Теоретическая
и прикладная механика

Theoretical
and practical mechanics

УДК 539.3

СВОБОДНЫЕ МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ НАНОБАЛОК С УЧЕТОМ СИЛ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА

Г. И. МИХАСЕВ[1)]***, В. В. МИСНИК***[2)]***, М. Г. БОТОГОВА***[3)]

[1)]*Харбинский политехнический университет,*
ул. Вест Дажи, 92, 150001, г. Харбин, Китай
[2)]*Пеленг, ул. Макаенка, 25, 220114, г. Минск, Беларусь*
[3)]*Белорусский государственный университет,*
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Образец цитирования:
Михасев ГИ, Мисник ВВ, Ботогова МГ. Свободные малые колебания системы параллельно ориентированных нанобалок с учетом сил Ван-дер-Ваальса. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2026;2:49–61.
EDN: KJUDSP

For citation:
Mikhasev GI, Misnik VV, Botogova MG. Free small vibrations of a system of parallel-oriented nanobeams considering van der Waals forces. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2026;2:49–61. Russian.
EDN: KJUDSP

Авторы:
Геннадий Иванович Михасев – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры астронавтики и механики школы астронавтики.
Вячеслав Владимирович Мисник – инженер-исследователь космического отделения научно-конструкторского управления «Космос».
Марина Георгиевна Ботогова – кандидат физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой био- и наномеханики механико-математического факультета.

Authors:
Gennadi I. Mikhasev, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of astronautical science and mechanics, school of astronautics.
mikhasev@hit.edu.cn
https://orcid.org/0000-0002-9409-9210
Vyacheslav V. Misnik, research and development engineer at the space division, scientific design department «Cosmos».
slava.misnik@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-7519-3343
Marina G. Botogova, PhD (physics and mathematics), docent; head of the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.
batahova@bsu.by
https://orcid.org/0000-0002-4839-450X

CC BY NC

Аннотация. Исследуются свободные малые колебания системы из *N* параллельно ориентированных нанобалок с учетом сил взаимодействия Ван-дер-Ваальса. Рассматривается вариант граничных условий, когда нижние края балок защемлены, а верхние края свободны. Система *N* нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных расщепляется на две системы – нелинейную систему, которая определяет статическое деформирование всех балок под действием межмолекулярных сил, и систему уравнений с переменными коэффициентами, описывающую свободные малые колебания в окрестности этого деформированного состояния. Показано, что для рассматриваемой механической системы существуют моды малых колебаний, совпадающие с модами одной свободной консольной балки. Детально изучены свободные малые колебания двух консольных углеродных нанотрубок (нанопинцета), а также трех нанотрубок, формы колебаний которых симметричны относительно срединной линии системы. Отмечено, что данные моды сильно зависят от сил Ван-дер-Ваальса: уменьшение зазора между трубками приводит к росту сил Ван-дер-Ваальса и, как следствие, снижению фундаментальной частоты системы, а при достижении критически малого значения зазора имеет место явление неустойчивости типа взаимного втягивания нано-консолей.

Ключевые слова: система нанобалок; нанопинцет; силы Ван-дер-Ваальса; свободные малые колебания.

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке Харбинского политехнического университета (грант № AUGA5710012624), а также в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (задание 1.7.01.2).

FREE SMALL VIBRATIONS OF A SYSTEM OF PARALLEL-ORIENTED NANOBEAMS CONSIDERING VAN DER WAALS FORCES

G. I. MIKHASEV [a], ***V. V. MISNIK*** [b], ***M. G. BOTOGOVA*** [c]

[a] *Harbin Institute of Technology, 92 West Dazhi Street, Harbin 150001, China*
[b] *Peleng, 25 Makajonka Street, Minsk 220114, Belarus*
[c] *Belarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

Corresponding author: G. I. Mikhasev (mikhasev@hit.edu.cn)

Abstract. Free small vibrations of a system of *N* parallel-oriented nanobeams are studied, taking into account van der Waals interaction forces. A boundary condition variant is considered where the lower edges are clamped and the upper edges are free. A system of *N* nonlinear partial differential equations is split into two systems. The first nonlinear system determines the static deformation of all beams under the action of intermolecular forces, while the second one with variable coefficients describes free small vibrations in the vicinity of this deformed state. It is shown that for the mechanical system under consideration, there exist small vibrations modes coinciding with the modes of a single free cantilever beam. Free small vibrations of two cantilever carbon nanotubes (nanotweezer), as well as three nanotubes, whose vibrations modes are symmetrical about the system midline, are studied in detail. It is noted that these modes are strongly dependent on van der Waals forces: a decrease in the gap between the tubes leads to an increase in van der Waals forces and, as a consequence, to a decrease in the fundamental frequency of the system, and when a critically small gap value is reached, the phenomenon of pull-in instability of nanocantilevers occurs.

Keywords: system of nanobeams; nanotweezer; van der Waals forces; free small vibrations.

Acknowledgements. This work was carried out with the financial support of the Harbin Institute of Technology (grant No. AUGA5710012624), as well as within the framework of the state programme of scientific research «Convergence-2025» (assignment 1.7.01.2).

Введение

Семейства параллельно ориентированных нанотрубок, взаимодействующих друг с другом посредством полей межмолекулярных сил, представляют собой уникальные объекты, которые находят применение в различных микро- и наноразмерных электромеханических системах (МЭМС и НЭМС соответственно). В частности, нанодатчики давления состоят из «леса» вертикально ориентированных углеродных нанотрубок (УНТ), которые упакованы между двумя гибкими мембрана-

ми [1; 2]. Пара консольных параллельно расположенных нанотрубок, взаимодействующих между собой как два бистабильных электрода, является основным элементом нанопинцетов, используемых в современной микро- и нанохирургии для манипуляций на клеточном уровне [3; 4]. Эти и другие устройства на основе нанотрубок обладают сверхвысокой чувствительностью, что позволяет интегрировать их в различные МЭМС и НЭМС, применяемые в медицине, промышленности и научных исследованиях.

Межмолекулярные силы (силы Казимира, Ван-дер-Ваальса), действующие между близко расположенными нанотрубками, оказывают решающее влияние на механическое поведение последних [5; 6]. В частности, при достаточно малом зазоре между захватами нанопинцета силы Ван-дер-Ваальса могут вызывать потерю устойчивости типа втягивания, которая приводит к взаимному прилипанию захватов и трудностям с их освобождением [3; 7–9]. Аналогичное явление может иметь место при проектировании или эксплуатации нановыключателя, состоящего из консольной электростатически активируемой нанобалки, подвешенной над неподвижным электродом-подложкой; при малом зазоре между электродами или критически большой длине наноконсоли возможно втягивание последней и падение на подложку без приложенного электрического напряжения под действием лишь межмолекулярных сил [10]. Как показано в статье [11], действие сил Ван-дер-Ваальса может значительно усиливаться, если на свободных поверхностях наноконсоли имеют место остаточные поверхностные напряжения, что может приводить к коллапсу даже при большом зазоре между электродами.

В случае подачи электрического напряжения подвижный электрод или пара взаимодействующих подвижных электродов деформируются, а при внезапном снятии напряжения возможны колебательные формы их движения, которые ввиду нелинейности межмолекулярных сил могут приводить к динамической неустойчивости [12–14]. Корректное моделирование динамики подобных МЭМС и НЭМС предполагает предварительный анализ динамических характеристик, включая собственные частоты свободных колебаний и их формы с учетом действия межмолекулярных сил притяжения. В работе [15] детально исследованы формы малых собственных колебаний электростатически активируемой консольной нанобалки, подвешенной над неподвижным электродом, в окрестности ее деформированного состояния под действием сил Казимира и Ван-дер-Ваальса. Отмечено, что учет межмолекулярных сил приводит к снижению собственных частот колебаний, при этом данный эффект оказывается наиболее заметным для наименьшей частоты колебаний. Анализ литературы показывает, что подобные исследования динамики семейства параллельно ориентированных нанотрубок с учетом их взаимодействия посредством полей межмолекулярных сил не проводились.

Целью данной работы является определение собственных частот свободных компланарных низкочастотных колебаний системы параллельно ориентированных нанотрубок, моделируемых нанобалками, в рамках классического подхода – локальной теории упругости. Предполагается, что расстояние между нанобалками достаточно мало, это приводит к появлению межмолекулярных сил взаимодействия. Рассматривается случай, когда нижние края нанобалок защемлены, а верхние края свободны, что соответствует механической системе типа «леса» нанотрубок, выращиваемых на неподвижной подложке [16], или НЭМС типа нанопинцета, состоящего из двух подвижных консольных нанобалок. Система нелинейных дифференциальных динамических уравнений, записанная в безразмерном виде, расщепляется на уравнения, определяющие статическую деформацию под действием межмолекулярных сил, и уравнения, описывающие малые колебания системы около деформированного состояния. Показано существование мод свободных малых колебаний, не зависящих от межмолекулярных сил. Подробно рассмотрена задача о свободных колебаниях системы из двух УНТ (нанопинцета), имеющая приложение в современной микро- и нанохирургии.

Постановка задачи

Рассмотрим плоскую систему из N параллельно ориентированных одностенных УНТ длиной l с внешним радиусом r, стоящих на жесткой неподвижной подложке (рис. 1). Расстояние между соседними УНТ в их основании одинаково и равно g. Верхние края трубок свободны, а нижние края жестко защемлены, хотя другие варианты граничных условий не исключаются из рассмотрения. Случай, когда все края трубок жестко защемлены, имеет место в нанодатчиках давления [1; 2]. Геометрические параметры и механические свойства всех УНТ предполагаются одинаковыми. В дальнейшем нанотрубки будем моделировать в рамках континуальной теории упругости эквивалентными нанобалками типа Эйлера – Бернулли [17], которые характеризуются эффективными модулем Юнга E, моментом инерции поперечного сечения I, площадью поперечного сечения S и плотностью материала ρ, зависящими от радиуса r и хиральности УНТ [18; 19].

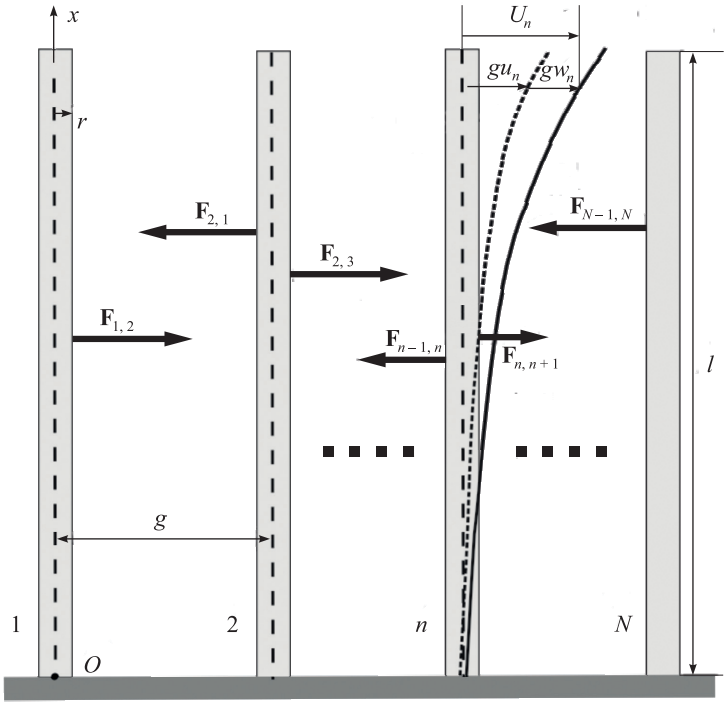


Рис. 1. Плоская система из *N* параллельно ориентированных нанотрубок под действием сил Ван-дер-Ваальса

Fig. 1. Plane system of *N* parallel-oriented nanobeams under action of van der Waals forces

Обозначим через $U_n(x_n, t)$ перемещение точки срединной линии *n*-й нанобалки, где x_n – координата точки, отсчитываемая вдоль оси балки от ее основания, а *t* – время. Учитывая одинаковую длину балок и имея намерение исследовать малые связанные колебания посредством межмолекулярных сил притяжения, далее принимаем единую систему координат для всех нанобалок, так что $x_n = x$.

Уравнения движения *n*-й нанобалки Эйлера – Бернулли имеют вид

$$EI\frac{\partial^4 U_n}{\partial x^4} + \rho S\frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2} = F_n(x), \tag{1}$$

где $F_n(x)$ – равнодействующая межмолекулярных сил, действующих на *n*-ю нанобалку со стороны соседних нанобалок.

Как показано в работе [20], при зазоре между УНТ $g > 20$ нм превалирующими являются силы Казимира, а при зазоре $g < 20$ нм следует принимать во внимание силы Ван-дер-Ваальса. Далее будем исследовать колебание механической системы с учетом действия силы притяжения Ван-дер-Ваальса. Как интегральная характеристика межатомного взаимодействия двух параллельно ориентированных УНТ, находящихся на фиксированном расстоянии *g*, данная сила определяется соотношением [5; 8]

$$F_{\text{vdW}} = \frac{3Ah_t^2}{256r^{\frac{3}{2}}g^{\frac{5}{2}}}\left(1 - \frac{20r}{3g} + \frac{140r^2}{3g^2}\right), \tag{2}$$

где *A* – постоянная Гамакера; h_t – эффективная толщина УНТ. В результате действия сил (2) две соседние нанотрубки деформируются. Пусть $g - (U_n - U_{n+1})$ – эффективный зазор между *n*-й и $(n+1)$-й нанотрубками. Тогда при $r \ll g$ сила взаимодействия между этими нанотрубками будет находиться по формуле

$$F_{n,n+1} = \frac{3Ah_t^2}{256r^{\frac{3}{2}}\left[g - (U_n - U_{n+1})\right]^{\frac{5}{2}}}.$$

Компланарная динамика семейства из N параллельно ориентированных УНТ будет описываться системой уравнений (1) для балок, где $n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$, а силы F_n находятся по формулам

$$F_1 = F_{1,2},\ F_n = F_{n,n+1} - F_{n-1,n},\ F_N = -F_{N-1,N}.$$

Перейдем к безразмерным величинам

$$U_n = gW_n,\ x = ls,\ t = \frac{\tau}{\omega_c},\ F_{n,n+1} = \alpha f_{n,n+1},\ f_{n,n+1} = \frac{1}{\left[1-\left(W_n - W_{n+1}\right)\right]^{\frac{5}{2}}},$$

где $\omega_c = \sqrt{\dfrac{EI}{\rho S l^4}}$ – характерная частота колебаний системы, а $\alpha = \dfrac{3Ah_t^2 l^4}{256EIr^{\frac{3}{2}}g^{\frac{7}{2}}}$ – безразмерный параметр Ван-дер-Ваальса.

Следуя подходу, предложенному в работе [15], представим безразмерное перемещение W_n в виде статической и динамической составляющих:

$$W_n(s,\ \tau) = u_n(s) + w_n(s,\ \tau). \tag{3}$$

Далее будем исследовать малые колебания в окрестности деформированного статического состояния системы, для которых выполняются сильные неравенства

$$w_n - w_{n+1} \ll 1 - \left(u_n - u_{n+1}\right),\ n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N. \tag{4}$$

Подставим формулу (3) в систему уравнений (1) и разложим безразмерные силы $f_{n,n+1}$ в ряды по степеням $\dfrac{w_n - w_{n+1}}{1-\left(u_n - u_{n+1}\right)}$. Тогда, удерживая в этих рядах лишь первые слагаемые, приходим к следующей системе уравнений в безразмерном виде:

$$\frac{d^4u_1}{ds^4} - \frac{\alpha}{\left[1-\left(u_1-u_2\right)\right]^{\frac{5}{2}}} = -\frac{\partial^4 w_1}{\partial s^4} + \frac{5\alpha}{2\left[1-\left(u_1-u_2\right)\right]^{\frac{7}{2}}}\left(w_1 - w_2\right) - \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2},\ \ldots,$$

$$\frac{d^4u_n}{ds^4} - \frac{\alpha}{\left[1-\left(u_n-u_{n+1}\right)\right]^{\frac{5}{2}}} + \frac{\alpha}{\left[1-\left(u_{n-1}-u_n\right)\right]^{\frac{5}{2}}} =$$

$$= -\frac{\partial^4 w_n}{\partial s^4} + \frac{5\alpha}{2\left[1-\left(u_n-u_{n+1}\right)\right]^{\frac{7}{2}}}\left(w_n - w_{n+1}\right) - \frac{5\alpha}{2\left[1-\left(u_{n-1}-u_n\right)\right]^{\frac{7}{2}}}\left(w_{n-1} - w_n\right) - \frac{\partial^2 w_n}{\partial \tau^2},\ \ldots, \tag{5}$$

$$\frac{d^4u_N}{ds^4} + \frac{\alpha}{\left[1-\left(u_{N-1}-u_N\right)\right]^{\frac{5}{2}}} = -\frac{\partial^4 w_N}{\partial s^4} - \frac{5\alpha}{2\left[1-\left(u_{N-1}-u_N\right)\right]^{\frac{7}{2}}}\left(w_{N-1} - w_N\right) - \frac{\partial^2 w_N}{\partial \tau^2}.$$

Уравнения (5) должны тождественно удовлетворяться для любого момента времени, в том числе и в случае статического равновесия системы. Отсюда получаем две системы дифференциальных уравнений, из которых нелинейные уравнения

$$\frac{d^4u_1}{ds^4} - \frac{\alpha}{\left[1-\left(u_1-u_2\right)\right]^{\frac{5}{2}}} = 0,\ \ldots,$$

$$\frac{d^4u_n}{ds^4} - \frac{\alpha}{\left[1-\left(u_n-u_{n+1}\right)\right]^{\frac{5}{2}}} + \frac{\alpha}{\left[1-\left(u_{n-1}-u_n\right)\right]^{\frac{5}{2}}} = 0,\ \ldots, \tag{6}$$

$$\frac{d^4u_N}{ds^4} + \frac{\alpha}{\left[1-\left(u_{N-1}-u_N\right)\right]^{\frac{5}{2}}} = 0$$

позволяют найти деформированное состояние системы нанобалок с учетом действия сил Ван-дер-Ваальса, а система N линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial s^4} - \frac{5\alpha}{2\left[1-\left(u_1-u_2\right)\right]^{\frac{7}{2}}}\left(w_1-w_2\right)+\frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2}=0,\ \ldots,$$

$$\frac{\partial^4 w_n}{\partial s^4} - \frac{5\alpha}{2\left[1-\left(u_n-u_{n+1}\right)\right]^{\frac{7}{2}}}\left(w_n-w_{n+1}\right)+\frac{5\alpha}{2\left[1-\left(u_{n-1}-u_n\right)\right]^{\frac{7}{2}}}\left(w_{n-1}-w_n\right)+\frac{\partial^2 w_n}{\partial \tau^2}=0,\ \ldots, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^4 w_N}{\partial s^4} + \frac{5\alpha}{2\left[1-\left(u_{N-1}-u_N\right)\right]^{\frac{7}{2}}}\left(w_{N-1}-w_N\right)+\frac{\partial^2 w_N}{\partial \tau^2}=0$$

описывает свободные малые колебания нанобалок в окрестности статического деформированного состояния.

Уравнения (6) и (7) следует дополнить граничными условиями. Для жестко защемленных нижних краев балок ($s = 0$) принимаем

$$u_n = u_n' = 0, \tag{8}$$

а для свободных верхних краев балок ($s = 1$) полагаем, что

$$u_n'' = u_n''' = 0. \tag{9}$$

Для динамических уравнений (7) принимаются аналогичные условия с заменой статического перемещения $u_n(s)$ на динамическое перемещение $w_n(s,\ \tau)$.

В итоге мы пришли к двум краевым задачам для уравнений (6) и (7), которые решаются последовательно: сначала определяется деформированное состояние системы (находятся функции u_n), а затем исследуются собственные колебания из решения уравнений (7).

Формы малых колебаний, не зависящие от сил Ван-дер-Ваальса

Система уравнений (7) имеет решение, которое не зависит от начального деформированного состояния, найденного из уравнений (6). В самом деле, суммируя все уравнения системы (7), приходим к классическому уравнению нанобалки Эйлера – Бернулли

$$\frac{\partial^4 w_\Sigma}{\partial s^4} + \frac{\partial^2 w_\Sigma}{\partial \tau^2} = 0 \tag{10}$$

относительно суммарного перемещения $w_\Sigma = \sum_{n=1}^{N} w_n$. Аналогичные уравнения получаем для любой функции $w_n(s,\ \tau)$, если $w_n = w_{n+1}$ для всех $n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$.

Уравнение (10) позволяет найти собственные частоты свободных малых колебаний системы нанобалок, которые не зависят от межмолекулярного взаимодействия. На таких частотах система совершает малые колебания, эквивалентные колебаниям одной отдельно взятой балки. В частности, для системы консольных нанобалок подобные моды есть собственные функции краевой задачи (8)–(10) (см. учебное пособие И. М. Бабакова[1]):

$$w_\Sigma = \frac{1}{2}\left\{c_1\left[\operatorname{ch}\left(\omega^{\frac{1}{2}}s\right)-\cos\left(\omega^{\frac{1}{2}}s\right)\right]+c_2\left[\operatorname{sh}\left(\omega^{\frac{1}{2}}s\right)-\sin\left(\omega^{\frac{1}{2}}s\right)\right]\right\}e^{i\omega\tau},$$

где $i = \sqrt{-1}$, а безразмерные собственные частоты $\omega^{(k)}$ – это корни уравнения

$$\operatorname{ch}\omega^{\frac{1}{2}}\cos\omega^{\frac{1}{2}}+1=0. \tag{11}$$

[1] *Бабаков И. М.* Теория колебаний : учеб. пособие для студентов высш. техн. учеб. заведений. 3-е изд., стер. М. : Наука, 1968. 560 с.

Заметим, однако, что указанное свойство о наличии мод с частотами, не зависящими от межмолекулярных сил, является следствием линеаризации исходной нелинейной системы уравнений при условии выполнения сильных неравенств (4).

Далее на примере системы из двух и трех нанобалок рассмотрим случаи, когда силы Ван-дер-Ваальса оказывают значительное влияние на собственные частоты малых колебаний.

Собственные колебания нанопинцета

Рассмотрим механическую систему из двух нанобалок ($N = 2$), изображенных на рис. 2. Данную систему можно рассматривать как упрощенную модель нанопинцета, который, как правило, состоит из двух консольных захватов, изготовленных из УНТ либо из кремния.

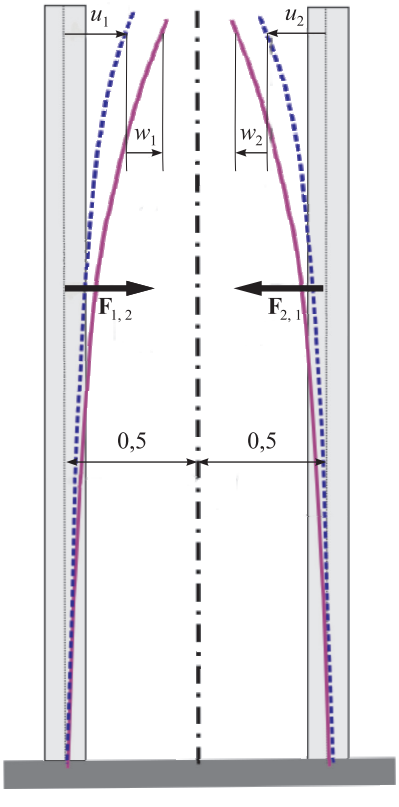


Рис. 2. Механическая модель деформирования нанопинцета, состоящего из двух нанобалок, под действием сил Ван-дер-Ваальса

Fig. 2. Mechanical model of deformation of a nanotweezer consisting of two nanobeams under action of van der Waals forces

На нижних краях рассматриваем условия жесткой заделки, верхние края предполагаем свободными. Формы колебаний, не зависящие от сил Ван-дер-Ваальса, для которых $w_1 = w_2$, рассмотрены выше для случая произвольного N. Здесь изучим формы колебаний, симметричные относительно срединной линии, разделяющей зазор. Для таких форм колебаний

$$u = u_1,\ u_2 = -u,\ u_1 - u_2 = U = 2u,\ \alpha^* = 2\alpha.$$

Тогда система уравнений (5) вырождается в одно дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4U}{ds^4} - \frac{\alpha^*}{(1-U)^{\frac{5}{2}}} = 0. \tag{12}$$

Для форм колебаний в окрестности деформированного состояния ввиду симметрии мод колебаний следует принять, что $w = w_1 = -w_2$. Тогда вместо системы двух уравнений (7) получаем одно дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial^4 w}{\partial s^4} - \frac{5\alpha^*}{2\left[1-U(s)\right]^{\frac{7}{2}}} w + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0. \tag{13}$$

Анализ деформированного состояния системы. Уравнение (12) не поддается точному решению и является объектом многочисленных исследований (см. анализ литературы в публикациях [9; 11]), в которых предлагаются различные приближенные методы интегрирования и определения критического значения параметра Ван-дер-Ваальса $\alpha^* = \alpha^*_{cr}$. Остановимся на подходе, предложенном в статье [11], согласно которому безразмерная сила Ван-дер-Ваальса

$$f(s) = \frac{\alpha^*}{(1-U)^{\frac{5}{2}}}$$

аппроксимируется степенной функцией

$$f_m(s) = f(0) + \left[f(U_T) - f(0) \right] s^m, \tag{14}$$

где

$$f(0) = \alpha^*, \;\; f(U_T) = \frac{\alpha^*}{(1-U_T)^{\frac{5}{2}}}, \tag{15}$$

U_T – перемещение свободного края консоли ($s = 1$), а m – положительное вещественное число. Здесь U_T, m – параметры, подлежащие определению. Заметим, что модель, основанная на аппроксимации (14), является обобщением ранее разработанных и хорошо апробированных линейной и квадратичной моделей [9; 10], в которых $m = 1$ и $m = 2$ соответственно.

Если принять обобщенную модель (14), (15), то решение уравнения (12) находится в виде полинома

$$U(s) = U_m(s;\, U_T,\, \alpha^*) = \frac{f(U_T) - f(0)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} s^{m+4} + \frac{f(0)}{24} s^4 + \frac{a_3}{6} s^3 + \frac{a_2}{2} s^2, \tag{16}$$

где константы $a_2,\; a_3$ определяются из граничных условий для консоли и составляют

$$a_2 = \frac{1}{2} f(0) + \frac{f(U_T) - f(0)}{m+2},\; a_3 = -f(0) - \frac{f(U_T) - f(0)}{m+1}.$$

Тогда для перемещения свободного края балки получаем неявное уравнение

$$U_T = U_m(1;\, U_T,\, \alpha^*) \equiv \frac{f(U_T) - f(0)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} + \frac{f(0)}{24} + \frac{a_3}{6} + \frac{a_2}{2}. \tag{17}$$

Уравнение (17) должно быть дополнено условием равенства сил Ван-дер-Ваальса, действующих на балку в какой-либо промежуточной точке $0 < s^* < 1$:

$$f_m(s^*) = f\left[U_m(s^*) \right]. \tag{18}$$

В частности, при $s^* = \frac{1}{2}$ уравнение (18) с учетом формул (14) и (15) принимает вид

$$1 + \frac{1}{2^m} \left[\frac{1}{(1-U_T)^{\frac{5}{2}}} - 1 \right] = \frac{1}{\left[1 - U_m\left(\frac{1}{2};\, U_T,\, \alpha^* \right) \right]^{\frac{5}{2}}}.$$

В итоге мы пришли к системе двух уравнений (17), (18) относительно показателя степени $m(\alpha^*)$ и перемещения $U_T(\alpha^*)$ свободного края консоли, решение которой параметрически зависит от координаты s^*. Процедура реализации данного метода осложнена отсутствием критерия корректного выбора точки $s = s^*$. В качестве такового, в частности, может выступать условие минимума среднеквадратичной погрешности выполнения условия (18) в других точках, отличных от $s = 0,\; s^*,\; 1$. Детальная разработка данного критерия, условие выполнения которого зависит от многих факторов (геометрических размеров консоли, зазора, порядка нелинейности в уравнении в зависимости от типа межмолекулярных сил), выходит за рамки данной статьи и может быть предметом дальнейших исследований. Заметим лишь, что в статье [10] при изучении явления втягивания наноразмерной консольной балки со стороны неподвижного электрода все расчеты выполнялись при $s^* = \frac{1}{2}$. Здесь ограничимся реализацией частного случая модели (14), (15), а именно квадратичной модели, согласно которой степень $m = 2$ фиксирована.

В этом случае уравнение (16) может быть решено численно с любой степенью точности относительно прогиба U_T при заданном значении параметра α^*, однако при этом условие (18) будет выполняться приближенно. Заметим, что данная модель хорошо себя зарекомендовала при исследовании деформирования консольной двустенной УНТ под действием межмолекулярных сил [10] и показала удовлетворительное совпадение с результатами атомистического моделирования [21].

На рис. 3 показана зависимость перемещения U_T от безразмерного параметра Ван-дер-Ваальса α^*, найденная в рамках квадратичной модели (при $m = 2$). Как видно, $U_T\left(\alpha^*\right)$ – монотонно возрастающая функция параметра α^* такая, что $U_T\left(\alpha^*\right) \to +\infty$ при $\alpha \to \alpha^*_{\text{cr}} \approx 1{,}323\,8$. Неограниченный рост перемещения $U_T\left(\alpha^*\right)$ означает, что при достижении критического значения зазора между захватами нанопинцета

$$g^{\perp\perp}_{\text{cr}} = \left(\frac{3Ah_l^2 l^4}{128\alpha^*_{\text{cr}} EIr^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{7}} \tag{19}$$

имеет место явление взаимного втягивания наноконсолей, приводящее к касанию их свободных концов. Отметим, что критическое число $\alpha^*_{\text{cr}} \approx 1{,}323\,8$ находится из условия на экстремум обратной функции $\alpha^*\left(U_T\right)$.

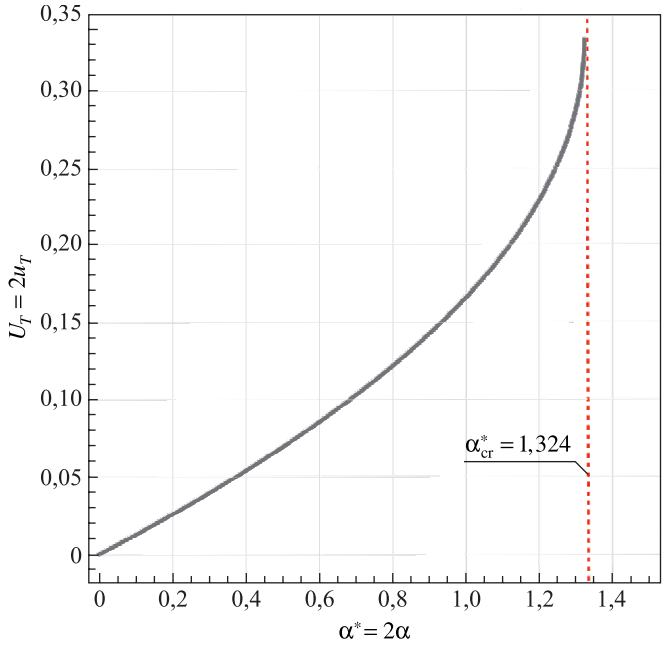


Рис. 3. Перемещение кончика захвата нанопинцета
как функция безразмерного параметра Ван-дер-Ваальса

Fig. 3. Displacement of the nanotweezer gripper tip
as a function of a dimensionless van der Waals parameter

Далее будем исследовать свободные малые колебания нанопинцета при $\alpha < \alpha^*_{\text{cr}}$, т. е. при $g > g^{\perp\perp}_{\text{cr}}$.

Анализ свободных малых колебаний. Разыскивая решение уравнения (13) в виде $w = y(s)\mathrm{e}^{i\omega\tau}$, где ω – искомая безразмерная частота собственных колебаний, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами

$$\frac{d^4 y}{ds^4} - \left[\frac{5\alpha^*}{2\left[1 - U(s)\right]^{\frac{7}{2}}} + \lambda \right] y = 0, \tag{20}$$

в котором функция $U(s)$ считается известной и находится по формуле (16) для любого фиксированного параметра α^*. Соответствующие граничные условия имеют вид

$$y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0. \tag{21}$$

Решение краевой задачи (20), (21) на собственные значения $\lambda = \omega^2$ может быть найдено численно методом прогонки, подобно тому как это сделано в статье [15]. На рис. 4, *а*, с использованием логарифмической шкалы представлены значения первых трех собственных чисел $\lambda^{(k)}$ как функций параметра α^*, а на рис. 4, *б*, изображена аппроксимация первого собственного значения непрерывной функцией. Как и следовало ожидать, с ростом параметра Ван-дер-Ваальса наименьшая собственная частота $\lambda^{(1)}$ нанопинцета быстро убывает, стремясь к нулю при $\alpha \to \alpha^*_{cr} \approx 1{,}323\,8$. Тенденция к уменьшению второго, третьего и последующих собственных значений с ростом параметра α^* менее заметна. Отметим, что $\lambda^{(k)} \neq 0$ для $k \geq 2$, если параметр α^* достигает критического значения, соответствующего эффекту потери устойчивости типа втягивания.

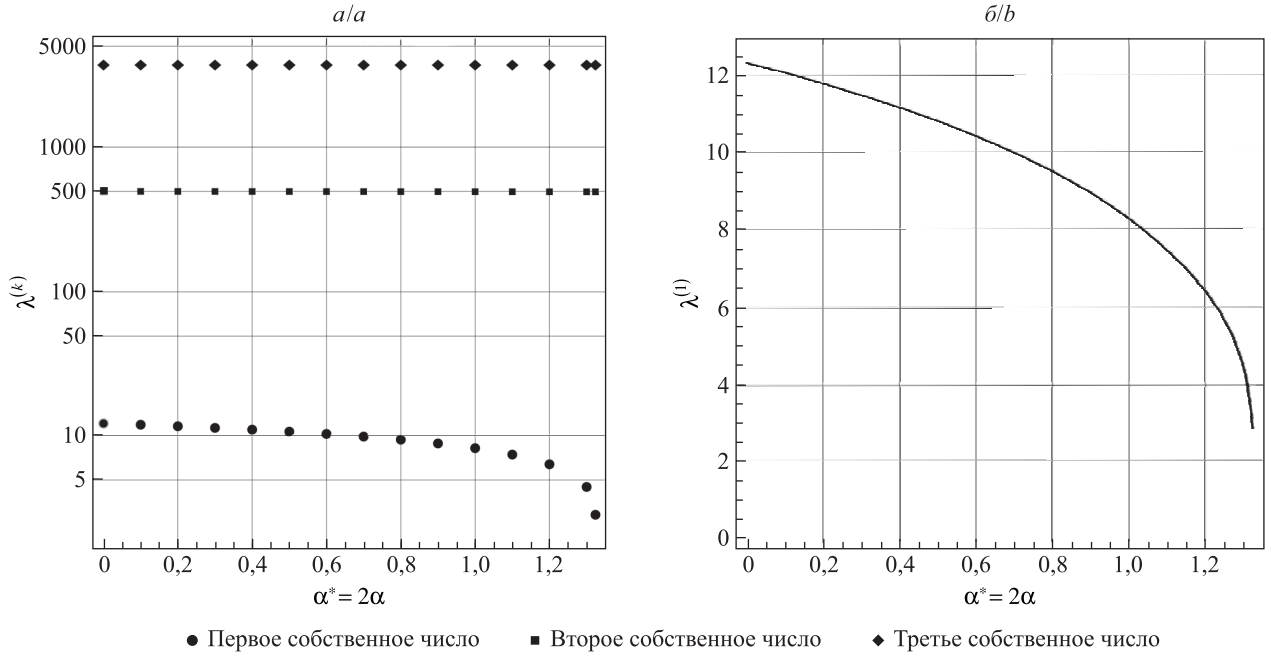


Рис. 4. Зависимость собственных значений краевой задачи (20), (21)
от безразмерного параметра Ван-дер-Ваальса: *а* – значения первых трех собственных чисел;
б – аппроксимация первого собственного значения непрерывной функцией

Fig. 4. Dependence of eigenvalues of the boundary value problem (20), (21)
on a dimensionless van der Waals parameter: *a* – the first three eigenvalues;
b – approximation of the first eigenvalue by a continuous function

При $\alpha^* = 0$ задача (20), (21) имеет собственные значения

$$\lambda^{(1)}(0) = \left(\omega^{(1)}\right)^2 \approx 12{,}360\,0,\ \ \lambda^{(2)}(0) = \left(\omega^{(2)}\right)^2 \approx 485{,}481,$$

$$\lambda^{(3)}(0) = \left(\omega^{(3)}\right)^2 \approx 3807{,}02,\ \ldots,$$

где $\omega^{(k)}$ – корни трансцендентного уравнения (11), соответствующие модам, не зависящим от сил Ван-дер-Ваальса. Таким образом, при любом фиксированном $\alpha^* \neq 0$ спектр собственных частот нанопинцета формируется из двух частей. Первая часть соответствует собственным значениям краевой задачи (20), (21), найденным при $\alpha^* \neq 0$, а вторая часть – собственным значениям краевой задачи (8)–(10). При этом номер собственной частоты нанопинцета не совпадает с номером собственного числа $\lambda^{(k)}$ краевой задачи (20), (21) или с номером собственного значения задачи (8)–(10). Отметим также, что при $\alpha^* \neq 0$ фундаментальной (наименьшей) собственной частотой механической системы становится частота $\omega_f = \sqrt{\lambda^{(1)}\left(\alpha^*\right)}$, которая меньше $\sqrt{\lambda^{(1)}(0)} \approx 3{,}516$.

Рассмотренная здесь модель нанопинцета является упрощенной. Она игнорирует действие электростатических сил, активирующих деформирование гибких захватов. Кроме того, данная модель не учитывает реальную геометрию захватов, которые могут иметь переменное сечение. Тем не менее предложенный здесь метод исследования свободных малых колебаний может быть использован для изучения нижнего

спектра собственных частот нанопинцета с более сложной геометрией захватов. Для определения высших частот с геометрией захватов, близкой к реальной геометрии, может быть использован ВКБ-подход, подобно тому как это сделано в работе [22] при исследовании колебаний нанобалки переменного сечения. Однако одной из нерешенных проблем остается корректное определение сил Ван-дер-Ваальса между наноконсолями с переменным вдоль оси сечением (например, с коническим профилем захвата).

Колебания трех и более параллельно ориентированных нанобалок

Рассмотрим механическую систему из трех нанобалок ($N = 3$). Ввиду принятой симметрии механической системы

$$u = u_1 = -u_3,\ u_2 = 0$$

и три статических уравнения (6) вырождаются в одно дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4u}{ds^4} - \frac{\alpha}{(1-u)^{\frac{5}{2}}} = 0,$$

которое совпадает с уравнением (12) с точностью до параметра Ван-дер-Ваальса (в уравнении (12) $\alpha^* = 2\alpha$). Таким образом, построенная на рис. 3 кривая, которая описывает перемещение свободного конца захвата нанопинцета (как функции параметра α^*), может быть использована для определения перемещений свободных концов первой и третьей нанобалок, что позволяет найти статическое перемещение нанобалок $u(s)$ по формуле (16), где вместо α^* следует брать α. В данном случае критическое значение зазора между УНТ, при котором происходит потеря устойчивости (взаимное втягивание и касание верхних краев), составляет

$$g_{\text{cr}}^{\perp\perp\perp} = \left(\frac{3Ah_t^2 l^4}{256\alpha_{\text{cr}}^* EIr^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{7}} < g_{\text{cr}}^{\perp\perp},$$

где $g_{\text{cr}}^{\perp\perp}$ находится по формуле (19), соответствующей нанопинцету. Как видно, присоединение к паре УНТ третьей нанотрубки приводит к уменьшению критического зазора.

Все возможные формы малых собственных колебаний системы из трех нанобалок в окрестности деформированного состояния описываются уравнениями (7) при $N = 3$. Рассмотрим осесимметричные формы колебаний, на которые сильно влияют силы Ван-дер-Ваальса. Для таких форм $w = w_1 = -w_3,\ w_2 = 0$ и система уравнений (7) вырождается в одно уравнение

$$\frac{\partial^4 w}{\partial s^4} - \frac{5\alpha}{2\left[1-u(s)\right]^{\frac{7}{2}}} w + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0,$$

которое с точностью до статического перемещения и параметра Ван-дер-Ваальса идентично уравнению (13). Из этого следует, что данные, представленные на рис. 4, *б*, могут быть использованы для определения собственных частот системы из трех параллельно ориентированных УНТ с учетом сил Ван-дер-Ваальса. Принимая во внимание равенство $\alpha^* = 2\alpha$ и установленную зависимость $\lambda^{(1)}(\alpha^*)$ на рис. 4, *б*, можно сделать вывод, что присоединение к паре УНТ дополнительной нанотрубки приводит к повышению фундаментальной частоты системы, которое можно объяснить увеличением общей жесткости системы.

Решение задачи при $N \geq 4$ сопряжено со значительными трудностями. Так, при $N = 4$ начальное статическое деформирование нанобалок определяется системой двух уравнений

$$\frac{d^4u_1}{ds^4} - \frac{\alpha}{\left[1-(u_1-u_2)\right]^{\frac{5}{2}}} = 0,$$

$$\frac{d^4u_2}{ds^4} - \frac{\alpha}{\left[1-2u_2\right]^{\frac{5}{2}}} + \frac{\alpha}{\left[1-(u_1-u_2)\right]^{\frac{5}{2}}} = 0,\ u_4 = -u_1,\ u_3 = -u_2,$$

а динамические уравнения, которые описывают свободные малые колебания, симметричные относительно срединной линии механической системы, принимают вид

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial s^4} - \frac{5\alpha\left(w_1 - w_2\right)}{2\left[1-\left(u_1-u_2\right)\right]^{\frac{7}{2}}} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^4 w_2}{\partial s^4} - \frac{5\alpha w_2}{\left(1-2u_2\right)^{\frac{7}{2}}} + \frac{5\alpha\left(w_1 - w_2\right)}{2\left[1-\left(u_1-u_2\right)\right]^{\frac{7}{2}}} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial \tau^2} = 0,\ w_4 = -w_1,\ w_3 = -w_2.$$

Решения этих задач могут быть найдены с использованием приближенных подходов, использованных выше для нанопинцета.

Заключение

Выполнена постановка задачи о свободных малых колебаниях расположенной в одной плоскости системы из N параллельно ориентированных нанобалок с учетом сил притяжения Ван-дер-Ваальса. Выведены две системы дифференциальных уравнений, первая из которых служит для определения начального статического деформирования под действием межмолекулярных сил, а вторая описывает малые колебания в окрестности деформированного состояния. Показано наличие форм колебаний, не зависящих от сил Ван-дер-Ваальса, при которых вся система балок колеблется как одна балка, свободная от этих сил. Подробно исследованы симметричные формы колебаний системы из двух и трех УНТ, для которых влияние межмолекулярных сил является значительным и приводит к снижению всех собственных частот системы балок по сравнению с формами колебаний, не зависящими от сил взаимного притяжения. На примере нанопинцета показано, что уменьшение зазора между захватами приводит к снижению фундаментальной частоты колебаний системы, а при достижении критического значения зазора между захватами наблюдается явление взаимного втягивания захватов, сопровождающееся касанием их свободных концов. Также обнаружено, что выявленная функциональная зависимость наименьшей собственной частоты симметричных колебаний нанопинцета от безразмерного параметра Ван-дер-Ваальса может быть использована для определения наименьшей частоты собственных симметричных компланарных колебаний системы из трех нанобалок.

Разработанный метод исследования малых колебаний двух нанобалок может быть обобщен для нанопинцета с более сложной геометрией захватов, а также с учетом действия электростатических сил и сил Казимира. Выполненные постановки задач могут стать основой для дальнейшего численного моделирования колебаний «леса» нанотрубок, выращиваемых на подложке. Кроме того, предполагается дальнейшее развитие метода, основанного на аппроксимации равнодействующей межмолекулярных и электростатических сил, действующих на балку, степенной функцией произвольного порядка. Данный метод позволит с большей точностью определять статическое деформирование низкоразмерной консоли как сенсорного элемента всевозможных МЭМС и НЭМС.

Библиографические ссылки

1. Bsoul A, Mohamed Ali MS, Takahata K. Piezoresistive pressure sensor using vertically aligned carbon nanotube forests. *Electronics Letters*. 2011;47(14):807–808. DOI: 10.1049/el.2011.1498.

2. Karlsson T, Hallander P, Liu F, Poot T, Åkermo M. Sensing abilities of embedded vertically aligned carbon nanotube forests in structural composites: from nanoscale properties to mesoscale functionalities. *Composites Part B: Engineering*. 2023;255:110587. DOI: 10.1016/j.compositesb.2023.110587.

3. Kim P, Lieber CM. Nanotube nanotweezers. *Science*. 1999;286(5447):2148–2150. DOI: 10.1126/science.286.5447.2148.

4. Akita S, Nakayama Y, Mizooka S, Takano Y, Okawa T, Miyatake Y, et al. Nanotweezers consisting of carbon nanotubes operating in an atomic force microscope. *Applied Physics Letters*. 2001;79(11):1691–1693. DOI: 10.1063/1.1403275.

5. Farrokhabadi A, Rach R, Abadyan M. Modeling the static response and pull-in instability of CNT nanotweezers under the Coulomb and van der Waals attractions. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*. 2013;53:137–145. DOI: 10.1016/j.physe.2013.05.003.

6. Farrokhabadi A, Mokhtari J, Rach R, Abadyan M. Modeling the influence of the Casimir force on the pull-in instability of nanowire-fabricated nanotweezers. *International Journal of Modern Physics B*. 2015;29(2):1450245. DOI: 10.1142/S0217979214502452.

7. Lee J, Kim S. Manufacture of a nanotweezer using a length controlled CNT arm. *Sensors and Actuators A: Physical*. 2005;120(1):193–198. DOI: 10.1016/j.sna.2004.11.012.

8. Bianchi G, Sorrentino A, Radi E, Castagnetti D. Electrostatic pull-in instability for tweezer architectures. *Meccanica*. 2022;57(8):1767–1781. DOI: 10.1007/s11012-022-01546-0.

9. Mikhasev G, Radi E, Misnik V. Modeling pull-in instability of CNT nanotweezers under electrostatic and van der Waals attractions based on the nonlocal theory of elasticity. *International Journal of Engineering Science*. 2024;195:104012. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2023.104012.

10. Mikhasev G, Radi E, Misnik V. Pull-in instability analysis of a nanocantilever based on the two-phase nonlocal theory of elasticy. *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 2022;8(4):1456–1466. DOI: 10.22055/jacm.2022.40638.3619.

11. Mikhasev G, Radi E. Effect of surface stresses on pull-in instability of a nanocantilever under electrostatic and intermolecular forces. *International Journal of Engineering Science*. 2025;217:104356. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2025.104356.

12. Khaniki HB, Ghayesh MH, Amabili M. A review on the statics and dynamics of electrically actuated nano and micro structures. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2021;129:103658. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103658.

13. Zang MM, Ahmadian MT. Dynamic pull-in instability of electrostatically actuated beams incorporating Casimir and van der Waals forces. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part C, Journal of Mechanical Engineering Science*. 2010;224(9): 2037–2047. DOI: 10.1243/09544062JMES1716.

14. Wang KF, Zeng S, Wang BL. Large amplitude free vibration of electrically actuated nanobeams with surface energy and thermal effects. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2017;131–132:227–233. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.06.049.

15. Mikhasev GI, Misnik VV, Botogova MG. Effect of electrostatic and intermolecular forces on free small vibrations of a microcantilever. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2024;3:62–72. EDN: OHFGGI.

16. Zhang R, Zhang Y, Zhang Q, Xie H, Qian W, Wei F. Growth of half-meter long carbon nanotubes based on Schulz – Flory distribution. *ACS Nano*. 2013;7(7):6156–6161. DOI: 10.1021/nn401995z.

17. Peddieson J, Buchanan GR, McNitt RP. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *International Journal of Engineering Science*. 2003;41(3–5):305–312. DOI: 10.1016/S0020-7225(02)00210-0.

18. Chang T. A molecular based anisotropic shell model for single-walled carbon nanotubes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2010;58(9):1422–1433. DOI: 10.1016/j.jmps.2010.05.004.

19. Huang Y, Wu J, Hwang KC. Thickness of graphene and single-wall carbon nanotubes. *Physical Review B*. 2006;74(24):245413. DOI: 10.1103/PhysRevB.74.245413.

20. Lamoreaux SK. The Casimir force: background, experiments, and applications. *Reports on Progress in Physics*. 2005;68(1): 201–236. DOI: 10.1088/0034-4885/68/1/R04.

21. Dequesnes M, Rotkin SV, Aluru NR. Calculation of pull-in voltages for carbon-nanotube-based nanoelectromechanical switches. *Nanotechnology*. 2002;13(1):120–131. DOI: 10.1088/0957-4484/13/1/325.

22. Mikhasev G. Free high-frequency vibrations of nonlocally elastic beam with varying cross-section area. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2021;33(4):1299–1312. DOI: 10.1007/s00161-021-00977-6.

Получена 18.11.2025 / исправлена 10.02.2026 / принята 17.03.2026.
Received 18.11.2025 / revised 10.02.2026 / accepted 17.03.2026.