
ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

УДК 004.9:656.6

ВКЛЮЧЕНИЕ ДОСТУПНОСТИ БЫСТРЫХ ЗАРЯДНЫХ СТАНЦИЙ В МОДЕЛЬ НАЗНАЧЕНИЙ ГОРОДСКИХ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМА ФРАНКА – ВУЛЬФА

ДУ СИЧЖОУ¹⁾, Д. С. САРАЖИНСКИЙ¹⁾, Д. В. КАПСКИЙ^{1), 2)}

¹⁾Белорусский национальный технический университет,
пр. Независимости, 65, 220013, г. Минск, Беларусь

²⁾Академия управления при Президенте Республики Беларусь,
ул. Московская, 17, 220007, г. Минск, Беларусь

Аннотация. В связи с ростом использования электромобилей возникает необходимость в адаптации транспортных моделей для учета специфики их эксплуатации. Целью работы является модификация классической модели назначений транспортных потоков на основе алгоритма Франк – Вульфа, широко применяемой в транспортном планировании, для корректного отражения процессов зарядки электромобилей в городских условиях. Новизна исследования заключается в разработке подхода, который, в отличие от существующих подходов, комплексно учитывает три ключевые особенности: требование прохождения маршрута электромобиля, нуждающегося в зарядке, ровно через одну зарядную станцию; возможность движения по путям с циклами для доступа к зарядным станциям и последующего следования к пункту назначения в условиях ограничений городской дорожно-транспортной сети; поведенческий аспект отказа пользователя от зарядки, если суммарные временные затраты (включая движение к станции и ожидание в очереди) превышают некоторое пороговое значение. В статье также предлагается функция временных затрат, учитывающая специфику процесса зарядки, в том числе очереди и количество зарядных мест. Результаты демонстрируют, что классическую модель назначений транспортных потоков на основе алгоритма Франк – Вульфа действительно можно модифицировать для учета указанных особенностей. Отмечается,

Образец цитирования:

Ду Сичжоу, Саражинский ДС, Капский ДВ. Включение доступности быстрых зарядных станций в модель назначений городских транспортных потоков на основе алгоритма Франк – Вульфа. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2026;1:81–93. EDN: LYDVNK

For citation:

Du Sizhuo, Sarazhinsky DS, Kapski DV. Incorporating fast charging stations accessibility into an urban traffic assignment model based on the Frank – Wolfe algorithm. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2026; 1:81–93. Russian. EDN: LYDVNK

Сведения об авторах см. на с. 93.

Information about the authors see p. 93.



Специальный выпуск «Стохастика и анализ данных»
Special issue «Stochastic and Data Science»

что предлагаемая модель может характеризоваться множественностью равновесных распределений потоков, зависящих от начальных условий. Практическая значимость работы состоит в возможности более точного моделирования транспортных потоков и нагрузки на зарядную инфраструктуру в городах.

Ключевые слова: электрокар; быстрая зарядная станция; распределение транспортных потоков по сети; равновесие Вардропа; алгоритм Франк – Вульфа.

INCORPORATING FAST CHARGING STATIONS ACCESSIBILITY INTO AN URBAN TRAFFIC ASSIGNMENT MODEL BASED ON THE FRANK – WOLFE ALGORITHM

DU SIZHUO^a, D. S. SARAZHINSKY^a, D. V. KAPSKI^{a, b}

^aBelarusian National Technical University,
65 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220013, Belarus

^bAcademy of Public Administration under the President of the Republic of Belarus,
17 Maskowskaja Street, Minsk 220007, Belarus

Corresponding author: D. V. Kapski (d.kapski@gmail.com)

Abstract. The growing use of electric vehicles necessitates the adaptation of transport models to account for the specifics of their operation. The aim of this work is to modify the classic traffic assignment model based on the Frank – Wolfe algorithm, widely used in transportation planning, to accurately reflect electric vehicle charging processes in urban environments. The novelty of the research lies in the development of an approach that, unlike existing approaches, comprehensively addresses three key features: the requirement for an electric vehicle needing to charge to route through exactly one charging station; the possibility of routing along paths with cycles to access charging stations and subsequently reach the destination, considering urban road network constraints; the behavioural aspect of a user's decision to forgo charging if the total time costs (including travel to the station and queuing) exceed a certain threshold. The paper also proposes a time-cost function that accounts for the specifics of the charging process, including queues and the number of charging spots. The results demonstrate that the classic traffic assignment model based on the Frank – Wolfe algorithm can indeed be modified to incorporate these features. It is noted that the proposed model may exhibit multiple equilibrium flow distributions, dependent on initial conditions. The practical significance of the work lies in its potential for more accurate modelling of traffic flows and the load on urban charging infrastructure.

Keywords: electric vehicle; fast charging station; traffic assignment; Wardrop equilibrium; Frank – Wolfe algorithm.

Введение

Устойчивое развитие городов невозможно без создания экологичной и комфортной транспортной системы, имеющей как можно более низкий (желательно нулевой) углеродный след¹. В связи с этим, помимо других мер, активно применяется замена классических (бензиновых) автомобилей на транспортные средства, использующие альтернативные, зеленые виды энергии. Наибольшую популярность получили электромобили в различных вариантах конструктивного исполнения. Рост использования электромобилей как средств обеспечения городской мобильности и специфика данных транспортных средств обуславливают необходимость пересмотра известных транспортных моделей, применяемых в транспортном планировании городов. В частности, требуется включение связанных с эксплуатацией таких автомобилей закономерностей в широко используемую макромодель распределения транспортного спроса по дорожной сети (речь о ней пойдет ниже).

Неформально задачу распределения транспортного спроса по дорожной сети (в том виде, в котором она встречается в транспортном планировании) можно описать следующим образом: пусть имеется дорожная сеть города и известен транспортный спрос, т. е. общее количество поездок, которые жители хотят совершить за определенное время между различными районами города. Для целей транспортного моделирования эти районы представляются дополнительными (специальными) транспортными узлами сети – источниками, откуда поездки начинаются, и стоками, где поездки заканчиваются. Каждый

¹Устойчивая городская мобильность: теория и практика развития : учебник / А. О. Лобашов [и др.]. М. ; Вологда : Инфраинженерия, 2023. 236 с.

источник генерирует заданное число поездок к соответствующему стоку. Когда этот спрос реализуется, он формирует транспортные потоки, которые в модели представляются интенсивностями движения автомобилей по различным маршрутам и сегментам сети (количество автомобилей, проходящих по маршруту или сегменту дорожной сети в единицу времени).

Поскольку от источника к стоку почти всегда существует несколько альтернативных путей, возникает ключевой вопрос: «Каким образом транспортные потоки (водители) распределяются по этим маршрутам?» Это так называемая задача о назначении транспортных потоков в маршрутной (*path-based*) постановке [1]. Поскольку число маршрутов может оказаться очень большим, решение такой задачи бывает вычислительно сложным и часто непрактичным. По этой причине также рассматривают другую задачу: предсказать суммарные транспортные потоки на отдельных сегментах дорожной сети. Это задача о назначении транспортных потоков в сегментной (*link-based*) постановке [1], которая и будет рассматриваться далее.

Теперь более формально представим дорожную сеть в виде простого ориентированного графа (орграфа) (V°, E°) , где V° – вершины, представляющие собой транспортные узлы сети; $E^\circ \subseteq V^\circ \times V^\circ$ – множество дуг, соответствующих односторонним сегментам дорожной сети. (Двустороннее движение по участку дороги моделируется парой противоположно направленных дуг.) Расширим этот орграф до орграфа (V, E) за счет добавления к нему двух непересекающихся множеств вершин – O (множество вершин, отвечающих источникам генерации транспортного спроса) и D (множество вершин, соответствующих стокам), а также множеств дуг $E_O \subseteq O \times V^\circ$ и $E_D \subseteq V^\circ \times D$. (Заметим, что случай, когда один и тот же транспортный узел сети служит как пунктом отправления, так и пунктом назначения поездок, моделируется здесь парой формально различных вершин – одной вершиной из множества O и одной вершиной из множества D .)

Под путем, соединяющим источник $o \in O$ и сток $d \in D$, будем понимать конечную последовательность $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ дуг $e_k = (v_k, v'_k) \in E$ такую, что $v_1 = o$, $v'_n = d$ и $v'_{k-1} = v_k$, $k = 2, \dots, n$. Обозначим через ${}^{od}\mathcal{P}$ множество всех таких путей. Положим, что для всякой пары (o, d) , которую также будем называть корреспонденцией, соответствующее множество путей непустое. С учетом вышеопределенного соответствующий орграф договоримся называть орграфом дорожной сети.

С каждой корреспонденцией (o, d) свяжем значение $q_{od} \geq 0$ – транспортный спрос, представляющий собой количество начинающихся в единицу времени поездок из источника $o \in O$ в сток $d \in D$. Эти поездки, как указывалось ранее, порождают физические транспортные потоки по маршрутам и сегментам дорожной сети. В орграфе, моделирующем дорожную сеть, их можно представить через приписывание путям и дугам соответствующих величин интенсивностей движения. В последующем эти величины будем называть транспортными потоками (порожденными транспортным спросом), а процедуру их определения на основе транспортного спроса – распределением спроса и потоков по орграфу дорожной сети. Далее предполагается, что пропускные способности сегментов дорожной сети неограниченны, поэтому от распределения спроса по орграфу дорожной сети будет требоваться только выполнение соотношений, отвечающих сохранению физического транспортного потока.

Для всякого пути $p \in {}^{od}\mathcal{P}$ обозначим через x_p ту часть транспортного спроса, которая распределена на p . Тогда задачу о назначении транспортных потоков в маршрутной постановке можно представить как задачу предсказания значений всех x_p , $p \in {}^{od}\mathcal{P}$, $o \in O$, $d \in D$, при заданном наборе $\mathbf{q} = (q_{od})_{o \in O, d \in D}$.

Чтобы сформулировать задачу о назначении транспортных потоков в сегментной постановке, для всякой дуги $e \in E$ пошагово определим следующие величины:

- транспортный поток по дуге pf_e , порождаемый распределением транспортного спроса на путь $p = (e_1, \dots, e_n)$:

$${}^pf_e = \sum_{k=1}^n x_p \delta_{ee_k}, \quad (1)$$

где $\delta_{ee'} = 1$, если $e' = e$, и $\delta_{ee'} = 0$ в противном случае;

- транспортный поток по дуге ${}^{od}f_e$, порождаемый распределением транспортного спроса корреспонденции (o, d) по путям $p \in {}^{od}\mathcal{P}$:

$${}^{od}f_e = \sum_{p \in {}^{od}\mathcal{P}} {}^pf_e; \quad (2)$$

- общий транспортный поток по дуге f_e :

$$f_e = \sum_{o \in O, d \in D} {}^{od}f_e. \quad (3)$$

С учетом этого задачу о назначении транспортных потоков в сегментной постановке можно сформулировать как задачу предсказания всех ${}^{od}f_e$ (либо только f_e), $e \in E$, $o \in O$, $d \in D$, при заданном q .

Одним из классических подходов к решению указанной задачи является подход, использующий понятие равновесного распределения транспортных потоков по дорожной сети [1–3]: поскольку пользователь вынужден платить за передвижение в первую очередь временем и поскольку типично время передвижения по сегментам дорожной сети зависит от количества пользователей на ней (плотный транспортный поток движется с меньшей скоростью), то можно рассматривать передвижение пользователей в сети как некооперативную игру между ними, где каждый «игрок» стремится «выиграть» себе время за счет выбора подходящего маршрута. Как следствие, естественно ожидать, что если и существует стационарное распределение транспортных потоков по дорожной сети, то оно должно соответствовать известной в теории игр равновесной по Нэшу стратегии. В транспортной области науки это соображение представлено первым принципом Вардропы (принципом равновесия пользователя)² [4]: равновесное распределение транспортных потоков по дорожной сети – это такое распределение, при котором ни одному участнику движения не выгодно в одностороннем порядке изменять свой маршрут. Иными словами, для любой пары источник – сток общая стоимость движения по любому из используемых маршрутов является одинаковой и не превышает стоимости движения по любому неиспользуемому маршруту для этой же пары.

Примечательно, что при довольно естественном во многих ситуациях предположении, согласно которому стоимость передвижения по всякой дуге $e \in E$ зависит только от общего транспортного потока f_e по этой дуге (и не зависит от потоков по другим дугам), задачу поиска равновесного распределения транспортных потоков можно представить в виде задачи оптимизации. Данное обстоятельство обусловлено следующими соображениями [5].

Пусть $c_e = c_e(f)$ – функция стоимости передвижения по дуге $e \in E$ от заданного на ней общего транспортного потока $f \geq 0$, которая монотонно зависит от f , а $C_e(f) = \int_0^f c_e(u) du$ – так называемая интегральная функция стоимости (первообразная функции стоимости).

Распределение транспортных потоков по путям x_p , $p \in {}^{od}\mathcal{P}$, $o \in O$, $d \in D$, можно представить в виде вектора $\mathbf{x} = (x_p)_{p \in {}^{od}\mathcal{P}, o \in O, d \in D}$ некоторого линейного пространства $\mathcal{L}$. Подмножество этого пространства, каждый элемент которого отвечает некоторому распределению транспортных потоков, порожденных q , договоримся называть допустимым и обозначать через X_q . Согласно формулам (1)–(3) всякий вектор $\mathbf{x} \in X_q$ определяет величины транспортных потоков по дугам ${}^p f_e$, ${}^{od} f_e$ и f_e , $e \in E$, $p \in {}^{od}\mathcal{P}$, $o \in O$, $d \in D$. Таким образом, можно говорить, что заданы функциональные зависимости между $\mathbf{x}$ и соответствующими потоками. Договоримся эти зависимости обозначать через ${}^p \hat{f}_e = {}^p \hat{f}_e(\mathbf{x})$, ${}^{od} \hat{f}_e = {}^{od} \hat{f}_e(\mathbf{x})$ и $\hat{f}_e = \hat{f}_e(\mathbf{x})$ соответственно.

С учетом вышеизложенного рассмотрим интегральную функцию суммарных потерь на сети

$$Z(\mathbf{x}) = \sum_{e \in E} C_e(\hat{f}_e(\mathbf{x})) = \sum_{e \in E} C_e(f_e), \quad \hat{f}_e = \hat{f}_e(\mathbf{x}). \quad (4)$$

Для удобства проведения анализа далее будем считать, что все введенные выше функции определены своими формулами и для ситуаций $\mathbf{x} \in \mathcal{L} \setminus X_q$, $f < 0$.

Рассмотрим распределение транспортных потоков $\mathbf{x}^* \in X_q$, доставляющее минимум функции $Z(\mathbf{x})$. Как известно, при всякой вариации (малом изменении) аргумента в точке минимума изменение функции в линейном приближении неотрицательно. Исходя из этого, рассмотрим вариацию $d\mathbf{x} \in \mathcal{L}$, состоящую в том, что часть транспортного потока некоторой корреспонденции (o, d) снимается с одного пути $p^* \in {}^{od}\mathcal{P}$ и перекладывается на другой путь $p \in {}^{od}\mathcal{P}$ (это соответствует ситуации, когда бесконечно малая часть пользователей решили изменить свой путь с p^* на p). С учетом того, что $C'_e(f) = c_e(f)$, можем записать

$$dZ = \sum_{e \in E} c_e(f_e^*) df_e^*, \quad f_e^* = \hat{f}_e(\mathbf{x}^*). \quad (5)$$

Но для рассматриваемого случая $d\hat{f}_e = d({}^{p^*} \hat{f}_e) + d({}^p \hat{f}_e)$, а значит, сумму в выражении (5) можно разбить на две суммы: 1) сумму по дугам пути p^* , содержащую слагаемые $c_e(f_e^*) d({}^{p^*} \hat{f}_e)$; 2) сумму по дугам

²Капский Д. В., Лосин Л. А. Транспорт в планировке городов : учеб.-метод. пособие для студентов специальности 1-44 01 02 «Организация дорожного движения» : в 10 ч. Ч. 1. Транспортное планирование: математическое моделирование. Минск : БНТУ, 2019. 94 с.

пути p , включающую слагаемые $c_e(f_e^*)d({}^p\hat{f}_e)$. Поскольку согласно нашему исходному предположению поток снимается с пути p^* и перекладывается на путь p , то все слагаемые в первой сумме будут отрицательными, а все слагаемые во второй сумме – положительными. Вторую сумму можно трактовать как затраты сменивших путь пользователей на новом пути, а первую сумму – как их затраты при движении по исходному пути. Поскольку суммарное изменение dZ в точке $\mathbf{x}^*$ должно быть неотрицательным, затраты на новом пути будут не меньше затрат на исходном пути, что совпадает с формулировкой принципа равновесия по Вардропу. Таким образом, можем заключить, что каждая точка минимума функции Z соответствует равновесному по Вардропу распределению.

Из приведенных рассуждений и вида выражения (5) вытекает, что если аналогичным образом ввести вектор $\mathbf{f} = ({}^{od}f_e)_{e \in E, o \in O, d \in D}$ с допустимым множеством F_q , рассматривать формулу (3) как определяющую зависимость $\hat{f}_e = \hat{f}_e(\mathbf{f})$ и использовать функцию

$$Z(\mathbf{f}) = \sum_{e \in E} C_e(\hat{f}_e(\mathbf{f})) = \sum_{e \in E} C_e(f_e), f_e = \hat{f}_e(\mathbf{f}), \quad (6)$$

то всякая точка минимума $\mathbf{f}^* \in F_q$ будет соответствовать некоторой точке минимума $\mathbf{x}^* \in X_q$ функции (4). Следовательно, можно говорить о том, что задача поиска равновесного распределения транспортных потоков в сегментной постановке также сводится к задаче оптимизации функции (в данном случае функции (6)).

В довольно естественном для практики предположении, согласно которому Z – выпуклая функция (для этого достаточно, чтобы выпуклостью обладала функция C_e , поскольку сумма выпуклых функций является выпуклой), с учетом того, что множества X_q и F_q являются выпуклыми (и компактными в евклидовой метрике), для поиска минимумов соответствующих функций можно использовать итерационный алгоритм Франк – Вульфа [6–8]. Его итерации включают следующие основные шаги.

Шаг 1. Минимизировать (в пределах допустимого множества) линейную аппроксимацию целевой функции, полученную разложением Тейлора в текущей точке.

Шаг 2. Сдвинуться по направлению к найденной точке на шаг, доставляющий минимум исходной целевой функции на этом направлении.

Примечательно, что в силу вида функции Z первый шаг сводится к простой и эффективной процедуре – поиску для каждой корреспонденции (o, d) пути минимальной стоимости (например, с помощью алгоритма Дейкстры) и временному распределению на него всего спроса q_{od} [1].

Подобная реализация первого шага и сделала этот алгоритм фундаментальным инструментом в транспортном планировании. Именно данный алгоритм поиска равновесного распределения транспортных потоков далее будем относить к (классической) модели назначений транспортных потоков Франк – Вульфа.

При попытке применить указанную модель к сетям с быстрыми зарядными станциями ее ключевые допущения перестают работать, поскольку процесс зарядки вводит новые структурные, маршрутные и поведенческие ограничения, которые не могут быть отражены в рамках классического подхода или его известных вариаций. В частности, возникают следующие особенности: транспортный спрос естественным образом разбивается (по меньшей мере) на два класса – спрос со стороны пользователей, которые нуждаются в зарядке, и спрос со стороны пользователей, не нуждающихся в зарядке. То же происходит и с элементами дорожной сети: среди них начинают выделяться особые элементы (узлы или сегменты), которые ассоциируются с зарядными станциями (типично недоступны для пользователей, не нуждающихся в зарядке). Некоторые эти особенности могут быть напрямую отражены в классической модели назначений транспортных потоков Франк – Вульфа (например, с помощью варианта модели многопользовательского равновесия [5] с двумя классами пользователей, одному из которых запрещено при передвижении использовать выделенные элементы сети, связанные с зарядными станциями), однако ряд особенностей требуют пересмотра модели. Укажем наиболее принципиальные из них.

1. При распределении по орграфу дорожной сети транспортных потоков пользователей, которые решили осуществить зарядку, необходимо обеспечить, чтобы путь у таких потоков включал ровно один элемент сети, отвечающий за зарядку.

2. Следует предусмотреть возможность распределения потоков пользователей, решивших осуществить зарядку, на пути, содержащие циклы (т. е. на пути, в которых одна и та же дуга может встречаться несколько раз). Данное требование связано с тем, что в городских условиях нередко существуют ограничения на движение по улично-дорожной сети к зарядной станции (например, из-за улиц с односторонним движением или перекрестков с запрещенными поворотами), которые вынуждают водителей использовать циклические маршруты.

3. Требуется учесть, что пользователи могут отказываться от зарядки (откладывать ее на потом), если общая потеря времени (включая движение к месту зарядки и ожидание в очереди) превышает некоторое пороговое значение.

Кроме того, хотя это и не столь принципиально, необходимо предложить новую функцию стоимости (потери времени), учитывающую специфику процесса зарядки, а именно очереди на зарядку, количество зарядных мест на станции и разброс времени зарядки.

Среди литературных источников имеется достаточно много работ, посвященных моделированию распределения транспортных потоков с учетом необходимости зарядки (см., например, [9–11]). Однако ни одна из известных авторам публикаций не охватывает сразу все вышеперечисленные особенности с их учетом в модели назначений транспортных потоков Франк – Вульфа. Наиболее близкой по рассматриваемой проблематике к настоящей работе является статья [12], однако в ней, во-первых, не учитываются требования 1–3, а во-вторых, используется довольно грубая ценовая функция, включающая технические (не имеющие содержательной интерпретации) параметры. Кроме того, модель представлена в виде общей оптимизационной задачи выпуклого программирования с ограничениями, что ставит под сомнение возможность ее масштабирования на сети большого размера (в отличие от модели назначений транспортных потоков Франк – Вульфа, у которой с этим нет принципиальных проблем).

Все вышеизложенное и делает актуальным вопрос о модификации (совершенствовании) модели назначений транспортных потоков Франк – Вульфа. Целью данной работы является разработка соответствующей модификации.

Разработка модифицированной модели назначений транспортных потоков Франк – Вульфа

В этом разделе мы, опираясь на соображения, на которых строится классическая модель назначений транспортных потоков Франк – Вульфа, проведем ряд обоснованных модификаций, чтобы отразить в них требования 1–3 из предыдущего раздела.

Пусть имеется классическая модель назначений транспортных потоков Франк – Вульфа, которая включает:

- модель транспортных потоков, заданную посредством орграфа дорожной сети (V, E) , набора монотонно возрастающих дифференцируемых функций стоимости передвижения $c_e = c_e(f)$, $e \in E$, и набора величин транспортного спроса по корреспонденциям $q = (q_{od})_{o \in O, d \in D}$;

- алгоритм Франк – Вульфа для поиска равновесного распределения транспортных потоков в указанной модели транспортных потоков.

Будем модифицировать модель, чтобы учесть определенную выше специфику, связанную с зарядными станциями.

Модификация модели транспортных потоков. Пусть имеется некоторое множество S , элементы которого представляют зарядные станции. Определим вначале операцию инсталлирования зарядной станции $s \in S$ на дугу $e = (v', v'') \in E$ как операцию, предполагающую следующие последовательные действия:

- 1) $V \mapsto V \cup \{s\}$ (добавить вершину, соответствующую зарядной станции s);
- 2) $E \mapsto E \cup \{(v', s), (s, v'')\}$ (добавить дуги, ведущие к зарядной станции s и от нее);
- 3) приписать добавленным дугам функции стоимости в соответствии со следующими соображениями.

Дуга $a^\uparrow = (v', s)$, ведущая к зарядной станции, моделирует подъезд к самой станции (после съезда с общей дороги), поэтому предусматривает движение только для автомобилей, которые нуждаются в зарядке. Поскольку интенсивности таких потоков предполагаются не слишком большими, то можно не учитывать их влияние на скорость движения по дуге. Соответственно, можно рассматривать эту часть потери времени как постоянную, равную некоторой константе t_a^o (время, необходимое для того, чтобы доехать до станции от узла v'). Далее к этому времени нужно добавить время, связанное с обслуживанием на станции. Для его расчета можно использовать результаты теории массового обслуживания для системы типа $M/G/k$, а именно будем отталкиваться от аналога формулы Поллачека – Хинчина для среднего времени ожидания в очереди $W_q^{M/G/k}$, например, в приближении, описанном в книге [13]:

$$W_q^{M/G/k} \approx W_q^{M/M/k} \frac{1 + J^2}{2} = \eta \tau \frac{1 + J^2}{2},$$

$$\eta = \frac{(k\rho)^k}{k(1-\rho)^2 k! \left(\frac{(k\rho)^k}{(1-\rho)k!} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k\rho)^i}{i!} \right)}, \quad \rho = \frac{f\tau}{k} < 1,$$

где τ – среднее время обслуживания одного канала (среднее время зарядки электромобиля); $J = \frac{\sigma}{\tau}$ – коэффициент вариации времени обслуживания (времени зарядки) при стандартном отклонении σ ; f – интенсивность потока прибытия заявок на обслуживание (интенсивность прибытия электромобилей на зарядку); k – количество параллельных обслуживаний (количество зарядных мест на станции).

Поскольку $W_q^{M/M/k}$ как функция от f является строго возрастающей (и строго выпуклой, как следует из публикации [14]) функцией, то это же будет справедливым и для $W_q^{M/G/k}$, что делает последнюю функцию хорошим кандидатом на использование в качестве функции стоимости (поскольку эти свойства гарантирует выпуклость интегральной функции стоимости). Однако она не определена для $\rho \geq 1$, что может приводить к нежелательным последствиям в итерационных алгоритмах наподобие алгоритма Франк – Вульфа. По этой причине предлагается выполнить для нее процедуру регуляризации следующего вида.

Пусть имеется определенная на полуинтервале $[0, 1)$ неограниченная дифференцируемая функция $g = g(\rho)$. Соответствующей ей линейно регуляризованной после точки $\rho_0 \in (0, 1)$ функцией будем называть определенную на полуинтервале $[0, \infty)$ функцию вида

$$[g]_{\rho_0}(\rho) = \begin{cases} g(\rho), & \rho < \rho_0, \\ g(\rho_0) + g'(\rho_0)(\rho - \rho_0), & \rho \geq \rho_0. \end{cases}$$

Очевидно, что такая регуляризация сохраняет строгую монотонность (и выпуклость, хотя уже и не строго), а также дифференцируемость функции.

С учетом сказанного, выбрав достаточно малое $\varepsilon > 0$, окончательно можно записать следующее выражение для функции стоимости:

$$c_{a^\uparrow}(f) = t_{a^\uparrow}^o + [W_q^{M/G/k}]_{1-\varepsilon}(f) + \tau_s,$$

в которой параметры τ_s и σ_s отвечают среднему и стандартному отклонению времени зарядки на станции s соответственно.

Для дуги $a^\downarrow = (s, v'')$, ведущей от станции, имеет смысл учесть только не зависящее от интенсивности потока время движения $t_{a^\downarrow}^o$ и, следовательно, положить, что $c_{a^\downarrow}(f) \equiv t_{a^\downarrow}^o$ (либо внести эту константу в величину $t_{a^\uparrow}^o$, после положив, что $c_{a^\downarrow}(f) \equiv 0$).

С учетом добавления указанной операции введем процедуру модификации модели транспортных потоков как последовательность следующих действий:

- 1) установить моделируемые станции на назначенных им транспортных дугах из множества E^o ;
- 2) дополнительно установить фиктивные станции на всех дугах, ведущих к стокам, т. е. на дугах из множества E_D (рис. 1). Эти станции вводятся для того, чтобы смоделировать наличие других, находящихся за пределами рассматриваемой дорожной сети зарядных станций, пользоваться которыми могут предпочесть водители, если дополнительная потеря времени (на то, чтобы добраться до обычной станции и начать процесс зарядки) превысит некоторое пороговое значение T^{tol} . По этой причине для ценовых функций этих дуг предполагается установка таких параметров, которые в итоге позволят получить равенства

$$c_{a^\uparrow}(f) = T^{tol} + \tilde{\tau}_s, \quad c_{a^\downarrow}(f) \equiv 0, \quad (7)$$

где $\tilde{\tau}_s$ – некоторое типичное для зарядных станций среднее время зарядки (отражает оценку потери времени пользователями на зарядку на типичной станции);

- 3) начать рассматривать набор величин транспортного спроса по корреспонденциям $\mathbf{q} = (q_{od})_{o \in O, d \in D}$ как полученный в результате (поэлементного) суммирования наборов ${}^e\mathbf{q} = ({}^eq_{od})_{o \in O, d \in D}$ и ${}^c\mathbf{q} = ({}^cq_{od})_{o \in O, d \in D}$, которые соответствуют спросу на передвижение пользователей с потребностью в зарядке (тип пользователей e) и пользователей без такой потребности (тип пользователей c), иными словами, начать предполагать выполнение равенства $\mathbf{q} = {}^e\mathbf{q} + {}^c\mathbf{q}$;

4) для каждой корреспонденции (o, d) во множестве всех путей ${}^{od}\mathcal{P}$ выделить множество ${}^e({}^{od}\mathcal{P})$, включающее только пути, проходящие ровно через одну зарядную станцию (пути пользователей типа e), и множество ${}^c({}^{od}\mathcal{P})$, включающее только пути, не проходящие ни через одну зарядную станцию (пути пользователей типа c) (отметим, что эти два множества не пересекаются). Положить, что потоки пользователей с потребностью в зарядке могут двигаться только по путям из множества ${}^e({}^{od}\mathcal{P})$, а потоки пользователей без потребности в зарядке – только по путям из множества ${}^c({}^{od}\mathcal{P})$.

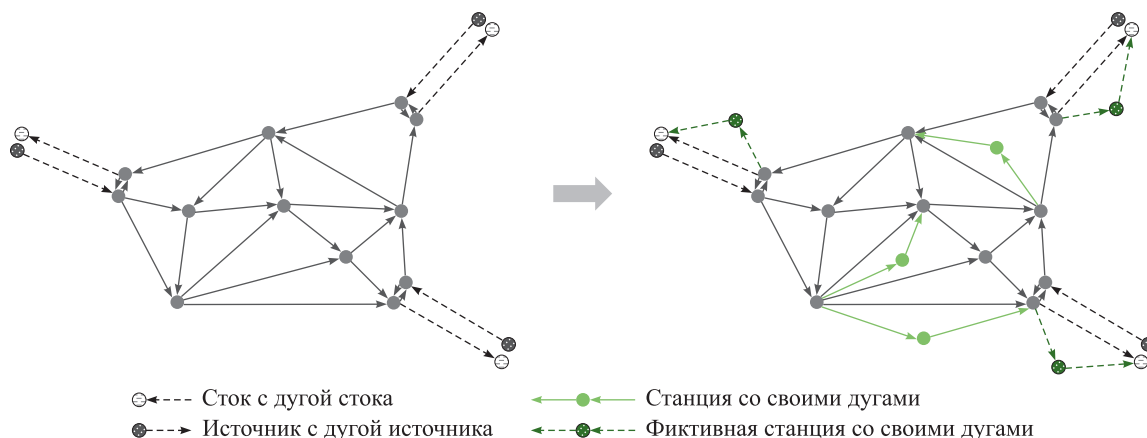


Рис. 1. Схема модификации орграфа дорожной сети

Fig. 1. Road network digraph modification scheme

Модификация алгоритма Франк – Вульфа для поиска равновесного распределения транспортных потоков. С учетом выполненной модификации модели транспортных потоков далее в линейном пространстве $\mathcal{L}$ выделим подмножество $X_{e,q}$ (подмножество X_c), каждый элемент которого $\mathbf{x} = (x_p)_{p \in {}^{od}\mathcal{P}, o \in O, d \in D}$ отвечает некоторому распределению транспортных потоков, порожденных ${}^e q$ (порожденных ${}^c q$), причем $x_p = 0$, если путь p не входит во множество ${}^e({}^{od}\mathcal{P})$ (не входит во множество ${}^c({}^{od}\mathcal{P})$). С учетом этого рассмотрим множество $X_{e,c,q} = X_{e,q} + X_{c,q}$ (где понимается поэлементное сложение). Нетрудно видеть, что $X_{e,c,q}$ – выпуклое (и компактное в евклидовой метрике) множество, и для него $X_{e,c,q} \subseteq X_q$, $\mathbf{q} = {}^e \mathbf{q} + {}^c \mathbf{q}$. Соответственно, для $X_{e,c,q}$ можно провести те же рассуждения, которые проводились выше для X_q , в частности прийти к выводу, что всякая точка $\mathbf{x}^* \in X_{e,c,q}$, доставляющая минимум функции $Z(\mathbf{x})$, определяет равновесное распределение транспортных потоков в модифицированной модели транспортных потоков, причем для его поиска может использоваться алгоритм Франк – Вульфа. Аналогично, как и ранее, для векторов $\mathbf{f} = ({}^{od}f_e)_{e \in E, o \in O, d \in D}$ можно ввести на основе $X_{e,c,q}$ допустимое множество $F_{e,c,q}$ и сделать те же выводы относительно поиска равновесных распределений. Все вышеизложенное обосновывает возможность использования классического подхода (через алгоритм Франк – Вульфа) к поиску равновесных распределений в ситуации, учитывающей специфику процессов, связанных с зарядными станциями, с отдельными оговорками, про которые будет сказано ниже.

Обозначим через M модифицированную модель транспортных потоков и введем следующие функции.

Функция поиска пути минимальной стоимости (*shortest path constrained, SPC*)

Вход: модифицированная модель транспортных потоков M , распределение транспортных потоков $\mathbf{f} \in F_{e,c,q}$, корреспонденция (o, d) , $o \in O$, $d \in D$, тип пути $k \in \{e, c\}$.

Выход: кратчайший по суммарной стоимости путь p заданного типа из o в d при заданных распределениях транспортных потоков в модели.

Как и в исходном алгоритме Франк – Вульфа, эта функция может быть реализована на основе эффективных алгоритмов поиска кратчайшего пути во взвешенном орграфе, в частности, с помощью алгоритма Дейкстры в модифицированной версии, когда дополнительно накладываются ограничения на тип пути, который нужно найти. Сделать это можно, например, заменяя в классическом алгоритме просмотр исходных вершин v орграфа просмотром состояний (v, k_e) , где k_e – количество вершин зарядных станций,

встреченных на пути минимальной стоимости до вершины v . Данное обстоятельство позволяет не только учесть ограничения, но и реализовать построение пути с контурами, когда того требует ситуация.

Функция построения начального распределения транспортных потоков (*initial flow distribution, IFD*)

Вход: модифицированная модель транспортных потоков M .

Выход: распределение транспортных потоков $f \in F_{e,c,q}$.

Выбор реализации данной функции в классической модели достаточно произволен. К наиболее простым вариантам можно отнести: 1) вариант с использованием распределения транспортных потоков по принципу «все или ничего» (*all-or-nothing assignment*), когда весь спрос распределяется на единственный путь, например путь минимальной стоимости; 2) вариант с инкрементальным распределением (*incremental assignment*), когда исходный спрос разбивается на малые части, для каждой из которых производится распределение на путь минимальной стоимости, после чего выполняется перерасчет стоимостей. Произвольность выбора обычно связана с тем фактом, что если целевая функция строго выпуклая (как это обычно предполагается в классической модели), то точка минимума является единственной. Однако в предлагаемой модификации из-за наличия не зависящих от величин транспортных потоков функций стоимостей (7) целевая функция Z уже не будет строго выпуклой (хотя и продолжит быть выпуклой). По этой причине множество точек $Opt_D(Z)$ допустимого множества D , доставляющих минимум целевой функции Z , уже не должно состоять только из одной точки. Более того, итерационная процедура алгоритма не обязана давать последовательность, сходящуюся только к одной точке (а может давать последовательность, имеющую в качестве предельных сразу несколько точек из множества $Opt_D(Z)$ [7]). В связи с этим выбор начальной точки становится важным. Соответственно, выбор варианта реализации функции IFD также важен. По мнению авторов, в качестве наиболее простого и в то же время адекватного варианта можно рассматривать вариант с инкрементальным распределением, поскольку он во многом отражает реальную ситуацию с постепенным ростом спроса в течение суток, начиная с утренних часов. Однако в дальнейшем эта ситуация заслуживает отдельного исследования.

С учетом введенных функций можем описать модифицированный алгоритм Франк – Вульфа следующим образом.

Алгоритм (модифицированный) Франк – Вульфа

Вход: модифицированная модель транспортных потоков M , величина допуска относительной сходимости³ $\epsilon_r > 0$.

Выход: (приближенное⁴) равновесное распределение транспортных потоков $f \in F_{e,c,q}$.

1. Задать начальное распределение $f^{(0)} \in F_{e,c,q}$:

$$f^{(0)} \leftarrow \text{IFD}(M).$$

2. Для каждого $i = 1, 2, \dots$ выполнить следующие действия.

2.1. Определить распределение $y \in F_{e,c,q}$, задающее направление поиска, с помощью процедуры распределения транспортных потоков по принципу «все или ничего».

2.1.1. Положить, что $y \leftarrow 0$.

2.1.2. Для каждого $o \in O, d \in D, \kappa \in \{e, c\}$:

а) найти путь минимальной стоимости p :

$$p \leftarrow \text{SPC}(M, f^{(i-1)}, (o, d), \kappa);$$

б) пересчитать y в предположении, что на найденный путь $p = (e_1, \dots, e_n)$ дополнительно распределится весь спрос q_{od} данного типа пользователей κ , а именно положить, что

$${}^{od}y_e \leftarrow {}^{od}y_e + \sum_{k=1}^n q_{od} \delta_{ee_k}, \quad e \in E$$

(здесь допускается путь с циклами).

³Под этим понятием здесь подразумевается пороговое значение относительной ошибки между последовательными приближениями искомого решения, при достижении которого и ниже которого итерационный процесс считается сошедшимся.

⁴Алгоритм является итерационным, поэтому возвращает приближенное значение равновесного распределения транспортных потоков.

- 2.2. Определить величину шага $\alpha^{(i)} \in [0, 1]$ в направлении поиска путем решения вспомогательной задачи одномерной оптимизации:

$$\alpha^{(i)} = \arg \min_{\alpha \in [0, 1]} Z(f(\alpha)), \quad f(\alpha) = f^{(i-1)} + \alpha(y - f^{(i-1)}).$$

- 2.3. Обновить потоки:

$$f^{(i)} \leftarrow f^{(i-1)} + \alpha^{(i)}(y - f^{(i-1)}).$$

- 2.4. Если относительная разность $Z(f^{(i)})$ и $Z(f^{(i-1)})$ по абсолютной величине меньше ϵ_r , то завершить алгоритм с выводом в качестве результата $f^{(i)}$.

Таким образом, получена модифицированная модель назначений транспортных потоков Франк – Вульфа. Следует отметить, что в применяемых для городов моделях назначений транспортных потоков часто используется подход, который, помимо стоимости движения по дуге, задает стоимость перехода («поворота») с одной дуги на другую [5]. Однако поскольку каждый такой орграф с «поворотами» можно свести к обычному орграфу по схеме, представленной на рис. 2, то можно говорить, что все соображения относительно построения модификации модели остаются справедливыми и в этом случае.

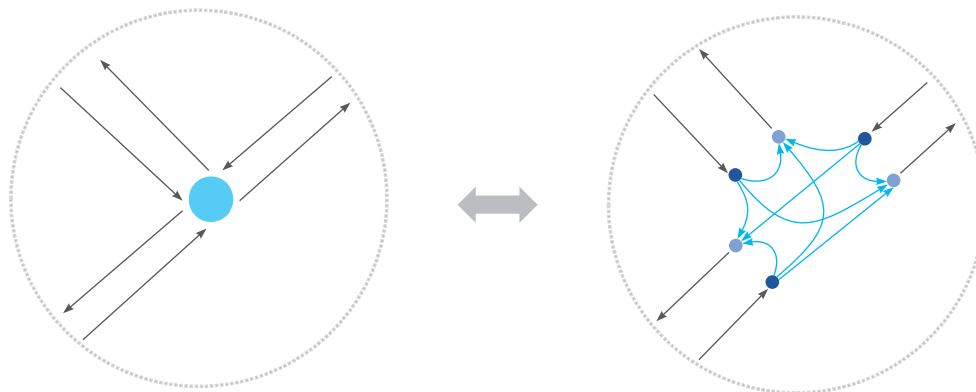


Рис. 2. Схема сведения орграфа с «поворотами» к обычному орграфу
Fig. 2. Scheme of reducing a digraph with «turns» to a standard digraph

Иллюстрация применения модифицированной модели назначений транспортных потоков Франк – Вульфа

В качестве наглядного примера применения предложенной модели рассмотрим задачу оценки загрузки зарядных станций для заданного варианта (конфигурации) их размещения на дорожной сети, а именно модель транспортных потоков с орграфом дорожной сети вида, как на рис. 3 (прообраз фрагмента улично-дорожной сети центральной части г. Минска), в варианте с «поворотами». Во избежание излишней сложности изложения рассматриваем упрощенный случай, когда все повороты разрешены, кроме разворотов; потерями времени на поворотах пренебрегаем. Для дуг, исходящих из источников и ведущих в стоки, устанавливается нулевая длина. Для всех транспортных дуг в качестве функции стоимости используется так называемая функция BPR (*Bureau of Public Roads*, США) [15]:

$$c_e(f) = \frac{l_e}{v_e^0} \left(1 + \alpha \left(\frac{f}{f_e^{\max}} \right)^\beta \right),$$

где l_e – длина дуги; v_e^0 – скорость свободного движения по дуге (в нашем примере 50 км/ч); $f_e^{\max}$ – пропускная способность дорожного сегмента (в нашем примере соответствует величине 1800 автомобилей в час на полосу движения); α , β – калибровочные параметры (в нашем примере выбраны типичные согласно источнику [15] значения $\alpha = 0,15$, $\beta = 4$).

Все станции имеют следующие параметры: $\tau_s = 1800$ с, $\sigma_s = 600$ с, $k_s = 8$. Для всех фиктивных станций $T^{\text{tol}} = 600$ с, $\tilde{\tau}_s = 1800$ с. Для подводящих дуг станций $t_{a\uparrow}^o = 0$.

Предполагаем, что доля пользователей, которые нуждаются в зарядке, является одинаковой для всех корреспонденций и составляет 1 % от общего транспортного спроса. Результирующий транспортный спрос нуждающихся в зарядке ${}^e q = ({}^e q_{od})_{o \in O, d \in D}$ (с совокупной величиной 148 автомобилей в час) графически представлен на рис. 4 (величины общего спроса были получены на основе измерений для упоминавшейся выше части г. Минска в дневное время), где ширина полос пропорциональна величине спроса для каждой корреспонденции.

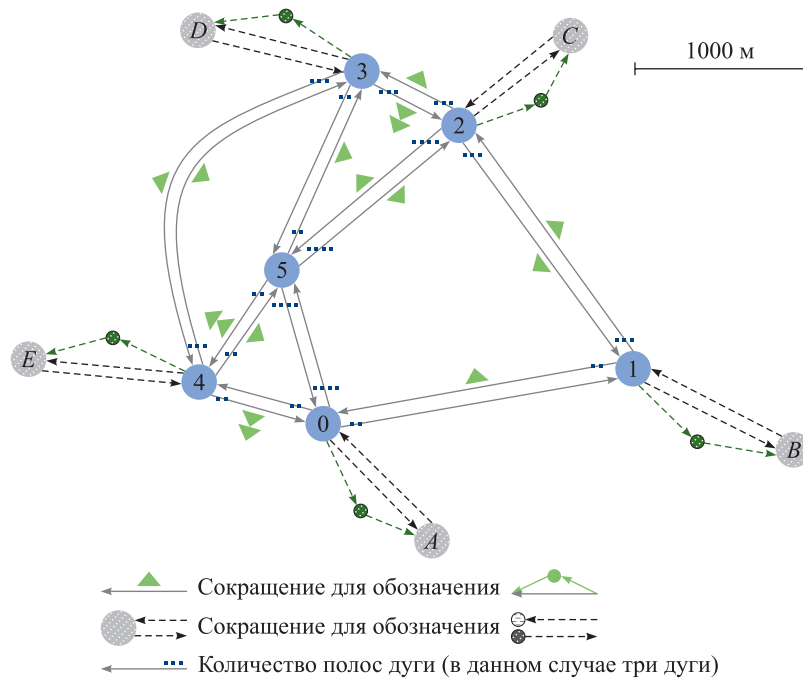


Рис. 3. Тестовый оргграф дорожной сети
Fig. 3. Test road network digraph

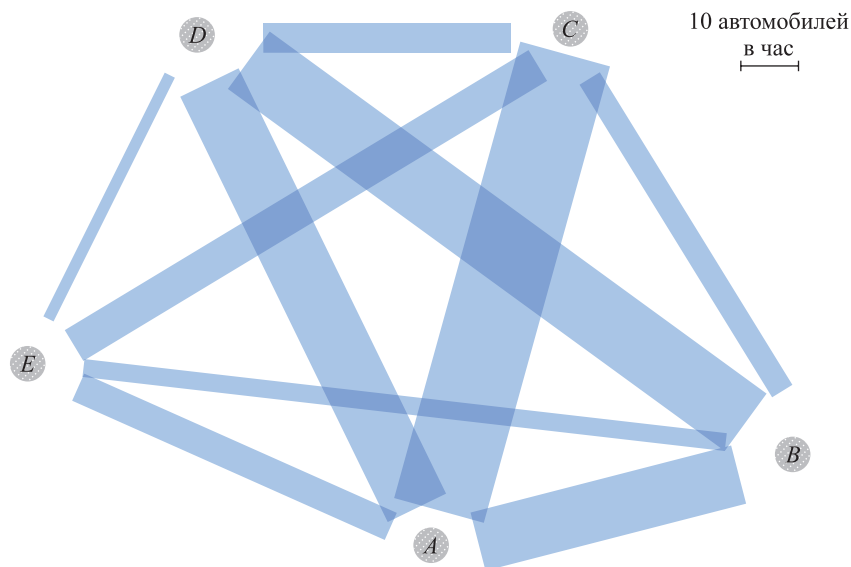


Рис. 4. Картограмма спроса на зарядку
Fig. 4. Charging demand flow map

При расчете использовался вариант IFD с инкрементальным распределением с количеством частей 10. Допуск относительной сходимости составляет $\epsilon_r = 0,1$.

Расчет завершился после 15 итераций с относительным изменением (по последовательным двум итерациям) значений целевой функции 0,000 08 и с максимальным по всем дугам абсолютным изменением (по последовательным двум итерациям) величин потоков $5 \cdot 10^{-5}$ автомобилей в секунду, или 0,15 автомобиля в час.

Особый интерес представляют следующие полученные результаты:

- доля электромобилей, нуждающихся в зарядке, которые не воспользовались ни одной из станций, составляет $\frac{37}{148} \approx 0,25$ (25 %);

- распределение уровня загруженности (коэффициента использования) станций по квартилям $Q1$ (25 %), $Q2$ (50 %), $Q3$ (75 %) имеет вид 0,870, 0,875, 0,880 соответственно.

Исходя из этого, можно сделать следующие выводы. Видно, что заданная конфигурация размещения станций обеспечивает достаточно равномерную нагрузку на них (можно рассматривать в качестве положительного момента). Однако эту конфигурацию трудно признать оптимальной по следующим причинам: она включает 16 зарядных станций с 8 зарядными местами, каждое из которых способно (в пределах) обслуживать 2 автомобиля в час. Теоретическая предельная пропускная способность такой сети составляет 256 автомобилей в час, что значительно больше совокупного спроса на зарядку (148 автомобилей в час). Следовательно, теоретически все нуждающиеся в зарядке электромобили могли быть обслужены, но поскольку этого не произошло (имеем 25 % необслуженных электромобилей), можно говорить о том, что потенциал зарядных станций не был полностью использован, поэтому имеет смысл искать другие варианты размещения станций.

Заключение

В настоящей работе модифицирована классическая модель назначений транспортных потоков на основе алгоритма Франк – Вульфа. Предложенная модификация позволяет учесть ключевые особенности, связанные со спецификой использования электромобилей и процесса их зарядки в условиях городской дорожной сети. В частности, модель интегрирует три принципиальных аспекта: ограничение на прохождение маршрута ровно через одну зарядную станцию, возможность построения путей с циклами для доступа к станциям при наличии транспортных ограничений, а также поведенческий аспект отказа пользователя от зарядки при превышении суммарными временными затратами порогового значения.

Практическая значимость предложенной модели была продемонстрирована в ходе вычислительного эксперимента. Результаты показали, что даже при теоретически достаточной совокупной пропускной способности зарядной инфраструктуры особенности равновесного распределения потоков и поведенческие факторы могут приводить к тому, что значительная доля электромобилей (в рассмотренном примере 25 %) не обслуживаются. Этот вывод подчеркивает важность применения моделей, способных отражать подобные нелинейные эффекты, для адекватной оценки нагрузки на инфраструктуру.

Проведенное исследование открывает перспективы для дальнейших разработок. Предложенная в данной статье модификация модели назначений транспортных потоков может служить ядром для создания алгоритма поиска оптимального расположения зарядных станций для электромобилей в городах, в том числе мегаполисах. Такой алгоритм позволит не просто оценивать заданные конфигурации, а целенаправленно находить решения, минимизирующие как временные затраты водителей, так и долю необслуженного спроса на зарядку.

Библиографические ссылки

1. Fukushima M. A modified Frank – Wolfe algorithm for solving the traffic assignment problem. *Transportation Research. Part B, Methodological*. 1984;18(2):169–177. DOI: 10.1016/0191-2615(84)90029-8.
2. Dafermos SC, Sparrow FT. The traffic assignment problem for a general network. *Journal of Research of the National Bureau of Standards. Section B, Mathematical Sciences*. 1969;73B(2):91–118. DOI: 10.6028/JRES.073B.010.
3. Li F, Wang S. Determining route traffic flows for traffic assignment problem with Frank – Wolfe algorithm. In: Institute of Electrical and Electronics Engineers. *Proceedings of the 2005 IEEE intelligent vehicles symposium; 2005 June 6–8; Las Vegas, USA*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2005. p. 669–673. DOI: 10.1109/IVS.2005.1505180.
4. Wardrop JG. Some theoretical aspects of road traffic research. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*. 1952;1(3): 325–362. DOI: 10.1680/ipeds.1952.11259.
5. Shvetsov VI. Mathematical modeling of traffic flows. *Automation and Remote Control*. 2003;64(11):1651–1689. DOI: 10.1023/A:1027348026919.
6. Pokutta S. The Frank – Wolfe algorithm: a short introduction. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. 2024; 126(1):3–35. DOI: 10.1365/s13291-023-00275-x.
7. Bolte J, Combettes CW, Pauwels E. *The iterates of the Frank – Wolfe algorithm may not converge* [Internet]. Toulouse: Toulouse School of Economics; 2022 [cited 2025 May 7]. 15 p. (TSE working papers; number 1311). Available from: https://www.tse-fr.eu/sites/default/files/TSE/documents/doc/wp/2022/wp_tse_1311.pdf.
8. Frank M, Wolfe P. An algorithm for quadratic programming. *Naval Research Logistics Quarterly*. 1956;3(1–2):95–110. DOI: 10.1002/nav.3800030109.

9. Froger A, Jabali O, Mendoza JE, Laporte G. The electric vehicle routing problem with capacitated charging stations. *Transportation Science*. 2022;56(2):460–482. DOI: 10.1287/trsc.2021.1111.
10. Graf L, Harks T, Palkar P. Dynamic traffic assignment for electric vehicles. *Transportation Research. Part B, Methodological*. 2025;195:103207. DOI: 10.1016/j.trb.2025.103207.
11. Liu B, Pantelidis TP, Tam S, Chow JYJ. An electric vehicle charging station access equilibrium model with $M/D/C$ queueing. *International Journal of Sustainable Transportation*. 2023;17(3):228–244. DOI: 10.1080/15568318.2022.2029633.
12. Ferro G, Minciardi R, Parodi L, Robba M. Optimal planning of charging stations and electric vehicles traffic assignment: a bi-level approach. *IFAC – Papers Online*. 2020;53(2):13275–13280. DOI: 10.1016/j.ifacol.2020.12.157.
13. Gross D, Shortle JF, Thompson JM, Harris CM. *Fundamentals of queueing theory*. 4th edition. Hoboken: John Wiley & Sons; 2008. XIII, 509 p. (Wiley series in probability and statistics). DOI: 10.1002/9781118625651.
14. Grassmann W. The convexity of the mean queue size of the $M/M/c$ queue with respect to the traffic intensity. *Journal of Applied Probability*. 1983;20(4):916–919. DOI: 10.2307/3213605.
15. Sheffi Y. *Urban transportation networks: equilibrium analysis with mathematical programming methods*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall; 1985. XVI, 399 p.

Получена 30.05.2025 / исправлена 24.11.2025 / принята 24.02.2026.
Received 30.05.2025 / revised 24.11.2025 / accepted 24.02.2026.

Авторы:

Ду Сичжоу – аспирант кафедры транспортных систем и технологий автотракторного факультета. Научный руководитель – Д. В. Капский.

Денис Сергеевич Саразинский – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры транспортных систем и технологий автотракторного факультета.

Денис Васильевич Капский – доктор технических наук, профессор; профессор кафедры транспортных систем и технологий автотракторного факультета¹⁾, профессор кафедры управления информационными ресурсами Института управленческих кадров²⁾.

Authors:

Du Sizhuo, postgraduate student at the department of transport systems and technologies, automotive and tractor faculty.
duxinzhou8@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-4285-0591>

Denis S. Sarazhinsky, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of transport systems and technologies, automotive and tractor faculty.
sarazhinsky@mail.ru

Denis V. Kapski, doctor of science (engineering), full professor; professor at the department of transport systems and technologies, automotive and tractor faculty^a, and professor at the department of information resources management, Institute of Managerial Personnel^b.

d.kapsky@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-9300-3857>