
Вещественный, комплексный и функциональный анализ

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

УДК 517.968.2

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА С РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ, СОДЕРЖАЩИМ ПЕРИОДИЧЕСКИЙ МНОЖИТЕЛЬ

М. Г. МУРАДЯН¹⁾, А. Г. МУРАДЯН¹⁾

¹⁾Армянский государственный экономический университет,
ул. Налбандяна, 128, 0025, г. Ереван, Армения

Аннотация. На промежутке $[0; n]$ (n – натуральное число) рассматривается интегральное уравнение Фредгольма с ядром вида $\lambda(x)K(x-t)$, где $\lambda(x)$ есть 1-периодическая функция, а $K(x-t)$ представляет собой интегральную суперпозицию экспонент. Предполагается, что известно решение данного уравнения на одном периоде, и исходя из этого разрабатывается рекуррентный метод последовательного продолжения решения на весь рассматриваемый промежуток. Уравнение с таким ядром описывает процессы переноса, оптической фильтрации, распространения волн и другие явления в периодически слоистых средах (например, в кристаллах или системах, где свойства среды повторяются через равные промежутки). Предложенный метод может служить основой устойчивого вычисления

Образец цитирования:

Мурадян МГ, Мурадян АГ. Интегральное уравнение Фредгольма с разностным ядром, содержащим периодический множитель. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2026;2:6–13. EDN: BBJCKP

For citation:

Muradyan MG, Muradyan AG. Fredholm integral equation with a difference kernel containing a periodic multiplier. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2026;2:6–13. Russian. EDN: BBJCKP

Авторы:

Максим Грачевич Мурадян – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры высшей математики.

Арам Грачевич Мурадян – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики.

Authors:

Maxim G. Muradyan, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of higher mathematics.

maxim_muradyan@yahoo.com

<https://orcid.org/0009-0002-1102-553X>

Aram G. Muradyan, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics.

aram_muradyan_56@mail.ru

<https://orcid.org/0009-0007-3529-9283>

тельного алгоритма решения указанного интегрального уравнения. Полученные априорные оценки обеспечивают контроль точности и сходимости вычислительного процесса.

Ключевые слова: интегральное уравнение Фредгольма; периодический множитель разностного ядра; периодически слоистая среда; рекуррентный метод решения.

FREDHOLM INTEGRAL EQUATION WITH A DIFFERENCE KERNEL CONTAINING A PERIODIC MULTIPLIER

M. G. MURADYAN^a, A. G. MURADYAN^a

^aArmenian State University of Economics, 128 Nalbandjiana Street, Yerevan 0025, Armenia

Corresponding author: M. G. Muradyan (maxim_muradyan@yahoo.com)

Abstract. A Fredholm integral equation with a kernel of the form $\lambda(x)K(x-t)$ is considered on an interval $[0; n]$ (n is a natural number), where $\lambda(x)$ is a 1-periodic function, and $K(x-t)$ represents an integral superposition of exponential functions. It is assumed that the solution of this equation is known for one period, and based on this, a recurrent method for the successive continuation of the solution over the entire interval under consideration is developed. An equation with such a kernel describes processes of transport, optimal filtering, wave propagation, and other phenomena in periodically layered media (for example, in crystals or systems whose properties repeat at regular intervals). The proposed method can serve as a basis for a stable computational algorithm for solving the given integral equation. The obtained a priori estimates make it possible to control the accuracy and convergence of the computational process.

Keywords: Fredholm integral equation; periodic multiplier of the difference kernel; periodically layered medium; recurrent solution method.

Введение

В теории оптической фильтрации [1; 2], а также в задачах переноса излучения, нейтронов, γ -квантов, распространения электромагнитных и акустических волн [3–5] возникают интегральные уравнения вида

$$f(x) = g(x) + \lambda(x) \int_0^n K(x-t)f(t)dt, \quad 0 \leq x \leq n, \quad (1)$$

где ядро $K(x-t)$ допускает интегральное представление через экспоненты:

$$K(x-t) = \int_a^b s^{|x-t|} d\sigma^\pm(s), \quad 0 \leq a \leq s \leq b \leq 1. \quad (2)$$

Здесь $\sigma^\pm(s)$ – кусочно-гладкие возрастающие функции, $\sigma^+(s)$ берется при $x-t \geq 0$, а $\sigma^-(s)$ – при $x-t < 0$. Очевидно, что $K(x-t) \geq 0$.

Если $\lambda(x)$ – постоянная функция, то уравнение (1) превращается в известное уравнение Винера – Хопфа [6–8], описывающее вышеупомянутые процессы в однородных средах.

Ниже всюду предполагается, что $\lambda(x)$ – кусочно-непрерывная неотрицательная 1-периодическая функция $\lambda(x+1) = \lambda(x)$, а n – натуральное число, $n > 1$. При этом условии уравнение (1) описывает процессы в периодически слоистых средах (например, в кристаллах или системах, где свойства среды повторяются через равные промежутки).

Во многих приложениях (или на различных этапах решения уравнения (1)) свободный член имеет ту же структуру, что и ядро (см., например, [9; 10]):

$$g(x) = \lambda(x) \left(\int_{a_1}^{b_1} s^x d\omega_1(s) + \int_{a_2}^{b_2} s^{n-x} d\omega_2(s) \right).$$

Рассмотрим следующие интегральные уравнения с параметром s , $a \leq s \leq b$:

$$y_n(x, s) = \lambda(x)s^x + \lambda(x) \int_0^n K(x-t)y_n(t, s)dt, \quad 0 \leq x \leq n, \quad (3)$$

$$z_n(x, s) = \lambda(x)s^{n-x} + \lambda(x) \int_0^n K(x-t)z_n(t, s)dt, \quad 0 \leq x \leq n. \quad (4)$$

Если уравнение (1) однозначно разрешимо, то знание функций $y_n(x, s)$ и $z_n(x, s)$ позволяет немедленно найти решение уравнения (1) со свободным членом $g(x)$:

$$f(x) = \lambda(x) \left(\int_{a_1}^{b_1} y_n(x, s) d\omega_1(s) + \int_{a_2}^{b_2} z_n(x, s) d\omega_2(s) \right).$$

Наш подход заключается в установлении связи между $y_n(x, s)$ и $y_{n-1}(x, s)$ ($z_n(x, s)$ и $z_{n-1}(x, s)$ соответственно).

Предполагается, что каким-либо способом (см., например, [11; 12]) найдены решения следующих уравнений:

$$y_1(x, s) = \lambda(x)s^x + \lambda(x) \int_0^1 K(x-t)y_1(t, s)dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (5)$$

$$z_1(x, s) = \lambda(x)s^{1-x} + \lambda(x) \int_0^1 K(x-t)z_1(t, s)dt, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (6)$$

На основе функций $y_1(x, s)$ и $z_1(x, s)$ предлагается рекуррентный способ постепенного определения $y_2(x, s)$, $y_3(x, s)$, ..., $y_n(x, s)$, а также $z_2(x, s)$, $z_3(x, s)$, ..., $z_n(x, s)$.

В частном случае, когда функция $\lambda(x)$ обладает свойством симметрии $\lambda(1-x) = \lambda(x)$, а ядро $K(x-t)$ является симметричным, т. е. $\sigma^-(s) = \sigma^+(s)$, получаем $z_k(x, s) = y_k(k-x, s)$.

Когда меры $d\sigma^\pm(s)$ дискретны, уравнения (3) и (4) эквивалентны краевым задачам для системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

В работе [13] предложен метод решения уравнения (3) в случае $n = \infty$.

Вопросы существования и единственности решения

Всюду далее предполагается выполнение условия

$$\lambda_0 \left(\int_a^b \frac{d\sigma^+(s)}{|\ln s|} + \int_a^b \frac{d\sigma^-(s)}{|\ln s|} \right) = \alpha \leq 1, \quad \lambda_0 = \sup \lambda(x). \quad (7)$$

Из представления ядра следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^n K(x-t)dt &= \int_0^x K(x-t)dt + \int_x^n K(x-t)dt = \int_0^x \left(\int_a^b s^{x-t} d\sigma^+(s) \right) dt + \int_x^n \left(\int_a^b s^{t-x} d\sigma^-(s) \right) dt = \\ &= \int_a^b \left(\int_0^x s^{x-t} dt \right) d\sigma^+(s) + \int_a^b \left(\int_x^n s^{t-x} dt \right) d\sigma^-(s) dt. \end{aligned}$$

Простые вычисления показывают, что

$$\lambda(x) \int_0^n K(x-t)dt = \lambda(x) \left(\int_a^b \frac{d\sigma^+(s)}{|\ln s|} + \int_a^b \frac{d\sigma^-(s)}{|\ln s|} \right) - \lambda(x) \left(\int_a^b \frac{s^n d\sigma^+(s)}{|\ln s|} + \int_a^b \frac{s^{n-x} d\sigma^-(s)}{|\ln s|} \right), \quad (8)$$

поэтому $\lambda(x) \int_0^n K(x-t)dt \leq \alpha - \delta < 1$, где $\delta = \lambda_0 \left(\int_a^b \frac{s^n d\sigma^+(s)}{|\ln s|} + \int_a^b \frac{s^{n-x} d\sigma^-(s)}{|\ln s|} \right)$.

Следовательно, при условии (7) оператор

$$K \cdot = \lambda(x) \int_0^n K(x-t) dt \quad (9)$$

является сжимающим в пространстве M ограниченных на промежутке $[0; n]$ функций, поэтому интегральное уравнение (1) имеет единственное ограниченное решение.

Введем функции $y_k(x, s)$ и $z_k(x, s)$, $k = 1, 2, \dots, n$, как решения следующих интегральных уравнений на отрезке $[0; k]$:

$$y_k(x, s) = \lambda(x) s^x + \lambda(x) \int_0^k K(x-t) y_k(t, s) dt, \quad 0 \leq x \leq k, \quad (10)$$

$$z_k(x, s) = \lambda(x) s^{k-x} + \lambda(x) \int_0^k K(x-t) z_k(t, s) dt, \quad 0 \leq x \leq k. \quad (11)$$

Пусть B_k^+ и B_k^- – банаховы пространства функций $b(x, s)$ от двух переменных с нормами

$$\|b\|_+ = \sup_x \int_a^b \frac{|b(x, s)| d\sigma^+(s)}{|\ln s|}, \quad \|b\|_- = \sup_x \int_a^b \frac{|b(x, s)| d\sigma^-(s)}{|\ln s|}$$

соответственно.

Прямые вычисления показывают, что оператор (9) действует и является сжимающим в пространствах $B_k^\pm$. Докажем это для пространства B_k^+ . Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \left\| \lambda(x) \int_0^k K(x-t) y_k(t, s) dt \right\|_+ &= \sup_x \int_a^b \left| \lambda(x) \int_0^k K(x-t) y_k(t, s) dt \right| \frac{d\sigma^+(s)}{|\ln s|} \leq \\ &\leq \|y_k(x, s)\|_+ \sup_x \lambda(x) \int_0^k K(x-t) dt \leq (\alpha - \delta) \|y_k(x, s)\|_+. \end{aligned}$$

Лемма 1. Уравнение (10) однозначно разрешимо в пространстве B_k^+ , а уравнение (11) – в пространстве B_k^- , причем при $k = 1, 2, \dots, n$ справедливы неравенства

$$y_k(x, s) \geq 0, \quad z_k(x, s) \geq 0, \quad (12)$$

$$\|y_k(x, s)\|_+ \leq 1, \quad \|z_k(x, s)\|_- \leq 1, \quad (13)$$

$$\int_a^b y_k(x, s) \frac{d\sigma^+(s)}{|\ln s|} + \int_a^b z_k(x, s) \frac{d\sigma^-(s)}{|\ln s|} \leq 1. \quad (14)$$

Доказательство. Однозначная разрешимость уравнений (10) и (11) следует из принципа сжатых отображений.

Рассмотрим последовательные приближения

$$y_k^{m+1}(x, s) = \lambda(x) s^x + \lambda(x) \int_0^k K(x-t) y_k^m(t, s) dt, \quad y_k^0(x, s) = 0, \quad m = 0, 1, \dots,$$

$$z_k^{m+1}(x, s) = \lambda(x) s^{k-x} + \lambda(x) \int_0^k K(x-t) z_k^m(t, s) dt, \quad z_k^0(x, s) = 0, \quad m = 0, 1, \dots$$

Так как $\lambda(x) \geq 0$, $K(x-t) \geq 0$, то очевидно, что

$$y_k^m(x, s) \geq 0, \quad z_k^m(x, s) \geq 0, \quad m = 0, 1, \dots \quad (15)$$

Легко проверить также, что последовательности $\{y_k^m(x, s)\}$ и $\{z_k^m(x, s)\}$ возрастают по m . По индукции докажем оценки (14). Введем обозначение

$$\gamma_k(x) = \int_a^b y_k(x, s) \frac{d\sigma^+(s)}{|\ln s|} + \int_a^b z_k(x, s) \frac{d\sigma^-(s)}{|\ln s|}.$$

Из уравнений (10) и (11) следует, что $\gamma_k(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\gamma_k(x) = \lambda(x) \int_a^b \frac{s^x d\sigma^+(s)}{|\ln s|} + \lambda(x) \int_a^b \frac{s^{k-x} d\sigma^-(s)}{|\ln s|} + \lambda(x) \int_0^k K(x-t) \gamma_k(t) dt.$$

Рассмотрим последовательные приближения

$$\gamma_k^{m+1}(x) = \lambda(x) \int_a^b \frac{s^x d\sigma^+(s)}{|\ln s|} + \lambda(x) \int_a^b \frac{s^{k-x} d\sigma^-(s)}{|\ln s|} + \lambda(x) \int_0^k K(x-t) \gamma_k^m(t) dt, \quad \gamma_k^m = 0. \quad (16)$$

По индукции докажем, что $\gamma_k^m(x) \leq 1$, $m = 1, 2, \dots$. Пусть неравенство верно для некоторого $m > 1$. Из последовательных приближений (16) с учетом условия (7) и формулы (8) имеем

$$\begin{aligned} \gamma_k^{m+1}(x) &\leq \lambda(x) \int_a^b \frac{s^x d\sigma^+(s)}{|\ln s|} + \lambda(x) \int_a^b \frac{s^{k-x} d\sigma^-(s)}{|\ln s|} + \lambda(x) \int_0^k K(x-t) dt = \\ &= \lambda(x) \left(\int_a^b \frac{d\sigma^+(s)}{|\ln s|} + \int_a^b \frac{d\sigma^-(s)}{|\ln s|} \right) \leq 1. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $\{\gamma_k^m(x)\}$ монотонно возрастает и является ограниченной сверху, поэтому для любого фиксированного x существует предел $\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_k^m(x) = \gamma_k(x) \leq 1$.

Неравенство (14) доказано. Из неравенства $\gamma_k^m(x) \leq 1$, $m = 1, 2, \dots$, немедленно вытекает, что последовательности $\{y_k^m(x, s)\}$ и $\{z_k^m(x, s)\}$ сходятся к функциям $y_k(x, s)$ и $z_k(x, s)$ в пространствах B_k^+ и B_k^- соответственно. Неравенства (12) следуют из неравенств (15), а неравенства (13) – из неравенства (14). Лемма доказана.

О решении уравнения (10)

Рассмотрим семейство уравнений (10). Попытаемся получить связь между функциями $y_k(x, s)$ и $y_{k-1}(x, s)$. Заменяя в уравнении (10) x на $x+1$, с учетом периодичности функции $\lambda(x)$ получаем

$$y_k(x+1, s) = s\lambda(x)s^x + \lambda(x) \int_0^1 K(x+1-t) y_k(t, s) dt + \lambda(x) \int_0^{k-1} K(x-t) y_k(t+1, s) dt.$$

Таким образом, $y_k(x+1, s)$ удовлетворяет такому же уравнению, что и $y_{k-1}(x, s)$, но со свободным членом $s\lambda(x)s^x + \lambda(x) \int_0^1 K(x+1-t) y_k(t, s) dt$. Из представления ядра следует, что

$$\int_0^1 K(x+1-t) y_k(t, s) dt = \int_a^b p^x d\sigma^+(p) \int_0^1 p^{1-t} y_k(t, s) dt.$$

Учитывая однозначную разрешимость уравнений (10), получаем

$$y_k(x+1, s) = sy_{k-1}(x, s) + \int_a^b M_k(p, s) y_{k-1}(x, p) d\sigma^+(p), \quad 0 \leq x \leq k-1, \quad (17)$$

где $M_k(p, s) = \int_0^1 p^{1-t} y_k(t, s) dt$.

Наша ближайшая цель – выразить $y_k(x, s)$ через $y_1(x, s)$ и $z_1(x, s)$. Запишем уравнение (10) в виде

$$y_k(x, s) = \lambda(x)s^x + \lambda(x) \int_1^k K(x-t) y_k(t, s) dt + \lambda(x) \int_0^1 K(x-t) y_k(t, s) dt, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (18)$$

Из представления ядра $K(x-t)$ при $0 \leq x \leq 1$ имеем

$$\int_1^k K(x-t) y_k(t, s) dt = \int_1^k y_k(t, s) \int_a^b p^{t-x} d\sigma^-(p) dt = \int_a^b p^{1-x} d\sigma^-(p) \int_1^k p^{t-1} y_k(t, s) dt.$$

Отсюда видно, что уравнение (18) является уравнением вида (5), (6) со свободным членом

$$\lambda(x)s^x + \lambda(x) \int_a^b p^{1-x} \int_1^k p^{t-1} y_k(t, s) dt d\sigma^-(p),$$

поэтому их сравнение приводит к соотношению

$$y_k(x, s) = y_1(x, s) + \int_a^b W_k(p, s) z_1(x, p) d\sigma^-(p), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (19)$$

где $W_k(p, s) = \int_1^k p^{t-1} y_k(t, s) dt$. Введем обозначения $M_k(p, s) = \int_0^1 p^{1-t} y_k(t, s) dt$, $Q_1(q, s) = \int_0^1 q^{1-x} z_1(x, s) dx$,

$$L_k(q, s) = \int_0^k q^x y_k(x, s) dx, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Умножая соотношение (17) на q^x , а соотношение (19) на q^{1-x} и интегрируя по x на промежутках $[0; k-1]$ и $[0; 1]$ соответственно, получаем линейную систему интегральных уравнений относительно функций W_k и M_k :

$$\begin{aligned} W_k(q, s) &= sL_{k-1}(q, s) + \int_a^b L_{k-1}(q, p) M_k(p, s) d\sigma^+(p), \\ M_k(q, s) &= M_1(q, s) + \int_a^b Q_1(q, p) W_k(p, s) d\sigma^-(p), \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Сформулируем теперь следующий алгоритм нахождения $y_n(x, s)$. Пусть $k = 2$. Как было сказано выше, предполагается, что функции $y_1(x, s)$ и $z_1(x, s)$ известны, поэтому известны также функции $L_1(q, s)$ и $Q_1(q, s)$. Решив систему (20), мы определим функции W_2 и M_2 . Теперь из соотношения (19) найдем $y_2(x, s)$ при $x \in [0; 1]$. Для значений $x \in [1; 2]$ $y_2(x, s)$ находится из соотношения (17). Затем аналогичным путем последовательно определяются функции $y_3(x, s), \dots, y_n(x, s)$, при этом отсутствует необходимость в определении функций $z_2(x, s), z_3(x, s), \dots$.

Обоснование метода

Докажем разрешимость системы (20). Сначала рассмотрим случай $k = 2$. Очевидно, что W_2 удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} W_2(q, s) &= sL_1(q, s) + \int_a^b M_1(p, s) L_1(q, p) d\sigma^+(p) + \\ &+ \int_a^b \left(\int_a^b Q_1(p, v) L_1(q, p) d\sigma^+(p) \right) W_2(v, s) d\sigma^-(v). \end{aligned} \quad (21)$$

Введем банаховы пространства $E^\pm$ функций $W(p, s)$ ($a \leq p, s \leq b$) с нормой

$$\|W\|_{E^\pm} = \sup_p |\ln p| \int_a^b \frac{|W(p, s)| d\sigma^\pm(s)}{|\ln s|}.$$

Лемма 2. Уравнение (21) имеет единственное решение в пространстве E^+ .

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$G \cdot = \int_a^b \left(\int_a^b Q_1(p, v) L_1(q, p) d\sigma^+(p) \right) d\sigma^-(v)$$

и докажем, что он действует в пространстве E^+ и является сжимающим. Рассмотрим неравенство (14) при $k = 1$. Умножая обе части этого неравенства на p^{1-x} и интегрируя по x на промежутке $[0; 1]$, получаем

$$\int_a^b M_1(p, s) \frac{d\sigma^+(s)}{|\ln s|} + \int_a^b Q_1(p, s) \frac{d\sigma^-(s)}{|\ln s|} \leq \frac{1-p}{|\ln p|}.$$

Из неравенства (14) также следует неравенство $\int_a^b L_1(p, s) \frac{d\sigma^+(s)}{|\ln s|} < \frac{1-p}{|\ln p|}$.

На основе этих неравенств имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b |G W_2(q, s)| \frac{d\sigma^+(s)}{|\ln s|} &\leq \int_a^b \left(\int_a^b Q_1(p, v) L_1(q, p) d\sigma^+(p) \right) \frac{d\sigma^-(v)}{|\ln v|} \|W_2\| < \\ &< \int_a^b \frac{1-p}{|\ln p|} L_1(q, p) d\sigma^+(p) \|W_2\| = \int_0^1 \left(\int_a^b y_1(x, p) \frac{1-p}{|\ln p|} d\sigma^+(p) \right) q^x dx \|W_2\| \leq \gamma \frac{1-q}{|\ln q|} \|W_2\|, \end{aligned}$$

$$\text{где } \gamma = \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_a^b y_1(x, s) \frac{1-s}{|\ln s|} d\sigma^+(s).$$

Из этого неравенства непосредственно следует, что $\|G W_2\| \leq \gamma \|W_2\|$. Из неравенства (14) вытекает, что $0 < \gamma < 1$, т. е. оператор G является сжимающим в пространстве E^+ . Утверждение леммы теперь следует из принципа сжатых отображений.

Лемма 3. *Справедливы неравенства*

$$\int_a^b W_2(p, s) \frac{d\sigma^+(s)}{|\ln s|} < \frac{1-p}{|\ln p|}, \quad \int_a^b M_2(p, s) \frac{d\sigma^+(s)}{|\ln s|} < \frac{1-p}{|\ln p|}.$$

Не вдаваясь в технические подробности, отметим, что доказательство основано на методе последовательных приближений:

$$\begin{aligned} W_2^{m+1}(q, s) &= s L_{k-1}(q, s) + \int_a^b L_{k-1}(q, p) M_2^m(p, s) d\sigma^+(p), \quad W_2^0(q, s) = 0, \\ M_2^{m+1}(q, s) &= M_1(q, s) + \int_a^b Q_1(q, p) W_2^m(p, s) d\sigma^-(p), \quad M_2^0(q, s) = 0. \end{aligned}$$

Из леммы 3 следуют полезные оценки:

$$\|W_2\|_{E^+} \leq 1, \quad \|M_2\|_{E^+} \leq 1. \quad (22)$$

О решении уравнения (11)

Совершенно аналогичным путем решается уравнение (11). Приведем только некоторые ключевые моменты. Аналогично соотношениям (17) и (19) получаются соотношения

$$\begin{aligned} z_k(x+1, s) &= z_{k-1}(x, s) + \int_a^b \tilde{M}_k(p, s) y_{k-1}(x, p) d\sigma^+(p), \quad 0 \leq x \leq k-1, \\ z_k(x, s) &= s^{k-1} z_1(x, s) + \int_a^b \tilde{W}_k(p, s) z_1(x, p) d\sigma^-(p), \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

$$\text{где } \tilde{M}_k(q, s) = \int_0^1 q^{1-x} z_k(x, s) dx, \quad \tilde{W}_k(p, s) = \int_1^k p^{x-1} z_k(x, s) dx.$$

Функции $\tilde{M}_k(q, s)$ и $\tilde{W}_k(q, s)$ удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{W}_k(q, s) &= \tilde{L}_{k-1}(q, s) + \int_a^b \tilde{L}_{k-1}(q, p) \tilde{M}_k(p, s) d\sigma^+(p), \\ \tilde{M}_k(q, s) &= s^{k-1} Q_1(q, s) + \int_a^b Q_1(q, p) \tilde{W}_k(p, s) d\sigma^-(p), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\text{где } \tilde{L}_{k-1}(q, s) = \int_0^{k-1} q^x z_k(x, s) dx.$$

Как и в разделе «О решении уравнения (10)», здесь также можно доказать, что система (23) однозначно разрешима в пространстве E^- . Эту систему можно решить путем итераций, которые монотонно возрастают, являются неотрицательными и ограниченными сверху по норме.

Заключительные замечания

Резюмируя полученные результаты, можно сформулировать следующий обоснованный алгоритм решения уравнений семейства (2), (3), (7) при условии, что функции $y_1(x, s)$ и $z_1(x, s)$ известны.

Шаг 1. Из уравнений (20) при $k = 2$ определяются функции W_2 и M_2 .

Шаг 2. Из соотношения (19) при $k = 2$ находится $y_2(x, s)$ при $x \in [0; 1]$.

Шаг 3. Из соотношения (17) при $k = 2$ находится $y_2(x, s)$ для значений $x \in [1; 2]$.

Шаг 4. Из уравнений (20) при $k = 3$ определяются функции W_3 и M_3 .

Шаг 5. Из соотношений (17) и (19) при $k = 3$ находится $y_3(x, s)$ при $x \in [1; 3]$.

Шаг 6. Аналогичным путем постепенно определяются функции $y_4(x, s), \dots, y_n(x, s)$.

Такой же алгоритм может быть сформулирован и для решения уравнений семейства (4), причем в том важном частном случае, когда $\lambda(1-x) = \lambda(x)$ и $\sigma^-(s) = \sigma^+(s)$, имеет место равенство $z_k(x, s) = y_k(k-x, s)$.

Следует подчеркнуть, что уравнения (10) и (20) имеют различную природу. В процессе дискретизации ядра уравнение (10) сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, тогда как уравнения (20) приводят к системе алгебраических уравнений.

Представляется, что предложенный метод может служить основой устойчивого вычислительного алгоритма решения интегрального уравнения (1). Полученные априорные оценки (12)–(14) и (22) обеспечивают возможность контроля точности и сходимости вычислительного процесса.

Описанный выше процесс вычисления $y_n(x, s)$ и $z_n(x, s)$ может быть существенно ускорен. На первом шаге, исходя из функций $y_1(x, s)$ и $z_1(x, s)$, определяем функции $y_2(x, s)$ и $z_2(x, s)$ на интервале $x \in [0; 2]$. Принимая эти функции в качестве исходных и полагая период функции $\lambda(x)$ равным 2, на следующем шаге получаем $y_4(x, s)$ и $z_4(x, s)$, затем $y_8(x, s)$ и $z_8(x, s)$ и т. д. Таким образом, каждая итерация удваивает длину интервала, на котором определяется решение, что обеспечивает экспоненциальное ускорение вычислительного процесса.

Библиографические ссылки

1. Middleton D. *Topics in communication theory*. New York: McGraw-Hill; 1965. X, 126 p. (Bellman RE, Kalaba R, editors. McGraw-Hill monographs in modern engineering science).
2. Helstrom CW. *Statistical theory of signal detection*. 2nd edition. Oxford: Pergamon Press; 1975. XIV, 470 p. (Fry DW, Costrell L, Kandiah K, editors. International series of monographs in electronics and instrumentation; volume 9).
3. Busbridge IW. *The mathematics of radiative transfer*. Cambridge: Cambridge University Press; 1960. 143 p. (Hall P, Smithies F, editors. Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics; number 50).
4. Allen RC Jr. Functional relationships for Fredholm integral equations arising from pseudo-transport problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1970;30(1):48–78. DOI: 10.1016/0022-247X(70)90183-6.
5. Yeh P. *Optical waves in layered media*. Hoboken: John Wiley & Sons; 2005. X, 406 p. (Saleh BE, editor. Wiley series in pure and applied optics).
6. Арабаджян ЛГ, Енгигбарян НБ. Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения. *Итоги науки и техники. Математический анализ*. 1984;22:175–244.
7. Крейн МГ, Шмультян ЮД. Уравнения Винера – Хопфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты. *Известия Академии наук Армянской ССР. Математика*. 1982;17(4):307–327.
8. Крейн МГ, Шмультян ЮД. Уравнения Винера – Хопфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты (продолжение). *Известия Академии наук Армянской ССР. Математика*. 1982;17(5):335–375.
9. Касты Дж, Калаба Р. *Методы погружения в прикладной математике*. Чеботарев СП, переводчик; Цукерман ГМ, редактор. Москва: Мир; 1976. 224 с.
10. Соболев ВВ. *Рассеяние света в атмосферах планет*. Москва: Наука; 1972. 336 с.
11. Kagiwada HH, Kalaba RE. Verification of the invariant imbedding method for certain Fredholm integral equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1968;23(3):540–550. DOI: 10.1016/0022-247X(68)90135-2.
12. Allen RC Jr, Boicourt GP. An algorithm for solving Fredholm integral equations with displacement kernels. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1981;80(1):245–260. DOI: 10.1016/0022-247X(81)90103-7.
13. Мурадян МГ, Мурадян АГ. Линейное интегральное уравнение на полуоси с ядром $\lambda(x)K(x-t)$, где $\lambda(x)$ – периодическая функция. *Дифференциальные уравнения*. 1988;24(6):1061–1064.