf{f}^{\text{ch}}) = \sum_{p=0}^{n_j} v_p^j T_p(x)$, $n_j = n + m - m_j$, чтобы для $j = 1, \dots, k$

$$Q_m^{\text{ch}}(x) f_j^{\text{ch}}(x) - P_j^{\text{ch}}(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{a}_l^j T_l(x). \quad (34)$$

Определение 10. Если пара $(Q_m^{\text{ch}}, P^{\text{ch}})$, где $P^{\text{ch}} := (P_1^{\text{ch}}, \dots, P_k^{\text{ch}})$, удовлетворяет условиям (34), то многочлены $Q_m^{\text{ch}}(x)$, $P_1^{\text{ch}}(x)$, $\dots$, $P_k^{\text{ch}}(x)$ и рациональные дроби

$$\pi_j^{\text{ch}}(x; \mathbf{f}^{\text{ch}}) = \pi_{n_j, n, \vec{m}}^{\text{ch}}(x; \mathbf{f}^{\text{ch}}) = \frac{P_j^{\text{ch}}(x)}{Q_m^{\text{ch}}(x)}, \quad j = 1, \dots, k,$$

будем называть соответственно многочленами Эрмита – Чебышева и линейными аппроксимациями Эрмита – Чебышева для мультииндекса $(n, \vec{m})$ и системы $\mathbf{f}^{\text{ch}}$.

Решение задачи $\mathbf{A}^{\text{ch}}$ можно получить, опираясь на теорему 3. Для этого в (33) заменим x на $\cos x$. Полагая, что $\tilde{f}_j^t(x) = f_j^{\text{ch}}(\cos x)$, получим систему $\tilde{\mathbf{f}}^t = (\tilde{f}_1^t, \dots, \tilde{f}_k^t)$, где

$$\tilde{f}_j^t(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l^j \cos lx, \quad j = 1, \dots, k.$$

Для системы $\tilde{\mathbf{f}}^t$ задача $\mathbf{A}^t$ имеет единственное решение только в том случае, когда мультииндекс $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ является слабонормальным для $\tilde{\mathbf{f}}^t$. Для слабонормального индекса тригонометрические многочлены Эрмита – Паде при соответствующем выборе нормирующего множителя имеют вид

$$Q_m^t(x; \tilde{\mathbf{f}}^t) = D(n, \vec{m}; x), \quad (35)$$

$$P_j^t(x; \tilde{\mathbf{f}}^t) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} d_p^j(n, \vec{m}) e^{ipx} \quad (36)$$

и для них

$$Q_m^t(x; \tilde{\mathbf{f}}^t) \tilde{f}_j^t(x) - P_j^t(x; \tilde{\mathbf{f}}^t) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} (d_p^j(n, \vec{m}) e^{ipx} + d_{-p}^j(n, \vec{m}) e^{-ipx}). \quad (37)$$

Блок-матрицы $F_{\pm}^j$ для этой системы имеют вид

$$F_+^j = \begin{pmatrix} h_{n_j+m+m_j}^j & h_{n_j+m+m_j-1}^j & \dots & h_{n_j-m+m_j}^j \\ h_{n_j+m+m_j-1}^j & h_{n_j+m+m_j-2}^j & \dots & h_{n_j-m+m_j-1}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n_j+m+1}^j & h_{n_j+m}^j & \dots & h_{n_j-m+1}^j \end{pmatrix},$$

$$F_-^j = \begin{pmatrix} h_{-n_j+m-1}^j & h_{-n_j+m-2}^j & \dots & h_{-n_j-m-1}^j \\ h_{-n_j+m-2}^j & h_{-n_j+m-3}^j & \dots & h_{-n_j-m-2}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{-n_j+m-m_j}^j & h_{-n_j+m-m_j-1}^j & \dots & h_{-n_j-m-m_j}^j \end{pmatrix},$$

где $h_p^j = \frac{a_p^j}{2}$, $j = 1, \dots, k$; $p \in \mathbb{Z}$. Теперь нетрудно убедиться, что в равенствах (35)–(37) коэффициенты при степенях e^{ipx} и e^{-ipx} совпадают:

$$d_p^j(n, \vec{m}) = d_{-p}^j(n, \vec{m}), \quad p = 1, 2, \dots; \quad j = 1, \dots, k; \quad u_l = u_{-l}, \quad l = 1, \dots, m.$$

Следовательно, равенства (35)–(37) можно переписать в виде

$$Q_m^t(x; \tilde{\mathbf{f}}^t) = u_0 + \sum_{p=1}^m 2u_p \cos px, \quad P_j^t(x; \tilde{\mathbf{f}}^t) = d_0^j(n, \vec{m}) + \sum_{p=1}^{n_j} 2d_p^j(n, \vec{m}) \cos px,$$

$$Q_m^t(x; \tilde{\mathbf{f}}^t) \tilde{f}_j^t(x) - P_j^t(x; \tilde{\mathbf{f}}^t) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} 2d_p^j(n, \vec{m}) \cos px.$$

Если здесь x заменить на $\arccos x$, то получим

$$Q_m^{\text{ch}}(x; \mathbf{f}^{\text{ch}}) = Q_m^t(\arccos x; \tilde{\mathbf{f}}^t) = u_0 + \sum_{p=1}^m 2u_p T_p(x), \quad (38)$$

$$P_j^{\text{ch}}(x; \mathbf{f}^{\text{ch}}) = P_j^t(\arccos x; \tilde{\mathbf{f}}^t) = d_0^j + \sum_{p=1}^{n_j} 2d_p^j(n, \vec{m}) T_p(x), \quad (39)$$

$$Q_m^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch}) f_j^{ch}(x) - P_j^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch}) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} 2d_p^j(n, \bar{m}) T_p(x). \quad (40)$$

Заметим, что если мультииндекс $(n, \bar{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ не является слаборегулярным для системы $\tilde{\mathbf{f}}^t$, то решение задачи $\mathbf{A}^t$ для $\tilde{\mathbf{f}}^t$ не единственно, и поэтому решение соответствующей задачи $\mathbf{A}^{ch}$ также не единственно. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 5. Для того чтобы для фиксированного мультииндекса $(n, \bar{m})$, $\bar{m} \neq (0, \dots, 0)$, и системы функций $\mathbf{f}^{ch}$, определяемых равенствами (33), задача $\mathbf{A}^{ch}$ имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы мультииндекс $(n, \bar{m})$ был слаборегулярным для системы $\tilde{\mathbf{f}}^t$. Если решение задачи $\mathbf{A}^{ch}$ единственно, то для ее решений справедливы представления (38)–(40).

Приведем несколько очевидных следствий из теоремы 5.

Следствие 4. Пусть мультииндекс $(n, \bar{m})$ является слаборегулярным для $\tilde{\mathbf{f}}^t$. Тогда коэффициенты многочленов $Q_m^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch})$, $P_1^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch})$, ..., $P_k^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch})$ – действительные числа.

Следствие 5. Для того чтобы задача $\mathbf{A}^{ch}$ имела единственное решение для любого $(n, \bar{m})$, необходимо и достаточно, чтобы система $\tilde{\mathbf{f}}^t$ была слабосовершенной.

Следствие 6. Если мультииндекс $(n, \bar{m})$ слаборегулярный для $\tilde{\mathbf{f}}^t$, то линейные аппроксимации Эрмита –

Чебышева $\pi_j^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch}) = \frac{P_j^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch})}{Q_m^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch})}$ определяются однозначно.

Нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышева

Определим теперь другую конструкцию для совместного приближения рядов (33).

Определение 11. Рациональные функции вида $\hat{\pi}_j^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch}) = \hat{\pi}_{n_j, n, \bar{m}}^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch}) = \frac{\hat{P}_j^{ch}(x)}{\hat{Q}_m^{ch}(x)}$, где многочлены

$$\hat{Q}_m^{ch}(x) = \sum_{p=0}^m \hat{u}_p T_p(x), \quad \hat{P}_j^{ch}(x) = \sum_{p=0}^{n_j} \hat{v}_p^j T_p(x) \quad (n_j = n + m - m_j)$$

подобраны так, чтобы

$$f_j^{ch}(x) - \frac{\hat{P}_j^{ch}(x)}{\hat{Q}_m^{ch}(x)} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \hat{a}_l^j T_l(x) \quad (j=1, \dots, k),$$

будем называть нелинейными аппроксимациями Эрмита – Чебышева для мультииндекса $(n, \bar{m})$ и системы $\mathbf{f}^{ch}$.

При $k=1$ существуют функции, для которых нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышева не существуют, и функции, для которых нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышева существуют, но не совпадают с линейными [7; 11; 12; 18; 40; 41]. Рассмотрим новую систему функций, обладающую аналогичным свойством.

Пусть $\mathbf{F}_{k, \gamma} = \{F_\gamma(x; \lambda_j)\}_{j=1}^k$, где $F_\gamma(x; \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{(\gamma)_l} T_l(x)$, а $\lambda \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$, $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные не рав-

ные нулю действительные числа. Аналогично теореме 4 доказывается следующая теорема.

Теорема 6. При всех n , начиная с некоторого n_0 , для мультииндекса $(n, \bar{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\bar{m} \neq (0, \dots, 0)$, удовлетворяющего условию $n \geq m_j$, $j=1, \dots, k$, существуют нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышева $\{\hat{\pi}_j^{ch}(x; \mathbf{F}_{k, \gamma})\}_{j=1}^k$ и справедливы равенства

$$\hat{Q}_m^{ch}(x; \mathbf{F}_{k, \gamma}) = Q_m(e^{i \arccos x}; \mathbf{F}_{k, \gamma}) \overline{Q_m(e^{i \arccos x}; \mathbf{F}_{k, \gamma})} = \frac{1}{\Gamma^2(n+m+\gamma)} \left| \int_0^{+\infty} T_\gamma(t) e^{-t(x+i\sqrt{1-x^2})} dt \right|^2.$$

При $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k$ среди $\{\hat{\pi}_j^{ch}(x; \mathbf{F}_{k, \gamma})\}_{j=1}^k$ найдется нелинейная аппроксимация Эрмита – Чебышева $\hat{\pi}_j^{ch}(x; \mathbf{F}_{k, \gamma})$, не равная аппроксимации Эрмита – Чебышева $\pi_j^{ch}(x; \mathbf{F}_{k, \gamma})$.

Библиографические ссылки

1. Andrianov IV, Awrejcewicz J. New trends in asymptotic approaches: summation and interpolation methods. *Applied Mechanics Reviews*. 2001;54(1):69–92. DOI: 10.1115/1.3097289.
2. Книжнерман ЛА. Выделение полюсов потенциальных полей с помощью разложения в ряды Фурье – Чебышева. *Известия АН СССР. Физика Земли*. 1984;11:119–123.
3. Tee TW, Trefethen LN. A rational spectral collocation method with adaptively transformed Chebyshev grid points. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2006;28(5):1798–1811. DOI: 10.1137/050641296.
4. Druskin V, Knizhnerman L. Gaussian spectral rules for the three-point second differences. I. A two-point positive definite problem in a semi-infinite domain. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1999;37(2):403–422. DOI: 10.1137/S0036142997330792.
5. Ермохин КМ. Продолжение геофизических полей в область источников аномалий методом аппроксимации цепными дробями. *Геофизика*. 2007;1:51–55.
6. Гончар АА, Рахманов ЕА, Суетин СП. Аппроксимации Паде – Чебышева для многозначных аналитических функций, вариация равновесной энергии и S -свойство стационарных компактов. *Успехи математических наук*. 2011;66(6):3–36. DOI: 10.4213/rm9452.
7. Суетин СП. О существовании нелинейных аппроксимаций Паде – Чебышева для аналитических функций. *Математические заметки*. 2009;86(2):290–303. DOI: 10.4213/mzm5262.
8. Прохоров ГВ, Колбеев ВВ, Желнов КИ, Леднев МА. *Математический пакет Maple V Release 4: руководство пользователя*. Калуга: Облиздат; 1998. 199 с.
9. Frobenius G. Ueber Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1881;90:1–17.
10. Jacobi CGJ. Über die Darstellung einer Reihe gegebener Werthe durch eine gebrochene rationale Function. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1845;30:127–156.
11. Бейкер Дж, Грейвс-Моррис П. *Аппроксимации Паде*. Рахманов ЕА, Суетин СП, переводчики. Москва: Мир; 1986. 502 с.
12. Суетин СП. О теореме Монтегю де Болора для нелинейных аппроксимаций Паде ортогональных разложений и рядов Фабера. *Доклады АН СССР*. 1980;253(6):1322–1325.
13. Hermite C. Sur la fonction exponentielle. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. 1873;77:18–293.
14. Mahler K. Perfect systems. *Compositio mathematica*. 1968;19(2):95–166.
15. Никишин ЕМ, Сорокин ВН. *Рациональные аппроксимации и ортогональность*. Москва: Наука; 1988. 256 с.
16. Beckermann B, Kalyagin V, Matos Ana C, Wielonsky F. How well does the Hermite – Padé approximation smooth the Gibbs phenomenon? *Mathematics of Computation*. 2011;80(274):931–958. DOI: 10.1090/S0025-5718-2010-02411-1.
17. Сорокин ВН. Циклические графы и теорема Аперри. *Успехи математических наук*. 2002;57(3):99–134. DOI: 10.4213/rm512.
18. Суетин СП. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда. *Успехи математических наук*. 2002;57(1):45–142. DOI: 10.4213/rm475.
19. Суетин СП. Распределение нулей полиномов Паде и аналитическое продолжение. *Успехи математических наук*. 2015;70(5):121–174. DOI: 10.4213/rm9675.
20. Bleher PM, Kuijlaars ABJ. Random matrices with external source and multiple orthogonal polynomials. *International Mathematics Research Notices*. 2004;3:109–129. DOI: 10.1155/S1073792804132194.
21. Aptekarev AI, Bleher PM, Kuijlaars ABJ. Large n limit of Gaussian random matrices with external source. Part 2. *Communications in Mathematical Physics*. 2005;259:367–389. DOI: 10.1007/s00220-005-1367-9.
22. Аптекарев АИ, Лысов ВГ, Туляков ДН. Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов. *Математический сборник*. 2011;202(2):3–56. DOI: 10.4213/sm7702.
23. Калягин ВА. Аппроксимации Эрмита – Паде и спектральный анализ несимметричных операторов. *Математический сборник*. 1994;185(6):79–100.
24. Aptekarev AI, Kalyagin VA, Saff EB. Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials. *Constructive Approximation*. 2009;30:175–223. DOI: 10.1007/s00365-008-9032-0.
25. Chudnovsky GV. Hermite – Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π . In: Chudnovsky DV, Chudnovsky GV, editors. *The riemann problem, complete integrability and arithmetic applications*. New York: Springer-Verlag; 1982. p. 299–322 (Lecture notes in mathematics; volume 925). DOI: 10.1007/BFb0093516.
26. van Assche W. Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcendence. In: Berndt BC, Gesztesy F, editors. *Continued fractions: from analytic number theory to constructive approximation: a volume in honor of L. J. Lange*. Providence: American Mathematical Society; 1999. p. 325–342 (Contemporary mathematics; volume 236). DOI: 10.1090/conm/236/03504.
27. Geddes KO. Block structure in the Chebyshev – Padé table. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1981;18(5):844–861. DOI: 10.1137/0718058.
28. Litvinov GL. Error autocorrection in rational approximation and interval estimates. [A survey of results]. *Central European Journal of Mathematics*. 2003;1(1):36–60. DOI: 10.2478/BF02475663.
29. Адуков ВМ, Ибряева ОЛ. Асимптотическое поведение знаменателей аппроксимаций Паде – Чебышева для последней промежуточной строки. Рациональный случай. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, физика, химия*. 2005;6(6):11–18.
30. Padé H. Sur la représentation approchée d’une fonction par des fractions rationnelles. *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure. Serie 3*. 1892;9:3–93.
31. Старовойтов АП, Рябенко НВ, Волков ВА. О существовании и единственности многочленов Эрмита – Паде второго рода. *Проблемы физики, математики и техники*. 2019;2(39):92–96.
32. Старовойтов АП, Рябенко НВ. О детерминантных представлениях многочленов Эрмита – Паде. *Труды Московского математического общества*. 2022;83(1):17–35.
33. Оснач ТМ, Рябенко НВ, Старовойтов АП. Аналог теоремы Якоби для одновременной эрмитовской интерполяции нескольких функций. *Проблемы физики, математики и техники. Серия: Математика*. 2023;1(54):89–92. DOI: 10.54341/20778708_2023_1_54_89.

34. Аптекарев АИ. Об аппроксимациях Паде к набору $\{ {}_1F_1(1, c; \lambda_i z) \}_{i=1}^k$. *Вестник Московского университета. Серия I, Математика. Механика*. 1981;2:58–62.
35. Mittag-Leffler MG. Sur la nouvelle fonction $Ea(x)$. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Paris*. 1903;137:554–558.
36. de Bruin MG. Convergence of the Padé table for ${}_1F_1(1; c; x)$. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*. 1976;79(5):408–418. DOI: 10.1016/S1385-7258(76)80004-2.
37. Старовойтов АП. Аппроксимации Эрмита – Паде функций Миттаг-Леффлера. *Труды Математического института имени В. А. Стеклова*. 2018;301(1):241–258. DOI: 10.1134/S0371968518020188.
38. Лабыч ЮА, Старовойтов АП. Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье. *Математический сборник*. 2009;200(7):107–130. DOI: 10.4213/sm4523.
39. Nemeth G, Pàris G. The Gibbs phenomenon in generalized Padé approximation. *Journal of Mathematical Physics*. 1985;26(6):1175–1178. DOI: 10.1063/1.526521.
40. Суетин СП. *Вопросы сходимости аппроксимаций Паде – Фабера* [диссертация]. Москва: МГУ имени М. В. Ломоносова; 1981. 78 с.
41. Старовойтов АП, Кечко ЕП, Оснач ТМ. О существовании тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышева. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2023;2:6–17. DOI: 10.33581/2520-6508-2023-2-6-17. EDN: XJRLWT.

Получена 30.08.2024 / исправлена 04.10.2024 / принята 18.10.2024.
Received 30.08.2024 / revised 04.10.2024 / accepted 18.10.2024.