*УДК 519.21*

# СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАМКНУТЫХ СЕТЕЙ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ВРЕМЯ ПРЕБЫВАНИЯ ЗАЯВОК

***Ю. В. МАЛИНКОВСКИЙ***[1)]***, С. Ю. ЕВМЕНЕНКО***[1)]

[1)]*Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, ул. Советская, 104, 246028, г. Гомель, Беларусь*

***Аннотация.*** Рассматривается замкнутая сеть массового обслуживания с однолинейными узлами и ограничением на время пребывания заявок в узлах. Предполагается, что время обслуживания заявки единственным прибором *i*-го узла, а также номинальное время ее пребывания в указанном узле зависят от текущего числа заявок в этом узле. Заявки, номинальное время пребывания которых в узле закончилось, мгновенно и независимо от других заявок перемещаются по узлам в соответствии с матрицей, отличной от матрицы маршрутизации обслуженных заявок. Доказывается нечувствительность стационарного распределения вероятностей состояний сети к форме распределения длительностей обслуживания заявок при фиксированных первых моментах.

***Ключевые слова:*** теория массового обслуживания; стохастический процесс; теория вероятностей; замкнутая сеть обслуживания.

# STEADY-STATE DISTRIBUTION OF CLOSED QUEUING NETWORKS WITH A LIMIT ON CUSTOMER SOJOURN TIME

***Yu. V. MALINKOVSKY***[a]***, S. Yu. EVMENENKO***[a]

[a]*Francisk Skorina Gomel State University, 104 Savieckaja Street, Gomiel 246028, Belarus*

*Corresponding author: S. Yu. Evmenenko (stas.evmenenko@yandex.ru)*

***Abstract.*** A closed queuing network with single-server nodes and a constraint on the sojourn time of requests within nodes is considered. It is assumed that the service time of the request by a single device in the $i^{\text{th}}$ node, as well as the nominal sojourn time, depend on the current number of requests in this node. Requests whose nominal sojourn time in a node has elapsed instantly and independently of other requests transition between nodes according to a routing matrix distinct from the one governing the movement of requests upon service completion. It is proven that the steady-state distribution of network state probabilities is insensitive to the shape of the service time distribution, provided the first moments remain fixed.

***Keywords:*** queuing theory; stochastic process; probability theory; closed queuing network.

**Образец цитирования:**
Малинковский ЮВ, Евмененко СЮ. Стационарное распределение замкнутых сетей с ограничением на время пребывания заявок. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2026;2:89–96.
EDN: ODMBEI

**For citation:**
Malinkovsky YuV, Evmenenko SYu. Steady-state distribution of closed queuing networks with a limit on customer sojourn time. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2026;2:89–96. Russian.
EDN: ODMBEI

**Авторы:**
***Юрий Владимирович Малинковский*** – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики факультета математики и технологий программирования.
***Станислав Юрьевич Евмененко*** – старший преподаватель кафедры фундаментальной и прикладной математики факультета математики и технологий программирования.

**Authors:**
***Yury V. Malinkovsky***, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of fundamental and applied mathematics, faculty of mathematics and programming technologies.
*malinkovsky@gsu.by*
***Stanislav Yu. Evmenenko***, senior lecturer at the department of fundamental and applied mathematics, faculty of mathematics and programming technologies.
*stas.evmenenko@yandex.ru*

CC BY NC

## Введение

Сети массового обслуживания (СеМО) с ограничением на номинальное время пребывания – это математические модели, используемые для анализа систем, в которых заявки обслуживаются каналами (приборами, серверами), но при этом существует ограничение на максимальное время нахождения заявки в системе. Если это время превышено, заявка покидает систему без завершения обслуживания. Такие модели широко применяются в телекоммуникациях, транспортных системах, логистике, ИТ-инфраструктуре и других областях. В работах [1; 2] установлена инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний СеМО с несколькими типами заявок в предположении, что распределения длительностей обслуживания имеют рациональные преобразования Лапласа – Стилтьеса. В публикациях [3–5] приведены фундаментальные результаты, касающиеся инвариантности СеМО. Современные результаты относительно нечувствительности стационарного распределения получены, например, в работе [6]. СеМО с ограничением на номинальное время пребывания позволяют моделировать реальные системы, где важно учитывать временные ограничения. Анализ таких систем помогает оптимизировать процессы, минимизировать потери и повысить эффективность работы. В статьях [7; 8] представлены результаты для сетей Джексона с ограничением на номинальное время пребывания.

В работе [9] показано, что для открытой СеМО с дисциплиной обслуживания LCFS-PR и ограничением на номинальное время пребывания заявок в узлах стационарное распределение вероятностей состояний сети не зависит от конкретных законов распределения длительностей обслуживания: достаточно лишь зафиксировать математическое ожидание при условии, что номинальные времена пребывания заявок в узлах подчиняются экспоненциальному закону распределения. В статье [10] доказана инвариантность стационарного распределения модифицированных сетей Джексона и Гордона – Ньюэлла. Ранее в рамках исследований гомельской научной школы в области мультипликативных сетей аналогичная инвариантность была установлена для СеМО, допускающих наличие «отрицательных» заявок [11].

В настоящей работе рассматривается замкнутая СеМО с однолинейными узлами, экспоненциальным ограничением на время пребывания заявок в узлах и произвольным распределением длительностей обслуживания заявок. Доказывается нечувствительность стационарного распределения вероятностей состояний сети к форме распределения длительностей обслуживания заявок при фиксированных первых моментах.

## Марковский случай

Замкнутая СеМО состоит из $N$ однолинейных узлов (систем). В сети циркулирует постоянное число заявок $K$, поэтому число мест для ожидания можно считать равным $K$.

Состояние сети в момент времени $t$ описывается вектором $\mathbf{n}(t) = \left(n_1(t), \ldots, n_N(t)\right)$, где $n_i(t)$ – количество задач в $i$-м узле в момент времени $t$.

Длительности обслуживания заявок в узлах имеют произвольную функцию распределения $B_i(n_i, t)$, причем математическое ожидание фиксировано с помощью равенства

$$\left(\mu_i(n_i)\right)^{-1} = \int_0^{+\infty} \left[1 - B_i(n_i, t)\right] dt, \tag{1}$$

где $\mu_i(n_i)$ – интенсивность потока заявок, покидающих $i$-й узел за счет окончания времени обслуживания.

При рассмотрении марковского случая будем считать, что условное распределение времени обслуживания заявки единственным прибором $i$-го узла, когда в нем находится $n_i$ заявок, является показательным с параметром $\mu_i(n_i)$ $(i = \overline{1, N})$, зависящим от числа заявок $n_i$ в $i$-м узле, т. е. $B_i(n_i, t) = 1 - \exp\{-\mu_i(n_i)t\}$ $(t > 0)$. Предположим, что $\mu_i(0) = 0$, $\mu_i(n_i) > 0$ для $n_i > 0$.

Время с момента поступления заявки в узел до того момента, когда она покинет узел не в результате обслуживания, будем называть номинальным временем пребывания. Номинальное время пребывания каждой заявки в $i$-м узле представляет собой случайную величину, условное распределение которой (если в $i$-м узле находится $n_i$ заявок) является экспоненциальным с параметром $\dfrac{\nu_i(n_i)}{n_i}$ $(i = \overline{1, N})$. Номинальное время пребывания заявки в узле не реализуется (обнуляется), если в течение этого времени закончится ее обслуживание. Таким образом, условная вероятность того, что номинальное время пребывания каждой заявки в $i$-м узле закончится в промежутке $[t, t+h)$, если в момент времени $t$ в узле находилось $n_i$ заявок, равна $\dfrac{\nu_i(n_i)}{n_i}h + o(h)$ при $h \to 0$, а условная вероятность окончания номинального времени пребывания хотя бы одной из этих заявок равна $\nu_i(n_i)h + o(h)$. Предполагается, что $\nu_i(0) = 0$, $\nu_i(n_i) > 0$ для $n_i > 0$.

Положим, что длительности обслуживания заявок и номинальные времена пребывания заявок в узлах являются взаимно независимыми случайными величинами.

Дисциплина обслуживания заявок – LCFS-PR. Заявка, поступающая в узел, вытесняет заявку с прибора и начинает обслуживаться (позиция $n_i+1$), а вытесненная заявка становится первой в очереди на дообслуживание (позиция $n_i$), сдвигая стоящие в очереди заявки. При повторном поступлении на прибор заявка продолжает дообслуживаться оставшееся время. Таким образом, поступающая в узел заявка имеет абсолютный приоритет перед всеми остальными заявками, находящимися в узле. Нумерация заявок в очереди на каждый узел осуществляется от конца очереди к прибору. Если случайная величина $v$ – время от начала до завершения обслуживания заявки, а $h$ – время от начала обслуживания заявки до его прерывания, то при возобновлении обслуживания заявке остается обслуживаться в течение времени $v-h$.

Заявка, обслуженная в $i$-м узле, мгновенно и независимо от других заявок с вероятностью $p_{ij}$ переходит в $j$-й узел ($i, j=\overline{1, N}$, $\sum\limits_{j=1}^{N} p_{ij}=1$, $p_{ii}=0$). Заявка, номинальное время пребывания которой в $i$-м узле закончилось, мгновенно и независимо от других заявок с вероятностью $r_{ij}$ направляется в $j$-й узел ($i, j=\overline{1, N}$, $\sum\limits_{j=1}^{N} r_{ij}=1$, $r_{ii}=0$).

Введем стохастические квадратные матрицы $P=\left(p_{ij}\right)$ и $R=\left(r_{ij}\right)$ порядка $N$ ($i, j=\overline{1, N}$), которые назовем матрицами маршрутизации обслуженных и просроченных по номинальному времени пребывания заявок соответственно. Очевидно, что матричная функция $S(\mathbf{n})=\left(s_{ij}(n_i),\ i, j=\overline{1, N}\right)$, где $s_{ij}(n_i)=\dfrac{\mu_i(n_i)\,p_{ij}+\nu_i(n_i)\,r_{ij}}{\mu_i(n_i)+\nu_i(n_i)}$, $s_{ii}(n_i)=0$, элементы $i$-й строки которой зависят от числа $n_i$ заявок в $i$-м узле, также является стохастической матрицей и по смыслу управляет движением заявок между узлами 1, 2, …, $N$ без учета причины, по которой заявка покидает узел (окончание времени обслуживания или номинального времени пребывания). Действительно,

$$\sum_{j=1}^{N} s_{ij}(n_i)=\frac{1}{\mu_i(n_i)+\nu_i(n_i)}\left(\mu_i(n_i)\sum_{j=1}^{N} p_{ij}+\nu_i(n_i)\sum_{j=1}^{N} r_{ij}\right)=\frac{1}{\mu_i(n_i)+\nu_i(n_i)}\left(\mu_i(n_i)+\nu_i(n_i)\right)=1.$$

Будем называть эту матрицу $S(\mathbf{n})$ матрицей маршрутизации.

Обозначим через $\varepsilon_i(n_i)$ условную интенсивность потока заявок, выходящего из $i$-го узла, который находится в состоянии $n_i$ ($i=\overline{1, N}$). Так как заявки не рождаются и не теряются при прохождении узлов, то в стационарном режиме выполняется следующий закон сохранения:

$$\varepsilon_j(n_j-1)=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i(n_i)\,s_{ij}(n_i+1),\ j=\overline{1, N},\ \mathbf{n}\in X. \tag{2}$$

Далее предполагается, что матрица $S(\mathbf{n})$ при любом $\mathbf{n}\in X$ неприводима. Для ее неприводимости достаточно (но не необходимо), чтобы неприводимой была хотя бы одна из матриц – $P$ или $R$. Тогда уравнение (2), которое будем называть уравнением трафика, при фиксированных $\mathbf{n}\in X$, $\mu_i(n_i)$, $\nu_i(n_i)$, $i=\overline{1, N}$, будет иметь единственное с точностью до постоянного множителя положительное решение. Если изменять эти параметры, то решения уравнения трафика (2) будут являться функциями от них.

Пусть $\left\{p(\mathbf{n}),\ \mathbf{n}\in X\right\}$ – предельное эргодическое распределение цепи Маркова $\mathbf{n}(t)$, которое в этом случае будет единственным решением уравнения глобального равновесия

$$p(\mathbf{n})\sum_{i=1}^{N}\left(\mu_i(n_i)+\nu_i(n_i)\right)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(p\left(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i\right)\right)\left(\mu_j\left(n_j+1\right)p_{ji}+\nu_j\left(n_j+1\right)r_{ji}\right), \tag{3}$$

удовлетворяющим условию нормировки $\sum\limits_{\mathbf{n}\in X} p(\mathbf{n})=1$. Здесь $\mathbf{e}_i$ – единичный вектор $i$-го направления, причем предполагается, что $p(\mathbf{n})=0$ при $\mathbf{n}\notin X$. Разобьем уравнение глобального равновесия (3) на уравнения локального равновесия, которые получаются, если для каждого узла приравнять интенсивность потока вероятности из состояния $\mathbf{n}$ за счет ухода заявок из этого узла и интенсивность потока вероятности в состояние $\mathbf{n}$ за счет поступления заявок в данный узел из других узлов:

$$p(\mathbf{n})\left(\mu_i(n_i)+\nu_i(n_i)\right)=\sum_{j=1}^{N} p\left(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i\right)\left(\mu_j\left(n_j+1\right)p_{ji}+\nu_j\left(n_j+1\right)r_{ji}\right). \tag{4}$$

Так как уравнение (3) получается в результате суммирования уравнений (4) по $i = \overline{1, N}$, то всякое решение уравнений локального равновесия (4) будет являться решением уравнения глобального равновесия (3).

Изолируем $i$-й узел от сети, помещая его в фиктивную среду, отличающуюся от условий функционирования узла в сети только тем, что в него поступает поток моментов последовательных скачков процесса чистого размножения с интенсивностью рождения $\varepsilon_i(n_i)$, зависящей от числа заявок $n_i$ в этом узле. Получается процесс размножения и гибели $\tilde{n}_i(t)$ с интенсивностями рождения $\varepsilon_i(n_i)$ $(n_i = 0, 1, \ldots)$ и интенсивностями гибели $\mu_i(n_i) + \nu_i(n_i)$ $(n_i = 1, 2, \ldots)$. При этом стационарные вероятности цепи Маркова $\tilde{n}_i(t)$, если они существуют, удовлетворяют следующим уравнениям равновесия для вертикальных сечений в графе переходов процесса размножения и гибели:

$$\frac{p_i(n_i - 1)}{p_i(n_i)} = \frac{\mu_i(n_i) + \nu_i(n_i)}{\varepsilon_i(n_i - 1)} \quad (n_i = 1, 2, \ldots),\ i = \overline{1, N}. \tag{5}$$

Из уравнений (4) легко понять, что стационарные вероятности состояний изолированного узла имеют вид

$$p_i(n_i) = p_i(0) \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\varepsilon_i(l-1)}{\mu_i(l) + \nu_i(l)},\ i = \overline{1, N}, \tag{6}$$

где

$$p_i(0) = \left( \sum_{n_i=0}^{+\infty} \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\varepsilon_i(l-1)}{\mu_i(l) + \nu_i(l)} \right)^{-1},$$

и, кроме того, что условие

$$\sum_{n_i=1}^{+\infty} \prod_{l=0}^{n_i - 1} \frac{\varepsilon_i(l-1)}{\mu_i(l) + \nu_i(l)} < +\infty$$

является необходимым и достаточным для эргодичности процесса размножения и гибели $\tilde{n}_i(t)$.

Докажем, что вероятности

$$p(\mathbf{n}) = \left[ C(N, K) \right]^{-1} p_1(n_1)\, p_2(n_2) \ldots p_N(n_N), \tag{7}$$

где $C(N, K)$ – нормирующая постоянная, удовлетворяют уравнениям локального равновесия (4), а значит, и уравнениям глобального равновесия (3). В силу однородности уравнений локального равновесия (4) при подстановке произведения (7) в уравнения (4) можно не учитывать нормирующий множитель $\left[ C(N, K) \right]^{-1}$. Прежде всего отметим, что из формул (5) и (7) следует, что

$$\frac{p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i)}{p(\mathbf{n})} = \frac{p_j(n_j + 1)}{p_j(n_j)} \frac{p_i(n_i - 1)}{p_i(n_i)} = \frac{\varepsilon_j(n_j)}{\varepsilon_i(n_i - 1)} \frac{\mu_i(n_i) + \nu_i(n_i)}{\mu_j(n_j + 1) + \nu_j(n_j + 1)}, \text{ если } n_i \neq 0. \tag{8}$$

Проверим, что произведение (7) удовлетворяет уравнениям (4). Если $n_i = 0$, то очевидно, что уравнения (4) превращаются в тождество $0 = 0$. Если же $n_i \neq 0$, то, разделив уравнения (4) на $p(\mathbf{n})$ и подставив в полученные равенства формулы (7) и (8), а затем использовав уравнение трафика (2), получим

$$\mu_i(n_i) + \nu_i(n_i) = \sum_{j=1}^{N} \frac{p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i)}{p(\mathbf{n})} \left( \mu_j(n_j + 1)\, p_{ji} + \nu_j(n_j + 1) r_{ji} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon_j(n_j)}{\varepsilon_i(n_i - 1)} \frac{\mu_i(n_i) + \nu_i(n_i)}{\mu_j(n_j + 1) + \nu_j(n_j + 1)} \left( \mu_j(n_j + 1)\, p_{ji} + \nu_j(n_j + 1) r_{ji} \right) =$$

$$= \frac{\mu_i(n_i) + \nu_i(n_i)}{\varepsilon_i(n_i - 1)} \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon_j(n_j)}{\mu_j(n_j + 1) + \nu_j(n_j + 1)} \left( \mu_j(n_j + 1)\, p_{ji} + \nu_j(n_j + 1) r_{ji} \right) =$$

$$= \frac{\mu_i(n_i) + \nu_i(n_i)}{\varepsilon_i(n_i - 1)} \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j(n_j) \frac{\mu_j(n_j + 1)\, p_{ji} + \nu_j(n_j + 1) r_{ji}}{\mu_j(n_j + 1) + \nu_j(n_j + 1)} =$$

$$= \frac{\mu_i(n_i) + \nu_i(n_i)}{\varepsilon_i(n_i - 1)} \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j(n_j)\, s_{ji}(n_j + 1) = \mu_i(n_i) + \nu_i(n_i),$$

т. е. уравнения (4) превращаются в тождество.

По эргодической теореме Маркова цепь Маркова с непрерывным временем и конечным числом состояний эргодична тогда и только тогда, когда она неприводима. Пространство состояний цепи Маркова $\mathbf{n}(t)$ конечно в силу выполнения условия $n_1(t)+n_2(t)+\ldots+n_N(t)=K$, а ее неприводимость, очевидно, эквивалентна неприводимости матрицы маршрутизации при каждых фиксированных $n_i$.

Из условия нормировки $\sum_{\mathbf{n}\in X} p(\mathbf{n})=1$ находим нормирующую постоянную

$$C(N, K)=\sum_{\mathbf{n}\in \mathbf{Z}_+^N:\, n_1+n_2+\ldots+n_N=K} p_1(n_1)\,p_2(n_2)\ldots p_N(n_N). \qquad (9)$$

**Теорема 1.** *Если матрица маршрутизации неприводима, то цепь Маркова* $\mathbf{n}(t)$ *эргодична, а ее единственное стационарное распределение имеет форму произведения (7) с множителями (6), где* $\{\varepsilon_i(n_i),\ i=\overline{1, N}\}$ *– решение уравнения трафика (2);* $C(N, K)$ *– нормирующая постоянная, определенная с помощью равенства (9).*

Таким образом, как и в обычной сети Гордона – Ньюэлла, в стационарном режиме в каждый фиксированный момент времени *t* состояния узлов $n_1(t),\ n_2(t),\ \ldots,\ n_N(t)$ зависимы, что является очевидным следствием линейной зависимости $n_1(t)+n_2(t)+\ldots+n_N(t)=K$ координат случайного вектора $\mathbf{n}(t)$.

## Длительность обслуживания заявок, имеющая произвольную функцию распределения

Теперь будем предполагать, что длительности обслуживания заявок в узлах имеют произвольную функцию распределения $B_i(n_i, t)$, причем математическое ожидание фиксировано с помощью равенства (1). В этом случае процесс $\mathbf{n}(t)$ не является марковским. Далее докажем, что для такого процесса справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *Случайный процесс, описывающий число заявок в замкнутой сети в момент времени t, имеет финальное строго положительное распределение в форме произведения (7) с множителями (6), где* $\varepsilon_i$ *находятся из уравнения трафика (2), а* $C(N, K)$ *определяется с помощью равенства (9).*

Доказательство. Пусть $\tau_{ik}(t)$ – остаточное время обслуживания заявки в *i*-м узле с момента времени *t* до момента окончания времени обслуживания, где *k* – номер позиции, на которой находится заявка, от конца очереди к прибору. Положим, что вектор $\boldsymbol{\tau}_i(t)$ содержит остаточные времена обслуживания заявок, находящихся в *i*-м узле. Поскольку, вообще говоря, процесс $\mathbf{n}(t)$ не является марковским, рассмотрим марковский процесс $\xi(t)=\{\mathbf{n}(t),\ \boldsymbol{\tau}(t)\}$, добавляя к $\mathbf{n}(t)$ непрерывную компоненту $\boldsymbol{\tau}(t)=(\boldsymbol{\tau}_1(t),\ \boldsymbol{\tau}_2(t),\ \ldots,\ \boldsymbol{\tau}_N(t))$. Введем обозначение

$$F(\mathbf{n},\ \mathbf{x})=F(\mathbf{n},\ x_{1,1},\ \ldots,\ x_{1,n_1},\ x_{2,1},\ \ldots,\ x_{2,n_2},\ \ldots,\ x_{N,1},\ \ldots,\ x_{N,n_N})=$$
$$=\lim_{t\to+\infty} P\{\mathbf{n}(t)=\mathbf{n},\ \tau_{i,1}(t)<x_{i,1},\ \ldots,\ \tau_{i,n_i}(t)<x_{i,n_i},\ i=\overline{1, N}\}.$$

По эргодической теореме Маркова случайный процесс $\mathbf{n}(t)$ в марковском случае эргодичен. Используя теорему Смита [12] для регенерирующих процессов, можно доказать, что существуют финальные вероятности $F(\mathbf{n},\ \mathbf{x})$.

Так как $\mathbf{n}(t)$ – марковский процесс, существует стационарное эргодическое распределение процесса $\mathbf{n}(t)$, а следовательно, в общем случае и процесса $\boldsymbol{\zeta}(t)$, так как $\boldsymbol{\zeta}(t)$ получается из $\mathbf{n}(t)$ добавлением непрерывных компонент.

Положим, что $[\tilde{x}_i]$ – вектор, все элементы которого совпадают с элементами вектора $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N)$, а на месте *i*-го элемента находится элемент $\tilde{x}_i$, и $[\tilde{x}_i,\ \tilde{x}_j]$ – вектор, все элементы которого совпадают с элементами вектора $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N)$, а на месте *i*-го и *j*-го элементов находятся элементы $\tilde{x}_i$ и $\tilde{x}_j$ соответственно.

Несложно доказать, что при $\mu_i(n_i)^{-1}<+\infty\ (i=\overline{1, N})$ существуют конечные пределы $F(\mathbf{n}, \mathbf{x})=\lim_{t\to+\infty} F(\mathbf{n}, t, \mathbf{x})$, где $F(\mathbf{n},\ t,\ x_{1,1},\ \ldots,\ x_{1,n_1},\ x_{2,1},\ \ldots,\ x_{2,n_2},\ \ldots,\ x_{N,1},\ \ldots,\ x_{N,n_N})=P\{\mathbf{n}(t)=\mathbf{n},\ \tau_{i,1}(t)<x_{i,1},\ \ldots,\ \tau_{i,n_i}(t)<x_{i,n_i},\ i=\overline{1, N}\}$.

Пусть $h$ – положительная малая величина. Рассмотрим вероятность события

$$F\left(\mathbf{n}, t+h, \mathbf{x}\right) = P\left\{\mathbf{n}\left(t+h\right) = \mathbf{n},\ \tau_{i,1}\left(t+h\right) < x_{i,1},\ \ldots,\ \tau_{i,n_i}\left(t+h\right) < x_{i,n_i},\ i = \overline{1, N}\right\},$$

описывая все способы появления данного события при различных гипотезах в момент времени $t$.

*Способ 1.* Хотя бы в одном из узлов, скажем $j$-м узле, было на одну заявку больше, чем в состоянии $\mathbf{n}$, а в каком-то другом узле, скажем $i$-м узле $(j \neq i)$, было на одну заявку меньше, чем в состоянии $\mathbf{n}$. За время $h$ у заявки, находящейся в $j$-м узле на позиции $n_j + 1$, закончилось время обслуживания в $j$-м узле и она перешла в $i$-й узел (вероятность $p_{ji}$). За остаточное время заявка не успела покинуть $i$-й узел за счет окончания времени обслуживания (вероятность $B_i\left(n_i, x_{i,n_i} + \theta_1 h\right)$). Вероятность описанного способа

$$F\left(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ h,\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right) B_i\left(n_i, x_{i,n_i} + \theta_1 h\right) p_{ji},$$

здесь и далее $0 < \theta_i < 1$.

*Способ 2.* Хотя бы в одном из узлов, скажем $j$-м узле, было на одну заявку больше, чем в состоянии $\mathbf{n}$, а в каком-то другом узле, скажем $i$-м узле $(j \neq i)$, было на одну заявку меньше, чем в состоянии $\mathbf{n}$. Остаточное время обслуживания заявки, находящейся в $j$-м узле на позиции $n_j + 1$, входило в диапазон $\left[h,\ h + x_{j,n_j+1}\right]$. За время $h$ у этой заявки закончилось номинальное время пребывания в $j$-м узле и она перешла в $i$-й узел (вероятность $\left(\nu_j\left(n_j+1\right)h + o\left(h\right)\right) r_{ji}$). За остаточное время заявка не успела обслужиться в $i$-м узле (вероятность $B_i\left(n_i, x_{i,n_i} + \theta_2 h\right)$). Вероятность описанного способа

$$F\left(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ x_{j,n_j+1} + h,\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right) B_i\left(n_i, x_{i,n_i} + \theta_2 h\right)\left(\nu_j\left(n_j+1\right)h + o\left(h\right)\right) r_{ji} -$$

$$- F\left(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ h,\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right) B_i\left(n_i, x_{i,n_i} + \theta_2 h\right)\left(\nu_j\left(n_j+1\right)h + o\left(h\right)\right) r_{ji}.$$

*Способ 3.* Сеть находилась в состоянии $\mathbf{n}$, и за время $h$ заявки не покидали $i$-й узел ни за счет окончания времени обслуживания (вероятность $B_i\left(n_i, x_{i,n_i} + \theta_3 h\right)$), ни за счет окончания номинального времени пребывания (вероятность $1 - \nu_i\left(n_i\right)h + o\left(h\right)$). Вероятность описанного способа

$$F\left(\mathbf{n},\ t,\ \mathbf{x}\right)\left(1 - \nu_i\left(n_i\right)h + o\left(h\right)\right) B_i\left(n_i, x_{i,n_i} + \theta_3 h\right).$$

*Способ 4.* Сеть находилась в состоянии $\mathbf{n}$. Остаточное время обслуживания заявки, находящейся в $i$-м узле на позиции $n_i$, входило в диапазон $\left[h,\ h + x_{i,n_i}\right]$. Вероятность описанного способа

$$F\left(\mathbf{n},\ t,\ \left[x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i} + h\right]\right) - F\left(\mathbf{n},\ t,\ \left[x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i},\ h\right]\right).$$

Таким образом, получим следующую систему дифференциально-разностных уравнений

$$F\left(\mathbf{n},\ t+h,\ \mathbf{x}\right) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} F\left(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ h,\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right) B_i\left(n_i, x_{i,n_i} + \theta_1 h\right) p_{ji} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} F\left(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ x_{j,n_j+1} + h,\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right) \times$$

$$\times B_i\left(n_i, x_{i,n_i} + \theta_2 h\right)\left(\nu_j\left(n_j+1\right)h + o\left(h\right)\right) r_{ji} -$$

$$- \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} F\left(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ h,\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right) \times$$

$$\times B_i\left(n_i, x_{i,n_i} + \theta_2 h\right)\left(\nu_j\left(n_j+1\right)h + o\left(h\right)\right) r_{ji} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} F\left(\mathbf{n},\ t,\ \mathbf{x}\right)\left(1 - \nu_i\left(n_i\right)h + o\left(h\right)\right) B_i\left(n_i, x_{i,n_i} + \theta_3 h\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\left(F\left(\mathbf{n},\ t,\ \left[x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i} + h\right]\right) - F\left(\mathbf{n},\ t,\ \left[x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1},\ h\right]\right)\right).$$

Рассматривая $F(\mathbf{n},\ t,\ \mathbf{x})$ как сложные функции от $t$ и предполагая, что у них существуют частные производные первого порядка по переменным $t$, $x_{i,n_i}$ и $x_{i,n_i+1}$, запишем разложение этих функций по формуле Тейлора:

$$F(\mathbf{n},\ t+h,\ \mathbf{x}) = F(\mathbf{n},\ t,\ \mathbf{x}) + \frac{\partial F(\mathbf{n},\ t,\ \mathbf{x})}{\partial t} h + o(h),$$

$$F\left(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ h,\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right) =$$

$$= \frac{\partial F\left(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ 0,\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right)}{\partial x_{j,n_j+1}} h + o(h),$$

$$B_i\left(n_i, x_{i,n_i} + \theta_i h\right) = B_i\left(n_i, x_{i,n_i}\right),$$

$$F\left(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ x_{j,n_j+1}+h,\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right) =$$

$$= F\left(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ x_{j,n_j+1},\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right) +$$

$$+ \frac{\partial F\left(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ x_{j,n_j+1},\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right)}{\partial x_{j,n_j+1}} h + o(h),$$

$$F\left(\mathbf{n},\ t,\ \left[x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i}+h\right]\right) = F(\mathbf{n},\ t,\ \mathbf{x}) + \frac{\partial F(\mathbf{n},\ t,\ \mathbf{x})}{\partial x_{i,n_i}} h + o(h),$$

$$F\left(\mathbf{n},\ t,\ \left[x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1},\ h\right]\right) = \frac{\partial F\left(\mathbf{n},\ t,\ \left[x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1},\ 0\right]\right)}{\partial x_{i,n_i}} h + o(h).$$

Приводя подобные слагаемые, деля обе части полученного соотношения на $h$ и устремляя $h$ к нулю, получаем

$$\frac{\partial F(\mathbf{n},\ t,\ \mathbf{x})}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F(\mathbf{n},\ t,\ \mathbf{x})}{\partial x_{i,n_i}} - \frac{\partial F\left(\mathbf{n},\ t,\ \left[x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1},\ 0\right]\right)}{\partial x_{i,n_i}}\right) - \sum_{i=1}^{N} F(\mathbf{n},\ t,\ \mathbf{x}) B_i\left(n_i, x_{i,n_i}\right) \nu_i(n_i) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F\left(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ 0,\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right)}{\partial x_{j,n_j+1}} B_i\left(n_i, x_{i,n_i}\right) p_{ji} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} F\left(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ x_{j,n_j+1},\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right) B_i\left(n_i, x_{i,n_i}\right) \nu_j\left(n_j+1\right) r_{ji}.$$

Так как предельные функции не зависят от времени, имеем

$$\sum_{i=1}^{N} F(\mathbf{n},\ \mathbf{x}) B_i\left(n_i, x_{i,n_i}\right) \nu_i(n_i) + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F\left(\mathbf{n},\ \left[x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1},\ 0\right]\right)}{\partial x_{i,n_i}} - \frac{\partial F(\mathbf{n},\ \mathbf{x})}{\partial x_{i,n_i}}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F\left(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ 0,\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right)}{\partial x_{j,n_j+1}} B_i\left(n_i, x_{i,n_i}\right) p_{ji} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} F\left(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ x_{j,n_j+1}, x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right) B_i\left(n_i, x_{i,n_i}\right) \nu_j\left(n_j+1\right) r_{ji}. \qquad (10)$$

Нетрудно убедиться, что неотрицательным абсолютно непрерывным по $x$ решением уравнения является

$$F(\mathbf{n},\ \mathbf{x}) = p(\mathbf{n}) \prod_{i=1}^{N} \prod_{k=1}^{n_i} \mu_i(k) \int_0^{x_{ik}} \left[1 - B_i(n_i,\ u)\right] du, \tag{11}$$

где $p(\mathbf{n})$ – стационарная вероятность состояния $\mathbf{n}$ в процессе $\mathbf{n}(t)$ в марковском случае. Действительно, подставляя решение (11) в уравнение (10), деля обе части полученного соотношения на $F(\mathbf{n},\ \mathbf{x})\, B_i\left(n_i, x_{i,n_i}\right)$ и умножая на $p(\mathbf{n}) \int_0^{x_{i,n_i}} \left[1 - B_i(n_i,\ u)\right] du$, получаем уравнение глобального равновесия для марковского случая (2), что доказывает теорему 2.

## Заключение

Для замкнутых СеМО с произвольным распределением длительностей обслуживания заявок в узлах доказана нечувствительность стационарного распределения к форме распределения длительностей обслуживания заявок при фиксированных первых моментах.

Процесс проектирования новых и модернизации уже существующих сетей требует комплексного подхода, а также учета множества факторов, таких как пропускная способность, безопасность, надежность, устойчивость к внешним воздействиям и другие технические параметры. Именно здесь результаты, полученные в рамках данной работы, становятся важным инструментом для инженеров и специалистов в области телекоммуникаций.

Кроме того, представленные результаты могут быть использованы при принятии обоснованных решений на различных стадиях жизненного цикла сетевой инфраструктуры – от выбора технологий до их внедрения и дальнейшей эксплуатации. Этот подход особенно важен в условиях постоянного роста объемов передаваемых данных, а также в контексте стремительного развития новых технологий, таких как 5G, интернет вещей (IoT), облачные вычисления и т. д., иными словами, всех тех технологий, которые требуют от сетей высокой гибкости и масштабируемости.

Не менее важным является применение полученных данных для оптимизации уже действующих сетевых решений. Модернизация существующих информационно-вычислительных сетей и сетей передачи данных направлена на повышение их эффективности, снижение эксплуатационных затрат, улучшение качества обслуживания и снижение рисков, связанных с возможными сбоями или утечками данных. В этом контексте знания, полученные в ходе исследований, помогают идентифицировать слабые места в текущих системах и находить пути их устранения с учетом современных стандартов и технологических тенденций.

## Библиографические ссылки

1. Baskett F, Chandy KM, Muntz RR, Palacios FG. Open, closed, and mixed networks of queues with different classes of customers. *Journal of the Association for Computing Machinery*. 1975;22(2):248–260. DOI: 10.1145/321879.321887.

2. Towsley D. Queuing network models with state-dependent routing. *Journal of the Association for Computing Machinery*. 1980;27(2):323–337. DOI: 10.1145/322186.322196.

3. Ивницкий ВА. Об условии инвариантности стационарных вероятностей для сетей массового обслуживания. *Теория вероятностей и ее применения*. 1982;27(1):188–192.

4. Barbour AD. Networks of queues and the method of stages. *Advances in Applied Probability*. 1976;8(3):584–591. DOI: 10.2307/1426145.

5. Samelson CL, Bulgren WG. A note on product-form solution for queuing networks with Poisson arrivals and general service-time distributions with finite means. *Journal of the Association for Computing Machinery*. 1982;29(3):830–840. DOI: 10.1145/322326.322338.

6. Кузнецов НА, Семенихин КВ. Анализ и оптимизация управляемой модели замкнутой сети массового обслуживания. *Автоматика и телемеханика*. 2020;3:67–85. DOI: 10.31857/S0005231020030058.

7. Малинковский ЮВ. Сети Джексона с однолинейными узлами и ограниченным временем пребывания или ожидания. *Автоматика и телемеханика*. 2015;4:67–79. EDN: TTFYHZ.

8. Малинковский ЮВ. Стационарное распределение вероятностей состояний G-сетей с ограниченным временем пребывания. *Автоматика и телемеханика*. 2017;10:155–167. EDN: ZHYWVF.

9. Малинковский ЮВ, Евмененко СЮ. Инвариантность стационарного распределения открытой сети обслуживания с экспоненциальным ограничением на время пребывания. *Автоматика и телемеханика*. 2024;9:93–100. DOI: 10.31857/S0005231024090057.

10. Малинковский ЮВ. Инвариантность стационарного распределения состояний модифицированных сетей Джексона и Гордона – Ньюэлла. *Автоматика и телемеханика*. 1998;9:29–36.

11. Довженок ТС. Инвариантность стационарного распределения сетей с обходами и отрицательными заявками. *Автоматика и телемеханика*. 2002;9:97–110. EDN: NUINVJ.

12. Гнеденко БВ, Коваленко ИН. *Введение в теорию массового обслуживания*. Москва: Наука; 1966. 432 с. (Физико-математическая библиотека инженера).

*Получена 18.12.2025 / исправлена 10.02.2026 / принята 24.02.2026.*
*Received 18.12.2025 / revised 10.02.2026 / accepted 24.02.2026.*