
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

УДК 517.956.35

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СЕМЕЙСТВ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Д. С. ЖАЛУКЕВИЧ¹⁾

¹⁾Институт математики НАН Беларуси, ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Ищутся инфинитезимальные преобразования эквивалентности четырех семейств квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка функции двух переменных, т. е. такие преобразования зависимых и независимых переменных, которые переводят каждое уравнение заданного семейства в некоторое другое уравнение этого же семейства. Вычисляются инфинитезимальные точечные симметрии этих уравнений. Проводится сравнительный анализ полученных алгебр симметрий разных семейств квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение; уравнение Клейна – Гордона; квазилинейное гиперболическое уравнение; точечная симметрия; преобразование эквивалентности.

Образец цитирования:

Жалукевич ДС. Преобразования эквивалентности семейств квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка функции двух переменных. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2026;2:28–38.
EDN: IJFJHJ

For citation:

Zhalukevich DS. Equivalence transformations of families of second-order quasi-linear hyperbolic equations of a two-variable function. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2026;2:28–38. Russian.
EDN: IJFJHJ

Автор:

Денис Станиславович Жалукевич – соискатель отдела дифференциальных уравнений. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент Б. М. Дубров.

Author:

Dzianis S. Zhalukevich, competitor at the department of differential equations.
den.zhal@yandex.by
<https://orcid.org/0000-0001-5021-550X>

EQUIVALENCE TRANSFORMATIONS OF FAMILIES OF SECOND-ORDER QUASI-LINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS OF A TWO-VARIABLE FUNCTION

D. S. ZHALUKEVICH^a

^a*Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus,
11 Surganova Street, Minsk 220072, Belarus*

Abstract. In this work, we search for infinitesimal equivalence transformations of four families of second-order quasi-linear hyperbolic equations of a two-variable function, i. e. transformations of dependent and independent variables that transform each equation of a given family into another equation of the same family. We also calculate the infinitesimal point symmetries of these equations. We conduct a comparative analysis of the obtained symmetry algebras of different families of second-order quasi-linear hyperbolic equations.

Keywords: differential equation; Klein – Gordon equation; quasi-linear hyperbolic equation; point symmetry; equivalence transformation.

Введение

В данной работе ищутся преобразования эквивалентности семейств квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка функции двух переменных, т. е. такие инфинитезимальные преобразования зависимой и независимой переменных, которые оставляют на месте все семейство уравнений, преобразуя каждое уравнение семейства в, возможно, некоторое другое уравнение этого же семейства. Указанный класс симметрий был введен независимо в работах Дж. Кингстона и К. Софоклеуса [1–3], Я. Л. Цеслинского [4–7], а также Н. Х. Ибрагимова, М. Торриси и А. Валенти [8; 9]. В статьях Дж. Кингстона и К. Софоклеуса данный вид симметрий носит название преобразования, сохраняющего форму, а в работах Н. Х. Ибрагимова, М. Торриси и А. Валенти именуется преобразованием эквивалентности и используется для предварительной классификации уравнений. В публикациях же Я. Л. Цеслинского такие симметрии названы расширенными симметриями и использованы для поиска спектрального параметра.

Настоящая работа посвящена систематическому исследованию подобного рода симметрий для различных семейств квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка, включая уравнения в изотропных однородных и анизотропных неоднородных средах, с возмущениями и без возмущений. Преобразования эквивалентности семейств квазилинейных гиперболических уравнений находятся методом, предложенным в публикациях [1–9]. Детали этого метода излагаются в разделе «Вычисление инфинитезимальных преобразований эквивалентности семейств уравнений» данной статьи.

Кроме того, в настоящей работе проводится сравнительный анализ полученных преобразований эквивалентности различных семейств квазилинейных гиперболических уравнений, а также сопоставление их с точечными симметриями этих же семейств уравнений. Стоит отметить, что метод нахождения классических (точечных) симметрий дифференциальных уравнений с частными производными является хорошо изученным [10–13].

Запишем общий вид квазилинейного гиперболического уравнения в первой форме второго порядка функции двух переменных:

$$u_{tx} = f(t, x, u, u_t, u_x). \quad (1)$$

Среди уравнений (1) можно выделить следующие частные виды уравнений: волновое уравнение, уравнение Клейна – Гордона, уравнение Лиувилля, уравнение Цицейки, уравнение синус-Гордона (или Бонне) (см. [14–17] и приведенные в них ссылки). Данные уравнения применяются в различных областях науки и техники, таких как дифференциальная геометрия, квантовая теория поля, космология, гидро- и газодинамика, сверхпроводимость, дислокация кристаллов, волновые процессы в ферромагнитных материалах, нелинейная оптика, физика плазмы, физика низких температур и др. По этой причине вышеуказанные уравнения изучались и продолжают изучаться внутри самой математики и в ее приложениях с помощью различных методов, в том числе методов группового анализа [10–13].

В работе [9] найдена алгебра эквивалентности нелинейных волновых уравнений $u_{tt} - u_{xx} = f(u, u_t, u_x)$, а в статьях [18; 19] получены и применены дифференциальные инварианты для семейства этих уравнений.

Задача групповой классификации уравнений $u_{tx} = f(t, x, u)$, $f_{uu} \neq 0$, и $u_{tx} = f(t, x, u, u_x)$ решена в работах [20–23]. Кроме того, в указанных публикациях найдены алгебры симметрий этих уравнений

и в итоге выделены уравнения с пятимерной алгеброй симметрий, которая является максимальной среди конечномерных алгебр, а также уравнения с одномерными, двумерными, трехмерными и четырехмерными алгебрами симметрий. Для максимальной алгебры и ее подалгебр проведена редукция и найдено семейство решений.

В статье [24] найдены контактные симметрии уравнения (1). Для данного класса уравнений точечные и контактные группы эквивалентности совпадают.

В работах [25; 26] решена задача групповой классификации уравнений $u_{tx} = f(u)$, $f_{uu} \neq 0$, найдены алгебры симметрий этих уравнений и в итоге выделены уравнения с четырехмерной алгеброй симметрий, которая является максимальной, а также уравнения с трехмерными и бесконечномерными алгебрами симметрий. Для максимальной алгебры и ее подалгебр проведена редукция и найдены некоторые решения уравнений.

Стоит отметить, что в публикациях [20–23; 25; 26] вычислялись классические (точечные) симметрии, тогда как в данной статье проводится групповой анализ аналогичных семейств уравнений по отношению к симметриям семейств уравнений, а не каждого уравнения в отдельности [1–9; 18; 19].

В настоящей работе выполняется сравнительный анализ алгебр Ли точечных симметрий и инфинитезимальных преобразований эквивалентности следующих четырех классов нелинейных волновых уравнений: $u_{tx} = f(u, u_t, u_x)$, $u_{tx} = f(u_t, u_x)$, $u_{tx} = f(u, u_x)$, $u_{tx} = f(u)$. Эти уравнения возникают в некоторых задачах математической физики [16; 27].

Вычисление инфинитезимальных точечных симметрий

Преобразования эквивалентности семейства уравнений (1) имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= T(t, x, u, \varepsilon), \quad \tilde{x} = X(t, x, u, \varepsilon), \\ \tilde{u} &= U(t, x, u, \varepsilon), \quad \tilde{f} = F(t, x, u, u_t, u_x, f, \varepsilon),\end{aligned}\tag{2}$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Мы предполагаем, что преобразования эквивалентности (2) являются (локальной) однопараметрической группой преобразований пространства с локальной системой координат (t, x, u, u_t, u_x, f) . Действие этой однопараметрической группы на координатах u_t, u_x определяется естественным образом с помощью операции продолжения. Отметим, что в отличие от классических симметрий мы полагаем, что функция f также преобразуется и выступает как независимая координата.

Построение группы преобразований эквивалентности сводится к определению ее инфинитезимальных преобразований

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= t + \varepsilon \tau(t, x, u) + o(\varepsilon), \\ \tilde{x} &= x + \varepsilon \xi(t, x, u) + o(\varepsilon), \\ \tilde{u} &= u + \varepsilon \eta(t, x, u) + o(\varepsilon), \\ \tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{u}_{\tilde{t}}, \tilde{u}_{\tilde{x}}) &= f(t, x, u, u_t, u_x) + \varepsilon \Phi(t, x, u, u_t, u_x, f) + o(\varepsilon).\end{aligned}\tag{3}$$

Инфинитезимальные преобразования производных u_t, u_x и u_{tx} имеют вид

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = u_t + \varepsilon \Gamma_0 + o(\varepsilon),\tag{4}$$

$$\tilde{u}_{\tilde{x}} = u_x + \varepsilon \Gamma_1 + o(\varepsilon),\tag{5}$$

$$\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{x}} = u_{tx} + \varepsilon \Gamma_{01} + o(\varepsilon).\tag{6}$$

Явные формулы продолжения для инфинитезимальных преобразований производных (4)–(6) записываются в виде

$$\Gamma_0 = D_t(\eta) - D_t(\tau)u_t - D_t(\xi)u_x,\tag{7}$$

$$\Gamma_1 = D_x(\eta) - D_x(\tau)u_t - D_x(\xi)u_x,\tag{8}$$

$$\Gamma_{01} = D_{tx}(\eta) - D_{tx}(\tau)u_t - D_x(\tau)u_{tt} - D_t(\tau)u_{tx} - D_{tx}(\xi)u_x - D_x(\xi)u_{tx} - D_t(\xi)u_{xx},\tag{9}$$

где

$$D_t = \partial_t + u_t \partial_u,\tag{10}$$

$$D_x = \partial_x + u_x \partial_u,\tag{11}$$

$$D_{tx} = \partial_{tx} + u_t \partial_{xu} + u_{tx} \partial_u + u_x \partial_{tu} + u_t u_x \partial_u^2.\tag{12}$$

Лемма 1. Инфинитезимальные преобразования эквивалентности семейств уравнений $u_{tx} = f(t, x, u, u_t, u_x)$ принадлежат следующей (бесконечномерной) алгебре Ли векторных полей:

$$X = \tau(t) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(x) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u},$$

где $\tau(t)$, $\xi(x)$, $\eta(t, x, u)$ – произвольные функции.

Доказательство. Так как уравнение (1) содержит только вторую частную производную u_{tx} , то в выражении (9) коэффициенты при u_{tt} , u_{xx} равны нулю, т. е. $D_x(\tau) \equiv \tau_x + u_x \tau_u = 0$, $D_t(\xi) \equiv \xi_t + u_t \xi_u = 0$. Значит, $\tau_x = \tau_u = \xi_t = \xi_u = 0$. Следовательно, имеем функции $\tau(t)$, $\xi(x)$, $\eta(t, x, u)$. Таким образом, лемма доказана. Хотя формально производная u_{xx} не входит в уравнение, нельзя исключить, что она тождественно равна нулю для всех решений. Однако это невозможно, так как уравнение допускает решение с произвольной зависимостью от x (например, в задаче Гурса), следовательно, u_{xx} не обращается в нуль тождественно, и коэффициент при u_{xx} в определяющем уравнении действительно должен быть равен нулю.

Исходя из леммы 1, выражения (7)–(9) для уравнения (1) принимают вид

$$\Gamma_0 = D_t(\eta) - \dot{\tau} u_t, \quad (13)$$

$$\Gamma_1 = D_x(\eta) - \xi' u_x, \quad (14)$$

$$\Gamma_{01} = D_{tx}(\eta) - (\dot{\tau} + \xi') u_{tx}. \quad (15)$$

Первое и второе продолжения векторного поля X для уравнений (1) имеют вид

$$X^{(1)} = X + \Gamma_0 \frac{\partial}{\partial u_t} + \Gamma_1 \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad (16)$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \Gamma_{01} \frac{\partial}{\partial u_{tx}}. \quad (17)$$

Поддействовав оператором (17) на уравнение $J = u_{tx} - f(t, x, u, u_t, u_x)$, т. е. $X^{(2)}(J) = 0$, получим определяющее уравнение для точечных симметрий

$$\Gamma_{01} = \tau f_t + \xi f_x + \eta f_u + \Gamma_0 f_{u_t} + \Gamma_1 f_{u_x}. \quad (18)$$

После подстановки выражений (13)–(15) в определяющее уравнение (18) имеем

$$D_{tx}(\eta) - (\dot{\tau} + \xi') u_{tx} = \tau f_t + \xi f_x + \eta f_u + (D_t(\eta) - \dot{\tau} u_t) f_{u_t} + (D_x(\eta) - \xi' u_x) f_{u_x}. \quad (19)$$

Подставив выражения (10)–(12) и уравнение (1) в формулу (19), получим

$$\begin{aligned} & \eta_{tx} + \eta_{xu} u_t + \eta_{tu} u_x + \eta_{uu} u_t u_x + (\eta_u - \dot{\tau} - \xi') f = \\ & = \tau f_t + \xi f_x + \eta f_u + (\eta_t + (\eta_u - \dot{\tau}) u_t) f_{u_t} + (\eta_x + (\eta_u - \xi') u_x) f_{u_x}. \end{aligned} \quad (20)$$

Рассмотрим более детально четыре класса уравнений, описанных во введении.

1. Пусть $f = f(u, u_t, u_x)$. В этом случае для выражения (20) нужно положить, что $f_t = f_x = 0$. Значит, $\eta_t = \eta_x = \dot{\tau} = \xi' = 0$. Тогда решение определяющего уравнения (18) имеет вид

$$\tau = c_1 + c_3 t, \quad (21)$$

$$\xi = c_2 + c_4 x, \quad (22)$$

$$\eta = \beta(u), \quad (23)$$

$$\beta^{(2)} u_t u_x + (\beta^{(1)} - c_3 - c_4) f = \beta f_u + (\beta^{(1)} - c_3) u_t f_{u_t} + (\beta^{(1)} - c_4) u_x f_{u_x}. \quad (24)$$

На основании леммы 1 и выражений (21)–(24) сформулируем следующее предложение.

Предложение 1. Инфинитезимальные точечные симметрии уравнения $u_{tx} = f(u, u_t, u_x)$ принадлежат следующей (бесконечномерной) алгебре Ли векторных полей:

$$X = (c_1 + c_3 t) \frac{\partial}{\partial t} + (c_2 + c_4 x) \frac{\partial}{\partial x} + \beta(u) \frac{\partial}{\partial u},$$

где $c_i = \text{const}$, $i = \overline{1, 4}$, – и выделяются в ней дополнительным условием $\beta^{(2)} u_t u_x + (\beta^{(1)} - c_3 - c_4) f = \beta f_u + (\beta^{(1)} - c_3) u_t f_{u_t} + (\beta^{(1)} - c_4) u_x f_{u_x}$.

2. Пусть $f = f(u_t, u_x)$. В этом случае для выражения (20) нужно положить, что $f_t = f_x = f_u = 0$. Значит, $\eta_t, \eta_x, \eta_u = \text{const}$, $\ddot{t} = \xi'' = 0$. Тогда решение определяющего уравнения (18) имеет вид (21), (22) и

$$\eta = \alpha u + \beta_2 x + \beta_1 t + \beta_0, \quad \alpha, \beta_0, \beta_1, \beta_2 = \text{const}, \quad (25)$$

$$(\alpha - c_3 - c_4) f = (\beta_1 + (\alpha - c_3) u_t) f_{u_t} + (\beta_2 + (\alpha - c_4) u_x) f_{u_x}. \quad (26)$$

На основании леммы 1 и выражений (21), (22), (25) и (26) сформулируем следующее предложение.

Предложение 2. Инфинитезимальные точечные симметрии уравнения $u_{tx} = f(u_t, u_x)$ принадлежат следующей алгебре Ли векторных полей:

$$X = (c_1 + c_3 t) \frac{\partial}{\partial t} + (c_2 + c_4 x) \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha u + \beta_2 x + \beta_1 t + \beta_0) \frac{\partial}{\partial u},$$

где $c_i = \text{const}$, $i = \overline{1, 4}$, $\alpha, \beta_0, \beta_1, \beta_2 = \text{const}$, – и выделяются в ней дополнительным условием $(\alpha - c_3 - c_4) f = (\beta_1 + (\alpha - c_3) u_t) f_{u_t} + (\beta_2 + (\alpha - c_4) u_x) f_{u_x}$.

3. Пусть $f = f(u, u_x)$. В этом случае для выражения (20) нужно положить, что $f_t = f_x = f_{u_t} = 0$. Значит, $\eta_{xu} = \eta_{uu} = 0$. Тогда решение определяющего уравнения (18) имеет вид

$$\eta = \alpha(t) u + \beta(t, x), \quad (27)$$

$$\beta_{tx} + \dot{\alpha} u_x + (\alpha - \dot{t} - \xi') f = (\alpha u + \beta) f_u + (\beta_x + (\alpha - \xi') u_x) f_{u_x}. \quad (28)$$

На основании леммы 1 и выражений (27) и (28) сформулируем следующее предложение.

Предложение 3. Инфинитезимальные точечные симметрии уравнения $u_{tx} = f(u, u_x)$ принадлежат следующей (бесконечномерной) алгебре Ли векторных полей:

$$X = \tau(t) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(x) \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha(t) u + \beta(t, x)) \frac{\partial}{\partial u}$$

– и выделяются в ней дополнительным условием $\beta_{tx} + \dot{\alpha} u_x + (\alpha - \dot{t} - \xi') f = (\alpha u + \beta) f_u + (\beta_x + (\alpha - \xi') u_x) f_{u_x}$.

4. Пусть $f = f(u)$. В этом случае для выражения (20) нужно положить, что $f_t = f_x = f_{u_t} = f_{u_x} = 0$. Значит, $\eta_{tu} = \eta_{xu} = \eta_{uu} = 0$. Тогда решение определяющего уравнения (18) имеет вид

$$\eta = \alpha u + \beta(t, x), \quad \alpha = \text{const}, \quad (29)$$

$$\eta f^{(1)} + (\dot{t} + \xi' - \alpha) f - \beta_{tx} = 0. \quad (30)$$

Найдем детальное описание этой алгебры Ли точечных симметрий в зависимости от функции $f = f(u)$.

При $\alpha \neq 0$, преобразовав уравнение (30) к виду $\eta \frac{df}{d\eta} + \bar{A} f + \bar{B} = 0$, получим следующие два случая:

- если $\bar{A} = 0$, $\bar{B} \neq 0$, то $f = -\bar{B} \ln \eta + c_1$;
- если $\bar{A} \neq 0$, $\bar{B} \neq 0$, то $f = c_1 \eta^{-\bar{A}} - \frac{\bar{B}}{\bar{A}}$.

При $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, преобразовав уравнение (30) к виду $\frac{df}{du} + \bar{A} f + \bar{B} = 0$, получим следующие два случая:

- если $\bar{A} = 0$, $\bar{B} \neq 0$, то $f = -\bar{B} u + c_1$;
- если $\bar{A} \neq 0$, $\bar{B} \neq 0$, то $f = c_1 e^{-\bar{A} u} - \frac{\bar{B}}{\bar{A}}$.

При $\alpha = 0, \beta = 0$, преобразовав уравнение (30) к виду $\bar{A}f + \bar{B} = 0$, получим, что если $\bar{A} = \bar{B} = 0$, то $f(u)$ – любая функция, не равная предыдущим случаям.

Таким образом, вычисление симметрий в зависимости от функции $f(u)$, рассматриваемой с точностью до замены $a + bf(u)$, разбивается на следующие случаи:

- 1) $f(u) = \text{const}$;
 - 2) $f(u) = u$;
 - 3) $f(u) = u^n, n \neq 0, 1$;
 - 4) $f(u) = e^{ku}, k \neq 0$;
 - 5) $f(u) = \ln u$;
 - 6) все остальные функции, не равные случаям 1)–5).
- Подставив случаи 1)–6) в систему (29), (30), получим:
- а) при $f(u) = \text{const}$

$$X = \tau(t) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(x) \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha u + \beta(t, x)) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (31)$$

где $(\dot{\tau} + \xi' - \alpha)f - \beta_{tx} = 0$;

б) при $f(u) = u$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = t \frac{\partial}{\partial t} - x \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_4 = u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = \beta(t, x) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (32)$$

где $\beta_{tx} = \beta$;

в) при $f(u) = u^n, n \neq 0, 1$,

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{1-n} \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{u}{1-n} \frac{\partial}{\partial u}; \quad (33)$$

г) при $f(u) = e^{ku}, k \neq 0$,

$$X = \tau(t) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(x) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{k} (\dot{\tau} + \xi') \frac{\partial}{\partial u}, \quad (34)$$

где $\tau(t), \xi(x)$ – произвольные функции;

д) при всех остальных функциях, не равных случаям а)–г),

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = t \frac{\partial}{\partial t} - x \frac{\partial}{\partial x}. \quad (35)$$

Предложение 4. Нелинейное уравнение Клейна – Гордона вида $u_{tx} = f(u)$ имеет:

- бесконечномерную алгебру точечных симметрий с генераторами (31), (32) и (34) для функций $f(u) = \text{const}, f(u) = u$ и $f(u) = e^{ku}, k \neq 0$, соответственно;
 - четырехмерную алгебру точечных симметрий с генераторами (33) для функции $f(u) = u^n, n \neq 0, 1$;
 - трехмерную алгебру точечных симметрий с генераторами (35) для всех остальных функций.
- Полученные результаты предложения 4 согласуются с аналогичными утверждениями из работ [25; 26].

Вычисление инфинитезимальных преобразований эквивалентности семейств уравнений

Перейдем теперь к описанию инфинитезимальных преобразований эквивалентности семейств уравнений (1) и рассмотренных выше классов уравнений. На основании леммы 1 и выражений (13)–(16) запишем векторное поле для преобразования эквивалентности семейств уравнений (1) в виде

$$Y = X^{(1)} + \Phi \frac{\partial}{\partial f},$$

где векторное поле X определено в лемме 1, а

$$\Phi = \eta_{tx} + \eta_{xu} u_t + \eta_{tu} u_x + \eta_{uu} u_t u_x + (\eta_u - \dot{\tau} - \xi') f.$$

Тогда можем переформулировать лемму 1 следующим образом.

Лемма 2. Инфинитезимальные преобразования эквивалентности семейств уравнений $u_{tx} = f(t, x, u, u_t, u_x)$ порождаются векторными полями

$$Y = \tau(t) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(x) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u} + (\eta_{tx} + \eta_{xu} u_t + \eta_{tu} u_x + \eta_{uu} u_t u_x + (\eta_u - \dot{\tau} - \xi') f) \frac{\partial}{\partial f} + \\ + (\eta_t + (\eta_u - \dot{\tau}) u_t) \frac{\partial}{\partial u_t} + (\eta_x + (\eta_u - \xi') u_x) \frac{\partial}{\partial u_x},$$

где $\tau(t)$, $\xi(x)$, $\eta(t, x, u)$ – произвольные функции.

Продолжение векторного поля Y на пространство 1-струй функции $f(t, x, u, u_t, u_x)$ имеет вид

$$Y^{(1)} = Y + \Phi_1 \frac{\partial}{\partial f_t} + \Phi_2 \frac{\partial}{\partial f_x} + \Phi_3 \frac{\partial}{\partial f_u} + \Phi_4 \frac{\partial}{\partial f_{u_t}} + \Phi_5 \frac{\partial}{\partial f_{u_x}}, \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \eta_{tx} + \eta_{xu} u_t + \eta_{tu} u_x + \eta_{uu} u_t u_x + (\eta_{tu} - \dot{\tau}) f + \\ &+ (\eta_u - 2\dot{\tau} - \xi') f_t - \eta_t f_u - (\eta_{tt} + (\eta_{tu} - \dot{\tau}) u_t) f_{u_t} - (\eta_{tx} + \eta_{tu} u_x) f_{u_x}, \\ \Phi_2 &= \eta_{txx} + \eta_{xxt} u_t + \eta_{txu} u_x + \eta_{xuu} u_t u_x + (\eta_{xu} - \xi'') f + \\ &+ (\eta_u - \dot{\tau} - 2\xi') f_x - \eta_x f_u - (\eta_{tx} + \eta_{xu} u_t) f_{u_t} - (\eta_{xx} + (\eta_{xu} - \xi'') u_x) f_{u_x}, \\ \Phi_3 &= \eta_{txu} + \eta_{xuu} u_t + \eta_{tuu} u_x + \eta_{uuu} u_t u_x + \eta_{uu} f - (\dot{\tau} + \xi') f_u - \\ &- (\eta_{tu} + \eta_{uu} u_t) f_{u_t} - (\eta_{xu} + \eta_{uu} u_x) f_{u_x}, \\ \Phi_4 &= \eta_{xu} + \eta_{uu} u_x - \xi' f_{u_t}, \\ \Phi_5 &= \eta_{tu} + \eta_{uu} u_t - \dot{\tau} f_{u_x}. \end{aligned}$$

Рассмотрим для семейств уравнений (1) те же классы уравнений, что и для точечных симметрий.

1. Пусть $f = f(u, u_t, u_x)$. В этом случае для векторного поля (36) нужно положить, что $f_t = f_x = 0$. Отсюда следует, что $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$. Значит, $\eta_t = \eta_x = \dot{\tau} = \xi'' = 0$. Тогда решение определяющего уравнения для семейств уравнений $u_{tx} = f(u, u_t, u_x)$ имеет вид (21)–(23) и

$$\Phi = \beta^{(2)} u_t u_x + (\beta^{(1)} - c_3 - c_4) f, \quad (37)$$

$$\Gamma_0 = (\beta^{(1)} - c_3) u_t, \quad (38)$$

$$\Gamma_1 = (\beta^{(1)} - c_4) u_x. \quad (39)$$

На основании выражений (21)–(23) и (37)–(39) сформулируем следующее следствие.

Следствие 1. Инфинитезимальные преобразования эквивалентности семейств уравнений $u_{tx} = f(u, u_t, u_x)$ порождаются векторными полями

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} - f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t}, \quad Y_4 = x \frac{\partial}{\partial x} - f \frac{\partial}{\partial f} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \\ Y_\infty = \beta(u) \frac{\partial}{\partial u} + (\beta^{(2)} u_t u_x + \beta^{(1)} f) \frac{\partial}{\partial f} + \beta^{(1)} u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + \beta^{(1)} u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$$

где $\beta(u)$ – произвольная функция.

2. Пусть $f = f(u_t, u_x)$. В этом случае для векторного поля (36) нужно положить, что $f_t = f_x = f_u = 0$. Отсюда следует, что $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0$. Значит, $\eta_{tu} = \eta_{xu} = \eta_{uu} = \eta_u = \eta_{tx} = \eta_{xx} = \ddot{\tau} = \xi'' = 0$. Тогда решение определяющего уравнения для семейств уравнений $u_{tx} = f(u_t, u_x)$ имеет вид (21), (22), (25) и

$$\Phi = (\alpha - c_3 - c_4)f, \quad (40)$$

$$\Gamma_0 = \beta_1 + (\alpha - c_3)u_t, \quad (41)$$

$$\Gamma_1 = \beta_2 + (\alpha - c_4)u_x. \quad (42)$$

На основании выражений (21), (22), (25) и (40)–(42) сформулируем следующее следствие.

Следствие 2. Инфинитезимальные преобразования эквивалентности семейств уравнений $u_{tx} = f(u_t, u_x)$ порождаются векторными полями

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} - f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t}, \quad Y_4 = x \frac{\partial}{\partial x} - f \frac{\partial}{\partial f} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_5 = \frac{\partial}{\partial u},$$

$$Y_6 = t \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_t}, \quad Y_7 = x \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_8 = u \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial f} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x}.$$

3. Пусть $f = f(u, u_x)$. В этом случае для векторного поля (36) нужно положить, что $f_t = f_x = f_{u_t} = 0$. Отсюда следует, что $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_4 = 0$. Значит, $\eta_t = \eta_x = \eta_{uu} = 0$, $\ddot{\tau} = \xi'' = 0$. Тогда решение определяющего уравнения для семейств уравнений $u_{tx} = f(u, u_x)$ имеет вид (21), (22), (40) и

$$\eta = \alpha u + \beta, \quad \alpha, \beta = \text{const}, \quad (43)$$

$$\Gamma_0 = (\alpha - c_3)u_t, \quad (44)$$

$$\Gamma_1 = (\alpha - c_4)u_x. \quad (45)$$

На основании выражений (21), (22), (40) и (43)–(45) сформулируем следующее следствие.

Следствие 3. Инфинитезимальные преобразования эквивалентности семейств уравнений $u_{tx} = f(u, u_x)$ порождаются векторными полями

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} - f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t}, \quad Y_4 = x \frac{\partial}{\partial x} - f \frac{\partial}{\partial f} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$$

$$Y_5 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_6 = u \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial f} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x}.$$

4. Пусть $f = f(u)$. В этом случае для векторного поля (36) нужно положить, что $f_t = f_x = f_{u_t} = f_{u_x} = 0$. Отсюда следует, что $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_4 = \Phi_5 = 0$. Значит, $\eta_{tu} = \eta_{xu} = \eta_{uu} = 0$, $\eta_{tx} - \ddot{\tau}f - \eta_t f^{(1)} = 0$, а также $\eta_{txx} - \xi''f - \eta_x f^{(1)} = 0$. Тогда решение определяющего уравнения для семейств уравнений $u_{tx} = f(u)$ имеет вид (21), (22), (40), (43)–(45). Следовательно, для семейств уравнений $u_{tx} = f(u)$ алгебра инфинитезимальных преобразований эквивалентности совпадает с алгеброй Ли из следствия 3.

Специальные преобразования эквивалентности

Предположим теперь, что $\Phi(t, x, u, u_t, u_x, f)$ в выражении (3) не зависит от f . Назовем такие преобразования эквивалентности инфинитезимальными специальными преобразованиями эквивалентности. Они индуцируют преобразования параллельных переносов

$$\tilde{f} = f + \Phi(t, x, u, u_t, u_x)\varepsilon$$

на семействе уравнений (1). Другими словами, в данном случае мы ограничиваемся такими симметриями семейств уравнений (1), которые сохраняют 1-форму df на семействе этих уравнений. Тогда на основании леммы 2 и условия $\eta_u = \dot{\tau} + \xi'$ получим следующую лемму.

Лемма 3. Инфинитезимальные специальные преобразования эквивалентности семейств уравнений $u_{tx} = f(t, x, u, u_t, u_x)$ порождаются векторными полями

$$Y = \tau(t) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(x) \frac{\partial}{\partial x} + ((\dot{\tau} + \xi')u + \beta(t, x)) \frac{\partial}{\partial u} + (\beta_{tx} + \xi''u_t + \ddot{\tau}u_x) \frac{\partial}{\partial f} + \\ + (\beta_t + \dot{\tau}u + \xi'u_t) \frac{\partial}{\partial u_t} + (\beta_x + \xi''u + \dot{\tau}u_x) \frac{\partial}{\partial u_x},$$

где $\tau(t)$, $\xi(x)$, $\beta(t, x)$ – произвольные функции.

Рассмотрим те же частные случаи семейств уравнений (1), что и в разделе «Вычисление инфинитезимальных преобразований эквивалентности семейств уравнений».

1. Пусть $f = f(u, u_t, u_x)$. В этом случае для векторного поля леммы 3 нужно положить, что $f_t = f_x = 0$. Отсюда следует, что $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$. Значит, $\eta_t = \eta_x = \ddot{\tau} = \xi'' = 0$, $\eta_u = \dot{\tau} + \xi'$. Тогда решения определяющего уравнения для семейств уравнений $u_{tx} = f(u, u_t, u_x)$ имеют вид (21), (22) и

$$\eta = (c_3 + c_4)u + \beta, \quad \beta = \text{const}, \quad (46)$$

$$\Phi = 0, \quad (47)$$

$$\Gamma_0 = c_4 u_t, \quad (48)$$

$$\Gamma_1 = c_3 u_x. \quad (49)$$

На основании выражений (21), (22) и (46)–(49) сформулируем следующее следствие.

Следствие 4. Инфинитезимальные специальные преобразования эквивалентности семейств уравнений $u_{tx} = f(u, u_t, u_x)$ порождаются векторными полями

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$$

$$Y_4 = x \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial u} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t}, \quad Y_5 = \frac{\partial}{\partial u}.$$

2. Пусть $f = f(u_t, u_x)$. В этом случае для векторного поля леммы 3 нужно положить, что $f_t = f_x = f_u = 0$. Отсюда следует, что $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0$. Значит, $\eta_{tu} = \eta_{xu} = \eta_{uu} = \eta_{tt} = \eta_{tx} = \eta_{xx} = \ddot{\tau} = \xi'' = 0$, $\eta_u = \dot{\tau} + \xi'$. Тогда решения определяющего уравнения для семейств уравнений $u_{tx} = f(u_t, u_x)$ имеют вид (21), (22), (47) и

$$\eta = (c_3 + c_4)u + \beta_2 x + \beta_1 t + \beta_0, \quad \alpha, \beta_0, \beta_1, \beta_2 = \text{const}, \quad (50)$$

$$\Gamma_0 = \beta_1 + c_4 u_t, \quad (51)$$

$$\Gamma_1 = \beta_2 + c_3 u_x. \quad (52)$$

На основании выражений (21), (22), (47) и (50)–(52) сформулируем следующее следствие.

Следствие 5. Инфинитезимальные специальные преобразования эквивалентности семейств уравнений $u_{tx} = f(u_t, u_x)$ порождаются векторными полями

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_4 = x \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial u} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t},$$

$$Y_5 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_6 = t \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_t}, \quad Y_7 = x \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_x}.$$

3. Пусть $f = f(u, u_x)$. В этом случае для векторного поля леммы 3 нужно положить, что $f_t = f_x = f_{u_t} = 0$. Отсюда следует, что $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_4 = 0$. Значит, $\eta_t = \eta_x = \eta_{uu} = 0$, $\eta_u = \dot{\tau} + \xi'$, $\ddot{\tau} = \xi'' = 0$. Тогда решение определяющего уравнения для семейств уравнений $u_{tx} = f(u, u_x)$ имеет вид (21), (22), (46)–(49). Следовательно, для семейств уравнений $u_{tx} = f(u, u_x)$ алгебра инфинитезимальных специальных преобразований эквивалентности совпадает с алгеброй Ли из следствия 4.

4. Пусть $f = f(u)$. В этом случае для векторного поля леммы 3 нужно положить, что $f_t = f_x = f_{u_t} = f_{u_x} = 0$. Отсюда следует, что $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_4 = \Phi_5 = 0$. Значит, $\eta_{tu} = \eta_{xu} = \eta_{uu} = 0$, $\eta_{tx} - \dot{\tau}f - \eta_t f^{(1)} = 0$, $\eta_{xx} - \xi''f - \eta_x f^{(1)} = 0$, $\eta_u = \dot{\tau} + \xi'$. Тогда решение определяющего уравнения для семейств уравнений $u_{tx} = f(u)$ имеет вид (21), (22), (46)–(49). Следовательно, для семейств уравнений $u_{tx} = f(u)$ алгебра инфинитезимальных специальных преобразований эквивалентности совпадает с алгеброй Ли из следствия 4.

Заключение

Показано, как переход к вычислению симметрий семейств уравнений дает возможность расширить набор преобразований, сохраняющий данное семейство. Полученные инфинитезимальные симметрии позволяют проводить предварительную классификацию уравнений и их симметричную редукцию. Вычисление групп эквивалентности является более простым и в отличие от вычисления точечных симметрий не требует рассмотрения различных подслучаев в зависимости от конкретных функций $f(t, x, u, u_t, u_x)$.

Предложенный подход продемонстрирован на следующих четырех семействах уравнений: $u_{tx} = f(u, u_t, u_x)$, $u_{tx} = f(u_t, u_x)$, $u_{tx} = f(u, u_x)$, $u_{tx} = f(u)$.

Дополнительно вычислены подалгебры в алгебрах симметрий таких семейств уравнений, которые индуцируют преобразования параллельных переносов на данном семействе.

Отметим, что алгебры эквивалентности семейств уравнений $u_{tx} = f(u)$, $u_{tx} = f(u, u_x)$ и $u_{tx} = f(u, u_t)$ (см. следствие 3), а также алгебры специальных преобразований эквивалентности семейств уравнений $u_{tx} = f(u)$, $u_{tx} = f(u, u_x)$, $u_{tx} = f(u, u_t)$ и $u_{tx} = f(u, u_t, u_x)$ (см. следствие 4) совпадают.

Библиографические ссылки

1. Kingston JG, Sophocleous C. On point transformations of a generalised Burgers equation. *Physics Letters A*. 1991;155(1):15–19. DOI: 10.1016/0375-9601(91)90500-8.
2. Kingston JG, Sophocleous C. On form-preserving point transformations of partial differential equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1998;31(6):1597–1619. DOI: 10.1088/0305-4470/31/6/010.
3. Kingston JG, Sophocleous C. Symmetries and form-preserving transformations of one-dimensional wave equations with dissipation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2001;36(6):987–997. DOI: 10.1016/S0020-7462(00)00064-0.
4. Cieřliński JL. Lie symmetries as a tool to isolate integrable geometries. In: Boiti M, Martina L, Pempinelli F, editors. *Nonlinear evolution equations and dynamical systems. Proceedings of the 7th International workshop (NEEDS'91); 1991 June 19–29; Gallipoli, Italy*. Singapore: World Scientific; 1992. p. 260–268.
5. Cieřliński J. Group interpretation of the spectral parameter in the case of nonhomogeneous, nonlinear Schrödinger system. *Journal of Mathematical Physics*. 1993;34(6):2372–2384. DOI: 10.1063/1.530122.
6. Cieřliński J, Goldstein P, Sym A. On integrability of the inhomogeneous Heisenberg ferromagnet model: examination of a new test. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1994;27(5):1645–1664. DOI: 10.1088/0305-4470/27/5/028.
7. Cieřliński JL, Zhalukevich DS. Spectral parameter as a group parameter. *Symmetry*. 2022;14(12):2577. DOI: 10.3390/sym14122577.
8. Ibragimov NH, Torrisi M, Valenti A. Preliminary group classification of equations $u_{tt} = f(x, u_x)u_{xx} + g(x, u_x)$. *Journal of Mathematical Physics*. 1991;32(11):2988–2995. DOI: 10.1063/1.529042.
9. Torrisi M, Tracinà R, Valenti A. On equivalence transformations applied to a non-linear wave equation. In: Ibragimov NH, Torrisi M, Valenti A, editors. *Modern group analysis: advanced analytical and computational methods in mathematical physics. Proceedings of the International workshop; 1992 October 27–31; Acireale, Italy*. Dordrecht: Springer Science + Business Media; 1993. p. 367–375. DOI: 10.1007/978-94-011-2050-0_39.
10. Hydon PE. *Symmetry methods for differential equations: a beginner's guide*. Cambridge: Cambridge University Press; 2000. XII, 214 p. (Cambridge texts in applied mathematics).
11. Bluman GW, Kumei S. *Symmetries and differential equations*. New York: Springer Science + Business Media; 1989. XIII, 413 p. (Applied mathematical sciences; volume 81).
12. Olver PJ. *Applications of Lie groups to differential equations*. 2nd edition. New York: Springer-Verlag; 1993. XXVIII, 513 p. (Graduate texts in mathematics; volume 107).
13. Овсянников ЛВ. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. Москва: Наука; 1978. 399 с.
14. Dodd RK, Eilbeck JC, Gibbon JD, Morris HC. *Solitons and nonlinear wave equations*. London: Academic Press; 1982. X, 630 p.
15. Fox D, Goertsches O. Higher-order conservation laws for the nonlinear Poisson equation via characteristic cohomology. *Selecta Mathematica*. 2011;17(4):795–831. DOI: 10.1007/s00029-011-0063-1.
16. Fushchich WI, Shtelen WM, Serov NI. *Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics*. Dordrecht: Springer Science + Business Media; 1993. XXIV, 435 p. (Mathematics and its applications; volume 246). DOI: 10.1007/978-94-017-3198-0.
17. Polyanin AD, Zaitsev VF. *Handbook of nonlinear partial differential equations*. 2nd edition. Boca Raton: CRC Press; 2012. XXXVI, 1876 p.
18. Tracinà R. Invariants of a family of nonlinear wave equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2004;9(1):127–133. DOI: 10.1016/S1007-5704(03)00021-2.
19. Torrisi M, Tracinà R, Valenti A. On the linearization of semilinear wave equations. *Nonlinear Dynamics*. 2004;36(1):97–106. DOI: 10.1023/B:NODY.0000034649.74389.09.
20. Boyko VM, Lokaziuk OV, Popovych RO. Realizations of Lie algebras on the line and the new group classification of $(1+1)$ -dimensional generalized nonlinear Klein–Gordon equations. *Analysis and Mathematical Physics*. 2021;11(3):127. DOI: 10.1007/s13324-021-00550-z.
21. Lahno V, Magda O. The group classification of one class of nonlinear wave equations. arXiv:math-ph/0310049v2 [Preprint]. 2003 [cited 2025 May 17]: [8 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/math-ph/0310049v2>.

22. Lahno V, Zhdanov R. Group classification of nonlinear wave equations. *Journal of Mathematical Physics*. 2005;46(5):053301. DOI: 10.1063/1.1884886.
23. Lahno V, Zhdanov R, Magda O. Group classification and exact solutions of nonlinear wave equations. *Acta Applicandae Mathematicae*. 2006;91(3):253–313. DOI: 10.1007/s10440-006-9039-0.
24. Popovych RO. Point and contact equivalence groupoids of two-dimensional quasilinear hyperbolic equations. *Applied Mathematics Letters*. 2021;116:107068. DOI: 10.1016/j.aml.2021.107068.
25. Lie S. Diskussion der Differentialgleichung $\frac{d^2z}{dxdy} = F(z)$. *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab*. 1881;6(1):112–124.
26. Azad H, Mustafa MT, Ziad M. Group classification, optimal system and optimal reductions of a class of Klein – Gordon equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2010;15(5):1132–1147. DOI: 10.1016/j.cnsns.2009.05.045.
27. Фушич ВИ, Штельень ВМ, Серов НИ. Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. Киев: Наукова думка; 1989. 336 с.

Получена 23.07.2025 / исправлена 11.02.2026 / принята 24.02.2026.
Received 23.07.2025 / revised 11.02.2026 / accepted 24.02.2026.