БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЖУРНАЛ
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА ИНФОРМАТИКА

JOURNAL
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

MATHEMATICS and INFORMATICS

Издается с января 1969 г.
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)

Выходит три раза в год

2 **2026**

МИНСК
БГУ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор

ХАРИН Ю. С. – доктор физико-математических наук, академик НАН Беларуси, профессор; директор Научно-исследовательского института прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: kharin@bsu.by

Заместители главного редактора

КРОТОВ В. Г. – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: krotov@bsu.by

ДУДИН А. Н. – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий лабораторией прикладного вероятностного анализа факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: dudin@bsu.by

Ответственный секретарь

МАТЕЙКО О. М. – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: matseika@bsu.by

Абламейко С. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Альтенбах Х. Магдебургский университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия.
Антоневич А. Б. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Бауэр С. М. Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
Беняш-Кривец В. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Босяков С. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Бухштабер В. М. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Вабищевич П. Н. Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук, Москва, Россия.
Волков В. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Гладков А. Л. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Го В. Китайский университет науки и технологий, Хэфэй, провинция Аньхой, Китай.
Гогинава У. Тбилисский государственный университет им. Иванэ Джавахишвили, Тбилиси, Грузия.
Головко В. А. Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь.
Гороховик В. В. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Громак В. И. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Демида Г. Институт математики и информатики Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва.
Егоров А. Д. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Еремеев В. А. Гданьский политехнический университет, Гданьск, Польша.
Жоландек Х. Институт математики Варшавского университета, Варшава, Польша.
Журавков М. А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Залесский П. А. Бразильский университет, Бразилиа, Бразилия.
Каплунов Ю. Д. Университет Кииле, Кииле, Великобритания.
Кашин Б. С. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Келлерер Х. Грацский университет им. Карла и Франца, Грац, Австрия.
Кожанов А. И. Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.
Котов В. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Краснопрошин В. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Лауринчикас А. П. Вильнюсский университет, Вильнюс, Литва.

Мадани К. Университет Париж-Эст Марн-ла-Валле, Марн-ла-Валле, Франция.
Макаров Е. К. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Матус П. П. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Медведев Д. Г. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Михасев Г. И. Харбинский политехнический университет, Харбин, Китай.
Нестеренко Ю. В. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Никоноров Ю. Г. Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук, Владикавказ, Россия.
Освальд П. Боннский университет, Бонн, Германия.
Романовский В. Г. Мариборский университет, Марибор, Словения.
Сафонов В. Г. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь.
Скиба А. Н. Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель, Беларусь.
Сотсков Ю. Н. Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Трофимов В. А. Южно-Китайский университет технологий, Гуанчжоу, Китай.
Тузиков А. В. Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Фильцмозер П. Венский технический университет, Вена, Австрия.
Черноусов В. И. Альбертский университет, Эдмонтон, Канада.
Чижик С. А. Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Шешок Д. Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса, Вильнюс, Литва.
Шубэ А. С. Институт математики и информатики Академии наук Республики Молдова, Кишинев, Молдова.

EDITORIAL BOARD

Editor-in-chief	**KHARIN Y. S.**, doctor of science (physics and mathematics), academician of the National Academy of Sciences of Belarus, full professor; director of the Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: kharin@bsu.by
Deputy editors-in-chief	**KROTOV V. G.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: krotov@bsu.by
	DUDIN A. N., doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the laboratory of applied probabilistic analysis, faculty of applied mathematics and computer science, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: dudin@bsu.by
Executive secretary	**MATEIKO O. M.**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of general mathematics and computer science, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: matseika@bsu.by

Ablameyko S. V.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Altenbach H.	Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany.
Antonevich A. B.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Bauer S. M.	Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia.
Beniash-Kryvets V. V.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Bosyakov S. M.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Buchstaber V. M.	Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Chernousov V. I.	University of Alberta, Edmonton, Canada.
Chizhik S. A.	National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Dzemyda G.	Institute of Mathematics and Informatics of the Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
Egorov A. D.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Eremeyev V. A.	Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland.
Filzmoser P.	Vienna University of Technology, Vienna, Austria.
Gladkov A. L.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Goginava U.	Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia.
Golovko V. A.	Brest State Technical University, Brest, Belarus.
Gorokhovik V. V.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Gromak V. I.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Guo W.	University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, China.
Kaplunov J. D.	Keele University, Keele, United Kingdom.
Kashin B. S.	Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Kellerer H.	University of Graz, Graz, Austria.
Kotov V. M.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Kozhanov A. I.	Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia.
Krasnoproshin V. V.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Laurinchikas A. P.	Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
Madani K.	Université Paris-Est, Marne-la-Vallee, France.
Makarov E. K.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Matus P. P.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Medvedev D. G.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Mikhasev G. I.	Harbin Institute of Technology, Harbin, China.
Nesterenko Y. V.	Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Nikonorov Y. G.	Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia.

Oswald P. University of Bonn, Bonn, Germany.
Romanovskij V. G. University of Maribor, Maribor, Slovenia.
Safonov V. G. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Šešok D. Vilnius Gediminas Technical University, Vilnius, Lithuania.
Skiba A. N. Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus.
Sotskov Y. N. United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Suba A. S. Institute of Mathematics and Computer Science of the Academy of Sciences of Moldova, Kishinev, Moldova.
Trofimov V. A. South China University of Technology, Guangzhou, China.
Tuzikov A. V. Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Vabishchevich P. N. Institute for the Safe Development of Atomic Energy of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
Volkov V. M. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Zalesskii P. A. University of Brazilia, Brazilia, Brazil.
Zhuravkov M. A. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Zoladek H. Mathematics Institute of the University of Warsaw, Warsaw, Poland.

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Real, complex and functional analysis

УДК 517.968.2

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА С РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ, СОДЕРЖАЩИМ ПЕРИОДИЧЕСКИЙ МНОЖИТЕЛЬ

М. Г. МУРАДЯН[1)]***, А. Г. МУРАДЯН***[1)]

[1)]*Армянский государственный экономический университет, ул. Налбандяна, 128, 0025, г. Ереван, Армения*

Аннотация. На промежутке $[0;\ n]$ (n – натуральное число) рассматривается интегральное уравнение Фредгольма с ядром вида $\lambda(x)K(x-t)$, где $\lambda(x)$ есть 1-периодическая функция, а $K(x-t)$ представляет собой интегральную суперпозицию экспонент. Предполагается, что известно решение данного уравнения на одном периоде, и исходя из этого разрабатывается рекуррентный метод последовательного продолжения решения на весь рассматриваемый промежуток. Уравнение с таким ядром описывает процессы переноса, оптической фильтрации, распространения волн и другие явления в периодически слоистых средах (например, в кристаллах или системах, где свойства среды повторяются через равные промежутки). Предложенный метод может служить основой устойчивого вычисли-

Образец цитирования:
Мурадян МГ, Мурадян АГ. Интегральное уравнение Фредгольма с разностным ядром, содержащим периодический множитель. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2026;2:6–13.
EDN: BBJCKP

For citation:
Muradyan MG, Muradyan AG. Fredholm integral equation with a difference kernel containing a periodic multiplier. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2026;2:6–13. Russian.
EDN: BBJCKP

Авторы:
Максим Грачевич Мурадян – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры высшей математики.
Арам Грачевич Мурадян – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики.

Authors:
Maxim G. Muradyan, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of higher mathematics.
maxim_muradyan@yahoo.com
https://orcid.org/0009-0002-1102-553X
Aram G. Muradyan, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics.
aram_muradyan_56@mail.ru
https://orcid.org/0009-0007-3529-9283

тельного алгоритма решения указанного интегрального уравнения. Полученные априорные оценки обеспечивают контроль точности и сходимости вычислительного процесса.

Ключевые слова: интегральное уравнение Фредгольма; периодический множитель разностного ядра; периодически слоистая среда; рекуррентный метод решения.

FREDHOLM INTEGRAL EQUATION WITH A DIFFERENCE KERNEL CONTAINING A PERIODIC MULTIPLIER

M. G. MURADYAN[a]***, A. G. MURADYAN***[a]

[a]*Armenian State University of Economics, 128 Nalbandjana Street, Yerevan 0025, Armenia*

Corresponding author: M. G. Muradyan (maxim_muradyan@yahoo.com)

Abstract. A Fredholm integral equation with a kernel of the form $\lambda(x)K(x-t)$ is considered on an interval $[0;\, n]$ (n is a natural number), where $\lambda(x)$ is a 1-periodic function, and $K(x-t)$ represents an integral superposition of exponential functions. It is assumed that the solution of this equation is known for one period, and based on this, a recurrent method for the successive continuation of the solution over the entire interval under consideration is developed. An equation with such a kernel describes processes of transport, optimal filtering, wave propagation, and other phenomena in periodically layered media (for example, in crystals or systems whose properties repeat at regular intervals). The proposed method can serve as a basis for a stable computational algorithm for solving the given integral equation. The obtained a priori estimates make it possible to control the accuracy and convergence of the computational process.

Keywords: Fredholm integral equation; periodic multiplier of the difference kernel; periodically layered medium; recurrent solution method.

Введение

В теории оптической фильтрации [1; 2], а также в задачах переноса излучения, нейтронов, γ-квантов, распространения электромагнитных и акустических волн [3–5] возникают интегральные уравнения вида

$$f(x)=g(x)+\lambda(x)\int_0^n K(x-t)f(t)\,dt,\ 0\le x\le n, \tag{1}$$

где ядро $K(x-t)$ допускает интегральное представление через экспоненты:

$$K(x-t)=\int_a^b s^{|x-t|}\,d\sigma^{\pm}(s),\ 0\le a\le s\le b\le 1. \tag{2}$$

Здесь $\sigma^{\pm}(s)$ – кусочно-гладкие возрастающие функции, $\sigma^{+}(s)$ берется при $x-t\ge 0$, а $\sigma^{-}(s)$ – при $x-t<0$. Очевидно, что $K(x-t)\ge 0$.

Если $\lambda(x)$ – постоянная функция, то уравнение (1) превращается в известное уравнение Винера – Хопфа [6–8], описывающее вышеупомянутые процессы в однородных средах.

Ниже всюду предполагается, что $\lambda(x)$ – кусочно-непрерывная неотрицательная 1-периодическая функция $\lambda(x+1)=\lambda(x)$, а n – натуральное число, $n>1$. При этом условии уравнение (1) описывает процессы в периодически слоистых средах (например, в кристаллах или системах, где свойства среды повторяются через равные промежутки).

Во многих приложениях (или на различных этапах решения уравнения (1)) свободный член имеет ту же структуру, что и ядро (см., например, [9; 10]):

$$g(x)=\lambda(x)\left(\int_{a_1}^{b_1} s^{x}\,d\omega_1(s)+\int_{a_2}^{b_2} s^{n-x}\,d\omega_2(s)\right).$$

Рассмотрим следующие интегральные уравнения с параметром s, $a \le s \le b$:

$$y_n(x,\, s) = \lambda(x) s^x + \lambda(x) \int_0^n K(x-t)\, y_n(t,\, s)\, dt,\ 0 \le x \le n, \tag{3}$$

$$z_n(x,\, s) = \lambda(x) s^{n-x} + \lambda(x) \int_0^n K(x-t) z_n(t,\, s)\, dt,\ 0 \le x \le n. \tag{4}$$

Если уравнение (1) однозначно разрешимо, то знание функций $y_n(x,\, s)$ и $z_n(x,\, s)$ позволяет немедленно найти решение уравнения (1) со свободным членом $g(x)$:

$$f(x) = \lambda(x) \left(\int_{a_1}^{b_1} y_n(x,\, s)\, d\omega_1(s) + \int_{a_2}^{b_2} z_n(x,\, s)\, d\omega_2(s) \right).$$

Наш подход заключается в установлении связи между $y_n(x,\, s)$ и $y_{n-1}(x,\, s)$ ($z_n(x,\, s)$ и $z_{n-1}(x,\, s)$ соответственно).

Предполагается, что каким-либо способом (см., например, [11; 12]) найдены решения следующих уравнений:

$$y_1(x,\, s) = \lambda(x) s^x + \lambda(x) \int_0^1 K(x-t) y_1(t,\, s)\, dt,\ 0 \le x \le 1, \tag{5}$$

$$z_1(x,\, s) = \lambda(x) s^{1-x} + \lambda(x) \int_0^1 K(x-t) z_1(t,\, s)\, dt,\ 0 \le x \le 1. \tag{6}$$

На основе функций $y_1(x,\, s)$ и $z_1(x,\, s)$ предлагается рекуррентный способ постепенного определения $y_2(x,\, s)$, $y_3(x,\, s)$, …, $y_n(x,\, s)$, а также $z_2(x,\, s)$, $z_3(x,\, s)$, …, $z_n(x,\, s)$.

В частном случае, когда функция $\lambda(x)$ обладает свойством симметрии $\lambda(1-x) = \lambda(x)$, а ядро $K(x-t)$ является симметричным, т. е. $\sigma^-(s) = \sigma^+(s)$, получаем $z_k(x,\, s) = y_k(k-x,\, s)$.

Когда меры $d\sigma^{\pm}(s)$ дискретны, уравнения (3) и (4) эквивалентны краевым задачам для системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

В работе [13] предложен метод решения уравнения (3) в случае $n = \infty$.

Вопросы существования и единственности решения

Всюду далее предполагается выполнение условия

$$\lambda_0 \left(\int_a^b \frac{d\sigma^+(s)}{|\ln s|} + \int_a^b \frac{d\sigma^-(s)}{|\ln s|} \right) = \alpha \le 1,\ \lambda_0 = \sup \lambda(x). \tag{7}$$

Из представления ядра следует, что

$$\int_0^n K(x-t)\, dt = \int_0^x K(x-t)\, dt + \int_x^n K(x-t)\, dt = \int_0^x \left(\int_a^b s^{x-t} d\sigma^+(s) \right) dt + \int_x^n \left(\int_a^b s^{t-x} d\sigma^-(s) \right) dt =$$

$$= \int_a^b \left(\int_0^x s^{x-t} dt \right) d\sigma^+(s)\, dt + \int_a^b \left(\int_x^n s^{t-x} dt \right) d\sigma^-(s)\, dt.$$

Простые вычисления показывают, что

$$\lambda(x) \int_0^n K(x-t) dt = \lambda(x) \left(\int_a^b \frac{d\sigma^+(s)}{|\ln s|} + \int_a^b \frac{d\sigma^-(s)}{|\ln s|} \right) - \lambda(x) \left(\int_a^b \frac{s^n d\sigma^+(s)}{|\ln s|} + \int_a^b \frac{s^{n-x} d\sigma^-(s)}{|\ln s|} \right), \tag{8}$$

поэтому $\lambda(x) \int_0^n K(x-t) dt \le \alpha - \delta < 1$, где $\delta = \lambda_0 \left(\int_a^b \frac{s^n d\sigma^+(s)}{|\ln s|} + \int_a^b \frac{s^n d\sigma^-(s)}{|\ln s|} \right)$.

Следовательно, при условии (7) оператор

$$K\cdot = \lambda(x)\int_0^n K(x-t)dt \tag{9}$$

является сжимающим в пространстве M ограниченных на промежутке $[0;\ n]$ функций, поэтому интегральное уравнение (1) имеет единственное ограниченное решение.

Введем функции $y_k(x,\ s)$ и $z_k(x,\ s), k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$ как решения следующих интегральных уравнений на отрезке $[0;\ k]$:

$$y_k(x,\ s) = \lambda(x)s^x + \lambda(x)\int_0^k K(x-t)y_k(t,\ s)dt,\ 0\le x\le k, \tag{10}$$

$$z_k(x,\ s) = \lambda(x)s^{k-x} + \lambda(x)\int_0^k K(x-t)z_k(t,\ s)dt,\ 0\le x\le k. \tag{11}$$

Пусть B_k^+ и B_k^- – банаховы пространства функций $b(x,\ s)$ от двух переменных с нормами

$$\|b\|_+ = \sup_x \int_a^b \frac{|b(x,\ s)|d\sigma^+(s)}{|\ln s|},\ \|b\|_- = \sup_x \int_a^b \frac{|b(x,\ s)|d\sigma^-(s)}{|\ln s|}$$

соответственно.

Прямые вычисления показывают, что оператор (9) действует и является сжимающим в пространствах $B_k^{\pm}$. Докажем это для пространства B_k^+. Действительно, имеем

$$\left\|\lambda(x)\int_0^k K(x-t)y_k(t,\ s)dt\right\|_+ = \sup_x \int_a^b \left|\lambda(x)\int_0^k K(x-t)y_k(t,\ s)dt\right|\frac{d\sigma^+(s)}{|\ln s|}\le$$

$$\le \|y_k(x,\ s)\|_+ \sup_x \lambda(x)\int_0^n K(x-t)dt \le (\alpha-\delta)\|y_k(x,\ s)\|_+.$$

Лемма 1. *Уравнение (10) однозначно разрешимо в пространстве B_k^+, а уравнение (11) – в пространстве B_k^-, причем при $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ справедливы неравенства*

$$y_k(x,\ s)\ge 0,\ z_k(x,\ s)\ge 0, \tag{12}$$

$$\|y_k(x,\ s)\|_+ \le 1,\ \|z_k(x,\ s)\|_- \le 1, \tag{13}$$

$$\int_a^b y_k(x,\ s)\frac{d\sigma^+(s)}{|\ln s|} + \int_a^b z_k(x,\ s)\frac{d\sigma^-(s)}{|\ln s|} \le 1. \tag{14}$$

Доказательство. Однозначная разрешимость уравнений (10) и (11) следует из принципа сжатых отображений.

Рассмотрим последовательные приближения

$$y_k^{m+1}(x,\ s) = \lambda(x)s^x + \lambda(x)\int_0^k K(x-t)\,y_k^m(t,\ s)dt,\ y_k^0(x,\ s)=0,\ m=0,\ 1,\ \ldots,$$

$$z_k^{m+1}(x,\ s) = \lambda(x)s^{k-x} + \lambda(x)\int_0^k K(x-t)z_k^m(t,\ s)dt,\ z_k^0(x,\ s)=0,\ m=0,\ 1,\ \ldots.$$

Так как $\lambda(x)\ge 0,\ K(x-t)\ge 0$, то очевидно, что

$$y_k^m(x,\ s)\ge 0,\ z_k^m(x,\ s)\ge 0,\ m=0,\ 1,\ \ldots. \tag{15}$$

Легко проверить также, что последовательности $\{y_k^m(x,\ s)\}$ и $\{z_k^m(x,\ s)\}$ возрастают по m. По индукции докажем оценки (14). Введем обозначение

$$\gamma_k(x) = \int_a^b y_k(x,\ s)\frac{d\sigma^+(s)}{|\ln s|} + \int_a^b z_k(x,\ s)\frac{d\sigma^-(s)}{|\ln s|}.$$

Из уравнений (10) и (11) следует, что $\gamma_k(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\gamma_k(x)=\lambda(x)\int_a^b \frac{s^x d\sigma^+(s)}{|\ln s|}+\lambda(x)\int_a^b \frac{s^{k-x} d\sigma^-(s)}{|\ln s|}+\lambda(x)\int_0^k K(x-t)\gamma_k(t)dt.$$

Рассмотрим последовательные приближения

$$\gamma_k^{m+1}(x)=\lambda(x)\int_a^b \frac{s^x d\sigma^+(s)}{|\ln s|}+\lambda(x)\int_a^b \frac{s^{k-x} d\sigma^-(s)}{|\ln s|}+\lambda(x)\int_0^k K(x-t)\gamma_k^m(t)dt,\ \gamma_k^m=0. \tag{16}$$

По индукции докажем, что $\gamma_k^m(x)\le 1,\ m=1,\ 2,\ \ldots$. Пусть неравенство верно для некоторого $m>1$. Из последовательных приближений (16) с учетом условия (7) и формулы (8) имеем

$$\gamma_k^{m+1}(x)\le\lambda(x)\int_a^b \frac{s^x d\sigma^+(s)}{|\ln s|}+\lambda(x)\int_a^b \frac{s^{k-x} d\sigma^-(s)}{|\ln s|}+\lambda(x)\int_0^k K(x-t)dt=$$

$$=\lambda(x)\left(\int_a^b \frac{d\sigma^+(s)}{|\ln s|}+\int_a^b \frac{d\sigma^-(s)}{|\ln s|}\right)\le 1.$$

Таким образом, последовательность $\{\gamma_k^m(x)\}$ монотонно возрастает и является ограниченной сверху, поэтому для любого фиксированного x существует предел $\lim\limits_{m\to\infty}\gamma_k^m(x)=\gamma_k(x)\le 1$.

Неравенство (14) доказано. Из неравенства $\gamma_k^m(x)\le 1,\ m=1,\ 2,\ \ldots$, немедленно вытекает, что последовательности $\{y_k^m(x,\ s)\}$ и $\{z_k^m(x,\ s)\}$ сходятся к функциям $y_k(x,\ s)$ и $z_k(x,\ s)$ в пространствах B_k^+ и B_k^- соответственно. Неравенства (12) следуют из неравенств (15), а неравенства (13) – из неравенства (14). Лемма доказана.

О решении уравнения (10)

Рассмотрим семейство уравнений (10). Попытаемся получить связь между функциями $y_k(x,\ s)$ и $y_{k-1}(x,\ s)$. Заменяя в уравнении (10) x на $x+1$, с учетом периодичности функции $\lambda(x)$ получаем

$$y_k(x+1,\ s)=s\lambda(x)s^x+\lambda(x)\int_0^1 K(x+1-t)y_k(t,\ s)dt+\lambda(x)\int_0^{k-1} K(x-t)y_k(t+1,\ s)dt.$$

Таким образом, $y_k(x+1,\ s)$ удовлетворяет такому же уравнению, что и $y_{k-1}(x,\ s)$, но со свободным членом $s\lambda(x)s^x+\lambda(x)\int\limits_0^1 K(x+1-t)y_k(t,\ s)dt$. Из представления ядра следует, что

$$\int_0^1 K(x+1-t)y_k(t,\ s)dt=\int_a^b p^x d\sigma^+(p)\int_0^1 p^{1-t}y_k(t,\ s)dt.$$

Учитывая однозначную разрешимость уравнений (10), получаем

$$y_k(x+1,\ s)=sy_{k-1}(x,\ s)+\int_a^b M_k(p,\ s)y_{k-1}(x,\ p)d\sigma^+(p),\ 0\le x\le k-1, \tag{17}$$

где $M_k(p,\ s)=\int\limits_0^1 p^{1-t}y_k(t,\ s)dt$.

Наша ближайшая цель – выразить $y_k(x,\ s)$ через $y_1(x,\ s)$ и $z_1(x,\ s)$. Запишем уравнение (10) в виде

$$y_k(x,\ s)=\lambda(x)s^x+\lambda(x)\int_1^k K(x-t)y_k(t,\ s)dt+\lambda(x)\int_0^1 K(x-t)y_k(t,\ s)dt,\ 0\le x\le 1. \tag{18}$$

Из представления ядра $K(x-t)$ при $0\le x\le 1$ имеем

$$\int_1^k K(x-t)y_k(t,\ s)dt=\int_1^k y_k(t,\ s)\int_a^b p^{t-x}d\sigma^-(p)dt=\int_a^b p^{1-x}d\sigma^-(p)\int_1^k p^{t-1}y_k(t,\ s)dt.$$

Отсюда видно, что уравнение (18) является уравнением вида (5), (6) со свободным членом

$$\lambda(x)s^x + \lambda(x)\int_a^b p^{1-x}\int_1^k p^{t-1}y_k(t,\ s)dt\,d\sigma^-(p),$$

поэтому их сравнение приводит к соотношению

$$y_k(x,\ s) = y_1(x,\ s) + \int_a^b W_k(p,\ s)\,z_1(x,\ p)d\sigma^-(p),\ 0 \le x \le 1, \tag{19}$$

где $W_k(p,\ s) = \int_1^k p^{t-1}y_k(t,\ s)dt$. Введем обозначения $M_k(p,\ s) = \int_0^1 p^{1-t}y_k(t,\ s)dt, Q_1(q,\ s) = \int_0^1 q^{1-x}z_1(x,\ s)dx,$

$L_k(q,\ s) = \int_0^k q^x y_k(x,\ s)dx,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$

Умножая соотношение (17) на q^x, а соотношение (19) на q^{1-x} и интегрируя по x на промежутках $[0;\ k-1]$ и $[0;\ 1]$ соответственно, получаем линейную систему интегральных уравнений относительно функций W_k и M_k:

$$\begin{gathered} W_k(q,\ s) = sL_{k-1}(q,\ s) + \int_a^b L_{k-1}(q,\ p)M_k(p,\ s)d\sigma^+(p), \\ M_k(q,\ s) = M_1(q,\ s) + \int_a^b Q_1(q,\ p)W_k(p,\ s)d\sigma^-(p),\ k = 2,\ 3,\ \ldots. \end{gathered} \tag{20}$$

Сформулируем теперь следующий алгоритм нахождения $y_n(x,\ s)$. Пусть $k = 2$. Как было сказано выше, предполагается, что функции $y_1(x,\ s)$ и $z_1(x,\ s)$ известны, поэтому известны также функции $L_1(q,\ s)$ и $Q_1(q,\ s)$. Решив систему (20), мы определим функции W_2 и M_2. Теперь из соотношения (19) найдем $y_2(x,\ s)$ при $x \in [0;\ 1]$. Для значений $x \in [1;\ 2]$ $y_2(x,\ s)$ находится из соотношения (17). Затем аналогичным путем последовательно определяются функции $y_3(x,\ s),\ \ldots,\ y_n(x,\ s)$, при этом отсутствует необходимость в определении функций $z_2(x,\ s),\ z_3(x,\ s),\ \ldots$.

Обоснование метода

Докажем разрешимость системы (20). Сначала рассмотрим случай $k = 2$. Очевидно, что W_2 удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered} W_2(q,\ s) = sL_1(q,\ s) + \int_a^b M_1(p,\ s)L_1(q,\ p)d\sigma^+(p) + \\ + \int_a^b \left(\int_a^b Q_1(p,\ v)\,L_1(q,\ p)d\sigma^+(p) \right) W_2(v,\ s)d\sigma^-(v). \end{gathered} \tag{21}$$

Введем банаховы пространства $E^{\pm}$ функций $W(p,\ s)$ $(a \le p,\ s \le b)$ с нормой

$$\|W\|_{E^{\pm}} = \sup_p |\ln p| \int_a^b \frac{|W(p,\ s)|\,d\sigma^{\pm}(s)}{|\ln s|}.$$

Лемма 2. *Уравнение (21) имеет единственное решение в пространстве* E^+.

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$G\cdot = \int_a^b \left(\int_a^b Q_1(p,\ v)\,L_1(q,\ p)d\sigma^+(p) \right) d\sigma^-(v)$$

и докажем, что он действует в пространстве E^+ и является сжимающим. Рассмотрим неравенство (14) при $k = 1$. Умножая обе части этого неравенства на p^{1-x} и интегрируя по x на промежутке $[0;\ 1]$, получаем

$$\int_a^b M_1(p,\ s)\frac{d\sigma^+(s)}{|\ln s|} + \int_a^b Q_1(p,\ s)\frac{d\sigma^-(s)}{|\ln s|} \le \frac{1-p}{|\ln p|}.$$

Из неравенства (14) также следует неравенство $\int\limits_a^b L_1(p,\ s)\dfrac{d\sigma^+(s)}{|\ln s|} < \dfrac{1-p}{|\ln p|}$.

На основе этих неравенств имеем

$$\int\limits_a^b \left|G W_2(q,\ s)\right| \frac{d\sigma^+(s)}{|\ln s|} \le \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b Q_1(p,\ v)\, L_1(q,\ p) d\sigma^+(p) \right) \frac{d\sigma^-(v)}{|\ln v|} \|W_2\| <$$

$$< \int\limits_a^b \frac{1-p}{|\ln p|} L_1(q,\ p) d\sigma^+(p) \|W_2\| = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_a^b y_1(x,\ p)\ \frac{1-p}{|\ln p|} d\sigma^+(p) \right) q^x dx \|W_2\| \le \gamma \frac{1-q}{|\ln q|} \|W_2\|,$$

где $\gamma = \sup\limits_{0 \le x \le 1} \int\limits_a^b y_1(x,\ s) \dfrac{1-s}{|\ln s|} d\sigma^+(s)$.

Из этого неравенства непосредственно следует, что $\|GW_2\| \le \gamma \|W_2\|$. Из неравенства (14) вытекает, что $0 < \gamma < 1$, т. е. оператор $G\cdot$ является сжимающим в пространстве E^+. Утверждение леммы теперь следует из принципа сжатых отображений.

Лемма 3. *Справедливы неравенства*

$$\int\limits_a^b W_2(p,\ s) \frac{d\sigma^+(s)}{|\ln s|} < \frac{1-p}{|\ln p|},\ \int\limits_a^b M_2(p,\ s)\ \frac{d\sigma^+(s)}{|\ln s|} < \frac{1-p}{|\ln p|}.$$

Не вдаваясь в технические подробности, отметим, что доказательство основано на методе последовательных приближений:

$$W_2^{m+1}(q,\ s) = sL_{k-1}(q,\ s) + \int\limits_a^b L_{k-1}(q,\ p) M_2^m(p,\ s)\, d\sigma^+(p),\ W_2^0(q,\ s) = 0,$$

$$M_2^{m+1}(q,\ s) = M_1(q,\ s) + \int\limits_a^b Q_1(q,\ p) W_2^m(p,\ s)\, d\sigma^-(p),\ M_2^0(q,\ s) = 0.$$

Из леммы 3 следуют полезные оценки:

$$\|W_2\|_{E^+} \le 1,\ \|M_2\|_{E^+} \le 1. \tag{22}$$

О решении уравнения (11)

Совершенно аналогичным путем решается уравнение (11). Приведем только некоторые ключевые моменты. Аналогично соотношениям (17) и (19) получаются соотношения

$$z_k(x+1,\ s) = z_{k-1}(x,\ s) + \int\limits_a^b \tilde{M}_k(p,\ s)\, y_{k-1}(x,\ p)\, d\sigma^+(p),\ 0 \le x \le k-1,$$

$$z_k(x,\ s) = s^{k-1} z_1(x,\ s) + \int\limits_a^b \tilde{W}_k(p,\ s) z_1(x,\ p)\, d\sigma^-(p),\ 0 \le x \le 1,$$

где $\tilde{M}_k(q,\ s) = \int\limits_0^1 q^{1-x} z_k(x,\ s) dx,\ \tilde{W}_k(p,\ s) = \int\limits_1^k p^{x-1} z_k(x,\ s) dx.$

Функции $\tilde{M}_k(q,\ s)$ и $\tilde{W}_k(q,\ s)$ удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{W}_k(q,\ s) &= \tilde{L}_{k-1}(q,\ s) + \int\limits_a^b \tilde{L}_{k-1}(q,\ p) \tilde{M}_k(p,\ s)\, d\sigma^+(p), \\ \tilde{M}_k(q,\ s) &= s^{k-1} Q_1(q,\ s) + \int\limits_a^b Q_1(q,\ p)\, \tilde{W}_k(p,\ s) d\sigma^-(p), \end{aligned} \tag{23}$$

где $\tilde{L}_{k-1}(q,\ s) = \int\limits_0^{k-1} q^x z_k(x,\ s) dx.$

Как и в разделе «О решении уравнения (10)», здесь также можно доказать, что система (23) однозначно разрешима в пространстве E^{-}. Эту систему можно решить путем итераций, которые монотонно возрастают, являются неотрицательными и ограниченными сверху по норме.

Заключительные замечания

Резюмируя полученные результаты, можно сформулировать следующий обоснованный алгоритм решения уравнений семейства (2), (3), (7) при условии, что функции $y_1(x,\ s)$ и $z_1(x,\ s)$ известны.

Шаг 1. Из уравнений (20) при $k=2$ определяются функции W_2 и M_2.

Шаг 2. Из соотношения (19) при $k=2$ находится $y_2(x,\ s)$ при $x\in[0;\ 1]$.

Шаг 3. Из соотношения (17) при $k=2$ находится $y_2(x,\ s)$ для значений $x\in[1;\ 2]$.

Шаг 4. Из уравнений (20) при $k=3$ определяются функции W_3 и M_3.

Шаг 5. Из соотношений (17) и (19) при $k=3$ находится $y_3(x,\ s)$ при $x\in[1;\ 3]$.

Шаг 6. Аналогичным путем постепенно определяются функции $y_4(x,\ s)$, …, $y_n(x,\ s)$.

Такой же алгоритм может быть сформулирован и для решения уравнений семейства (4), причем в том важном частном случае, когда $\lambda(1-x)=\lambda(x)$ и $\sigma^{-}(s)=\sigma^{+}(s)$, имеет место равенство $z_k(x,\ s)=y_k(k-x,\ s)$.

Следует подчеркнуть, что уравнения (10) и (20) имеют различную природу. В процессе дискретизации ядра уравнение (10) сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, тогда как уравнения (20) приводят к системе алгебраических уравнений.

Представляется, что предложенный метод может служить основой устойчивого вычислительного алгоритма решения интегрального уравнения (1). Полученные априорные оценки (12)–(14) и (22) обеспечивают возможность контроля точности и сходимости вычислительного процесса.

Описанный выше процесс вычисления $y_n(x,\ s)$ и $z_n(x,\ s)$ может быть существенно ускорен. На первом шаге, исходя из функций $y_1(x,\ s)$ и $z_1(x,\ s)$, определяем функции $y_2(x,\ s)$ и $z_2(x,\ s)$ на интервале $x\in[0;\ 2]$. Принимая эти функции в качестве исходных и полагая период функции $\lambda(x)$ равным 2, на следующем шаге получаем $y_4(x,\ s)$ и $z_4(x,\ s)$, затем $y_8(x,\ s)$ и $z_8(x,\ s)$ и т. д. Таким образом, каждая итерация удваивает длину интервала, на котором определяется решение, что обеспечивает экспоненциальное ускорение вычислительного процесса.

Библиографические ссылки

1. Middleton D. *Topics in communication theory*. New York: McGraw-Hill; 1965. X, 126 p. (Bellman RE, Kalaba R, editors. McGraw-Hill monographs in modern engineering science).

2. Helstrom CW. *Statistical theory of signal detection*. 2nd edition. Oxford: Pergamon Press; 1975. XIV, 470 p. (Fry DW, Costrell L, Kandiah K, editors. International series of monographs in electronics and instrumentation; volume 9).

3. Busbridge IW. *The mathematics of radiative transfer*. Cambridge: Cambridge University Press; 1960. 143 p. (Hall P, Smithies F, editors. Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics; number 50).

4. Allen RC Jr. Functional relationships for Fredholm integral equations arising from pseudo-transport problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1970;30(1):48–78. DOI: 10.1016/0022-247X(70)90183-6.

5. Yeh P. *Optical waves in layered media*. Hoboken: John Wiley & Sons; 2005. X, 406 p. (Saleh BE, editor. Wiley series in pure and applied optics).

6. Арабаджян ЛГ, Енгибарян НБ. Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения. *Итоги науки и техники. Математический анализ.* 1984;22:175–244.

7. Крейн МГ, Шмульян ЮД. Уравнения Винера – Хопфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты. *Известия Академии наук Армянской ССР. Математика.* 1982;17(4):307–327.

8. Крейн МГ, Шмульян ЮД. Уравнения Винера – Хопфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты (продолжение). *Известия Академии наук Армянской ССР. Математика.* 1982;17(5):335–375.

9. Касти Дж, Калаба Р. *Методы погружения в прикладной математике.* Чеботарев СП, переводчик; Цукерман ГМ, редактор. Москва: Мир; 1976. 224 с.

10. Соболев ВВ. *Рассеяние света в атмосферах планет*. Москва: Наука; 1972. 336 с.

11. Kagiwada HH, Kalaba RE. Verification of the invariant imbedding method for certain Fredholm integral equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1968;23(3):540–550. DOI: 10.1016/0022-247X(68)90135-2.

12. Allen RC Jr, Boicourt GP. An algorithm for solving Fredholm integral equations with displacement kernels. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1981;80(1):245–260. DOI: 10.1016/0022-247X(81)90103-7.

13. Мурадян МГ, Мурадян АГ. Линейное интегральное уравнение на полуоси с ядром $\lambda(x)K(x-t)$, где $\lambda(x)$ – периодическая функция. *Дифференциальные уравнения*. 1988;24(6):1061–1064.

Получена 29.10.2025 / исправлена 19.01.2026 / принята 24.02.2026.
Received 29.10.2025 / revised 19.01.2026 / accepted 24.02.2026.

Математическая логика, алгебра и теория чисел

Mathematical logic, algebra and number theory

УДК 512.554

О КЛАССИФИКАЦИИ С ТОЧНОСТЬЮ ДО ИЗОТОПИИ ПРОСТЫХ 3-МЕРНЫХ КОММУТАТИВНЫХ АЛГЕБР НИЛЬ-РАНГА 1

В. И. ГЛИЗБУРГ[1)]***, С. В. ПЧЕЛИНЦЕВ***[2)]

[1)]*Московский городской педагогический университет, 2-й Сельскохозяйственный проезд, 4, корп. 1, 129226, г. Москва, Россия*
[2)]*Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, пр. Ленинградский, 49/2, 125167, г. Москва, Россия*

Аннотация. Доказано, что любые две простые 3-мерные унитальные коммутативные алгебры ниль-ранга 1 изотопны, если основное поле является алгебраически замкнутым и имеет характеристику, отличную от 2 и 3. Таким образом, завершена классификация с точностью до изотопии простых 3-мерных унитальных коммутативных алгебр, содержащих ниль-элементы индекса 2.

Ключевые слова: простая 3-мерная алгебра; коммутативная алгебра; ниль-элемент; ниль-ранг; изотоп.

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке Исследовательского фонда штата Сан-Паулу (FAPESP) (грант № 2023/01159-5). Авторы выражают признательность И. Б. Кайгородову, А. П. Пожидаеву и И. П. Шестакову за моральную поддержку, а также О. В. Шашкову за всестороннее содействие и помощь в оформлении статьи.

Образец цитирования:
Глизбург ВИ, Пчелинцев СВ. О классификации с точностью до изотопии простых 3-мерных коммутативных алгебр ниль-ранга 1. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2026;2:14–27 (на англ.).
EDN: ARAJQP

For citation:
Glizburg VI, Pchelintsev SV. On classification up to isotopy of simple 3-dimensional commutative algebras of nil-rank 1. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2026;2:14–27.
EDN: ARAJQP

Авторы:
Вита Иммануиловна Глизбург – кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, доцент; профессор департамента методики обучения Института педагогики и психологии образования.
Сергей Валентинович Пчелинцев – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры математики и анализа данных факультета информационных технологий и анализа больших данных.

Authors:
Vita I. Glizburg, PhD (physics and mathematics), doctor of science (pedagogy), docent; professor at the department of teaching methods, Institute of Pedagogy and Psychology of Education.
glizburg@mail.ru
https://orcid.org/0000-0003-1230-6931
Sergey V. Pchelintsev, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of mathematics and data analysis, faculty of information technology and big data analysis.
pchelinzev@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-7857-9532

ON CLASSIFICATION UP TO ISOTOPY OF SIMPLE 3-DIMENSIONAL COMMUTATIVE ALGEBRAS OF NIL-RANK 1

V. I. GLIZBURG [a], ***S. V. PCHELINTSEV*** [b]

[a] *Moscow City University, 4 Vtoroj Selskohozjajstvennyj proezd, 1 building, Moscow 129226, Russia*
[b] *Financial University under the Government of the Russian Federation, 49/2 Leningradskij Avenue, Moscow 125167, Russia*

Corresponding author: V. I. Glizburg (glizburg@mail.ru)

Abstract. It is proved that any two simple 3-dimensional unital commutative algebras of nil-rank 1 are isotopic if the ground field is algebraically closed and has characteristic different from 2 and 3. Thus, the classification up to isotopy of simple 3-dimensional unital commutative algebras containing nil-elements of index 2 is completed.

Keywords: simple 3-dimensional algebra; commutative algebra; nil-element; nil-rank; isotope.

Acknowledgements. This work was carried out with the financial support of the São Paulo Research Foundation (FAPESP) (grant No. 2023/01159-5). The authors express their gratitude to I. B. Kaigorodov, A. P. Pozhidaev, and I. P. Shestakov for moral support, as well as to O. V. Shashkov for his comprehensive assistance and help in preparing the article.

Introduction

Everywhere below it is assumed that the main field is algebraically closed and its characteristic is different from 2 and 3.

An algebra with unit 1 (neutral element under multiplication) is called unital. An algebra is called simple if it has the non-zero multiplication and does not contain its own ideals. Algebra is called isotopically simple if every its isotope is a simple algebra.

The interest in the study of isotopically simple algebras is associated with Bruck's theorem on composition series [1]: every finite-dimensional algebra A has the isotope B, in which there is a composition series

$$B = B_0 \rhd B_1 \rhd B_2 \rhd \ldots \rhd B_k = 0,$$

where $B_{i+1} \lhd B_i$ (ideal) and factor algebras B_i / B_{i+1}, $i = \overline{0,\ k-1}$, are either isotopically simple or 1-dimensional algebras with zero multiplication.

In the same work [1] R. H. Bruck proved that there are no 2-dimensional isotopically simple algebras.

Studying of 3-dimensional isotopically simple algebras is quite a difficult task.

It is known [2] that every simple 3-dimensional anticommutative algebra is isotopic to Lie algebra sl_2 second-order traceless matrices.

Work [2] provides a fairly complete list of papers related to the study of isotopes.

A significant number of publications are devoted to the study of isotopes associated with automorphisms of commutative associative algebras (see [3]).

Papers [4–6] studied isotopes of alternative, $(-1, 1)$ and Jordan algebras. In work [7] it was shown that among the isotopes of Jordan algebra of a symmetric bilinear non-degenerate form on an infinite-dimensional vector space there are both simple algebras and algebras containing ideals with zero multiplication.

A non-zero element a is called a nil-element of index 2 if $a^2 = 0$. The maximum number of linearly independent nil-elements of index 2 is called the nil-rank of the algebra. In publication [8] is given a classification up to isotopy of simple 3-dimensional unital commutative algebras of nil-rank 2. It turns out that every such algebra is isotopic to Jordan algebra J of a symmetric bilinear non-degenerate form on 2-dimensional vector space.

This work is devoted to proving an analogue of the above result for algebras of nil-rank 1. Let's describe its contents.

Let C be a simple 3-dimensional unital commutative algebra of nil-rank 1 and $a \in C$ be a nil-element of index 2. Then the operator R_a is either nilpotent or there exists $0 \neq b \in C$ such that $ab = b$. In the first case we say that C is of Engel type, and in the second case that it is regular.

First we prove that an algebra of Engel type is isotopic to some regular algebra. Then we classify up to isomorphism the regular algebras and define the conditions under which a regular algebra has nil-rank equal to 1.

The work considers the commutative algebra, which we called special,

$$D = \langle 1,\ x,\ y \mid x^2 = 0,\ xy = y,\ y^2 = 1 \rangle,$$

and the main result is proven in the work: every simple 3-dimensional unital commutative algebra of nil-rank 1 is isotopic to the special algebra D.

It can be proved that all unital commutative isotopes of Jordan algebra J and special algebra D are standard, and, therefore, they have the same nil-rank as the original algebra.

Thus, taking into account the publication [8] and the made remark, the classification is obtained accurate to isotopy of the simple 3-dimensional unital commutative algebras, containing nil-elements of index 2.

Every such algebra is isotopic to one and only one of the following three algebras depending on its nil-rank r: cyclotomic algebra for $r = 3$ ([2], theorem 5), Jordan algebra of non-degenerate bilinear symmetric form for $r = 2$ ([8], theorem 1), or special algebra for $r = 1$ (see lemma 6 and theorems 2 and 3).

Albert isotopes

In 1942 A. A. Albert [9] introduced the concept of isotope. Let's remember that the linear algebras $(A, \cdot)$ and $(B, \circ)$ over the main field F are called isotopic, if there is a triple $\Lambda = (\varphi, \psi, \xi)$ of linear isomorphisms $A \to B$, satisfying the condition $x^{\varphi} \circ y^{\psi} = (x \cdot y)^{\xi}$ for any $x, y \in A$. In this case, the triple of isomorphisms Λ is called isotopy. The isotopy relation is a broader equivalence relation than the isomorphism relation.

Let $f, g : A \to A$ be the linear automorphisms of the additive structure of algebra $(A, \cdot)$. Let us define the algebra $A^* = A^{(f, g)}$ on the same linear space A with respect to the new multiplication $x * y = x^f y^g$ for any $x, y \in A$. Algebra A^* is called the main isotope of algebra A.

It is known (see [4] or [9]) that two algebras are isotopic if and only if one of them is isomorphic to the main isotope of the other. In particular, if the algebras A and B are unital and isotopic, then the main isotope B^* is also unital.

Albert theorem. *If isotope $A^* = A^{(\varphi, \psi)}$ is unital, then there are elements $g, h \in A$ such that $\varphi R_g = \psi L_h = 1_A$.*

A short proof of this theorem can be found in paper [4].

Definition 1. An element a of the algebra A is called R-invertible, if the operator $R_a : x \mapsto xa$ of right multiplication by the element a is invertible (non-degenerate). Note that the inverse operator R_a^{-1}, generally speaking, is not a right multiplication operator (see, for example, [8]).

Let's denote the set of non-zero scalars from F as $F^{\times}$. The following two lemmas, proven in publication [8], are valid.

Lemma 1. *Let A be an algebra, $\sigma, \tau \in F^{\times}$ and $1 = 1_A$. Then the isotope $A^* = A^{(\sigma 1, \tau 1)}$ with respect to the operation $a * b = (\sigma a)(\tau b)$ and the algebra A are isomorphic.*

Definition 2. An isotope of the algebra C of the form $C^* = C^{(\sigma\varphi, \varphi)}$, $\sigma \in F^{\times}$ is called standard.

Lemma 2. *The algebra C and its standard isotope $C^* = C^{(\sigma\varphi, \varphi)}$ have equal nil-ranks.*

Simple algebras of Engel type

Throughout below, unless otherwise is stated, the term «algebra» means that we are talking about the 3-dimensional unital commutative algebra C over an algebraically closed field F of the characteristic different from 2 and 3.

Definition 3. An element $a \neq 0$ of the algebra C is called nil-element of index 2 if $a^2 = 0$.

Definition 4. The algebra C is called the algebra of Engel type, if for some nil-element a of index 2, the operator R_a is nilpotent.

If C is a simple algebra of Engel type and its nil-rank is 1, then the nilpotency of the operator R_b holds for any nil-element b of index 2, since a and b are proportional.

Lemma 3. *In any simple algebra C of Engel type it is possible to choose the basis $(1, x, y)$ so that $x^2 = 0$, $xy = 1$. Moreover, the operator R_x is nilpotent of index 3.*

P r o o f. Let's note that if $(1, x, y)$ is the basis and $x^2 = 0$, $xy = 1$, then

$$1R_x^2 = 0,\ xR_x = 0,\ yR_x^2 = x,\ yR_x^3 = 0.$$

Let a be a nil-element of index 2. Then the elements 1, a are linearly independent.

Let's consider the subspace $U = \langle 1, a \rangle$, generated by elements 1, a. It is invariant under R_a, which means that on the one-dimensional space C / U the nilpotent operator R_a has zero effect. Then there is $b \notin U$ such that $ba = \lambda 1 + \mu a$ for some $\lambda, \mu \in F$.

Note that the elements $(1, a, b)$ form the basis of the algebra C. If $\lambda = 0$, then $ba = \mu a$ and $\langle a \rangle$ is a proper ideal in algebra, which contradicts the simplicity of the algebra C. This means $\lambda \neq 0$. Therefore, $(b - \mu 1)a = \lambda 1$

and $(b-\mu 1)(\lambda^{-1}a)=1$. Then after the replacement $x:=\lambda^{-1}a,\ y:=b-\mu 1$ we obtain a basis of the algebra C of the required form. The lemma is proven.

Let's note that by virtue of lemma 3 it is necessary to know the expansion of the vector y^2 in the basis $(1,\ x,\ y)$ to describe the structure of the algebra C. Let

$$C=\langle 1,\ x,\ y \mid x^2=0,\ xy=yx=1,\ y^2=\tau_1 1+\tau_2 x+\tau_3 y\rangle.$$

Lemma 4. *Under the conditions of lemma 3 in the algebra C we can choose the basis* $(1,\ x,\ y)$ *so that* $x^2=0,\ xy=1$ *and one of the conditions is completed:*

(i) $y^2=x$;

(ii) $y^2=\tau x+y$, *where* $\tau\in F$.

P r o o f. According to lemma 3 in the algebra C we can choose the basis $(1,\ x,\ y)$ such that $x^2=0,\ xy=1$. Let $y':=y+\rho x$. Then

$$xy'=xy+\rho x^2=xy=1,$$

$$y'^2=(y+\rho x)^2=y^2+2\rho xy=(2\rho+\tau_1)1+\tau_2 x+\tau_3 y.$$

So, choosing ρ so that $2\rho+\tau_1=0$, we can assume that the basic elements $1,\ x,\ y$ satisfy the following equalities:

$$x^2=0,\ xy=1,\ y^2=\tau_2 x+\tau_3 y.$$

Let's make one more replacement: $x':=\mu x,\ y':=\mu^{-1}y$. Then

$$x'^2=0,\ \ x'y'=1,\ \ \mu^2 y'^2=y^2=\tau_2 x+\tau_3 y=\tau_2\mu^{-1}x'+\tau_3\mu y'.$$

Multiplying both sides of the last equality by μ^{-2}, we get

$$y'^2=\tau_2\mu^{-3}x'+\tau_3\mu^{-1}y'.$$

Let's consider two cases:

(i) $\tau_3=0$. Then $y'^2=\tau_2\mu^{-3}x'$ and, putting $\mu^3=\tau_2$, we get $y'^2=x'$;

(ii) $\tau_3\neq 0$. Then, putting $\mu=\tau_3,\ \tau=\tau_2\mu^{-3}$, we have $y'^2=\tau x'+y'$.

Reduction to regular algebras

Definition 5. The simple algebra C is called regular if it is possible to choose the canonical basis $(1,\ a,\ b)$ such that $a^2=0,\ ab=b$.

Remark. Let C be a regular algebra with canonical basis $(1,\ a,\ b)$. Then the operator R_a is not nilpotent. Conversely, if $a^2=0$ and the operator R_a is not nilpotent, then it has an eigenvector b corresponding to a non-zero eigenvalue λ, that is $ab=\lambda b$. It is clear that $b\notin\langle 1,\ a\rangle$. Replacing the vector a by the vector $a'=\lambda^{-1}a$, we obtain the canonical basis $(1,\ a',\ b)$.

Let's now prove the following result.

Theorem 1. *A simple algebra of Engel type has a regular isotope.*

P r o o f. Let's consider two cases of algebras of Engel type indicated in lemma 4.

(i) Let in the algebra C the following relations be satisfied for the elements of the canonical basis $(1,\ x,\ y)$:

$$x^2=0,\ xy=1,\ y^2=x.$$

Let us set $c:=1+y$ and show that the operator R_c is invertible:

$$1c=c=1+y,\ xc=x(1+y)=1+x,\ yc=y(1+y)=x+y.$$

This means, that by identifying, as usual, the operator and its matrix, we have

$$R_c=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\ \det(R_c)=2\neq 0.$$

Let's put

$$\varphi:=R_c^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

Let's consider the elements

$$a := 1 + x,\ \ b := x + y,\ \ e = c^2 = 1 + x + 2y.$$

Then we have

$$a^{\varphi} = (1,\ 1,\ 0) \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (0,\ 1,\ 0) = x,$$

$$b^{\varphi} = (0,\ 1,\ 1) \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (0,\ 0,\ 1) = y.$$

Let's consider the isotope $C^* = C^{(\varphi,\ \varphi)}$, where $u * v = u^{\varphi} v^{\varphi}$, and the products in it

$$e * v = cv^{\varphi} = v(\varphi R_c) = v,\ \ a * a = a^{\varphi} a^{\varphi} = xx = 0,$$

$$a * b = a^{\varphi} b^{\varphi} = xy = 1 = \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}a - b,\ \ b * b = b^{\varphi} b^{\varphi} = y^2 = x = a - 1.$$

Let's put $a' = -a,\ \ b' = b - \frac{1}{2}e$. We have $a' * a' = a * a = 0$ and

$$a' * b' = -a * \left(b - \frac{1}{2}e\right) = -\left(\frac{1}{2}e + \frac{1}{2}a - b\right) + \frac{1}{2}a = b - \frac{1}{2}e = b'.$$

It's clear that the operator $R_{a'}$ is not nilpotent.

(ii) Let the following relations be satisfied in algebra:

$$x^2 = 0,\ \ xy = 1,\ \ y^2 = \tau x + y.$$

Let us assume that $\tau + 2 \neq 0$. Let's put $c := 1 + y$ and show that the operator R_c is invertible:

$$1c = c = 1 + y,\ \ xc = 1 + x,\ \ yc = y(1 + y) = \tau x + 2y.$$

It means that,

$$R_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \tau & 1 \end{pmatrix},\ \ \det(R_c) = \tau + 2 \neq 0.$$

Let's put

$$\varphi := R_c^{-1} = \frac{1}{\tau + 2}\begin{pmatrix} 2 & \tau & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ \tau & -\tau & 1 \end{pmatrix},$$

$$a := 1 + x,\ \ b := \tau x + 2y,\ \ e := c^2 = 1 + \tau x + 3y.$$

Then

$$a^{\varphi} = (1,\ 1,\ 0)\frac{1}{\tau + 2}\begin{pmatrix} 2 & \tau & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ \tau & -\tau & 1 \end{pmatrix} = (0,\ 1,\ 0) = x,$$

$$b^{\varphi} = (0,\ \tau,\ 2)\frac{1}{\tau + 2}\begin{pmatrix} 2 & \tau & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ \tau & -\tau & 1 \end{pmatrix} = (0,\ 0,\ 1) = y.$$

Let's consider the isotope $C^* = C^{(\varphi,\ \varphi)}$, where $u * v = u^{\varphi} v^{\varphi}$.

We have

$$e * v = cv^{\varphi} = v(\varphi R_c) = v,\ \ a * a = a^{\varphi} a^{\varphi} = xx = 0,$$

$$a * b = a^{\varphi} b^{\varphi} = xy = 1 = \frac{1}{\tau + 2}e + \frac{\tau}{\tau + 2}a - \frac{3}{\tau + 2}b.$$

The operator R_a^* of right multiplication by the element a in the algebra C^* is not nilpotent, since the vector $e+\frac{(3\tau-1)(\tau+2)}{3}a-3b$ is an eigenvector of R_a, corresponding to the eigenvalue $\lambda=-\frac{3}{\tau+2}$:

$$a*\left(e+\frac{(3\tau-1)(\tau+2)}{3}a-3b\right)+\frac{3}{\tau+2}\left(e+\frac{(3\tau-1)(\tau+2)}{3}a-3b\right)=$$

$$=a-3a*b+\frac{3}{\tau+2}\left(e+\frac{(3\tau-1)(\tau+2)}{3}a-3b\right)=$$

$$=a-3\left(\frac{1}{\tau+2}+\frac{\tau}{\tau+2}a-\frac{3}{\tau+2}b\right)+\frac{3}{\tau+2}\left(e+\frac{(3\tau-1)(\tau+2)}{3}a-3b\right)=0.$$

Let now $\tau=-2$ and the following relations hold in the algebra:

$$x^2=0,\ xy=1,\ y^2=-2x+y.$$

Let's put $c:=1-y$ and show that the operator R_c is invertible:

$$1c=c=1-y,\ xc=x(1-y)=-1+x,\ yc=y(1-y)=2x.$$

Then

$$R_c=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&2&0\end{pmatrix},\ \det(R_c)=2\neq 0.$$

Let's put

$$\varphi:=R_c^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-2&1\\0&0&1\\-2&-2&1\end{pmatrix},$$

$$a:=-1+x,\ b:=2x,\ e:=c^2=1-2x-y.$$

Then

$$a^{\varphi}=(-1,\ 1,\ 0)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-2&1\\0&0&1\\-2&-2&1\end{pmatrix}=(0,\ 1,\ 0)=x,$$

$$b^{\varphi}=(0,\ 2,\ 0)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-2&1\\0&0&1\\-2&-2&1\end{pmatrix}=(0,\ 0,\ 1)=y.$$

Let's consider the isotope $C^*=C^{(\varphi,\ \varphi)}$, where $u*v=u^{\varphi}v^{\varphi}$. We have

$$e*v=cv^{\varphi}=v(\varphi R_c)=v,\ a*a=a^{\varphi}a^{\varphi}=xx=0,$$

$$a*b=a^{\varphi}b^{\varphi}=xy=1=-a+\frac{1}{2}b.$$

The operator R_a^* of right multiplication by the element a in the algebra C^* is not nilpotent, since it has an eigenvector $2a-b$, corresponding to the eigenvalue $\lambda=\frac{1}{2}$:

$$a*(2a-b)-\frac{1}{2}(2a-b)=-a*b-a+\frac{1}{2}b=-\left(-a+\frac{1}{2}b\right)-a+\frac{1}{2}b=0.$$

The theorem is proven.

Classification of regular algebras up to isomorphism

Special algebra *D*. Let us define a special algebra.

Definition 6. Let's call a special the commutative algebra of the form

$$D = \langle 1,\ x,\ y \mid x^2 = 0,\ xy = y,\ y^2 = 1 \rangle.$$

Lemma 5. *The special algebra D is regular.*

P r o o f. Let $a = \alpha 1 + \beta x + \gamma y$ be a nil-element of index 2 in the algebra D. Then

$$0 = (\alpha 1 + \beta x + \gamma y)^2 = (\alpha^2 + \gamma^2)1 + 2\alpha\beta x + 2(\alpha + \beta)\gamma y.$$

Since the elements $1,\ x,\ y$ are linearly independent, then

$$\alpha^2 + \gamma^2 = 0,\ \alpha\beta = 0,\ (\alpha + \beta)\gamma = 0.$$

Let's prove that $\alpha = 0$. Let, by contradiction, $\alpha \neq 0$. Then $\beta = 0$ and $\gamma = 0$, which implies $\alpha = 0$.

So, $\alpha = 0$, but then $\gamma = 0$, which means that the elements a and x are proportional, that is the nil-rank of the algebra D is 1.

Further, the operator R_x is not nilpotent, since y is its eigenvector, corresponding to eigenvalue 1.

Let us show now that the algebra D is simple. Let I be a proper ideal in D.

1. Let's first prove that I cannot contain any of the basis vectors $1,\ x,\ y$. Obviously, $1 \notin I$. If $y \in I$, then $1 = y^2 \in I$. If $x \in I$, then $y = xy \in I$.

2. Let's prove now that I cannot contain a vector of the form $\alpha 1 + \beta x + \gamma y$, where exactly two of the three scalars $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ are non-zero. If $x + \gamma y \in I$ and $\gamma \neq 0$, then $\gamma y = x(x + \gamma y) \in I$, which is impossible due to the item 1. If $1 + \beta x \in I$, then $x = x(1 + \beta x) \in I$, which is also impossible. If $1 + \gamma y \in I$, then $x + \gamma y = x(1 + \gamma y) \in I$, which is impossible due to the previous one.

3. Let's prove that I cannot contain a vector of the form $u = 1 + \beta x + \gamma y$ with non-zero scalars $\beta,\ \gamma$. If $u \in I$, then $I \ni ux = (1 + \beta x + \gamma y)x = x + \gamma y$, which contradicts the item 2.

The lemma is proven.

Basic types of regular algebras. Let's consider the unital commutative algebra

$$D(\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3) := \langle 1,\ a,\ b \mid a^2 = 0,\ ab = b,\ b^2 = \rho_1 1 + \rho_2 a + \rho_3 b \rangle,$$

where $\rho_i \in F,\ i = 1,\ 2,\ 3$ and $\rho_1 \neq 0$.

Note that every regular algebra has the indicated structure. The algebra $D(0,\ \rho_2,\ \rho_3)$ is not simple, since $\langle a,\ b \rangle$ is its ideal.

Lemma 6. *The regular algebra* $D(\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3)$ *is isomorphic to one of the algebras:*

$$D(\rho_1,\ \rho_2,\ 1),\ D(\rho_1,\ 1,\ 0),\ D(\rho_1,\ 0,\ 0).$$

Moreover, $D(\rho_1,\ 0,\ 0)$ for $\rho_1 \neq 0$ is isomorphic to the special algebra D.

P r o o f. Let $b' = \lambda b,\ \lambda \neq 0$. Then $ab' = b'$ and

$$\lambda^{-2} b'^2 = b^2 = \rho_1 1 + \rho_2 a + \rho_3 b = \rho_1 1 + \rho_2 a + \rho_3 \lambda^{-1} b'.$$

After multiplying both sides of this equality by λ^2 we get $b'^2 = \lambda^2 \rho_1 1 + \lambda^2 \rho_2 a + \lambda \rho_3 b'$.

If $\rho_3 \neq 0$, then for a suitable λ we have $\lambda \rho_3 = 1$, hence the algebra $D(\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3)$ is isomorphic to the algebra $D(\rho_1',\ \rho_2',\ 1)$ for some scalars $\rho_1',\ \rho_2'$.

If $\rho_3 \neq 0$, then in the algebra $D(\rho_1,\ \rho_2,\ 0)$ we have $b^2 = \rho_1 1 + \rho_2 a$. Let us assume that $\rho_2 \neq 0$. Then for $b' = \lambda b,\ \lambda \neq 0$, we have $ab' = b'$ and $b'^2 = \lambda^2 \rho_1 1 + \lambda^2 \rho_2 a$. Let's choose λ so that $\lambda^2 \rho_2 = 1$. Then the algebra $D(\rho_1,\ \rho_2,\ 0)$ is isomorphic to the algebra $D(\rho_1',\ 1,\ 0)$ for some scalar ρ_1'.

If $\rho_2 = \rho_3 = 0$, then the algebra $D(\rho_1,\ 0,\ 0)$ satisfies the following relations: $ab = b,\ b^2 = \rho_1 1$. Since $\rho_1 \neq 0$, then, similar to the previous one, the algebra $D(\rho_1,\ 0,\ 0)$ is isomorphic to the algebra $D(1,\ 0,\ 0)$, which coincides with the special algebra D. The lemma is proven.

Nil-ranks of the algebras $D(\rho_1, \rho_2, 1)$ and $D(\rho, 1, 0)$. Let's prove the following lemma.

Lemma 7. *The following statements are true:*

(i) the nil-rank of the algebra $D(\rho, 1, 0)$ is equal to 1 if and only if $\rho \neq -\frac{1}{2}$;

(ii) the nil-rank of the algebra $D(\rho_1, \rho_2, 1)$ is equal to 1 if and only if $(2\rho_1 + \rho_2)^2 + \rho_1 \neq 0$.

P r o o f. Let us assume that $z = \beta a + \gamma b$ is a nil-element of index 2 in the algebra $D(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$, where $\rho_1 \neq 0$. Then $0 = z = (\beta a + \gamma b)^2 = 2\beta\gamma b + \gamma^2(\rho_1 1 + \rho_2 a + \rho_3 b)$.

Since the elements 1, a, b are linearly independent, then $\gamma^2\rho_1 = 0$ and $\gamma = 0$, that is the elements z and a are proportional. So, without loss of generality, we can assume that the nil-element of index 2 has the form $z = 1 + \beta a + \gamma b$.

(i) In the algebra $D(\rho, 1, 0)$ we have

$$0 = z^2 = (1 + \beta a + \gamma b)^2 = 1 + \gamma^2 b^2 + 2\beta a + 2\gamma b + 2\beta\gamma ab =$$

$$= (1 + \gamma^2\rho)1 + (2\beta + \gamma^2)a + 2\gamma(1 + \beta)b.$$

Since the elements 1, a, b are linearly independent, then

$$1 + \gamma^2\rho = 0,\ 2\beta + \gamma^2 = 0,\ 2\gamma(1 + \beta) = 0.$$

From here we get $\gamma \neq 0,\ \beta = -1,\ 2\beta\rho = 1$, which means $\rho = -\frac{1}{2}$.

(ii) In the algebra $D(\rho_1, \rho_2, 1)$ we have

$$0 = z^2 = (1 + \beta a + \gamma b)^2 = 1 + \gamma^2 b^2 + 2\beta a + 2\gamma b + 2\beta\gamma ab =$$

$$= 1 + \gamma^2(\rho_1 + \rho_2 a + b) + 2\beta a + 2\gamma b + 2\beta\gamma ab =$$

$$= (1 + \gamma^2\rho_1)1 + (2\beta + \gamma^2\rho_2)a + (2\beta + \gamma + 2)\gamma b.$$

Note that $\gamma \neq 0$ and the following equalities are true:

$$1 + \gamma^2\rho_1 = 0,\ 2\beta + \gamma^2\rho_2 = 0,\ 2\beta + \gamma + 2 = 0.$$

From the first two equalities we obtain

$$0 = (1 + \gamma^2\rho_1)\rho_2 - (2\beta + \gamma^2\rho_2)\rho_1 = \rho_2 - 2\beta\rho_1.$$

Therefore, $\beta = \frac{\rho_2}{2\rho_1}$ and $\gamma = -2\beta - \frac{\rho_2}{\rho_1}$. Then the equality $1 + \gamma^2\rho_1 = 0$ takes the form $1 + \rho_1\left(-\frac{\rho_2}{\rho_1} - 2\right)^2 = 0$.

After multiplying both sides of this equality by ρ_1 we have $(2\rho_1 + \rho_2)^2 + \rho_1 \neq 0$. The lemma is proven.

Standard isotopes of the algebra *D*

Definition 7. Let $E(\alpha, \beta)$ denote the unital commutative algebra with the basis $(1, x, y)$ and the multiplication table

$$x^2 = 0,\ xy = \sigma_1 1 + \sigma_2 x + \sigma_3 y,\ y^2 = \tau_1 1 + \tau_2 x + \tau_3 y,$$

where

$$\sigma_1 = -\beta\delta,\ \sigma_2 = 2\alpha\beta\delta,\ \sigma_3 = (\beta^2 + 1)\delta,$$

$$\tau_1 = (\alpha + 1)\delta,\ \tau_2 = -2\alpha(\alpha + 1)\delta,\ \tau_3 = -2\beta\delta,$$

$$\delta = (\alpha - \beta^2 + \alpha\beta^2 + 1)^{-1}.$$

Lemma 8. *The algebra $E(\alpha, \beta)$ for any scalars α, β, satisfying the condition $\alpha - \beta^2 + \alpha\beta^2 + 1 \neq 0$, is isotopic to the special algebra D.*

P r o o f. Let $\alpha, \beta \in F$ and $\alpha - \beta^2 + \alpha\beta^2 + 1 \neq 0$. In the special algebra D, let's consider the element $c := 1 + \alpha x + \beta y$ and calculate the operator R_c:

$$1c = 1 + \alpha x + \beta y,\ \ x' := xc = x + \beta y,\ \ y' := yc = \beta 1 + (1+\alpha) y,$$

$$R_c = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \beta \\ \beta & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix},\ \det(R_c) = \delta^{-1} = \alpha - \beta^2 + \alpha\beta^2 + 1.$$

Let's assume $e := c^2 = 1 + \beta^2 1 + 2\alpha x + 2\beta y + 2\alpha\beta xy = \left(1+\beta^2,\ 2\alpha,\ 2(\alpha+1)\beta\right)$.

Since $\begin{vmatrix} 1+\beta^2 & 2\alpha & 2(\alpha+1)\beta \\ 0 & 1 & \beta \\ \beta & 0 & \alpha+1 \end{vmatrix} \delta = 1$, then $e,\ x',\ y'$ are linearly independent.

Let's put $\varphi := R_c^{-1} = \delta \begin{pmatrix} \alpha+1 & -\alpha^2-\alpha & \alpha\beta-\beta \\ \beta^2 & -\beta^2+\alpha+1 & -\beta \\ -\beta & \alpha\beta & 1 \end{pmatrix}$. Note that $x'^{\varphi} = x,\ y'^{\varphi} = y$. So $(e,\ x',\ y')$ is the basis of the isotope $D^* = D^{(\varphi,\ \varphi)}$, $u * v = u^{\varphi} x' v^{\varphi}$. We have

$$e * v = v,\ \ x' * x' = 0,\ \ x' * y' = xy = y = -\beta\delta e + 2\beta\delta x' + \left(\beta^2 + 1\right)\delta y',$$

$$y' * y' = y^2 = 1 = (\alpha+1)\delta e - 2\alpha(\alpha+1)\delta x' - 2\delta y',$$

the last two equalities are checked directly.

Thus, it is proved that the algebra D^* is isomorphic to the algebra $E(\alpha,\ \beta)$. The lemma is proven.

Main results

Isotopes of the algebra $D(\rho,\ 1,\ 0)$. Let's prove the following theorem.

Theorem 2. *Algebra of the type $D(\rho,\ 1,\ 0)$ for $\rho \neq -\frac{1}{2}$ is isotopic to the algebra D.*

P r o o f. By lemma 8 it is sufficient to understand that in the algebra $E(\alpha,\ 0)$ there are elements such that the equalities are satisfied

$$a^2 = 0,\ \ ab = b,\ \ b^2 = \rho 1 + a, \tag{1}$$

provided that $\rho \neq -\frac{1}{2}$. Note that for $\beta = 0$ we have the following parameter values, participating in the definition of the algebra $E(\alpha,\ 0)$:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \tau_3 = 0,\ \ \sigma_3 = \delta = \frac{1}{1+\alpha},\ \ \tau_1 = 1,\quad \tau_2 = -2\alpha.$$

Multiplication in the algebra $E(\alpha,\ 0)$ is given by the table

$$x^2 = 0,\ \ xy = \frac{1}{1+\alpha} y,\ \ y^2 = 1 - 2\alpha x.$$

We will look for elements $a,\ b \in E(\alpha,\ 0)$ that satisfy relations (1) in the form

$$a = (\alpha+1)x,\ \ b = \theta y.$$

We have $0 = ab - b = (\alpha+1)\theta xy - \theta y = (\alpha+1)\theta\frac{1}{1+\alpha} y - \theta y = 0,$

$$0 = b^2 - (\rho 1 + a) = \theta^2 y^2 - \left(\rho 1 + (\alpha+1)x\right) =$$

$$= \theta^2(1 - 2\alpha x) - \left(\rho 1 + (\alpha+1)x\right) = \left(\theta^2 - \rho\right)1 - \left(\alpha + 1 + 2\theta^2\alpha\right)x.$$

So, in order relations (1) to be satisfied, it is necessary and sufficient to fulfill the equalities $\theta^2 = \rho$, $\alpha\left(1+2\theta^2\right)+1=0$ or $\theta^2 = \rho$, $\alpha\left(1+2\rho\right)+1=0$. Since $\rho \neq -\frac{1}{2}$, then the last system is solvable with respect to the unknowns α and θ. The theorem is proven.

By virtue of lemmas 2 and 7 (i) the restriction $\rho \neq -\frac{1}{2}$ in theorem 2 is essential.

Isotopes of the algebra $D(\rho_1, \rho_2, 1)$. Let's prove the following theorem.

Theorem 3. *Algebra of the type $D(\rho_1, \rho_2, 1)$ for $\left(2\rho_1+\rho_2\right)^2+\rho_1 \neq 0$ is isotopic to the algebra D.*

P r o o f. By virtue of lemma 8, the algebra D is isotopic to the algebra $E(\alpha, \beta)$. Let's prove that the algebra $D(\rho_1, \rho_2, 1)$ is isomorphic to the algebra $E(\alpha, \beta)$ for some α, β, and $\beta^2 \neq -1$. Recall that the commutative algebra $E(\alpha, \beta)$ has the basis $(1, x, y)$ and the multiplication table

$$x^2 = 0,\ xy = \sigma_1 1+\sigma_2 x+\sigma_3 y,\ y^2 = \tau_1 1+\tau_2 x+\tau_3 y,$$

where

$$\sigma_1 = -\beta\delta,\ \sigma_2 = 2\alpha\beta\delta,\ \sigma_3 = \gamma^{-1}\delta,$$

$$\tau_1 = (\alpha+1)\delta,\ \tau_2 = -2\alpha(\alpha+1)\delta,\ \tau_3 = -2\beta\delta,$$

$$\gamma = \left(\beta^2+1\right)^{-1},\ \delta = \left(\alpha-\beta^2+\alpha\beta^2+1\right)^{-1}.$$

It is enough to understand that in the algebra $E(\alpha, \beta)$ there are elements a, b, which

$$a^2 = 0,\ ab = b,\ b^2 = \rho_1 1+\rho_2 a+b. \tag{2}$$

The operator R_x in the algebra $E(\alpha, \beta)$ has the form $R_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{pmatrix}$. Its characteristic polynomial is equal to $t^2(t-\sigma_3)$, this means that its Jordan form is a matrix of the form $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{pmatrix}$.

Let's check that the Jordan basis of the operator R_x consists of the vectors 1, x, b, where

$$b := \theta_1 1+\theta_2 x+y,\ \theta_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_3},\ \theta_2 = \frac{\sigma_1+\sigma_2\sigma_3}{\sigma_3^2}.$$

Note that $\sigma_3 \neq 0$ and check the equality $bx = \sigma_3 b$:

$$bx = \left(\theta_1 1+\theta_2 x+y\right)x = \theta_1 x+xy = \theta_1 x+\sigma_1 1+\sigma_2 x+\sigma_3 y =$$

$$= \sigma_1 1+\left(\theta_1+\sigma_2\right)x+\sigma_3 y = \sigma_3\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}+\frac{\sigma_1+\sigma_2\sigma_3}{\sigma_3^2}x+y\right) =$$

$$= \sigma_3\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}+\frac{\sigma_1+\sigma_2\sigma_3}{\sigma_3^2}x+y\right) = \sigma_3\left(\theta_1 1+\theta_2 x+y\right) = \sigma_3 b.$$

Vectors a, b of the form $a := \frac{1}{\sigma_3}x$, $b = \theta_1 1+\theta_2 x+y$ satisfy the first two relations (2). The validity of the first equality $a^2 = 0$ is obvious. Let's check the second equality $ab = b$:

$$ab = \frac{1}{\sigma_3}x \cdot b = \frac{1}{\sigma_3} \cdot bx = \frac{1}{\sigma_3} \cdot \sigma_3 b = b.$$

Note that the following equalities are true:

$$x = \sigma_3 a,\ y = -\theta_1 1-\theta_2\sigma_3 a+b. \tag{3}$$

It remains to understand that according to the given scalars ρ_1, ρ_2 it is possible to choose α, β so that the third equality from relations (2) is satisfied. We have

$$b^2 = (\theta_1 1 + \theta_2 x + y)^2 = \theta_1^2 + 2\theta_1\theta_2 x + 2\theta_1 y + 2\theta_2 xy + y^2 =$$

$$= \theta_1^2 + 2\theta_1\theta_2 x + 2\theta_1 y + 2\theta_2\left(\sigma_1 1 + \sigma_2 x + \sigma_3 y\right) + \left(\tau_1 1 + \tau_2 x + \tau_3 y\right) =$$

$$= \left(\theta_1^2 + 2\theta_2\sigma_1 + \tau_1\right)1 + \left(2\theta_1\theta_2 + 2\theta_2\sigma_2 + \tau_2\right)x + \left(2\theta_1 + 2\theta_2\sigma_3 + \tau_3\right)y.$$

Let's put

$$\xi := 2\theta_1 + 2\theta_2\sigma_3 + \tau_3. \tag{4}$$

Later we will show that for a suitable choice of scalars α, β the relation $\xi \neq 0$ holds. Continuing the calculation of b^2, due to equalities (3) we have

$$b^2 = \left(\theta_1^2 + 2\theta_2\sigma_1 + \tau_1\right)1 + \left(2\theta_1\theta_2 + 2\theta_2\sigma_2 + \tau_2\right)\sigma_3 a + \xi y =$$

$$= \left(\theta_1^2 + 2\theta_2\sigma_1 + \tau_1 - \xi\theta_1\right)1 + \left(2\theta_1\theta_2 + 2\theta_2\sigma_2 + \tau_2 - \xi\theta_2\right)\sigma_3 a + \xi b,$$

that is

$$b^2 = \lambda_1 1 + \lambda_2 a + \xi b, \tag{5}$$

where

$$\lambda_1 = \theta_1^2 + 2\theta_2\sigma_1 + \tau_1 - \xi\theta_1, \;\; \lambda_2 = \left(2\theta_1\theta_2 + 2\theta_2\sigma_2 + \tau_2 - \xi\theta_2\right)\sigma_3.$$

Setting $b = \xi b'$, due to relation (5) we have $\xi^2 b'^2 = \lambda_1 1 + \lambda_2 a + \xi^2 b'$, hence,

$$a^2 = 0, \;\; ab' = b', \;\; b'^2 = \lambda_1\xi^{-2}1 + \lambda_2\xi^{-2}a + b'.$$

To prove the isomorphism of the algebras $D\left(\rho_1, \rho_2, 1\right)$ and $E\left(\alpha, \beta\right)$, it is sufficient to establish the validity of the equalities

$$\rho_1 = \lambda_1\xi^{-2}, \;\; \rho_2 = \lambda_2\xi^{-2}. \tag{6}$$

Let us prove that it is possible to select the scalars $\left(\alpha, \beta\right)$ so that equalities (6) are satisfied. Let us present the corresponding reasoning in the form of a sequence of points.

1. Let us show that $\xi = 2\left(\beta^2 - 3\right)\beta\gamma\delta$. Consistently we have

$$\theta_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \sigma_1\sigma_3^{-1} = -\beta\delta \cdot \gamma\delta^{-1} = -\beta\gamma,$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_3} = 2\alpha\beta\delta \cdot \gamma\delta^{-1} = 2\alpha\beta\gamma,$$

$$\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_3} = -\beta\delta \cdot 2\alpha\beta\delta \cdot \gamma\delta^{-1} = -2\alpha\beta^2\gamma\delta,$$

$$\theta_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2\sigma_3}{\sigma_3^2} = \frac{1}{\sigma_3} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3} + \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = -\gamma\delta^{-1}\beta\gamma + 2\alpha\beta\gamma = -\beta\gamma^2\delta^{-1} + 2\alpha\beta\gamma,$$

$$\theta_2\sigma_3 = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} + \sigma_2 = 2\alpha\beta\delta - \beta\gamma.$$

Let us now transform the following expression:

$$-4\delta^{-1} + 2\left(2\alpha - 1\right)\gamma^{-1} = -4\left(\alpha - \beta^2 + \alpha\beta^2 + 1\right) + 2\left(2\alpha - 1\right)\left(\beta^2 + 1\right) =$$

$$= -4\alpha + 4\beta^2 - 4\alpha\beta^2 - 4 + 4\alpha\beta^2 - 2\beta^2 + 4\alpha - 2 = 2\left(\beta^2 - 3\right).$$

Due to formula (4) we have

$$\xi = 2\theta_1 + 2\theta_2\sigma_3 + \tau_3 = -2\beta\gamma - 2\beta\gamma + 4\alpha\beta\delta - 2\beta\delta =$$
$$= -4\beta\gamma + 2(2\alpha - 1)\beta\delta = \left(-4\delta^{-1}\gamma + 2(2\alpha - 1)\right)\beta\delta =$$
$$= \left(-4\delta^{-1} + 2(2\alpha - 1)\gamma^{-1}\right)\beta\gamma\delta = 2\left(\beta^2 - 3\right)\beta\gamma\delta.$$

2. Let us show that $\lambda_1 = \gamma^2$. Using the equalities $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = -\beta\gamma$ and $\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_3} = -2\alpha\beta^2\gamma\delta$, we have

$$\theta_2\sigma_1 = \left(\frac{1}{\sigma_3}\frac{\sigma_1}{\sigma_3} + \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right)\sigma_1 = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right)^2 + \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_3} = (\beta\gamma)^2 - 2\alpha\beta^2\gamma\delta = \beta^2\gamma(\gamma - 2\alpha\delta).$$

Let us now transform the following expression:

$$-4\alpha\beta^2\gamma^{-1} + (\alpha+1)\gamma^{-2} + 2\left(\beta^2 - 3\right)\beta^2 = -4\alpha\beta^2\left(\beta^2+1\right) + (\alpha+1)\left(\beta^2+1\right)^2 + 2\left(\beta^2-3\right)\beta^2 =$$
$$= -4\alpha\beta^4 - 4\alpha\beta^2 + \alpha\beta^4 + 2\alpha\beta^2 + \alpha + \beta^4 + 2\beta^2 + 1 + 2\beta^4 - 6\beta^2 =$$
$$= -3\alpha\beta^4 - \alpha\beta^2 + \alpha + 3\beta^4 - 4\beta^2 + 1 = -\left(3\beta^2 - 1\right)\left(\alpha - \beta^2 + \alpha\beta^2 + 1\right) = -\left(3\beta^2 - 1\right)\delta^{-1}.$$

Completing the calculation of λ_1, we obtain

$$\lambda_1 = \theta_1^2 + 2\theta_2\sigma_1 + \tau_1 - \xi\theta_1 = (\beta\gamma)^2 + 2\beta^2\gamma(\gamma - 2\alpha\delta) + (\alpha+1)\delta + 2\left(\beta^2-3\right)\beta^2\gamma^2\delta =$$
$$= 3(\beta\gamma)^2 - 4\alpha\beta^2\gamma\delta + (\alpha+1)\delta + 2\left(\beta^2-3\right)\beta^2\gamma^2\delta =$$
$$= 3(\beta\gamma)^2 + \left(-4\alpha\beta^2\gamma^{-1} + (\alpha+1)\gamma^{-2} + 2\left(\beta^2-3\right)\beta^2\right)\gamma^2\delta = 3(\beta\gamma)^2 - \left(3\beta^2-1\right)\gamma^2 = \gamma^2.$$

3. Let us show that $\lambda_2 = -2\left(\alpha + 2\beta^2 + \alpha\beta^2\right)\gamma^2\delta$.

Let's first consider the expression $\chi := \lambda_2\left(\gamma^2\delta\right)^{-1}$:

$$\chi = \lambda_2\left(\gamma^2\delta\right)^{-1} = \left(2\theta_1\theta_2 + 2\theta_2\sigma_2 + \tau_2 - \xi\theta_2\right)\sigma_3\left(\gamma^2\delta\right)^{-1}.$$

Note that $\sigma_3\left(\gamma^2\delta\right)^{-1} = \gamma^{-1}\delta\gamma^{-2}\delta^{-1} = \gamma^{-3}$. Hence, $\chi\gamma^3 = 2\theta_1\theta_2 + 2\theta_2\sigma_2 + \tau_2 - \xi\theta_2$.

Because $\theta_1 = -\beta\gamma$, $\theta_2 = -\beta\gamma^2\delta^{-1} + 2\alpha\beta\gamma$, $\sigma_2 = 2\alpha\beta\delta$, then

$$\chi\gamma^3 = \delta^{-1}\left(8\alpha^2\beta^2\gamma\delta^2 - 8\alpha\beta^2\gamma^2\delta + 2\beta^2\gamma^3 + \xi\beta\gamma^2 + \tau_2\delta - 2\xi\alpha\beta\gamma\delta\right).$$

Let's note that

$$\chi = p + q + r,$$

where $p := \gamma^{-3}\delta^{-1}\left(8\alpha^2\beta^2\gamma\delta^2 - 8\alpha\beta^2\gamma^2\delta\right)$, $q := \gamma^{-3}\delta^{-1}\left(2\beta^2\gamma^3 + \xi\beta\gamma^2\right)$, $r := \gamma^{-3}\delta^{-1}\left(\tau_2\delta - 2\xi\alpha\beta\gamma\delta\right)$.

Let us calculate the values p, q, r, taking into account that

$$\gamma = \left(\beta^2+1\right)^{-1}, \quad \delta = \left(\alpha - \beta^2 + \alpha\beta^2 + 1\right)^{-1}.$$

Firstly, $p = 8\alpha\beta^2\gamma^{-2}(\alpha\delta - \gamma) = 8\alpha\beta^2\left(\beta^4 - 1\right)\delta$. Secondly, using $\xi = 2\left(\beta^2 - 3\right)\beta\gamma\delta$, we have

$$q = \beta\gamma^{-1}\delta^{-1}(2\beta\gamma + \xi) = 2\beta^2\left(\delta^{-1} + \left(\beta^2 - 3\right)\right) = 2\beta^2\left(\alpha\beta^2 + \alpha - 2\right).$$

Finally, thirdly, the following equalities are true:

$$r = \gamma^{-3}\left(\tau_2 - 2\xi\alpha\beta\gamma\right) = -2\alpha\gamma^{-3}\left((\alpha+1)\delta + \xi\beta\gamma\right) =$$
$$= -2\alpha\left(\beta^2+1\right)\left(\alpha - 4\beta^2 + 3\beta^4 + 2\alpha\beta^2 + \alpha\beta^4 + 1\right)\delta.$$

Then $\chi = p + q + r = -2\left(\alpha + 2\beta^2 + \alpha\beta^2\right)$, hence, $\lambda_2 = -2\left(\alpha + 2\beta^2 + \alpha\beta^2\right)\gamma^2\delta$, and item 3 is proven.

4. Using equalities (6) and items 1–3, we get the system

$$\begin{cases} \rho_1 = \lambda_1\xi^{-2} = \gamma^2\xi^{-2} = \dfrac{1}{4}\beta^{-2}\left(\beta^2 - 3\right)^{-2}\delta^{-2}, \\ \rho_2 = \lambda_2\xi^{-2} = -\dfrac{1}{2}\beta^{-2}\left(\beta^2 - 3\right)^{-2}\left(\alpha + 2\beta^2 + \alpha\beta^2\right)\delta^{-1}, \end{cases} \tag{7}$$

where $\dfrac{\rho_2}{\rho_1\delta} = -2\left(\alpha + 2\beta^2 + \alpha\beta^2\right)$. Assuming $\rho := \dfrac{\rho_2}{\rho_1}$, we have

$$\rho\left(\alpha - \beta^2 + \alpha\beta^2 + 1\right) = -2\left(\alpha + 2\beta^2 + \alpha\beta^2\right),$$

therefore, if $\rho + 2 \neq 0$, then

$$\alpha = f\left(\beta^2\right) := \frac{-4\beta^2 + \rho\left(\beta^2 - 1\right)}{\left(\beta^2 + 1\right)(\rho + 2)}. \tag{8}$$

If $\rho = -2$, then $1 - 3\beta^2 = 0$.

Let's note that system (7) is equivalent to the system

$$\begin{cases} \rho_1 = \dfrac{1}{4}\beta^{-2}\left(\beta^2 - 3\right)^{-2}\delta^{-2}, \\ \rho\left(\alpha - \beta^2 + \alpha\beta^2 + 1\right) = -2\left(\alpha + 2\beta^2 + \alpha\beta^2\right). \end{cases} \tag{9}$$

5. If $1 - 3\beta^2 \neq 0$, then $\rho + 2 \neq 0$ and equality (8) holds.

6. With the value $\alpha = f\left(\beta^2\right)$ specified in equality (8), we calculate δ^{-1} and ξ:

$$\delta^{-1}\big|_{\alpha = f\left(\beta^2\right)} = \frac{2}{\rho + 2}\left(1 - 3\beta^2\right), \quad \xi\big|_{\alpha = f\left(\beta^2\right)} = (\rho + 2)\frac{\beta\left(\beta^2 - 3\right)}{\left(1 - 3\beta^2\right)\left(\beta^2 + 1\right)}.$$

7. Parameter β must be chosen so that $k := \left(2\rho_1 + \rho_2\right)^2 + \rho_1 \neq 0$.

Let's assume that $k = 0$. Then $\left(2\rho_1 + \rho_2\right)^2 = -\rho_1$ and $2\rho_1 + \rho_2 = -i\sqrt{\rho_1}$. By virtue of equalities (6) and item 2 we have $2\gamma^2\xi^{-2} + \lambda_2\xi^{-2} = -i\gamma$, $2\gamma^2 + \lambda_2 + i\gamma\xi^2 = 0$. Using now the equalities $\lambda_2 = -2\left(\alpha + 2\beta^2 + \alpha\beta^2\right)\gamma^2\delta$ and $\xi = 2\beta\left(\beta^2 - 3\right)\gamma\delta$, proven in items 3 and 1, respectively, we get

$$-2\gamma^2\left(\delta\left(\alpha + 3i\beta + 2\beta^2 - i\beta^3 + \alpha\beta^2\right) - 1\right) = 0,$$

taking into account that $\gamma \neq 0$, we have

$$\alpha + 3i\beta + 2\beta^2 - i\beta^3 + \alpha\beta^2 = \delta^{-1}, \quad \alpha\left(1 + \beta^2\right) + 3i\beta + 2\beta^2 - i\beta^3 = \delta^{-1}.$$

By virtue of equality (8) and the representation δ^{-1} from item 6 we obtain

$$\frac{-4\beta^2 + \rho\left(\beta^2 - 1\right)}{\rho + 2} + 3i\beta + 2\beta^2 - i\beta^3 = \frac{2}{\rho + 2}\left(1 - 3\beta^2\right),$$

$$-4\beta^2 + \rho\left(\beta^2 - 1\right) + (\rho + 2)\left(3i\beta + 2\beta^2 - i\beta^3\right) = 2\left(1 - 3\beta^2\right),$$

$$(\rho + 2)\left(-i\beta^3 + 3\beta^2 + 3i\beta - 1\right) = 0, \quad (\beta + i)^3 = 0.$$

8. We must prove the existence of a solution to system (9) provided that $k \neq 0$. Let us choose β as the root of the equation

$$\left(1 - 3t^2\right)^2 = \rho_1(\rho + 2)^2 t^2\left(t^2 - 3\right)^2,$$

where $\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}$, except numbers $0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{3}, \pm i$. Let's put $\alpha = \frac{-4\beta^2 + \rho\left(\beta^2 - 1\right)}{\left(\beta^2 + 1\right)(\rho + 2)}$. Then a pair of values (α, β) is the solution of system (9) and $k \neq 0$, hence, the algebras $E(\alpha, \beta)$ and $D(\rho_1, \rho_2, 1)$ are isomorphic. The theorem is proven.

By virtue of lemmas 2 and 7 (ii) the restriction on parameters ρ_1, ρ_2 in theorem 3 is essential.

References

1. Bruck RH. Some results in the theory of linear non-associative algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1944;56(2):141–199. DOI: 10.2307/1990248.

2. Krylov AA, Pchelintsev SV. The isotopically simple algebras with a nil-basis. *Communications in Algebra*. 2020;48(4):1697–1712. DOI: 10.1080/00927872.2019.1705467.

3. Tkachev VG. Inner isotopes associated with automorphisms of commutative associative algebras. *Communications in Mathematics*. 2024;32(2):153–184. DOI: 10.46298/cm.12223.

4. Pchelintsev SV. Isotopes of alternative algebras of characteristic different from 3. *Izvestiya: Mathematics*. 2020;84(5):1002–1015. DOI: 10.1070/IM8930.

5. Pchelintsev SV. Central isotopes of $(-1, 1)$-algebras. *Siberian Mathematical Journal*. 2021;62(4):678–690. DOI: 10.1134/S003744662104011X.

6. Borisova LR, Glizburg VI, Pchelintsev SV. One-sided isotopes of finite-dimensional algebras. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023;269(4):443–452. DOI: 10.1007/s10958-023-06291-7.

7. Glizburg VI, Pchelintsev SV. Isotopes of simple algebras of arbitrary dimension. *Asian-European Journal of Mathematics*. 2020;13(6):2050108. DOI: 10.1142/S1793557120501089.

8. Glizburg VI, Pchelintsev SV. On commutative isotopes of Jordan algebra of a symmetric bilinear non-degenerate form on a two-dimensional vector space. arXiv:2504.00868v1 [Preprint]. 2025 [cited 2025 April 4]: [14 p.]. Available from: https://arxiv.org/abs/2504.00868v1.

9. Albert AA. Non-associative algebras. I. Fundamental concepts and isotopy. *Annals of Mathematics*. 1942;43(4):685–707. DOI: 10.2307/1968960.

Received 08.04.2026 / revised 19.05.2026 / accepted 09.06.2026.

Дифференциальные уравнения и оптимальное управление

Differential equations and optimal control

УДК 517.956.35

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СЕМЕЙСТВ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Д. С. ЖАЛУКЕВИЧ[1)]

[1)]*Институт математики НАН Беларуси, ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Беларусь*

Аннотация. Ищутся инфинитезимальные преобразования эквивалентности четырех семейств квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка функции двух переменных, т. е. такие преобразования зависимых и независимых переменных, которые переводят каждое уравнение заданного семейства в некоторое другое уравнение этого же семейства. Вычисляются инфинитезимальные точечные симметрии этих уравнений. Проводится сравнительный анализ полученных алгебр симметрий разных семейств квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение; уравнение Клейна – Гордона; квазилинейное гиперболическое уравнение; точечная симметрия; преобразование эквивалентности.

Образец цитирования:
Жалукевич ДС. Преобразования эквивалентности семейств квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка функции двух переменных. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2026;2:28–38.
EDN: IJFJHJ

For citation:
Zhalukevich DS. Equivalence transformations of families of second-order quasi-linear hyperbolic equations of a two-variable function. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2026;2:28–38. Russian.
EDN: IJFJHJ

Автор:
Денис Станиславович Жалукевич – соискатель отдела дифференциальных уравнений. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент Б. М. Дубров.

Author:
Dzianis S. Zhalukevich, competitor at the department of differential equations.
den.zhal@yandex.by
https://orcid.org/0000-0001-5021-550X

EQUIVALENCE TRANSFORMATIONS OF FAMILIES OF SECOND-ORDER QUASI-LINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS OF A TWO-VARIABLE FUNCTION

D. S. ZHALUKEVICH[a]

[a]*Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus,*
11 Surganava Street, Minsk 220072, Belarus

Abstract. In this work, we search for infinitesimal equivalence transformations of four families of second-order quasi-linear hyperbolic equations of a two-variable function, i. e. transformations of dependent and independent variables that transform each equation of a given family into another equation of the same family. We also calculate the infinitesimal point symmetries of these equations. We conduct a comparative analysis of the obtained symmetry algebras of different families of second-order quasi-linear hyperbolic equations.

Keywords: differential equation; Klein – Gordon equation; quasi-linear hyperbolic equation; point symmetry; equivalence transformation.

Введение

В данной работе ищутся преобразования эквивалентности семейств квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка функции двух переменных, т. е. такие инфинитезимальные преобразования зависимой и независимой переменных, которые оставляют на месте все семейство уравнений, преобразуя каждое уравнение семейства в, возможно, некоторое другое уравнение этого же семейства. Указанный класс симметрий был введен независимо в работах Дж. Кингстона и К. Софоклеуса [1–3], Я. Л. Цеслинского [4–7], а также Н. Х. Ибрагимова, М. Торриси и А. Валенти [8; 9]. В статьях Дж. Кингстона и К. Софоклеуса данный вид симметрий носит название преобразования, сохраняющего форму, а в работах Н. Х. Ибрагимова, М. Торриси и А. Валенти именуется преобразованием эквивалентности и используется для предварительной классификации уравнений. В публикациях же Я. Л. Цеслинского такие симметрии названы расширенными симметриями и использованы для поиска спектрального параметра.

Настоящая работа посвящена систематическому исследованию подобного рода симметрий для различных семейств квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка, включая уравнения в изотропных однородных и анизотропных неоднородных средах, с возмущениями и без возмущений. Преобразования эквивалентности семейств квазилинейных гиперболических уравнений находятся методом, предложенным в публикациях [1–9]. Детали этого метода излагаются в разделе «Вычисление инфинитезимальных преобразований эквивалентности семейств уравнений» данной статьи.

Кроме того, в настоящей работе проводится сравнительный анализ полученных преобразований эквивалентности различных семейств квазилинейных гиперболических уравнений, а также сопоставление их с точечными симметриями этих же семейств уравнений. Стоит отметить, что метод нахождения классических (точечных) симметрий дифференциальных уравнений с частными производными является хорошо изученным [10–13].

Запишем общий вид квазилинейного гиперболического уравнения в первой форме второго порядка функции двух переменных:

$$u_{tx} = f\left(t,\ x,\ u,\ u_t,\ u_x\right). \tag{1}$$

Среди уравнений (1) можно выделить следующие частные виды уравнений: волновое уравнение, уравнение Клейна – Гордона, уравнение Лиувилля, уравнение Цицейки, уравнение синус-Гордона (или Бонне) (см. [14–17] и приведенные в них ссылки). Данные уравнения применяются в различных областях науки и техники, таких как дифференциальная геометрия, квантовая теория поля, космология, гидро- и газодинамика, сверхпроводимость, дислокация кристаллов, волновые процессы в ферромагнитных материалах, нелинейная оптика, физика плазмы, физика низких температур и др. По этой причине вышеуказанные уравнения изучались и продолжают изучаться внутри самой математики и в ее приложениях с помощью различных методов, в том числе методов группового анализа [10–13].

В работе [9] найдена алгебра эквивалентности нелинейных волновых уравнений $u_{tt} - u_{xx} = f\left(u,\ u_t,\ u_x\right)$, а в статьях [18; 19] получены и применены дифференциальные инварианты для семейства этих уравнений.

Задача групповой классификации уравнений $u_{tx} = f\left(t,\ x,\ u\right)$, $f_{uu} \neq 0$, и $u_{tx} = f\left(t,\ x,\ u,\ u_x\right)$ решена в работах [20–23]. Кроме того, в указанных публикациях найдены алгебры симметрий этих уравнений

и в итоге выделены уравнения с пятимерной алгеброй симметрий, которая является максимальной среди конечномерных алгебр, а также уравнения с одномерными, двумерными, трехмерными и четырехмерными алгебрами симметрий. Для максимальной алгебры и ее подалгебр проведена редукция и найдено семейство решений.

В статье [24] найдены контактные симметрии уравнения (1). Для данного класса уравнений точечные и контактные группы эквивалентности совпадают.

В работах [25; 26] решена задача групповой классификации уравнений $u_{tx} = f(u)$, $f_{uu} \neq 0$, найдены алгебры симметрий этих уравнений и в итоге выделены уравнения с четырехмерной алгеброй симметрий, которая является максимальной, а также уравнения с трехмерными и бесконечномерными алгебрами симметрий. Для максимальной алгебры и ее подалгебр проведена редукция и найдены некоторые решения уравнений.

Стоит отметить, что в публикациях [20–23; 25; 26] вычислялись классические (точечные) симметрии, тогда как в данной статье проводится групповой анализ аналогичных семейств уравнений по отношению к симметриям семейств уравнений, а не каждого уравнения в отдельности [1–9; 18; 19].

В настоящей работе выполняется сравнительный анализ алгебр Ли точечных симметрий и инфинитезимальных преобразований эквивалентности следующих четырех классов нелинейных волновых уравнений: $u_{tx} = f(u, u_t, u_x)$, $u_{tx} = f(u_t, u_x)$, $u_{tx} = f(u, u_x)$, $u_{tx} = f(u)$. Эти уравнения возникают в некоторых задачах математической физики [16; 27].

Вычисление инфинитезимальных точечных симметрий

Преобразования эквивалентности семейства уравнений (1) имеют вид

$$\begin{gathered}\tilde{t} = T(t, x, u, \varepsilon), \ \tilde{x} = X(t, x, u, \varepsilon),\\ \tilde{u} = U(t, x, u, \varepsilon), \ \tilde{f} = F(t, x, u, u_t, u_x, f, \varepsilon),\end{gathered} \tag{2}$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Мы предполагаем, что преобразования эквивалентности (2) являются (локальной) однопараметрической группой преобразований пространства с локальной системой координат (t, x, u, u_t, u_x, f). Действие этой однопараметрической группы на координатах u_t, u_x определяется естественным образом с помощью операции продолжения. Отметим, что в отличие от классических симметрий мы полагаем, что функция f также преобразуется и выступает как независимая координата.

Построение группы преобразований эквивалентности сводится к определению ее инфинитезимальных преобразований

$$\begin{gathered}\tilde{t} = t + \varepsilon\tau(t, x, u) + o(\varepsilon),\\ \tilde{x} = x + \varepsilon\xi(t, x, u) + o(\varepsilon),\\ \tilde{u} = u + \varepsilon\eta(t, x, u) + o(\varepsilon),\\ \tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{u}_{\tilde{t}}, \tilde{u}_{\tilde{x}}) = f(t, x, u, u_t, u_x) + \varepsilon\Phi(t, x, u, u_t, u_x, f) + o(\varepsilon).\end{gathered} \tag{3}$$

Инфинитезимальные преобразования производных u_t, u_x и u_{tx} имеют вид

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = u_t + \varepsilon\Gamma_0 + o(\varepsilon), \tag{4}$$

$$\tilde{u}_{\tilde{x}} = u_x + \varepsilon\Gamma_1 + o(\varepsilon), \tag{5}$$

$$\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{x}} = u_{tx} + \varepsilon\Gamma_{01} + o(\varepsilon). \tag{6}$$

Явные формулы продолжения для инфинитезимальных преобразований производных (4)–(6) записываются в виде

$$\Gamma_0 = D_t(\eta) - D_t(\tau)u_t - D_t(\xi)u_x, \tag{7}$$

$$\Gamma_1 = D_x(\eta) - D_x(\tau)u_t - D_x(\xi)u_x, \tag{8}$$

$$\Gamma_{01} = D_{tx}(\eta) - D_{tx}(\tau)u_t - D_x(\tau)u_{tt} - D_t(\tau)u_{tx} - D_{tx}(\xi)u_x - D_x(\xi)u_{tx} - D_t(\xi)u_{xx}, \tag{9}$$

где

$$D_t = \partial_t + u_t\partial_u, \tag{10}$$

$$D_x = \partial_x + u_x\partial_u, \tag{11}$$

$$D_{tx} = \partial_{tx} + u_t\partial_{xu} + u_{tx}\partial_u + u_x\partial_{tu} + u_tu_x\partial_u^2. \tag{12}$$

Лемма 1. *Инфинитезимальные преобразования эквивалентности семейств уравнений* $u_{tx} = f(t, x, u, u_t, u_x)$ *принадлежат следующей (бесконечномерной) алгебре Ли векторных полей:*

$$X = \tau(t)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(x)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t,\ x,\ u)\frac{\partial}{\partial u},$$

где $\tau(t)$, $\xi(x)$, $\eta(t,\ x,\ u)$ *– произвольные функции.*

Доказательство. Так как уравнение (1) содержит только вторую частную производную u_{tx}, то в выражении (9) коэффициенты при u_{tt}, u_{xx} равны нулю, т. е. $D_x(\tau) \equiv \tau_x + u_x\tau_u = 0$, $D_t(\xi) \equiv \xi_t + u_t\xi_u = 0$. Значит, $\tau_x = \tau_u = \xi_t = \xi_u = 0$. Следовательно, имеем функции $\tau(t)$, $\xi(x)$, $\eta(t,\ x,\ u)$. Таким образом, лемма доказана. Хотя формально производная u_{xx} не входит в уравнение, нельзя исключить, что она тождественно равна нулю для всех решений. Однако это невозможно, так как уравнение допускает решение с произвольной зависимостью от x (например, в задаче Гурса), следовательно, u_{xx} не обращается в нуль тождественно, и коэффициент при u_{xx} в определяющем уравнении действительно должен быть равен нулю.

Исходя из леммы 1, выражения (7)–(9) для уравнения (1) принимают вид

$$\Gamma_0 = D_t(\eta) - \dot{\tau}u_t, \tag{13}$$

$$\Gamma_1 = D_x(\eta) - \xi' u_x, \tag{14}$$

$$\Gamma_{01} = D_{tx}(\eta) - (\dot{\tau} + \xi')u_{tx}. \tag{15}$$

Первое и второе продолжения векторного поля X для уравнений (1) имеют вид

$$X^{(1)} = X + \Gamma_0\frac{\partial}{\partial u_t} + \Gamma_1\frac{\partial}{\partial u_x}, \tag{16}$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \Gamma_{01}\frac{\partial}{\partial u_{tx}}. \tag{17}$$

Подействовав оператором (17) на уравнение $J = u_{tx} - f(t,\ x,\ u,\ u_t,\ u_x)$, т. е. $X^{(2)}(J) = 0$, получим определяющее уравнение для точечных симметрий

$$\Gamma_{01} = \tau f_t + \xi f_x + \eta f_u + \Gamma_0 f_{u_t} + \Gamma_1 f_{u_x}. \tag{18}$$

После подстановки выражений (13)–(15) в определяющее уравнение (18) имеем

$$D_{tx}(\eta) - (\dot{\tau} + \xi')u_{tx} = \tau f_t + \xi f_x + \eta f_u + \left(D_t(\eta) - \dot{\tau}u_t\right)f_{u_t} + \left(D_x(\eta) - \xi' u_x\right)f_{u_x}. \tag{19}$$

Подставив выражения (10)–(12) и уравнение (1) в формулу (19), получим

$$\eta_{tx} + \eta_{xu}u_t + \eta_{tu}u_x + \eta_{uu}u_tu_x + (\eta_u - \dot{\tau} - \xi')f =$$

$$= \tau f_t + \xi f_x + \eta f_u + \left(\eta_t + (\eta_u - \dot{\tau})u_t\right)f_{u_t} + \left(\eta_x + (\eta_u - \xi')u_x\right)f_{u_x}. \tag{20}$$

Рассмотрим более детально четыре класса уравнений, описанных во введении.

1. Пусть $f = f(u,\ u_t,\ u_x)$. В этом случае для выражения (20) нужно положить, что $f_t = f_x = 0$. Значит, $\eta_t = \eta_x = \ddot{\tau} = \xi'' = 0$. Тогда решение определяющего уравнения (18) имеет вид

$$\tau = c_1 + c_3 t, \tag{21}$$

$$\xi = c_2 + c_4 x, \tag{22}$$

$$\eta = \beta(u), \tag{23}$$

$$\beta^{(2)}u_tu_x + \left(\beta^{(1)} - c_3 - c_4\right)f = \beta f_u + \left(\beta^{(1)} - c_3\right)u_t f_{u_t} + \left(\beta^{(1)} - c_4\right)u_x f_{u_x}. \tag{24}$$

На основании леммы 1 и выражений (21)–(24) сформулируем следующее предложение.

Предложение 1. *Инфинитезимальные точечные симметрии уравнения* $u_{tx} = f(u,\ u_t,\ u_x)$ *принадлежат следующей (бесконечномерной) алгебре Ли векторных полей:*

$$X = (c_1 + c_3 t)\frac{\partial}{\partial t} + (c_2 + c_4 x)\frac{\partial}{\partial x} + \beta(u)\frac{\partial}{\partial u},$$

где $c_i = \text{const}$, $i = \overline{1, 4}$, *– и выделяются в ней дополнительным условием* $\beta^{(2)} u_t u_x + \left(\beta^{(1)} - c_3 - c_4\right) f = \beta f_u + \left(\beta^{(1)} - c_3\right) u_t f_{u_t} + \left(\beta^{(1)} - c_4\right) u_x f_{u_x}$.

2. Пусть $f = f(u_t, u_x)$. В этом случае для выражения (20) нужно положить, что $f_t = f_x = f_u = 0$. Значит, $\eta_t, \eta_x, \eta_u = \text{const}$, $\dot{\tau} = \xi' = 0$. Тогда решение определяющего уравнения (18) имеет вид (21), (22) и

$$\eta = \alpha u + \beta_2 x + \beta_1 t + \beta_0,\ \alpha, \beta_0, \beta_1, \beta_2 = \text{const}, \tag{25}$$

$$(\alpha - c_3 - c_4) f = (\beta_1 + (\alpha - c_3) u_t) f_{u_t} + (\beta_2 + (\alpha - c_4) u_x) f_{u_x}. \tag{26}$$

На основании леммы 1 и выражений (21), (22), (25) и (26) сформулируем следующее предложение.

Предложение 2. *Инфинитезимальные точечные симметрии уравнения* $u_{tx} = f(u_t, u_x)$ *принадлежат следующей алгебре Ли векторных полей:*

$$X = (c_1 + c_3 t)\frac{\partial}{\partial t} + (c_2 + c_4 x)\frac{\partial}{\partial x} + (\alpha u + \beta_2 x + \beta_1 t + \beta_0)\frac{\partial}{\partial u},$$

где $c_i = \text{const}$, $i = \overline{1, 4}$, $\alpha, \beta_0, \beta_1, \beta_2 = \text{const}$, *– и выделяются в ней дополнительным условием* $(\alpha - c_3 - c_4) f = (\beta_1 + (\alpha - c_3) u_t) f_{u_t} + (\beta_2 + (\alpha - c_4) u_x) f_{u_x}$.

3. Пусть $f = f(u, u_x)$. В этом случае для выражения (20) нужно положить, что $f_t = f_x = f_{u_t} = 0$. Значит, $\eta_{xu} = \eta_{uu} = 0$. Тогда решение определяющего уравнения (18) имеет вид

$$\eta = \alpha(t) u + \beta(t, x), \tag{27}$$

$$\beta_{tx} + \dot{\alpha} u_x + (\alpha - \dot{\tau} - \xi') f = (\alpha u + \beta) f_u + (\beta_x + (\alpha - \xi') u_x) f_{u_x}. \tag{28}$$

На основании леммы 1 и выражений (27) и (28) сформулируем следующее предложение.

Предложение 3. *Инфинитезимальные точечные симметрии уравнения* $u_{tx} = f(u, u_x)$ *принадлежат следующей (бесконечномерной) алгебре Ли векторных полей:*

$$X = \tau(t)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(x)\frac{\partial}{\partial x} + (\alpha(t) u + \beta(t, x))\frac{\partial}{\partial u}$$

– и выделяются в ней дополнительным условием $\beta_{tx} + \dot{\alpha} u_x + (\alpha - \dot{\tau} - \xi') f = (\alpha u + \beta) f_u + (\beta_x + (\alpha - \xi') u_x) f_{u_x}$.

4. Пусть $f = f(u)$. В этом случае для выражения (20) нужно положить, что $f_t = f_x = f_{u_t} = f_{u_x} = 0$. Значит, $\eta_{tu} = \eta_{xu} = \eta_{uu} = 0$. Тогда решение определяющего уравнения (18) имеет вид

$$\eta = \alpha u + \beta(t, x),\ \alpha = \text{const}, \tag{29}$$

$$\eta f^{(1)} + (\dot{\tau} + \xi' - \alpha) f - \beta_{tx} = 0. \tag{30}$$

Найдем детальное описание этой алгебры Ли точечных симметрий в зависимости от функции $f = f(u)$.

При $\alpha \neq 0$, преобразовав уравнение (30) к виду $\eta \dfrac{df}{d\eta} + \bar{A} f + \bar{B} = 0$, получим следующие два случая:

- если $\bar{A} = 0,\ \bar{B} \neq 0$, то $f = -\bar{B} \ln \eta + c_1$;
- если $\bar{A} \neq 0,\ \bar{B} \neq 0$, то $f = c_1 \eta^{-\bar{A}} - \dfrac{\bar{B}}{\bar{A}}$.

При $\alpha = 0, \beta \neq 0$, преобразовав уравнение (30) к виду $\dfrac{df}{du} + \bar{A} f + \bar{B} = 0$, получим следующие два случая:

- если $\bar{A} = 0,\ \bar{B} \neq 0$, то $f = -\bar{B} u + c_1$;
- если $\bar{A} \neq 0,\ \bar{B} \neq 0$, то $f = c_1 e^{-\bar{A} u} - \dfrac{\bar{B}}{\bar{A}}$.

При $\alpha = 0, \beta = 0$, преобразовав уравнение (30) к виду $\bar{A}f + \bar{B} = 0$, получим, что если $\bar{A} = \bar{B} = 0$, то $f(u)$ – любая функция, не равная предыдущим случаям.

Таким образом, вычисление симметрий в зависимости от функции $f(u)$, рассматриваемой с точностью до замены $a + bf(u)$, разбивается на следующие случаи:

1) $f(u) = \text{const}$;

2) $f(u) = u$;

3) $f(u) = u^n,\ n \neq 0,\ 1$;

4) $f(u) = e^{ku},\ k \neq 0$;

5) $f(u) = \ln u$;

6) все остальные функции, не равные случаям 1)–5).

Подставив случаи 1)–6) в систему (29), (30), получим:

а) при $f(u) = \text{const}$

$$X = \tau(t)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(x)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\alpha u + \beta(t,\ x)\right)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{31}$$

где $\left(\dot{\tau} + \xi' - \alpha\right)f - \beta_{tx} = 0$;

б) при $f(u) = u$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - x\frac{\partial}{\partial x},\ X_4 = u\frac{\partial}{\partial u},\ X_5 = \beta(t,\ x)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{32}$$

где $\beta_{tx} = \beta$;

в) при $f(u) = u^n,\ n \neq 0,\ 1$,

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{1-n}\frac{\partial}{\partial u},\ X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{u}{1-n}\frac{\partial}{\partial u}; \tag{33}$$

г) при $f(u) = e^{ku},\ k \neq 0$,

$$X = \tau(t)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(x)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{k}\left(\dot{\tau} + \xi'\right)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{34}$$

где $\tau(t),\ \xi(x)$ – произвольные функции;

д) при всех остальных функциях, не равных случаям а)–г),

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - x\frac{\partial}{\partial x}. \tag{35}$$

Предложение 4. *Нелинейное уравнение Клейна – Гордона вида* $u_{tx} = f(u)$ *имеет:*

- *бесконечномерную алгебру точечных симметрий с генераторами (31), (32) и (34) для функций* $f(u) = \text{const}$, $f(u) = u$ *и* $f(u) = e^{ku},\ k \neq 0$, *соответственно;*
- *четырехмерную алгебру точечных симметрий с генераторами (33) для функции* $f(u) = u^n,\ n \neq 0,\ 1$;
- *трехмерную алгебру точечных симметрий с генераторами (35) для всех остальных функций.*

Полученные результаты предложения 4 согласуются с аналогичными утверждениями из работ [25; 26].

Вычисление инфинитезимальных преобразований эквивалентности семейств уравнений

Перейдем теперь к описанию инфинитезимальных преобразований эквивалентности семейств уравнений (1) и рассмотренных выше классов уравнений. На основании леммы 1 и выражений (13)–(16) запишем векторное поле для преобразования эквивалентности семейств уравнений (1) в виде

$$Y = X^{(1)} + \Phi\frac{\partial}{\partial f},$$

где векторное поле X определено в лемме 1, а

$$\Phi = \eta_{tx} + \eta_{xu}u_t + \eta_{tu}u_x + \eta_{uu}u_tu_x + \left(\eta_u - \dot{\tau} - \xi'\right)f.$$

Тогда можем переформулировать лемму 1 следующим образом.

Лемма 2. *Инфинитезимальные преобразования эквивалентности семейств уравнений* $u_{tx} = f(t, x, u, u_t, u_x)$ *порождаются векторными полями*

$$Y = \tau(t)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(x)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u)\frac{\partial}{\partial u} + \left(\eta_{tx} + \eta_{xu}u_t + \eta_{tu}u_x + \eta_{uu}u_t u_x + \left(\eta_u - \dot{\tau} - \xi'\right)f\right)\frac{\partial}{\partial f} +$$

$$+ \left(\eta_t + \left(\eta_u - \dot{\tau}\right)u_t\right)\frac{\partial}{\partial u_t} + \left(\eta_x + \left(\eta_u - \xi'\right)u_x\right)\frac{\partial}{\partial u_x},$$

где $\tau(t)$, $\xi(x)$, $\eta(t, x, u)$ *– произвольные функции.*

Продолжение векторного поля Y на пространство 1-струй функции $f(t, x, u, u_t, u_x)$ имеет вид

$$Y^{(1)} = Y + \Phi_1\frac{\partial}{\partial f_t} + \Phi_2\frac{\partial}{\partial f_x} + \Phi_3\frac{\partial}{\partial f_u} + \Phi_4\frac{\partial}{\partial f_{u_t}} + \Phi_5\frac{\partial}{\partial f_{u_x}}, \tag{36}$$

где

$$\Phi_1 = \eta_{ttx} + \eta_{txu}u_t + \eta_{ttu}u_x + \eta_{tuu}u_t u_x + \left(\eta_{tu} - \ddot{\tau}\right)f +$$

$$+ \left(\eta_u - 2\dot{\tau} - \xi'\right)f_t - \eta_t f_u - \left(\eta_{tt} + \left(\eta_{tu} - \ddot{\tau}\right)u_t\right)f_{u_t} - \left(\eta_{tx} + \eta_{tu}u_x\right)f_{u_x},$$

$$\Phi_2 = \eta_{txx} + \eta_{xxu}u_t + \eta_{txu}u_x + \eta_{xuu}u_t u_x + \left(\eta_{xu} - \xi''\right)f +$$

$$+ \left(\eta_u - \dot{\tau} - 2\xi'\right)f_x - \eta_x f_u - \left(\eta_{tx} + \eta_{xu}u_t\right)f_{u_t} - \left(\eta_{xx} + \left(\eta_{xu} - \xi''\right)u_x\right)f_{u_x},$$

$$\Phi_3 = \eta_{txu} + \eta_{xuu}u_t + \eta_{tuu}u_x + \eta_{uuu}u_t u_x + \eta_{uu}f - \left(\dot{\tau} + \xi'\right)f_u -$$

$$- \left(\eta_{tu} + \eta_{uu}u_t\right)f_{u_t} - \left(\eta_{xu} + \eta_{uu}u_x\right)f_{u_x},$$

$$\Phi_4 = \eta_{xu} + \eta_{uu}u_x - \xi' f_{u_t},$$

$$\Phi_5 = \eta_{tu} + \eta_{uu}u_t - \dot{\tau}f_{u_x}.$$

Рассмотрим для семейств уравнений (1) те же классы уравнений, что и для точечных симметрий.

1. Пусть $f = f(u, u_t, u_x)$. В этом случае для векторного поля (36) нужно положить, что $f_t = f_x = 0$. Отсюда следует, что $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$. Значит, $\eta_t = \eta_x = \ddot{\tau} = \xi'' = 0$. Тогда решение определяющего уравнения для семейств уравнений $u_{tx} = f(u, u_t, u_x)$ имеет вид (21)–(23) и

$$\Phi = \beta^{(2)}u_t u_x + \left(\beta^{(1)} - c_3 - c_4\right)f, \tag{37}$$

$$\Gamma_0 = \left(\beta^{(1)} - c_3\right)u_t, \tag{38}$$

$$\Gamma_1 = \left(\beta^{(1)} - c_4\right)u_x. \tag{39}$$

На основании выражений (21)–(23) и (37)–(39) сформулируем следующее следствие.

Следствие 1. *Инфинитезимальные преобразования эквивалентности семейств уравнений* $u_{tx} = f(u, u_t, u_x)$ *порождаются векторными полями*

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ Y_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ Y_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - f\frac{\partial}{\partial f} - u_t\frac{\partial}{\partial u_t},\ Y_4 = x\frac{\partial}{\partial x} - f\frac{\partial}{\partial f} - u_x\frac{\partial}{\partial u_x},$$

$$Y_\infty = \beta(u)\frac{\partial}{\partial u} + \left(\beta^{(2)}u_t u_x + \beta^{(1)}f\right)\frac{\partial}{\partial f} + \beta^{(1)}u_t\frac{\partial}{\partial u_t} + \beta^{(1)}u_x\frac{\partial}{\partial u_x},$$

где $\beta(u)$ *– произвольная функция.*

2. Пусть $f = f(u_t, u_x)$. В этом случае для векторного поля (36) нужно положить, что $f_t = f_x = f_u = 0$. Отсюда следует, что $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0$. Значит, $\eta_{tu} = \eta_{xu} = \eta_{uu} = \eta_{tt} = \eta_{tx} = \eta_{xx} = \ddot{\tau} = \xi'' = 0$. Тогда решение определяющего уравнения для семейств уравнений $u_{tx} = f(u_t, u_x)$ имеет вид (21), (22), (25) и

$$\Phi = (\alpha - c_3 - c_4) f, \tag{40}$$

$$\Gamma_0 = \beta_1 + (\alpha - c_3) u_t, \tag{41}$$

$$\Gamma_1 = \beta_2 + (\alpha - c_4) u_x. \tag{42}$$

На основании выражений (21), (22), (25) и (40)–(42) сформулируем следующее следствие.

Следствие 2. *Инфинитезимальные преобразования эквивалентности семейств уравнений* $u_{tx} = f(u_t, u_x)$ *порождаются векторными полями*

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ Y_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ Y_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - f\frac{\partial}{\partial f} - u_t\frac{\partial}{\partial u_t},\ Y_4 = x\frac{\partial}{\partial x} - f\frac{\partial}{\partial f} - u_x\frac{\partial}{\partial u_x},\ Y_5 = \frac{\partial}{\partial u},$$

$$Y_6 = t\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_t},\ Y_7 = x\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_x},\ Y_8 = u\frac{\partial}{\partial u} + f\frac{\partial}{\partial f} + u_t\frac{\partial}{\partial u_t} + u_x\frac{\partial}{\partial u_x}.$$

3. Пусть $f = f(u, u_x)$. В этом случае для векторного поля (36) нужно положить, что $f_t = f_x = f_{u_t} = 0$. Отсюда следует, что $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_4 = 0$. Значит, $\eta_t = \eta_x = \eta_{uu} = 0$, $\ddot{\tau} = \xi'' = 0$. Тогда решение определяющего уравнения для семейств уравнений $u_{tx} = f(u,\ u_x)$ имеет вид (21), (22), (40) и

$$\eta = \alpha u + \beta,\ \alpha,\ \beta = \text{const}, \tag{43}$$

$$\Gamma_0 = (\alpha - c_3) u_t, \tag{44}$$

$$\Gamma_1 = (\alpha - c_4) u_x. \tag{45}$$

На основании выражений (21), (22), (40) и (43)–(45) сформулируем следующее следствие.

Следствие 3. *Инфинитезимальные преобразования эквивалентности семейств уравнений* $u_{tx} = f(u,\ u_x)$ *порождаются векторными полями*

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ Y_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ Y_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - f\frac{\partial}{\partial f} - u_t\frac{\partial}{\partial u_t},\ Y_4 = x\frac{\partial}{\partial x} - f\frac{\partial}{\partial f} - u_x\frac{\partial}{\partial u_x},$$

$$Y_5 = \frac{\partial}{\partial u},\ Y_6 = u\frac{\partial}{\partial u} + f\frac{\partial}{\partial f} + u_t\frac{\partial}{\partial u_t} + u_x\frac{\partial}{\partial u_x}.$$

4. Пусть $f = f(u)$. В этом случае для векторного поля (36) нужно положить, что $f_t = f_x = f_{u_t} = f_{u_x} = 0$. Отсюда следует, что $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_4 = \Phi_5 = 0$. Значит, $\eta_{tu} = \eta_{xu} = \eta_{uu} = 0$, $\eta_{ttx} - \ddot{\tau} f - \eta_t f^{(1)} = 0$, а также $\eta_{txx} - \xi'' f - \eta_x f^{(1)} = 0$. Тогда решение определяющего уравнения для семейств уравнений $u_{tx} = f(u)$ имеет вид (21), (22), (40), (43)–(45). Следовательно, для семейств уравнений $u_{tx} = f(u)$ алгебра инфинитезимальных преобразований эквивалентности совпадает с алгеброй Ли из следствия 3.

Специальные преобразования эквивалентности

Предположим теперь, что $\Phi(t,\ x,\ u,\ u_t,\ u_x,\ f)$ в выражении (3) не зависит от f. Назовем такие преобразования эквивалентности инфинитезимальными специальными преобразованиями эквивалентности. Они индуцируют преобразования параллельных переносов

$$\tilde{f} = f + \Phi(t,\ x,\ u,\ u_t,\ u_x)\varepsilon$$

на семействе уравнений (1). Другими словами, в данном случае мы ограничиваемся такими симметриями семейств уравнений (1), которые сохраняют 1-форму df на семействе этих уравнений. Тогда на основании леммы 2 и условия $\eta_u = \dot{\tau} + \xi'$ получим следующую лемму.

Лемма 3. *Инфинитезимальные специальные преобразования эквивалентности семейств уравнений* $u_{tx} = f(t,\ x,\ u,\ u_t,\ u_x)$ *порождаются векторными полями*

$$Y = \tau(t)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(x)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\left(\dot{\tau} + \xi'\right)u + \beta(t, x)\right)\frac{\partial}{\partial u} + \left(\beta_{tx} + \xi'' u_t + \ddot{\tau} u_x\right)\frac{\partial}{\partial f} +$$

$$+ \left(\beta_t + \ddot{\tau} u + \xi' u_t\right)\frac{\partial}{\partial u_t} + \left(\beta_x + \xi'' u + \dot{\tau} u_x\right)\frac{\partial}{\partial u_x},$$

где $\tau(t)$, $\xi(x)$, $\beta(t, x)$ *– произвольные функции.*

Рассмотрим те же частные случаи семейств уравнений (1), что и в разделе «Вычисление инфинитезимальных преобразований эквивалентности семейств уравнений».

1. Пусть $f = f(u, u_t, u_x)$. В этом случае для векторного поля леммы 3 нужно положить, что $f_t = f_x = 0$. Отсюда следует, что $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$. Значит, $\eta_t = \eta_x = \ddot{\tau} = \xi'' = 0$, $\eta_u = \dot{\tau} + \xi'$. Тогда решения определяющего уравнения для семейств уравнений $u_{tx} = f(u, u_t, u_x)$ имеют вид (21), (22) и

$$\eta = (c_3 + c_4)u + \beta, \ \beta = \text{const}, \tag{46}$$

$$\Phi = 0, \tag{47}$$

$$\Gamma_0 = c_4 u_t, \tag{48}$$

$$\Gamma_1 = c_3 u_x. \tag{49}$$

На основании выражений (21), (22) и (46)–(49) сформулируем следующее следствие.

Следствие 4. *Инфинитезимальные специальные преобразования эквивалентности семейств уравнений* $u_{tx} = f(u, u_t, u_x)$ *порождаются векторными полями*

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \ Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \ Y_3 = t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u} + u_x\frac{\partial}{\partial u_x},$$

$$Y_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u} + u_t\frac{\partial}{\partial u_t}, \ Y_5 = \frac{\partial}{\partial u}.$$

2. Пусть $f = f(u_t, u_x)$. В этом случае для векторного поля леммы 3 нужно положить, что $f_t = f_x = f_u = 0$. Отсюда следует, что $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0$. Значит, $\eta_{tu} = \eta_{xu} = \eta_{uu} = \eta_{tt} = \eta_{tx} = \eta_{xx} = \ddot{\tau} = \xi'' = 0, \eta_u = \dot{\tau} + \xi'$. Тогда решения определяющего уравнения для семейств уравнений $u_{tx} = f(u_t, u_x)$ имеют вид (21), (22), (47) и

$$\eta = (c_3 + c_4)u + \beta_2 x + \beta_1 t + \beta_0, \ \alpha, \ \beta_0, \ \beta_1, \ \beta_2 = \text{const}, \tag{50}$$

$$\Gamma_0 = \beta_1 + c_4 u_t, \tag{51}$$

$$\Gamma_1 = \beta_2 + c_3 u_x. \tag{52}$$

На основании выражений (21), (22), (47) и (50)–(52) сформулируем следующее следствие.

Следствие 5. *Инфинитезимальные специальные преобразования эквивалентности семейств уравнений* $u_{tx} = f(u_t, u_x)$ *порождаются векторными полями*

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \ Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \ Y_3 = t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u} + u_x\frac{\partial}{\partial u_x}, \ Y_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u} + u_t\frac{\partial}{\partial u_t},$$

$$Y_5 = \frac{\partial}{\partial u}, \ Y_6 = t\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_t}, \ Y_7 = x\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_x}.$$

3. Пусть $f = f(u, u_x)$. В этом случае для векторного поля леммы 3 нужно положить, что $f_t = f_x = f_{u_t} = 0$. Отсюда следует, что $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_4 = 0$. Значит, $\eta_t = \eta_x = \eta_{uu} = 0$, $\eta_u = \dot{\tau} + \xi'$, $\ddot{\tau} = \xi'' = 0$. Тогда решение определяющего уравнения для семейств уравнений $u_{tx} = f(u, u_x)$ имеет вид (21), (22), (46)–(49). Следовательно, для семейств уравнений $u_{tx} = f(u, u_x)$ алгебра инфинитезимальных специальных преобразований эквивалентности совпадает с алгеброй Ли из следствия 4.

4. Пусть $f = f(u)$. В этом случае для векторного поля леммы 3 нужно положить, что $f_t = f_x = f_{u_t} = f_{u_x} = 0$. Отсюда следует, что $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_4 = \Phi_5 = 0$. Значит, $\eta_{tu} = \eta_{xu} = \eta_{uu} = 0, \eta_{ttx} - \ddot{\tau} f - \eta_t f^{(1)} = 0, \eta_{txx} - \xi'' f - \eta_x f^{(1)} = 0$, $\eta_u = \dot{\tau} + \xi'$. Тогда решение определяющего уравнения для семейств уравнений $u_{tx} = f(u)$ имеет вид (21), (22), (46)–(49). Следовательно, для семейств уравнений $u_{tx} = f(u)$ алгебра инфинитезимальных специальных преобразований эквивалентности совпадает с алгеброй Ли из следствия 4.

Заключение

Показано, как переход к вычислению симметрий семейств уравнений дает возможность расширить набор преобразований, сохраняющий данное семейство. Полученные инфинитезимальные симметрии позволяют проводить предварительную классификацию уравнений и их симметрийную редукцию. Вычисление групп эквивалентности является более простым и в отличие от вычисления точечных симметрий не требует рассмотрения различных подслучаев в зависимости от конкретных функций $f(t, x, u, u_t, u_x)$.

Предложенный подход продемонстрирован на следующих четырех семействах уравнений: $u_{tx} = f(u, u_t, u_x)$, $u_{tx} = f(u_t, u_x)$, $u_{tx} = f(u, u_x)$, $u_{tx} = f(u)$.

Дополнительно вычислены подалгебры в алгебрах симметрий таких семейств уравнений, которые индуцируют преобразования параллельных переносов на данном семействе.

Отметим, что алгебры эквивалентности семейств уравнений $u_{tx} = f(u)$, $u_{tx} = f(u, u_x)$ и $u_{tx} = f(u, u_t)$ (см. следствие 3), а также алгебры специальных преобразований эквивалентности семейств уравнений $u_{tx} = f(u)$, $u_{tx} = f(u, u_x)$, $u_{tx} = f(u, u_t)$ и $u_{tx} = f(u, u_t, u_x)$ (см. следствие 4) совпадают.

Библиографические ссылки

1. Kingston JG, Sophocleous C. On point transformations of a generalised Burgers equation. *Physics Letters A*. 1991;155(1):15–19. DOI: 10.1016/0375-9601(91)90500-8.

2. Kingston JG, Sophocleous C. On form-preserving point transformations of partial differential equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1998;31(6):1597–1619. DOI: 10.1088/0305-4470/31/6/010.

3. Kingston JG, Sophocleous C. Symmetries and form-preserving transformations of one-dimensional wave equations with dissipation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2001;36(6):987–997. DOI: 10.1016/S0020-7462(00)00064-0.

4. Cieśliński JL. Lie symmetries as a tool to isolate integrable geometries. In: Boiti M, Martina L, Pempinelli F, editors. *Nonlinear evolution equations and dynamical systems. Proceedings of the 7th International workshop (NEEDS'91); 1991 June 19–29; Gallipoli, Italy*. Singapore: World Scientific; 1992. p. 260–268.

5. Cieśliński J. Group interpretation of the spectral parameter in the case of nonhomogeneous, nonlinear Schrödinger system. *Journal of Mathematical Physics*. 1993;34(6):2372–2384. DOI: 10.1063/1.530122.

6. Cieśliński J, Goldstein P, Sym A. On integrability of the inhomogeneous Heisenberg ferromagnet model: examination of a new test. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1994;27(5):1645–1664. DOI: 10.1088/0305-4470/27/5/028.

7. Cieśliński JL, Zhalukevich DS. Spectral parameter as a group parameter. *Symmetry*. 2022;14(12):2577. DOI: 10.3390/sym 14122577.

8. Ibragimov NH, Torrisi M, Valenti A. Preliminary group classification of equations $\upsilon_{tt} = f(x, \upsilon_x)\upsilon_{xx} + g(x, \upsilon_x)$. *Journal of Mathematical Physics*. 1991;32(11):2988–2995. DOI: 10.1063/1.529042.

9. Torrisi M, Tracinà R, Valenti A. On equivalence transformations applied to a non-linear wave equation. In: Ibragimov NH, Torrisi M, Valenti A, editors. *Modern group analysis: advanced analytical and computational methods in mathematical physics. Proceedings of the International workshop; 1992 October 27–31; Acireale, Italy*. Dordrecht: Springer Science + Business Media; 1993. p. 367–375. DOI: 10.1007/978-94-011-2050-0_39.

10. Hydon PE. *Symmetry methods for differential equations: a beginner's guide*. Cambridge: Cambridge University Press; 2000. XII, 214 p. (Cambridge texts in applied mathematics).

11. Bluman GW, Kumei S. *Symmetries and differential equations*. New York: Springer Science + Business Media; 1989. XIII, 413 p. (Applied mathematical sciences; volume 81).

12. Olver PJ. *Applications of Lie groups to differential equations*. 2nd edition. New York: Springer-Verlag; 1993. XXVIII, 513 p. (Graduate texts in mathematics; volume 107).

13. Овсянников ЛВ. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. Москва: Наука; 1978. 399 с.

14. Dodd RK, Eilbeck JC, Gibbon JD, Morris HC. *Solitons and nonlinear wave equations*. London: Academic Press; 1982. X, 630 p.

15. Fox D, Goertsches O. Higher-order conservation laws for the nonlinear Poisson equation via characteristic cohomology. *Selecta Mathematica*. 2011;17(4):795–831. DOI: 10.1007/s00029-011-0063-1.

16. Fushchich WI, Shtelen WM, Serov NI. *Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics*. Dordrecht: Springer Science + Business Media; 1993. XXIV, 435 p. (Mathematics and its applications; volume 246). DOI: 10.1007/978-94-017-3198-0.

17. Polyanin AD, Zaitsev VF. *Handbook of nonlinear partial differential equations*. 2nd edition. Boca Raton: CRC Press; 2012. XXXVI, 1876 p.

18. Tracinà R. Invariants of a family of nonlinear wave equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2004;9(1):127–133. DOI: 10.1016/S1007-5704(03)00021-2.

19. Torrisi M, Tracinà R, Valenti A. On the linearization of semilinear wave equations. *Nonlinear Dynamics*. 2004;36(1):97–106. DOI: 10.1023/B:NODY.0000034649.74389.09.

20. Boyko VM, Lokaziuk OV, Popovych RO. Realizations of Lie algebras on the line and the new group classification of (1 + 1)-dimensional generalized nonlinear Klein – Gordon equations. *Analysis and Mathematical Physics*. 2021;11(3):127. DOI: 10.1007/s13324-021-00550-z.

21. Lahno V, Magda O. The group classification of one class of nonlinear wave equations. arXiv:math-ph/0310049v2 [Preprint]. 2003 [cited 2025 May 17]: [8 p.]. Available from: https://arxiv.org/abs/math-ph/0310049v2.

22. Lahno V, Zhdanov R. Group classifiation of nonlinear wave equations. *Journal of Mathematical Physics*. 2005;46(5):053301. DOI: 10.1063/1.1884886.

23. Lahno V, Zhdanov R, Magda O. Group classification and exact solutions of nonlinear wave equations. *Acta Applicandae Mathematicae*. 2006;91(3):253–313. DOI: 10.1007/s10440-006-9039-0.

24. Popovych RO. Point and contact equivalence groupoids of two-dimensional quasilinear hyperbolic equations. *Applied Mathematics Letters*. 2021;116:107068. DOI: 10.1016/j.aml.2021.107068.

25. Lie S. Diskussion der Differentialgleichung $\frac{d^2z}{dxdy} = F(z)$. *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab*. 1881;6(1):112–124.

26. Azad H, Mustafa MT, Ziad M. Group classification, optimal system and optimal reductions of a class of Klein – Gordon equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2010;15(5):1132–1147. DOI: 10.1016/j.cnsns.2009.05.045.

27. Фущич ВИ, Штелень ВМ, Серов НИ. *Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики*. Киев: Наукова думка; 1989. 336 с.

Получена 23.07.2025 / исправлена 11.02.2026 / принята 24.02.2026.
Received 23.07.2025 / revised 11.02.2026 / accepted 24.02.2026.

Геометрия и топология

Geometry and topology

УДК 515.12

ОБ ИНФИМУМЕ ПРОКСИМАЛЬНЫХ ТОПОЛОГИЙ ГИПЕРПРОСТРАНСТВА

А. С. БЕДРИЦКИЙ[1)]***, В. Л. ТИМОХОВИЧ***[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Аннотация. Изучаются свойства топологии $\tau_{\delta(\inf)}$, являющейся инфимумом семейства $\mathcal{T}_\delta$ всех ρ-проксимальных топологий $\tau_{\delta(\rho)}$ на гиперпространстве метризуемого топологического пространства. Как основной результат находится необходимое и достаточное условие совпадения $\inf \mathcal{T}_\delta = \tau_{\delta(\rho)}$ (т. е. условие достижения инфимума). Кроме того, исследуется связь топологии $\tau_{\delta(\inf)}$ с инфимумом семейства $\mathcal{T}_W$ всех топологий Вайсмана, с инфимумом семейства $\mathcal{T}_H$ всех топологий, порожденных метриками Хаусдорфа, а также с топологией Фелла. Во второй части статьи рассматриваются непрерывное отображение $X \xrightarrow{f} Y$ и его продолжение $\exp_{\delta(\inf)} X \xrightarrow{\overline{f}} \exp_{\delta(\inf)} Y$ на гиперпространства $\exp X$, $\exp Y$, снабженные топологией $\tau_{\delta(\inf)}$, где $\overline{f}(F) = \left[f(F)\right]_Y$ ($[\cdot]_Y$ – оператор замыкания в пространстве Y). Для отображения $\overline{f}$ получено достаточное условие непрерывности, которое является также и необходимым условием, если Y – локально компактное пространство со счетной базой.

Ключевые слова: гиперпространство; ρ-проксимальная топология; топология Вайсмана; метрика Хаусдорфа; инфимальная топология.

Образец цитирования:
Бедрицкий АС, Тимохович ВЛ. Об инфимуме проксимальных топологий гиперпространства. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2026;2:39–48.
EDN: DULTGW

For citation:
Bedritskiy AS, Timokhovich VL. On the infimum of proximal topologies of the hyperspace. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2026;2:39–48. Russian.
EDN: DULTGW

Авторы:
Александр Сергеевич Бедрицкий – аспирант кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета. Научный руководитель – В. Л. Тимохович.
Владимир Леонидович Тимохович – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета.

Authors:
Alexander S. Bedritskiy, postgraduate student at the department of geometry, topology and mathematics teaching methodology, faculty of mechanics and mathematics.
bedrickias@bsu.by
Vladimir L. Timokhovich, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of geometry, topology and mathematics teaching methodology, faculty of mechanics and mathematics.
timvlaleo@gmail.com

CC BY NC

Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2026;2:39–48
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2026;2:39–48

ON THE INFIMUM OF PROXIMAL TOPOLOGIES OF THE HYPERSPACE

A. S. BEDRITSKIY[a]***, V. L. TIMOKHOVICH***[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

Corresponding author: A. S. Bedritskiy (bedrickias@bsu.by)

Abstract. We investigate properties of a topology $\tau_{\delta(\inf)}$, which is the infimum of a family $\mathcal{T}_\delta$ of all ρ-proximal topologies $\tau_{\delta(\rho)}$ on the hyperspace of a metrisable topological space. As a main result a necessary and sufficient condition of a coincidence $\inf \mathcal{T}_\delta = \tau_{\delta(\rho)}$ (i. e. the condition of existing the minimum) is found. Besides the relations between the topology $\tau_{\delta(\inf)}$ and the infimum of a family $\mathcal{T}_W$ of all Wijsman topologies, the infimum of a family $\mathcal{T}_H$ of all Hausdorff metric topologies, and the Fell topology are studied. In the second part of the article we consider a continuous map $X \xrightarrow{f} Y$ and its extension $\exp_{\delta(\inf)} X \xrightarrow{\overline{f}} \exp_{\delta(\inf)} Y$ on the hyperspaces $\exp X$, $\exp Y$, endowed with the topology $\tau_{\delta(\inf)}$, where $\overline{f}(F) = \left[f(F)\right]_Y$ ($[\cdot]_Y$ is a closure operator in the space Y). For the map $\overline{f}$ we've got a sufficient condition of its continuity. This condition is also necessary, if Y is a locally compact space with countable base.

Keywords: hyperspace; ρ-proximal topology; Wijsman topology; Hausdorff metric; infimum topology.

Введение

Всякое многозначное отображение $X \xrightarrow{\Phi} Y$ (образ $\Phi(x)$ точки $x \in X$ – непустое замкнутое множество в пространстве Y) можно рассматривать как однозначное отображение из пространства X в экспоненту (гиперпространство) $\exp Y$ пространства Y. Это обстоятельство и потребности современного анализа, где многозначное отображение является одним из основных понятий [1; 2], мотивируют проведение исследований топологических свойств экспоненты, в частности таких топологических структур на $\exp X$, отличных от классических топологий Вьеториса τ_V [3; 4] и топологии $\tau_{\hat{\rho}}$ метрики Хаусдорфа $\hat{\rho}$ [4; 5], как сходимость по Вайсману и топология Вайсмана $\tau_{W(\rho)}$ [6–8], топология Фелла τ_F [8–10], ρ-проксимальная топология $\tau_{\delta(\rho)}$ [7; 8] и др. В предлагаемой работе рассматривается ρ-проксимальная топология $\tau_{\delta(\rho)}$ на $\exp X$ и устанавливаются ее некоторые, в частности функториальные, свойства.

Кратко рассмотрим используемые понятия и обозначения. Под пространством будем понимать топологическое T_1-пространство. Пусть X – пространство с топологией τ, $A \subset X$, $x \in X$, ρ – некоторая метрика на X. Будем писать $A \underset{\text{op}}{\subset} X$ ($A \underset{\text{cl}}{\subset} X$), если множество A открыто (замкнуто соответственно) в пространстве X. Введем следующие обозначения: $[A]_X$ ($[A]_\tau$, $[A]_\rho$) – замыкание множества A в пространстве X (относительно топологии τ, относительно метрики ρ соответственно); $B_\rho(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$, $D_\rho(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid \rho(x, y) \le \varepsilon\}$ и $B_\rho(A, \varepsilon) = \bigcup\limits_{a \in A} B_\rho(a, \varepsilon)$ – открытый и замкнутый шары и ε-раздутие множества A относительно метрики ρ соответственно ($\varepsilon > 0$); $\exp X = \left\{F \subset X \mid \varnothing \ne F \underset{\text{cl}}{\subset} X\right\}$ – экспонента (гиперпространство) пространства X (как правило, с некоторой топологией); $\hat{X} = \{\{x\} \in \exp X \mid x \in X\}$ – канонический образ пространства X в экспоненте $\exp X$; $A^- = \{F \in \exp X \mid F \cap A \ne \varnothing\}$, $A^+ = \{F \in \exp X \mid F \subset A\}$, $A^{++} = \{F \in \exp X \mid B_\rho(F, \varepsilon) \subset A \text{ для некоторого } \varepsilon > 0\}$ ($A^{++(\rho)}$ при необходимости уточнения), $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle = \left(\bigcup\limits_{i=1}^n A_i\right)^+ \cap \left(\bigcap\limits_{i=1}^n A_i^-\right)$, $W_\rho(x, \varepsilon) = \{F \in \exp X \mid F \cap D_\rho(x, \varepsilon') = \varnothing \text{ для некоторого } \varepsilon' > \varepsilon\}$ ($\varepsilon > 0$); Ω_X – множество всех допустимых (т. е. согласованных с топологией) метрик на X.

Последовательность $(a_n)_{n=1}^\infty$ в пространстве X назовем Δ-последовательностью, если $a_n \ne a_k$ при $n \ne k$ и множество $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ замкнуто и дискретно (как подпространство). Будем говорить, что последовательности $(a_n)_{n=1}^\infty$ и $(b_n)_{n=1}^\infty$ дизъюнктны, если $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \varnothing$. Через $a_n \xrightarrow[\tau]{} x$ ($a_n \xrightarrow[\rho]{} x$) будем обозначать сходимость относительно топологии τ (метрики ρ соответственно).

Для $\rho \in \Omega_X$, $F, P \in \exp X$ введем следующие обозначения: $e_\rho(F, P) = \sup\{\rho(x, P) \mid x \in F\}$ – отклонение (*excess*) множества F от множества P относительно метрики ρ; $\hat{\rho}(F, P) = \max\{e_\rho(F, P), e_\rho(P, F)\} = \inf\{\varepsilon > 0 \mid B_\rho(F, \varepsilon) \supset P \text{ и } B_\rho(P, \varepsilon) \supset F\}$ – метрика Хаусдорфа на $\exp X$, соответствующая метрике ρ (возможно, $\hat{\rho}(F, P) = \infty$ для некоторых $F, P \in \exp X$, что не влияет на определение топологии $\tau_{\hat{\rho}}$).

Напомним, что топология Вьеториса τ_V, топология Фелла τ_F, топология Вайсмана $\tau_{W(\rho)}$ и ρ-проксимальная топология $\tau_{\delta(\rho)}$, где $\rho \in \Omega_X$, задаются предбазами, состоящими из множеств вида U^- и U^+, где $U \underset{\text{op}}{\subset} X$, для τ_V; U^- и V^+, где $U \underset{\text{op}}{\subset} X$, $V \underset{\text{op}}{\subset} X$ и $X \setminus V$ компактно, для τ_F; U^- и $W_\rho(x, \varepsilon)$, где $U \underset{\text{op}}{\subset} X$, $x \in X$ и $\varepsilon > 0$, для $\tau_{W(\rho)}$; U^- и U^{++}, где $U \underset{\text{op}}{\subset} X$, для $\tau_{\delta(\rho)}$. Базы топологий τ_V и τ_F составляют множества вида $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, где все U_i открыты в X, для τ_V; $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle$, где все V_i открыты в X и $X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i \right)$ компактно, для τ_F. Локальная база для $F \in \exp X$ в топологии $\tau_{W(\rho)}$ представлена множествами вида $\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_\rho(x_i, \varepsilon)^- \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m} W_\rho(y_j, \delta_j) \right)$, а в топологии $\tau_{\delta(\rho)}$ – множествами вида $B_\rho(F, \varepsilon)^{++} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_\rho(x_i, \varepsilon)^- \right)$, где $\varepsilon > 0$, $\{y_1, \ldots, y_m\} \subset X \setminus F$, $0 < \delta_j < \rho(y_j, F)$ и $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset F$ в обоих случаях.

Пространства $(\exp X, \tau_V), (\exp X, \tau_{\hat{\rho}}), \ldots$ кратко будем обозначать через $\exp_V X, \exp_{\hat{\rho}} X$ и т. п. Также будем использовать сокращенные записи, например $[\mathcal{H}]_V$ вместо $[\mathcal{H}]_{\tau_V}$, $[\mathcal{H}]_F$ вместо $[\mathcal{H}]_{\tau_F}$ ($\mathcal{H} \subset \exp X$), $F_n \xrightarrow[\delta(\rho)]{} F$ вместо $F_n \xrightarrow[\tau_{\delta(\rho)}]{} F$ и т. п.

Пусть далее пространство X метризуемо и $\rho \in \Omega_X$. Основные соотношения между топологиями τ_V, $\tau_{\hat{\rho}}$, $\tau_{\delta(\rho)}$, $\tau_{W(\rho)}$ и τ_F хорошо известны [7; 8]: $\tau_V \geq \tau_{\delta(\rho)}$ (т. е. $\tau_V \supset \tau_{\delta(\rho)}$), $\tau_{\hat{\rho}} \geq \tau_{\delta(\rho)}$ и $\tau_{\delta(\rho)} \geq \tau_{W(\rho)} \geq \tau_F$; каждое из совпадений $\tau_{\hat{\rho}} = \tau_{\delta(\rho)}$ и $\tau_{\delta(\rho)} = \tau_{W(\rho)}$ равносильно полной ограниченности метрики ρ, совпадение $\tau_{\delta(\rho)} = \tau_F$ равносильно компактности пространства X, совпадение $\tau_V = \tau_{\delta(\rho)}$ возможно тогда и только тогда, когда ρ – метрика Ацуши (т. е. $\rho(F, P) > 0$ для любых дизъюнктных $F, P \in \exp X$ [8; 11]), а совпадение $\tau_{W(\rho)} = \tau_F$ равносильно выполнению для метрики ρ условия (NCB) (*nice closed balls*), согласно которому любой замкнутый шар $D_\rho(x, \varepsilon)$ в пространстве X, отличный от всего пространства, компактен.

Тот факт, что для всякого непустого подсемейства $\mathcal{T}$ в частично упорядоченном по включению семействе всех топологий на $\exp X$ определены $\inf \mathcal{T}$ ($\inf \mathcal{T} = \cap\{t \mid t \in \mathcal{T}\}$) и $\sup \mathcal{T}$ (топология $\sup \mathcal{T}$ задается предбазой $\cup\{t \mid t \in \mathcal{T}\}$), вызвал интерес к исследованиям инфимальных и супремальных топологий, возникающих на $\exp X$ соответственно семействам $\mathcal{T}_H = \{\tau_{\hat{\rho}} \mid \rho \in \Omega_X\}$, $\mathcal{T}_W = \{\tau_{W(\rho)} \mid \rho \in \Omega_X\}$, $\mathcal{T}_\delta = \{\tau_{\delta(\rho)} \mid \rho \in \Omega_X\}$ и др. Как оказалось, обе топологии $\tau_{\delta(\sup)} = \sup \mathcal{T}_\delta$ и $\tau_{W(\sup)} = \sup \mathcal{T}_W$ совпадают с топологией Вьеториса τ_V [7], а топология $\tau_{H(\sup)} = \sup \mathcal{T}_H$ совпадает с локально конечной топологией τ_{LF}, предбазу которой составляют множества вида U^+ и $\langle \alpha \rangle^- = \{F \in \exp X \mid F \cap V \neq \varnothing \text{ для любого } V \in \alpha\}$, где $U \underset{\text{op}}{\subset} X$; α – локально конечное семейство открытых в пространстве X множеств [12]. Свойства инфимальных топологий $\tau_{H(\inf)} = \inf \mathcal{T}_H$ и $\tau_{W(\inf)} = \inf \mathcal{T}_W$ исследовались в работах [13–16]. В частности, были найдены необходимые и достаточные условия достижения инфимума (т. е. совпадений $\tau_{H(\inf)} = \tau_{\hat{\rho}}$ [13; 14] и $\tau_{W(\inf)} = \tau_{W(\rho)}$ [16], где $\rho \in \Omega_X$). В настоящей работе в качестве основного объекта изучения рассматривается инфимальная топология $\tau_{\delta(\inf)} = \inf \mathcal{T}_\delta = \cap\{\tau_{\delta(\rho)} \mid \rho \in \Omega_X\}$, устанавливаются ее некоторые, в частности функториальные, свойства и соотношения с другими экспоненциальными топологиями.

Достижение инфимума. Случаи совпадения

Рассмотрим метризуемое пространство X. Прежде всего отметим, что каноническая биекция $X \ni x \to \{x\} \in \hat{X} \subset \exp_{\delta(\inf)} X$ является вложением пространства X в $\exp_{\delta(\inf)} X$ (экспоненциальные топологии с таким свойством называют допустимыми [4]) и $\hat{X} \underset{\text{cl}}{\subset} \exp_{\delta(\inf)} X$.

Далее нам понадобятся следующие определение и предложения.

Определение 1 [17]. Допустимая метрика ρ на не компактном пространстве X называется уплотняющей, если соответствующее пополнение $\tilde{X}$ – компакт с одноточечным наростом $\tilde{X} \setminus X$.

Предложение 1 [17]. *Метризуемое не компактное пространство X допускает уплотняющую метрику тогда и только тогда, когда X является локально компактным и имеет счетную базу.*

Предложение 2 [14]. *Допустимая метрика ρ на не компактном пространстве X является уплотняющей тогда и только тогда, когда для любых двух последовательностей $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, не имеющих в X предельных точек (точка называется предельной для последовательности, если любая ее окрестность содержит бесконечно много членов этой последовательности), $\rho(a_n, b_n) \to 0$.*

Предложение 3 [18]. *Если пространство X метризуемо, $\varnothing \neq F \underset{\text{cl}}{\subset} X$ и ρ_0 – метрика на F, согласованная с индуцированной топологией, то существует метрика $\rho \in \Omega_X$, совпадающая на F с метрикой ρ_0.*

При рассмотрении последовательностей, не имеющих предельных точек, оказывается полезной следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть последовательности $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ в пространстве X не имеют предельных точек, $\rho \in \Omega_X$ и $\rho(a_n, b_n) \geq \varepsilon$ ($\varepsilon = \text{const}$, $\varepsilon > 0$) для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда можно выбрать последовательность номеров $n_1 < n_2 < \ldots$ так, чтобы $a_{n_i} \neq a_{n_j}$, $b_{n_i} \neq b_{n_j}$ и $\rho(a_{n_i}, b_{n_j}) \geq \frac{\varepsilon}{3}$ при $i \neq j$.*

Доказательство. Сначала выберем последовательности $(a_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ и $(b_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ ($n_1 < n_2 < \ldots$) так, чтобы $a_{n_i} \neq a_{n_j}$, $b_{n_i} \neq b_{n_j}$ и $a_{n_i} \neq b_{n_j}$ при $i \neq j$. Полагаем, что $n_1 = 1$. Пусть выбраны $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ и $a_{n_i} \neq a_{n_j}$, $b_{n_i} \neq b_{n_j}$ и $a_{n_i} \neq b_{n_j}$ при $1 \leq i < j \leq k$. Поскольку последовательности $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ не содержат стационарных подпоследовательностей (последовательность называется стационарной, если все ее члены – одна и та же точка), то найдется номер $m > n_k$ такой, что $a_p \notin \{a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}\} \cup \{b_{n_1}, \ldots, b_{n_k}\}$ и $b_p \notin \{a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}\} \cup \{b_{n_1}, \ldots, b_{n_k}\}$ для всех $p \geq m$. Полагаем, что $n_{k+1} = m$.

Далее, не нарушая общности, можем считать, что $a_n \neq a_k$, $b_n \neq b_k$ и $a_n \neq b_k$ при $n \neq k$. Рассмотрим следующие случаи.

1. Найдется точка $z \in X$ такая, что шар $B_\rho\left(z, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ содержит бесконечно много членов (т. е. подпоследовательность) хотя бы одной из последовательностей. Пусть, например, $B_\rho\left(z, \frac{\varepsilon}{3}\right) \supset (a_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ ($n_1 < n_2 < \ldots$). Допустим, что $\rho(a_{n_i}, b_{n_j}) < \frac{\varepsilon}{3}$ для некоторых a_{n_i} и b_{n_j}. Тогда $\rho(a_{n_j}, b_{n_j}) \leq \rho(a_{n_j}, a_{n_i}) + \rho(a_{n_i}, b_{n_j}) < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, что противоречит неравенству $\rho(a_{n_j}, b_{n_j}) \geq \varepsilon$.

2. Для любой точки $z \in X$ шар $B_\rho\left(z, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ содержит не более конечного числа членов обеих последовательностей. Полагаем, что $n_1 = 1$. Пусть выбраны $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. По условию найдется номер $m > n_k$ такой, что $a_p \notin \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_\rho\left(a_{n_i}, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_\rho\left(b_{n_i}, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right)$ и $b_p \notin \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_\rho\left(a_{n_i}, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_\rho\left(b_{n_i}, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right)$ для всех $p \geq m$. Полагаем, что $n_{k+1} = m$.

Очевидно, что выбранные таким образом подпоследовательности $(a_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ и $(b_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяют исходному требованию. Лемма доказана.

При рассмотрении для инфимальных топологий $\tau_{H(\inf)}$, $\tau_{\delta(\inf)}$ и $\tau_{W(\inf)}$ вопроса о достижении инфимума ($\inf = \min$) стоит обратить отдельное внимание на тривиальный в данной ситуации случай, когда все топологии вида $\tau_{\hat{\rho}}$ ($\tau_{\delta(\rho)}$, $\tau_{W(\rho)}$) совпадают (т. е. семейства $\mathcal{T}_H$, $\mathcal{T}_\delta$ и $\mathcal{T}_W$ одноэлементны).

Предложение 4. *Для метризуемого пространства X эквивалентны следующие условия: (1) все топологии вида $\tau_{\hat{\rho}}$, $\rho \in \Omega_X$, совпадают; (2) все топологии вида $\tau_{\delta(\rho)}$, $\rho \in \Omega_X$, совпадают; (3) все топологии вида $\tau_{W(\rho)}$, $\rho \in \Omega_X$, совпадают; (4) пространство X компактно.*

Доказательство. Доказательство импликаций (4) $\Rightarrow$ (1), (4) $\Rightarrow$ (2) и (4) $\Rightarrow$ (3) очевидным образом следует из соотношений $\tau_{\hat{\rho}} \geq \tau_{\delta(\rho)} \geq \tau_{W(\rho)} \geq \tau_F$ и совпадений $\tau_{\hat{\rho}} = \tau_V$ [4] и $\tau_V = \tau_F$, возникающих при компактности пространства X.

Допустим далее, что пространство X не компактно и, следовательно, оно содержит дизъюнктные замкнутые и дискретные (как подпространства) множества $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ($a_n \neq a_k$ и $b_n \neq b_k$ при $n \neq k$). Предложение 3 позволяет выбрать допустимые метрики ρ, σ и υ такие, что $\rho(a_n, a_k) = \rho(b_n, b_k) = |n-k|$, $\rho(a_n, b_n) = 1$ и $\rho(a_n, b_k) \geq 1$ для любых $n, k \in \mathbb{N}$; $\sigma(a_n, a_k) = |n-k|$ и $\sigma(a_n, b_n) = \frac{1}{n}$; $\upsilon(a_n, a_k) = |n-k|$, $\upsilon(b_1, a_n) = n$, $\upsilon(b_1, b_n) = \frac{1}{2}$ при $n > 1$. Далее будем использовать обозначение $A_n = A \cup \{b_n\}$. Несложно проверить, что $\hat{\sigma}(A, A_n) \leq \frac{1}{n}$ и, следовательно, $A_n \xrightarrow[\hat{\sigma}]{} A$, но $\hat{\rho}(A, A_n) \geq 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$; $A_n \xrightarrow[\delta(\sigma)]{} A$, но $A_n \notin B_\rho(A, 1)^{++}$ для любого $n \in \mathbb{N}$; $A_n \xrightarrow[W(\sigma)]{} A$, но $A_n \notin W_\upsilon\left(b_1, \frac{1}{2}\right)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Полученные противоречия с условиями (1), (2) и (3) доказывают импликации (1) $\Rightarrow$ (4), (2) $\Rightarrow$ (4) и (3) $\Rightarrow$ (4) (эквивалентность (3) $\Leftrightarrow$ (4) доказана также в работе [7]). Предложение доказано.

Теорема 1. *Пусть* ρ *– допустимая метрика на не компактном пространстве* X. *Совпадение* $\tau_{\delta(\inf)} = \tau_{\delta(\rho)}$ *имеет место тогда и только тогда, когда метрика* ρ *уплотняющая.*

Доказательство. *Достаточность.* Для доказательства достаточности покажем, что если метрика ρ уплотняющая, то $\tau_{\delta(\sigma)} \geq \tau_{\delta(\rho)}$ для любой метрики $\sigma \in \Omega_X$. Для этого достаточно проверить, что для любого множества вида $B_\rho(F, \varepsilon)^{++}$, где $F \in \exp X$ и $\varepsilon > 0$, можно подобрать $\delta > 0$ так, чтобы $B_\sigma(F, \delta)^{++} \subset B_\rho(F, \varepsilon)^{++}$. Допустим от противного, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдутся $P_n \in \exp X$ такие, что $P_n \in B_\sigma\left(F, \frac{1}{n}\right)^{++}$ (и, следовательно, $P_n \subset B_\sigma\left(F, \frac{1}{n}\right)$), но $P_n \notin B_\rho(F, \varepsilon)^{++}$ (и, следовательно, $B_\rho\left(P_n, \frac{1}{n}\right) \not\subset B_\rho(F, \varepsilon)$). Это обстоятельство позволяет выбрать точки $x_n \in F$, $y_n \in P_n$ и $z_n \notin B_\rho(F, \varepsilon)$ так, чтобы

$$\sigma(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \tag{1}$$

$$\rho(y_n, z_n) < \frac{1}{n}, \tag{2}$$

$$\rho(x_n, z_n) \geq \varepsilon \tag{3}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что если хотя бы одна из последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ имеет предельную точку, то в силу неравенств (1) и (2) можно выбрать подпоследовательности $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$, $(y_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ и $(z_{n_i})_{i=1}^{\infty}$, сходящиеся к этой точке, что противоречит неравенствам (3). Итак, последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ не имеют предельных точек. Но поскольку метрика ρ уплотняющая, то в силу предложения 2 $\rho(x_n, z_n) \to 0$, что опять же противоречит неравенствам (3). Достаточность доказана.

Необходимость. Допустим от противного, что метрика ρ не уплотняющая. Тогда в силу предложения 2 и леммы 1 в пространстве X существуют дизъюнктные замкнутые и дискретные множества $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ такие, что $a_n \neq a_k$ и $b_n \neq b_k$ при $n \neq k$ и $\rho(a_n, b_k) \geq \varepsilon$ при любых $n, k \in \mathbb{N}$, где $\varepsilon = \text{const}$, $\varepsilon > 0$. Предложение 3 позволяет выбрать метрику $\sigma \in \Omega_X$, для которой $\sigma(a_n, b_n) = \frac{1}{n}$. Введем обозначение $A_n = A \cup \{b_n\}$. Легко проверить (рассматривая элементы предбазы вида U^- и $B_\sigma(A, \varepsilon)^{++}$), что $A_n \xrightarrow[\delta(\sigma)]{} A$. Однако последовательность $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ не сходится к A в топологии $\tau_{\delta(\rho)}$, поскольку $A_n \notin B_\rho(A, \varepsilon)^{++}$ при любом $n \in \mathbb{N}$, что противоречит соотношению $\tau_{\delta(\sigma)} \geq \tau_{\delta(\rho)}$. Теорема доказана.

Теорема 1 и предложение 1 влекут нижеприведенное следствие.

Следствие 1. *Топология* $\tau_{\delta(\inf)}$ *на экспоненте метризуемого не компактного пространства X совпадает с топологией вида* $\tau_{\delta(\rho)}$, *где* $\rho \in \Omega_X$ *(инфимум достигается), тогда и только тогда, когда X является локально компактным и имеет счетную базу.*

Теорему 1 и следствие 1 можно дополнить следующими аналогичными утверждениями.

Теорема 2. *Для допустимой метрики* ρ *на не компактном пространстве X совпадение* $\tau_{H(\inf)} = \tau_{\hat{\rho}}$ *имеет место тогда и только тогда, когда метрика* ρ *уплотняющая.*

Доказательство. Достаточность доказана в работах [13; 14]. Докажем необходимость. Пусть $\tau_{H(\inf)} = \tau_{\hat{\rho}}$. Допустим от противного, что метрика ρ не уплотняющая. Тогда согласно предложению 2 и лемме 1, как и при доказательстве необходимости в теореме 1 (ситуация та же), в пространстве X можно выбрать те же множества $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $A_n = A \cup \{b_n\}$ и метрику $\sigma \in \Omega_X$, для которых $\rho(a_n, b_k) \geq \varepsilon$ ($\varepsilon = \text{const}$, $\varepsilon > 0$) и $\sigma(a_n, b_n) < \frac{1}{n}$ при любых n, $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $\hat{\sigma}(A, A_n) \leq \frac{1}{n}$, откуда $A_n \xrightarrow[\hat{\sigma}]{} A$, но $\hat{\rho}(A, A_n) \geq \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$, что противоречит соотношению $\tau_{\hat{\sigma}} \geq \tau_{\hat{\rho}}$. Теорема доказана.

Следствие 2 [13; 14]. *Топология* $\tau_{H(\inf)}$ *на экспоненте метризуемого не компактного пространства X совпадает с топологией вида* $\tau_{\hat{\rho}}$, *где* $\rho \in \Omega_X$ *(инфимум достигается), тогда и только тогда, когда X является локально компактным и имеет счетную базу.*

Поскольку любая уплотняющая метрика вполне ограничена, а для вполне ограниченной метрики $\rho \in \Omega_X$ топологии $\tau_{\delta(\rho)}$ и $\tau_{\hat{\rho}}$ совпадают [7], то теоремы 1 и 2 позволяют сформулировать нижеприведенное следствие.

Следствие 3. *Если метризуемое не компактное пространство X является локально компактным и имеет счетную базу, то топологии* $\tau_{\delta(\inf)}$ *и* $\tau_{H(\inf)}$ *на* $\exp X$ *совпадают и метризуемы метрикой Хаусдорфа* $\hat{\rho}$, *где* $\rho \in \Omega_X$ *и метрика* ρ *уплотняющая.*

Необходимое условие совпадения топологий $\tau_{\delta(\inf)}$ и $\tau_{H(\inf)}$ дает следующее предложение.

Предложение 5. *Если топологии* $\tau_{\delta(\inf)}$ *и* $\tau_{H(\inf)}$ *на экспоненте* $\exp X$ *метризуемого пространства X совпадают, то пространство X имеет счетную базу.*

Доказательство. Допустим от противного, что вес пространства X несчетен. Тогда X содержит замкнутое дискретное множество $A = \{a_\lambda \mid \lambda < \omega_1\}$ ($a_\alpha \neq a_\beta$ при $\alpha < \beta < \omega_1$), где ω_1 – первый несчетный ординал. Введем обозначение $A_\lambda = \{a_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$, $\mathcal{H} = \{A_\lambda \mid \lambda < \omega_1\}$. Фиксируем произвольную метрику $\rho \in \Omega_X$. Несложно проверить, что $A \in [\mathcal{H}]_{\delta(\rho)}$ и, как следствие, $A \in [\mathcal{H}]_{\delta(\inf)}$. Пусть $F \in [\mathcal{H}]_{\delta(\rho)}$. Исследуем устройство множества F.

1. Допустим, что $F \not\subset A$. Выберем точку $x \in F \setminus A$ и ее окрестность U так, чтобы $U \cap A = \varnothing$. Очевидно, что $F \in U^-$, но $U^- \cap \mathcal{H} = \varnothing$, что противоречит соотношению $F \in [\mathcal{H}]_{\delta(\rho)}$. Итак, $F \subset A$.

2. Допустим, что $F \ni a_\beta$, $F \not\ni a_\alpha$ и $\alpha < \beta < \omega_1$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $B_\rho(a_\alpha, \varepsilon) \cap A = \{a_\alpha\}$, $B_\rho(a_\beta, \varepsilon) \cap A = \{a_\beta\}$, и положим, что $\mathcal{G} = B_\rho(F, \varepsilon)^{++} \cap B_\rho(a_\beta, \varepsilon)^-$. Ясно, что $F \in \mathcal{G}$, но $\mathcal{G} \cap \mathcal{H} = \varnothing$. Вновь получаем противоречие. Таким образом, если $F \ni a_\beta$, то $F \supset \{a_\alpha \mid \alpha \leq \beta\}$ и, следовательно, либо $F = A$, либо $F = A_\lambda$ для некоторого $\lambda < \omega_1$. Итак, $[\mathcal{H}]_{\delta(\rho)} = \mathcal{H} \cup \{A\}$. В силу произвольности выбора метрики $\rho \in \Omega_X$ множество $\mathcal{H} \cup \{A\}$ замкнуто относительно любой топологии вида $\tau_{\delta(\rho)}$, а значит, и относительно топологии $\tau_{\delta(\inf)}$. Учитывая соотношение $A \in [\mathcal{H}]_{\delta(\inf)}$ (см. выше), получаем равенство $[\mathcal{H}]_{\delta(\inf)} = \mathcal{H} \cup \{A\}$, а поскольку $\tau_{\delta(\inf)} = \tau_{H(\inf)}$, то и равенство $[\mathcal{H}]_{H(\inf)} = \mathcal{H} \cup \{A\}$. Свойства топологии $\tau_{H(\inf)}$, в частности ее секвенциальность (см. [14]), позволяют выбрать последовательность $(A_{\lambda_n})_{n=1}^{\infty}$, сходящуюся к A относительно $\tau_{H(\inf)}$, затем подпоследовательность $(A_{\lambda_{n_i}})_{i=1}^{\infty}$ и метрику $\rho \in \Omega_X$, для которой $A_{\lambda_{n_i}} \xrightarrow[\hat{\rho}]{} A$. Далее фиксируем ординал $\gamma < \omega_1$, $\gamma > \lambda_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и выбираем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $B_\rho(a_\gamma, \varepsilon) \cap A = \{a_\gamma\}$. Ясно, что $B_\rho(A_{\lambda_n}, \varepsilon) \not\supset A$, откуда $A_{\lambda_n} \notin B_{\hat{\rho}}(A, \varepsilon)$ для любого $n \in \mathbb{N}$, что противоречит сходимости $A_{\lambda_{n_i}} \xrightarrow[\hat{\rho}]{} A$. Предложение доказано.

Замечание. Указанные выше условия совпадения топологий $\tau_{\delta(\inf)}$ и $\tau_{H(\inf)}$ (достаточное условие в следствии 3 и необходимое условие в предложении 5), вероятно, могут быть уточнены (в направлении ослабления достаточного и усиления необходимого условий).

Далее рассмотрим вопрос о возможности совпадений $\tau_{\delta(\inf)} = \tau_{W(\inf)}$ и $\tau_{\delta(\inf)} = \tau_F$.

Теорема 3. *Для метризуемого пространства X эквивалентны следующие условия: (1) $\tau_{\delta(\inf)} = \tau_{W(\inf)}$; (2) $\tau_{\delta(\inf)} = \tau_F$; (3) пространство X компактно.*

Доказательство. Доказательство импликаций (3) $\Rightarrow$ (1) и (3) $\Rightarrow$ (2) следует из соотношений $\tau_V \geq \tau_{\delta(\inf)} \geq \tau_{W(\inf)} \geq \tau_F$ и совпадения топологий τ_V и τ_F при компактности пространства X.

Предположим далее, что пространство X не компактно, и рассмотрим замкнутое дискретное множество $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\} \subset X$ ($a_n \neq a_k$ при $0 \leq n < k$), множества $A_n = \{a_0, a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ и множество $\mathcal{H} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \exp X$. Ясно, что $A_n \xrightarrow{F} \{a_0\}$ (т. е. относительно топологии τ_F), откуда $\{a_0\} \in [\mathcal{H}]_F$. Пусть $B \in \exp X$ и $B \in [\mathcal{H}]_F$. Рассмотрим возможные варианты расположения множества B.

1. $B \not\subset A$. Тогда найдутся $b \in B \setminus A$ и окрестность U точки b такая, что $U \cap A = \varnothing$. Поскольку $B \in U^-$, но $U \cap A_n = \varnothing$ для любого $n \in \mathbb{N}$, а следовательно, $U^- \cap \mathcal{H} = \varnothing$, то получаем противоречие с соотношением $B \in [\mathcal{H}]_F$. Итак, $B \subset A$.

2. $a_0 \notin B$. Введем обозначение $\mathcal{G} = (X \setminus \{a_0\})^+$. Очевидно, что $B \in \mathcal{G} \in \tau_F$, но $A_n \notin \mathcal{G}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, а следовательно, $\mathcal{G} \cap \mathcal{H} = \varnothing$. Опять получаем противоречие с соотношением $B \in [\mathcal{H}]_F$. Итак, $a_0 \in B$.

3. $B \ni a_n$ $(n \geq 1)$, но $B \not\ni a_k$ для некоторого $k > n$. Выберем окрестность U точки a_n, для которой $U \cap A = \{a_n\}$, и положим, что $\mathcal{G} = U^- \cap (X \setminus \{a_k\})^+$. Ясно, что $B \in \mathcal{G}$, но $\mathcal{G} \cap \mathcal{H} = \varnothing$. Снова получаем противоречие. Итак, если $B \ni a_n$ $(n \geq 1)$, то $B \ni a_k$ для всех $k \geq n$.

Таким образом, $B = \{a_0\}$ или $B \in \mathcal{H}$, откуда $[\mathcal{H}]_F = \mathcal{H} \cup \{\{a_0\}\}$.

Поскольку $\tau_{\delta(\rho)} \geq \tau_{\delta(\inf)} \geq \tau_{W(\inf)} \geq \tau_F$, где $\rho \in \Omega_X$, то множество $\mathcal{H} \cup \{\{a_0\}\}$ замкнуто в топологиях $\tau_{W(\inf)}$, $\tau_{\delta(\inf)}$ и $\tau_{\delta(\rho)}$. Заметим также, что $A_n \xrightarrow{W(\inf)} \{a_0\}$, откуда $[\mathcal{H}]_{W(\inf)} = \mathcal{H} \cup \{\{a_0\}\}$. Действительно, выбрав, пользуясь предложением 3, метрику $\rho \in \Omega_X$, для которой $\rho(a_n, a_k) = |n - k|$ $(0 \leq n < k)$, получаем сходимость $A_n \xrightarrow{W(\rho)} \{a_0\}$, а следовательно, и сходимость $A_n \xrightarrow{W(\inf)} \{a_0\}$.

Рассмотрим далее окрестность U_0 точки a_0, для которой $U_0 \cap A = \{a_0\}$, и множество $\mathcal{G} = U_0^{++(\rho)}$ в $\exp_{\delta(\rho)} X$, где $\rho \in \Omega_X$. Очевидно, что $\{a_0\} \in \mathcal{G}$, но $\mathcal{G} \cap \mathcal{H} = \varnothing$. Таким образом, множество $\mathcal{H}$ замкнуто во всех топологиях вида $\tau_{\delta(\rho)}$, а следовательно, и в топологии $\tau_{\delta(\inf)}$, т. е. $[\mathcal{H}]_{\delta(\inf)} = \mathcal{H}$. Итак, при нашем допущении (пространство X не компактно) ни одно из соотношений $\tau_{\delta(\inf)} = \tau_{W(\inf)}$ и $\tau_{\delta(\inf)} = \tau_F$ невозможно. Полученные противоречия с неравенствами (1) и (2) доказывают импликации (1) $\Rightarrow$ (3) и (2) $\Rightarrow$ (3). Теорема доказана.

Топология $\tau_{\delta(\inf)}$ и отображения

Напомним, что отображение $\exp X \xrightarrow{g} \exp Y$ называют продолжением (на экспоненты $\exp X$ и $\exp Y$) отображения $X \xrightarrow{f} Y$, если $g(\{x\}) = \{f(x)\}$ для любой точки $x \in X$. Продолжение g называют каноническим и обозначают через $\overline{f}$, если $g(F) = [f(F)]_Y$ для каждого $F \in \exp X$. Вопрос о непрерывности продолжения $\overline{f}$ рассматривался в работах [15; 19; 20]. В частности, в статье [15] определено условие (TUC) (*topologically uniformly continuous*), при выполнении которого для отображения $X \xrightarrow{f} Y$ (пространства X и Y метризуемы) соответствующее каноническое продолжение $\exp_{H(\inf)} X \xrightarrow{\overline{f}} \exp_{H(\inf)} Y$ непрерывно.

Определение 2 [15]. Непрерывное отображение $X \xrightarrow{f} Y$ называют TUC-отображением, или отображением, удовлетворяющим условию (TUC), если для любой метрики $\rho \in \Omega_X$ существует метрика $\sigma \in \Omega_Y$, при которой отображение $(X, \rho) \xrightarrow{f} (Y, \sigma)$ равномерно непрерывно.

Приведем полученные в работе [15] результаты.

Теорема 4 [15]. *Если отображение $X \xrightarrow{f} Y$ удовлетворяет условию (TUC), то продолжение $\exp_{H(\inf)} X \xrightarrow{\overline{f}} \exp_{H(\inf)} Y$ непрерывно.*

Теорема 5 [15]. *Если пространство Y является локально компактным и имеет счетную базу, а отображение $\exp_{H(\inf)} X \xrightarrow{\overline{f}} \exp_{H(\inf)} Y$ непрерывно, то отображение $X \xrightarrow{f} Y$ удовлетворяет условию (TUC).*

Кроме того, в работе [15] отмечено, что метризуемые пространства и TUC-отображения образуют категорию (обозначена через $(M,\ \mathrm{TUC})$), и с учетом вышеуказанных теорем сформулировано нижеприведенное следствие.

Следствие 4 [15]. *Отображение* $\exp_{\mathrm{H(inf)}}$ *из категории* $(M,\ \mathrm{TUC})$ *в категорию* Top_1 *(категория* T_1*-пространств и непрерывных отображений), ставящее в соответствие каждому морфизму* $X \xrightarrow{f} Y$ *из категории* $(M,\ \mathrm{TUC})$ *его непрерывное продолжение* $\exp_{\mathrm{H(inf)}} X \xrightarrow{\overline{f}} \exp_{\mathrm{H(inf)}} Y$*, является ковариантным функтором.*

Проведем аналогичные рассмотрения относительно топологии $\tau_{\delta(\inf)}$. По-прежнему пространства X и Y метризуемы, отображение $X \xrightarrow{f} Y$ непрерывно. Нам понадобится доказанная ранее вспомогательная лемма.

Лемма 2 [15]. *Пусть* $\rho \in \Omega_X$, $\sigma \in \Omega_Y$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *и* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *– последовательности в пространстве* X *и* $\rho(a_n,\ b_n) \to 0$, *но* $\sigma(f(a_n),\ f(b_n)) \geq \varepsilon$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$, *где* $\varepsilon = \mathrm{const}$, $\varepsilon > 0$. *Тогда существует такая последовательность номеров* $n_1 < n_2 < \ldots$, *что последовательности* $(a_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ *и* $(b_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ *являются дизъюнктными* Δ*-последовательностями, а для пары соответствующих последовательностей* $\left(f\left(a_{n_i}\right)\right)_{i=1}^{\infty}$ *и* $\left(f\left(b_{n_i}\right)\right)_{i=1}^{\infty}$ *выполняется одно из следующих условий: (1) хотя бы одна из последовательностей* $\left(f\left(a_{n_i}\right)\right)_{i=1}^{\infty}$ *и* $\left(f\left(b_{n_i}\right)\right)_{i=1}^{\infty}$ *сходится в пространстве* Y, *и найдется* $\delta > 0$ *такое, что* $\sigma\left(f\left(a_{n_i}\right),\ f\left(b_{n_j}\right)\right) \geq \delta$ *для любых* $i,\ j \in \mathbb{N}$; *(2)* $\left(f\left(a_{n_i}\right)\right)_{i=1}^{\infty}$ *и* $\left(f\left(b_{n_i}\right)\right)_{i=1}^{\infty}$ *– дизъюнктные* Δ*-последовательности, и найдется* $\delta > 0$ *такое, что* $\sigma\left(f\left(a_{n_i}\right),\ f\left(b_{n_j}\right)\right) \geq \delta$ *для любых* $i,\ j \in \mathbb{N}$.

Теорема 6. *Пусть* $\rho \in \Omega_X$, $\sigma \in \Omega_Y$. *Отображение* $\exp_{\delta(\rho)} X \xrightarrow{\overline{f}} \exp_{\delta(\sigma)} Y$ *непрерывно тогда и только тогда, когда отображение* $(X,\ \rho) \xrightarrow{f} (Y,\ \sigma)$ *равномерно непрерывно.*

Доказательство. *Достаточность.* Фиксируем произвольные $F \in \exp X$ и окрестности V^- и $B_\sigma\left(\overline{f}(F),\ \varepsilon\right)^{++}$ (в $\exp_{\delta(\sigma)} Y$) множества $\overline{f}(F)$, где $V \underset{\mathrm{op}}{\subset} Y$, $\varepsilon > 0$. Поскольку $V \cap f(F) \neq \varnothing$, то можно выбрать $y \in V \cap f(F)$ и $x \in F$ такие, что $y = f(x)$, затем окрестность U точки x, для которой $f(U) \subset V$. Ясно, что $F \in U^-$, и если $P \in U^-$, то $\overline{f}(P) \in V^-$, откуда $\overline{f}\left(U^-\right) \subset V^-$.

Допустим далее, что $\overline{f}\left(B_\rho\left(F,\ \frac{1}{n}\right)^{++}\right) \not\subset B_\sigma\left(\overline{f}(F),\ \varepsilon\right)^{++}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда, учитывая соотношение $B_\sigma\left([A]_Y,\ \varepsilon\right) = B_\sigma(A,\ \varepsilon)$, справедливое при любом $\varnothing \neq A \subset Y$, для каждого $n \in \mathbb{N}$ можно выбрать $P_n \in \exp X$ так, чтобы $P_n \in B_\rho\left(F,\ \frac{1}{n}\right)$, но $B_\sigma\left(f(P_n),\ \frac{1}{n}\right) \not\subset B_\sigma\left(f(F),\ \varepsilon\right)$. Выберем точки $z_n \in B_\sigma\left(f(P_n),\ \frac{1}{n}\right) \setminus$ $\setminus B_\sigma\left(f(F),\ \varepsilon\right)$, затем $y_n \in f(P_n)$, $x_n \in P_n$ и $a_n \in F$, для которых $f(x_n) = y_n$,

$$\sigma(y_n,\ z_n) < \frac{1}{n}, \tag{4}$$

$$\rho(a_n,\ x_n) < \frac{1}{n}, \tag{5}$$

и введем обозначение $b_n = f(a_n)$. Поскольку $b_n \in f(F)$, то

$$\sigma(b_n,\ z_n) \geq \varepsilon. \tag{6}$$

Неравенства (5) и равномерная непрерывность отображения f влекут сходимость $\sigma(b_n,\ y_n) \to 0$. Однако из неравенств (4) и (6) следует, что $\sigma(b_n,\ y_n) > \frac{\varepsilon}{2}$ для всех n, начиная с некоторого номера. Получили противоречие. Достаточность доказана.

Необходимость. Допустим от противного, что отображение $(X,\ \rho)\xrightarrow{f}(Y,\ \sigma)$ не является равномерно непрерывным. Тогда, используя лемму 2, в пространстве X можно выбрать дизъюнктные Δ-последовательности $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ так, чтобы $\rho(a_n,\ b_n)\to 0$, но $\sigma\big(f(a_n),\ f(b_k)\big)\geq\delta$ для любых $n,\ k\in\mathbb{N}$, где $\delta=\text{const},\ \delta>0$. Введем обозначения $A=\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$, $A_n=A\cup\{b_n\}$. Легко проверить, что $A_n\xrightarrow[\delta(\rho)]{}A$, но $f(b_n)\notin B_\sigma\big(f(A),\ \delta\big)=B_\sigma\big(\big[f(A)\big]_Y,\ \delta\big)$, откуда $\overline{f}(A_n)\notin B_\sigma\big(\overline{f}(A),\ \delta\big)^{++}$ при любом $n\in\mathbb{N}$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Следующие теоремы аналогичны доказанным ранее теоремам 4 и 5.

Теорема 7. *Если отображение* $X\xrightarrow{f}Y$ *удовлетворяет условию* (TUC)*, то продолжение* $\exp_{\delta(\inf)}X\xrightarrow{\overline{f}}\exp_{\delta(\inf)}Y$ *непрерывно.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{G}\underset{\text{op}}{\subset}\exp_{\delta(\inf)}Y,\ \mathcal{H}=\overline{f}^{-1}(\mathcal{G})$. Покажем, что $\mathcal{H}\underset{\text{op}}{\subset}\exp_{\delta(\inf)}X$. Фиксируем произвольные $F\in\mathcal{H}$ и $\rho\in\Omega_X$. Условие (TUC) позволяет выбрать метрику $\sigma\in\Omega_Y$ так, чтобы отображение $(X,\ \rho)\xrightarrow{f}(Y,\ \sigma)$ было равномерно непрерывным. Затем выберем окрестность $\mathcal{V}$ (в $\exp Y$) множества $\overline{f}(F)$, открытую в топологии $\tau_{\delta(\sigma)}$ и содержащуюся в множестве $\mathcal{G}$. По теореме 6 отображение $\overline{f}$ непрерывно и, следовательно, существует окрестность $\mathcal{O}$ (в $\exp X$) множества F, открытая в топологии $\tau_{\delta(\rho)}$, для которой $\overline{f}(\mathcal{O})\subset\mathcal{V}$. Но поскольку $\mathcal{V}\subset\mathcal{G}$, то $\mathcal{O}\subset\mathcal{H}$. Итак, показано, что множество $\mathcal{H}$ открыто в любой топологии $\tau_{\delta(\rho)}$, где $\rho\in\Omega_X$, а следовательно, множество $\mathcal{H}$ открыто и в топологии $\tau_{\delta(\inf)}$. Теорема доказана.

Утверждение, обратное теореме 7, справедливо при дополнительном условии на пространство Y.

Теорема 8. *Если пространство* Y *является локально компактным и имеет счетную базу, а отображение* $\exp_{\delta(\inf)}X\xrightarrow{\overline{f}}\exp_{\delta(\inf)}Y$ *непрерывно, то отображение* $X\xrightarrow{f}Y$ *удовлетворяет условию* (TUC).

Доказательство. Допустим от противного, что существует метрика $\rho\in\Omega_X$ такая, что при любой метрике $\sigma\in\Omega_Y$ отображение $(X,\ \rho)\xrightarrow{f}(Y,\ \sigma)$ не является равномерно непрерывным. Фиксируем указанную метрику ρ, затем метрику $\sigma\in\Omega_Y$ произвольным образом, если пространство Y компактно, и как уплотняющую метрику, если пространство Y не компактно (см. предложение 1). В обоих случаях топология $\tau_{\delta(\inf)}$ на $\exp Y$ совпадает с топологией $\tau_{\delta(\sigma)}$ (см. предложение 4 и теорему 1). Наше допущение и лемма 2 позволяют выделить в пространстве X дизъюнктные Δ-последовательности $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ так, чтобы $\rho(a_n,\ b_n)\to 0$, но $\sigma\big(f(a_n),\ f(b_k)\big)\geq\delta$ для любых $n,\ k\in\mathbb{N}$, где $\delta=\text{const},\ \delta>0$, причем либо обе последовательности $\big(f(a_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ и $\big(f(b_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ являются Δ-последовательностями, либо одна из них, например $\big(f(a_n)\big)_{n=1}^{\infty}$, сходится. Первый случай невозможен, так как в силу предложения 2 $\sigma\big(f(a_n),\ f(b_n)\big)\to 0$, что противоречит неравенствам $\sigma\big(f(a_n),\ f(b_k)\big)\geq\delta$. Во втором случае введем обозначения $A=\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$, $A_n=A\cup\{b_n\}$. Поскольку $A_n\xrightarrow[\delta(\rho)]{}A$, то и $A_n\xrightarrow[\delta(\inf)]{}A$, следовательно, в силу непрерывности $\overline{f}$ имеем $\overline{f}(A_n)\xrightarrow[\delta(\inf)]{}\overline{f}(A)$, а в силу совпадения $\tau_{\delta(\inf)}=\tau_{\delta(\sigma)}$ (на $\exp Y$) получаем $\overline{f}(A_n)\xrightarrow[\delta(\sigma)]{}\overline{f}(A)$. Но $B_\sigma\big(\overline{f}(A),\ \delta\big)=B_\sigma\big(f(A),\ \delta\big)\not\ni f(b_n)$, откуда $\overline{f}(A_n)\notin B_\sigma\big(\overline{f}(A),\ \delta\big)^{++}$ при любом $n\in\mathbb{N}$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Теорема 7 влечет следствие, аналогичное следствию 4.

Следствие 5. *Отображение* $\exp_{\delta(\inf)}$ *из категории* $(M,\ \text{TUC})$ *в категорию* Top_1*, ставящее в соответствие каждому морфизму* $X\xrightarrow{f}Y$ *из категории* $(M,\ \text{TUC})$ *его непрерывное продолжение* $\exp_{\delta(\inf)}X\xrightarrow{\overline{f}}\exp_{\delta(\inf)}Y$*, является ковариантным функтором.*

В завершение рассмотрим вопрос об условии каноничности непрерывного продолжения $\exp_{\delta(\inf)}X\xrightarrow{g}\exp_{\delta(\inf)}Y$ отображения $X\xrightarrow{f}Y$, при выполнении которого $g=\overline{f}$.

Теорема 9. *Непрерывное продолжение* $\exp_{\delta(\inf)}X\xrightarrow{g}\exp_{\delta(\inf)}Y$ *отображения* $X\xrightarrow{f}Y$ *совпадает с каноническим продолжением* $\overline{f}$ *тогда и только тогда, когда* $g(A)=f(A)$ *для любого конечного множества* $A\subset X$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Используем соотношения $\tau_V \geq \tau_{\delta(\inf)} \geq \tau_F$. Если отображение $\exp_{\delta(\inf)} X \xrightarrow{g} \exp_{\delta(\inf)} Y$ непрерывно, то непрерывно и отображение $\exp_V X \xrightarrow{g} \exp_F Y$, и для любых $F \in \exp X$ и окрестности $\mathcal{G}$ (в $\exp_F Y$) множества $g(F)$ найдется окрестность вида $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ (в $\exp_V X$) множества F, для которой $g(\langle U_1, \ldots, U_n \rangle) \subset \mathcal{G}$. Рассмотрим следующие случаи.

1. $\overline{f}(F) \not\subset g(F)$, т. е. $\left[f(F)\right]_Y \not\subset g(F)$. Поскольку $g(F) \subset_{\text{cl}} Y$, то $f(F) \not\subset g(F)$ и, следовательно, можно выбрать точки $y \in f(F) \setminus g(F)$ и $x \in F$, где $y = f(x)$. Положим, что $\mathcal{G} = (Y \setminus \{y\})^+$, затем выберем точки $a_i \in U_i \cap F$ и введем обозначение $A = \{x, a_1, \ldots, a_n\}$. Очевидно, что $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, но $g(A) = f(A) \notin \mathcal{G}$. Получили противоречие.

2. $g(F) \not\subset \overline{f}(F)$, т. е. $g(F) \setminus \left[f(F)\right]_Y \neq \varnothing$. Положим, что $V = Y \setminus \left[f(F)\right]_Y$ и $\mathcal{G} = V^-$, затем введем обозначение $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, где $a_i \in U_i \cap F$. Как и выше, $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, но $g(A) = f(A) \notin \mathcal{G}$. Снова получили противоречие. Итак, $g(F) = \left[f(F)\right]_Y$. Теорема доказана.

Замечание к предложению 5. В работе авторов «О совпадении некоторых инфимальных топологий экспоненты метризуемого пространства» (Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Т. 34, № 1. С. 125–130) доказывается (см. теорему 3.9), что наличие счетной базы в пространстве X является не только необходимым, но и достаточным условием совпадения топологий $\tau_{\delta(\inf)}$ и $\tau_{H(\inf)}$. Появление уточнения предложения 5 раньше самого предложения 5 обусловлено более поздней публикацией настоящей статьи.

Библиографические ссылки

1. Пшеничный БН. *Выпуклый анализ и экстремальные задачи.* Москва: Наука; 1980. 320 с.
2. Борисович ЮГ, Гельман БД, Мышкис АД, Обуховский ВВ. Многозначные отображения. *Итоги науки и техники. Математический анализ.* 1982;19:127–230. EDN: WQCDZV.
3. Vietoris L. Bereiche zweiter Ordnung. *Monatshefte für Mathematik und Physik*. 1922;32:258–280. DOI: 10.1007/BF01696886.
4. Michael E. Topologies on spaces of subsets. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1951;71(1):152–182. DOI: 10.1090/S0002-9947-1951-0042109-4.
5. Hausdorff F. *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig: Verlag von Veit & Company; 1914. VIII, 476 S.
6. Wijsman RA. Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. II. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1966;123(1):32–45. DOI: 10.1090/S0002-9947-1966-0196599-8.
7. Beer G, Lechicki A, Levi *S*, Naimpally S. Distance functionals and suprema of hyperspace topologies. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 1992;162:367–381. DOI: 10.1007/BF01760016.
8. Beer G. *Topologies on closed and closed convex sets*. Dordrecht: Springer Science + Business Media; 1993. XII, 340 p. (Mathematics and its applications; volume 268). DOI: 10.1007/978-94-015-8149-3.
9. Fell JMG. A Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact non-Hausdorff space. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1962;13(3):472–476. DOI: 10.1090/S0002-9939-1962-0139135-6.
10. Beer G, Tamaki R. The infimal value functional and the uniformization of hit-and-miss hyperspace topologies. *Proceedings of the American Mathematical Society.* 1994;122(2):601–612. DOI: 10.1090/S0002-9939-1994-1264804-5.
11. Atsuji M. Uniform continuity of continuous functions of metric spaces. *Pacific Journal of Mathematics*. 1958;8(1):11–16. DOI: 10.2140/pjm.1958.8.11.
12. Beer GA, Himmelberg CJ, Prikry K, Van Vleck FS. The locally finite topology on 2^X. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1987;101(1):168–172. DOI: 10.1090/S0002-9939-1987-0897090-2.
13. Costantini C, Vitolo P. On the infimum of the Hausdorff metric topologies. *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1995;70(2):441–480. DOI: 10.1112/plms/s3-70.2.441.
14. Бедрицкий АС, Тимохович ВЛ. О топологиях экспоненты метризуемого топологического пространства. *Труды Института математики*. 2023;31(2):15–27. EDN: CWGXEI.
15. Бедрицкий АС, Тимохович ВЛ. О функториальных свойствах некоторых топологий гиперпространства. *Известия высших учебных заведений. Математика.* 2025;2:15–28. DOI: 10.26907/0021-3446-2025-2-15-28.
16. Costantini C, Levi S, Zieminska J. Metrics that generate the same hyperspace convergence. *Set-Valued Analysis*. 1993;1(2): 141–157. DOI: 10.1007/BF01027689.
17. Тимохович ВЛ, Фролова ДС. О свойствах инфимальной топологии пространства отображений. *Известия высших учебных заведений. Математика.* 2016;4:87–99. EDN: VHTEHL.
18. Hausdorff F. Erweiterung einer Homöomorphie. *Fundamenta Mathematicae.* 1930;16:353–360.
19. Бедрицкий АС, Тимохович ВЛ. Модификация условия (WO) Харриса и функториальные свойства экспоненты и расширения Волмэна. *Труды Института математики.* 2022;30(1–2):4–11. EDN: EPPBTL.
20. Бедрицкий АС. О некоторых свойствах одной топологии очановского типа. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;3:31–39. EDN: EATFLI.

Получена 16.03.2025 / исправлена 07.10.2025 / принята 24.02.2026.
Received 16.03.2025 / revised 07.10.2025 / accepted 24.02.2026.

Теоретическая
и прикладная механика

Theoretical
and practical mechanics

УДК 539.3

СВОБОДНЫЕ МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ НАНОБАЛОК С УЧЕТОМ СИЛ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА

Г. И. МИХАСЕВ[1)]***, В. В. МИСНИК***[2)]***, М. Г. БОТОГОВА***[3)]

[1)]*Харбинский политехнический университет,*
ул. Вест Дажи, 92, 150001, г. Харбин, Китай
[2)]*Пеленг, ул. Макаенка, 25, 220114, г. Минск, Беларусь*
[3)]*Белорусский государственный университет,*
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Образец цитирования:
Михасев ГИ, Мисник ВВ, Ботогова МГ. Свободные малые колебания системы параллельно ориентированных нанобалок с учетом сил Ван-дер-Ваальса. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2026;2:49–61.
EDN: KJUDSP

For citation:
Mikhasev GI, Misnik VV, Botogova MG. Free small vibrations of a system of parallel-oriented nanobeams considering van der Waals forces. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2026;2:49–61. Russian.
EDN: KJUDSP

Авторы:
Геннадий Иванович Михасев – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры астронавтики и механики школы астронавтики.
Вячеслав Владимирович Мисник – инженер-исследователь космического отделения научно-конструкторского управления «Космос».
Марина Георгиевна Ботогова – кандидат физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой био- и наномеханики механико-математического факультета.

Authors:
Gennadi I. Mikhasev, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of astronautical science and mechanics, school of astronautics.
mikhasev@hit.edu.cn
https://orcid.org/0000-0002-9409-9210
Vyacheslav V. Misnik, research and development engineer at the space division, scientific design department «Cosmos».
slava.misnik@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-7519-3343
Marina G. Botogova, PhD (physics and mathematics), docent; head of the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.
batahova@bsu.by
https://orcid.org/0000-0002-4839-450X

CC BY NC

Аннотация. Исследуются свободные малые колебания системы из *N* параллельно ориентированных нанобалок с учетом сил взаимодействия Ван-дер-Ваальса. Рассматривается вариант граничных условий, когда нижние края балок защемлены, а верхние края свободны. Система *N* нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных расщепляется на две системы – нелинейную систему, которая определяет статическое деформирование всех балок под действием межмолекулярных сил, и систему уравнений с переменными коэффициентами, описывающую свободные малые колебания в окрестности этого деформированного состояния. Показано, что для рассматриваемой механической системы существуют моды малых колебаний, совпадающие с модами одной свободной консольной балки. Детально изучены свободные малые колебания двух консольных углеродных нанотрубок (нанопинцета), а также трех нанотрубок, формы колебаний которых симметричны относительно срединной линии системы. Отмечено, что данные моды сильно зависят от сил Ван-дер-Ваальса: уменьшение зазора между трубками приводит к росту сил Ван-дер-Ваальса и, как следствие, снижению фундаментальной частоты системы, а при достижении критически малого значения зазора имеет место явление неустойчивости типа взаимного втягивания наноконсолей.

Ключевые слова: система нанобалок; нанопинцет; силы Ван-дер-Ваальса; свободные малые колебания.

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке Харбинского политехнического университета (грант № AUGA5710012624), а также в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (задание 1.7.01.2).

FREE SMALL VIBRATIONS OF A SYSTEM OF PARALLEL-ORIENTED NANOBEAMS CONSIDERING VAN DER WAALS FORCES

G. I. MIKHASEV [a], ***V. V. MISNIK*** [b], ***M. G. BOTOGOVA*** [c]

[a]*Harbin Institute of Technology, 92 West Dazhi Street, Harbin 150001, China*
[b]*Peleng, 25 Makajonka Street, Minsk 220114, Belarus*
[c]*Belarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

Corresponding author: G. I. Mikhasev (mikhasev@hit.edu.cn)

Abstract. Free small vibrations of a system of *N* parallel-oriented nanobeams are studied, taking into account van der Waals interaction forces. A boundary condition variant is considered where the lower edges are clamped and the upper edges are free. A system of *N* nonlinear partial differential equations is split into two systems. The first nonlinear system determines the static deformation of all beams under the action of intermolecular forces, while the second one with variable coefficients describes free small vibrations in the vicinity of this deformed state. It is shown that for the mechanical system under consideration, there exist small vibrations modes coinciding with the modes of a single free cantilever beam. Free small vibrations of two cantilever carbon nanotubes (nanotweezer), as well as three nanotubes, whose vibrations modes are symmetrical about the system midline, are studied in detail. It is noted that these modes are strongly dependent on van der Waals forces: a decrease in the gap between the tubes leads to an increase in van der Waals forces and, as a consequence, to a decrease in the fundamental frequency of the system, and when a critically small gap value is reached, the phenomenon of pull-in instability of nanocantilevers occurs.

Keywords: system of nanobeams; nanotweezer; van der Waals forces; free small vibrations.

Acknowledgements. This work was carried out with the financial support of the Harbin Institute of Technology (grant No. AUGA5710012624), as well as within the framework of the state programme of scientific research «Convergence-2025» (assignment 1.7.01.2).

Введение

Семейства параллельно ориентированных нанотрубок, взаимодействующих друг с другом посредством полей межмолекулярных сил, представляют собой уникальные объекты, которые находят применение в различных микро- и наноразмерных электромеханических системах (МЭМС и НЭМС соответственно). В частности, нанодатчики давления состоят из «леса» вертикально ориентированных углеродных нанотрубок (УНТ), которые упакованы между двумя гибкими мембрана-

ми [1; 2]. Пара консольных параллельно расположенных нанотрубок, взаимодействующих между собой как два бистабильных электрода, является основным элементом нанопинцетов, используемых в современной микро- и нанохирургии для манипуляций на клеточном уровне [3; 4]. Эти и другие устройства на основе нанотрубок обладают сверхвысокой чувствительностью, что позволяет интегрировать их в различные МЭМС и НЭМС, применяемые в медицине, промышленности и научных исследованиях.

Межмолекулярные силы (силы Казимира, Ван-дер-Ваальса), действующие между близко расположенными нанотрубками, оказывают решающее влияние на механическое поведение последних [5; 6]. В частности, при достаточно малом зазоре между захватами нанопинцета силы Ван-дер-Ваальса могут вызывать потерю устойчивости типа втягивания, которая приводит к взаимному прилипанию захватов и трудностям с их освобождением [3; 7–9]. Аналогичное явление может иметь место при проектировании или эксплуатации нановыключателя, состоящего из консольной электростатически активируемой нанобалки, подвешенной над неподвижным электродом-подложкой; при малом зазоре между электродами или критически большой длине наноконсоли возможно втягивание последней и падение на подложку без приложенного электрического напряжения под действием лишь межмолекулярных сил [10]. Как показано в статье [11], действие сил Ван-дер-Ваальса может значительно усиливаться, если на свободных поверхностях наноконсоли имеют место остаточные поверхностные напряжения, что может приводить к коллапсу даже при большом зазоре между электродами.

В случае подачи электрического напряжения подвижный электрод или пара взаимодействующих подвижных электродов деформируются, а при внезапном снятии напряжения возможны колебательные формы их движения, которые ввиду нелинейности межмолекулярных сил могут приводить к динамической неустойчивости [12–14]. Корректное моделирование динамики подобных МЭМС и НЭМС предполагает предварительный анализ динамических характеристик, включая собственные частоты свободных колебаний и их формы с учетом действия межмолекулярных сил притяжения. В работе [15] детально исследованы формы малых собственных колебаний электростатически активируемой консольной нанобалки, подвешенной над неподвижным электродом, в окрестности ее деформированного состояния под действием сил Казимира и Ван-дер-Ваальса. Отмечено, что учет межмолекулярных сил приводит к снижению собственных частот колебаний, при этом данный эффект оказывается наиболее заметным для наименьшей частоты колебаний. Анализ литературы показывает, что подобные исследования динамики семейства параллельно ориентированных нанотрубок с учетом их взаимодействия посредством полей межмолекулярных сил не проводились.

Целью данной работы является определение собственных частот свободных компланарных низкочастотных колебаний системы параллельно ориентированных нанотрубок, моделируемых нанобалками, в рамках классического подхода – локальной теории упругости. Предполагается, что расстояние между нанобалками достаточно мало, это приводит к появлению межмолекулярных сил взаимодействия. Рассматривается случай, когда нижние края нанобалок защемлены, а верхние края свободны, что соответствует механической системе типа «леса» нанотрубок, выращиваемых на неподвижной подложке [16], или НЭМС типа нанопинцета, состоящего из двух подвижных консольных нанобалок. Система нелинейных дифференциальных динамических уравнений, записанная в безразмерном виде, расщепляется на уравнения, определяющие статическую деформацию под действием межмолекулярных сил, и уравнения, описывающие малые колебания системы около деформированного состояния. Показано существование мод свободных малых колебаний, не зависящих от межмолекулярных сил. Подробно рассмотрена задача о свободных колебаниях системы из двух УНТ (нанопинцета), имеющая приложение в современной микро- и нанохирургии.

Постановка задачи

Рассмотрим плоскую систему из N параллельно ориентированных одностенных УНТ длиной l с внешним радиусом r, стоящих на жесткой неподвижной подложке (рис. 1). Расстояние между соседними УНТ в их основании одинаково и равно g. Верхние края трубок свободны, а нижние края жестко защемлены, хотя другие варианты граничных условий не исключаются из рассмотрения. Случай, когда все края трубок жестко защемлены, имеет место в нанодатчиках давления [1; 2]. Геометрические параметры и механические свойства всех УНТ предполагаются одинаковыми. В дальнейшем нанотрубки будем моделировать в рамках континуальной теории упругости эквивалентными нанобалками типа Эйлера – Бернулли [17], которые характеризуются эффективными модулем Юнга E, моментом инерции поперечного сечения I, площадью поперечного сечения S и плотностью материала ρ, зависящими от радиуса r и хиральности УНТ [18; 19].

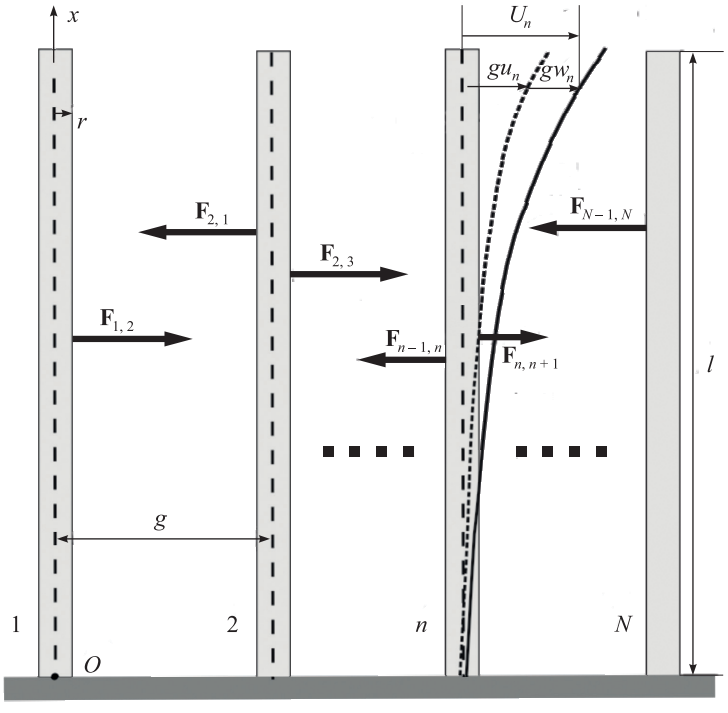


Рис. 1. Плоская система из *N* параллельно ориентированных нанотрубок под действием сил Ван-дер-Ваальса

Fig. 1. Plane system of *N* parallel-oriented nanobeams under action of van der Waals forces

Обозначим через $U_n(x_n, t)$ перемещение точки срединной линии *n*-й нанобалки, где x_n – координата точки, отсчитываемая вдоль оси балки от ее основания, а *t* – время. Учитывая одинаковую длину балок и имея намерение исследовать малые связанные колебания посредством межмолекулярных сил притяжения, далее принимаем единую систему координат для всех нанобалок, так что $x_n = x$.

Уравнения движения *n*-й нанобалки Эйлера – Бернулли имеют вид

$$EI\frac{\partial^4 U_n}{\partial x^4} + \rho S\frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2} = F_n(x), \tag{1}$$

где $F_n(x)$ – равнодействующая межмолекулярных сил, действующих на *n*-ю нанобалку со стороны соседних нанобалок.

Как показано в работе [20], при зазоре между УНТ $g > 20$ нм превалирующими являются силы Казимира, а при зазоре $g < 20$ нм следует принимать во внимание силы Ван-дер-Ваальса. Далее будем исследовать колебание механической системы с учетом действия силы притяжения Ван-дер-Ваальса. Как интегральная характеристика межатомного взаимодействия двух параллельно ориентированных УНТ, находящихся на фиксированном расстоянии *g*, данная сила определяется соотношением [5; 8]

$$F_{\text{vdW}} = \frac{3Ah_t^2}{256r^{\frac{3}{2}}g^{\frac{5}{2}}}\left(1 - \frac{20r}{3g} + \frac{140r^2}{3g^2}\right), \tag{2}$$

где *A* – постоянная Гамакера; h_t – эффективная толщина УНТ. В результате действия сил (2) две соседние нанотрубки деформируются. Пусть $g - (U_n - U_{n+1})$ – эффективный зазор между *n*-й и $(n+1)$-й нанотрубками. Тогда при $r \ll g$ сила взаимодействия между этими нанотрубками будет находиться по формуле

$$F_{n,n+1} = \frac{3Ah_t^2}{256r^{\frac{3}{2}}\left[g - (U_n - U_{n+1})\right]^{\frac{5}{2}}}.$$

Компланарная динамика семейства из N параллельно ориентированных УНТ будет описываться системой уравнений (1) для балок, где $n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$, а силы F_n находятся по формулам

$$F_1 = F_{1,2},\ F_n = F_{n,n+1} - F_{n-1,n},\ F_N = -F_{N-1,N}.$$

Перейдем к безразмерным величинам

$$U_n = gW_n,\ x = ls,\ t = \frac{\tau}{\omega_c},\ F_{n,n+1} = \alpha f_{n,n+1},\ f_{n,n+1} = \frac{1}{\left[1-\left(W_n - W_{n+1}\right)\right]^{\frac{5}{2}}},$$

где $\omega_c = \sqrt{\dfrac{EI}{\rho S l^4}}$ – характерная частота колебаний системы, а $\alpha = \dfrac{3Ah_t^2 l^4}{256EIr^{\frac{3}{2}}g^{\frac{7}{2}}}$ – безразмерный параметр Ван-дер-Ваальса.

Следуя подходу, предложенному в работе [15], представим безразмерное перемещение W_n в виде статической и динамической составляющих:

$$W_n(s,\ \tau) = u_n(s) + w_n(s,\ \tau). \tag{3}$$

Далее будем исследовать малые колебания в окрестности деформированного статического состояния системы, для которых выполняются сильные неравенства

$$w_n - w_{n+1} \ll 1 - \left(u_n - u_{n+1}\right),\ n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N. \tag{4}$$

Подставим формулу (3) в систему уравнений (1) и разложим безразмерные силы $f_{n,n+1}$ в ряды по степеням $\dfrac{w_n - w_{n+1}}{1-\left(u_n - u_{n+1}\right)}$. Тогда, удерживая в этих рядах лишь первые слагаемые, приходим к следующей системе уравнений в безразмерном виде:

$$\frac{d^4u_1}{ds^4} - \frac{\alpha}{\left[1-\left(u_1-u_2\right)\right]^{\frac{5}{2}}} = -\frac{\partial^4 w_1}{\partial s^4} + \frac{5\alpha}{2\left[1-\left(u_1-u_2\right)\right]^{\frac{7}{2}}}\left(w_1 - w_2\right) - \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2},\ \ldots,$$

$$\frac{d^4u_n}{ds^4} - \frac{\alpha}{\left[1-\left(u_n-u_{n+1}\right)\right]^{\frac{5}{2}}} + \frac{\alpha}{\left[1-\left(u_{n-1}-u_n\right)\right]^{\frac{5}{2}}} =$$

$$= -\frac{\partial^4 w_n}{\partial s^4} + \frac{5\alpha}{2\left[1-\left(u_n-u_{n+1}\right)\right]^{\frac{7}{2}}}\left(w_n - w_{n+1}\right) - \frac{5\alpha}{2\left[1-\left(u_{n-1}-u_n\right)\right]^{\frac{7}{2}}}\left(w_{n-1} - w_n\right) - \frac{\partial^2 w_n}{\partial \tau^2},\ \ldots, \tag{5}$$

$$\frac{d^4u_N}{ds^4} + \frac{\alpha}{\left[1-\left(u_{N-1}-u_N\right)\right]^{\frac{5}{2}}} = -\frac{\partial^4 w_N}{\partial s^4} - \frac{5\alpha}{2\left[1-\left(u_{N-1}-u_N\right)\right]^{\frac{7}{2}}}\left(w_{N-1} - w_N\right) - \frac{\partial^2 w_N}{\partial \tau^2}.$$

Уравнения (5) должны тождественно удовлетворяться для любого момента времени, в том числе и в случае статического равновесия системы. Отсюда получаем две системы дифференциальных уравнений, из которых нелинейные уравнения

$$\frac{d^4u_1}{ds^4} - \frac{\alpha}{\left[1-\left(u_1-u_2\right)\right]^{\frac{5}{2}}} = 0,\ \ldots,$$

$$\frac{d^4u_n}{ds^4} - \frac{\alpha}{\left[1-\left(u_n-u_{n+1}\right)\right]^{\frac{5}{2}}} + \frac{\alpha}{\left[1-\left(u_{n-1}-u_n\right)\right]^{\frac{5}{2}}} = 0,\ \ldots, \tag{6}$$

$$\frac{d^4u_N}{ds^4} + \frac{\alpha}{\left[1-\left(u_{N-1}-u_N\right)\right]^{\frac{5}{2}}} = 0$$

позволяют найти деформированное состояние системы нанобалок с учетом действия сил Ван-дер-Ваальса, а система N линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial s^4} - \frac{5\alpha}{2\left[1-\left(u_1-u_2\right)\right]^{\frac{7}{2}}}\left(w_1-w_2\right)+\frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2}=0,\ \ldots,$$

$$\frac{\partial^4 w_n}{\partial s^4} - \frac{5\alpha}{2\left[1-\left(u_n-u_{n+1}\right)\right]^{\frac{7}{2}}}\left(w_n-w_{n+1}\right)+\frac{5\alpha}{2\left[1-\left(u_{n-1}-u_n\right)\right]^{\frac{7}{2}}}\left(w_{n-1}-w_n\right)+\frac{\partial^2 w_n}{\partial \tau^2}=0,\ \ldots, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^4 w_N}{\partial s^4} + \frac{5\alpha}{2\left[1-\left(u_{N-1}-u_N\right)\right]^{\frac{7}{2}}}\left(w_{N-1}-w_N\right)+\frac{\partial^2 w_N}{\partial \tau^2}=0$$

описывает свободные малые колебания нанобалок в окрестности статического деформированного состояния.

Уравнения (6) и (7) следует дополнить граничными условиями. Для жестко защемленных нижних краев балок ($s = 0$) принимаем

$$u_n = u_n' = 0, \tag{8}$$

а для свободных верхних краев балок ($s = 1$) полагаем, что

$$u_n'' = u_n''' = 0. \tag{9}$$

Для динамических уравнений (7) принимаются аналогичные условия с заменой статического перемещения $u_n(s)$ на динамическое перемещение $w_n(s,\ \tau)$.

В итоге мы пришли к двум краевым задачам для уравнений (6) и (7), которые решаются последовательно: сначала определяется деформированное состояние системы (находятся функции u_n), а затем исследуются собственные колебания из решения уравнений (7).

Формы малых колебаний, не зависящие от сил Ван-дер-Ваальса

Система уравнений (7) имеет решение, которое не зависит от начального деформированного состояния, найденного из уравнений (6). В самом деле, суммируя все уравнения системы (7), приходим к классическому уравнению нанобалки Эйлера – Бернулли

$$\frac{\partial^4 w_\Sigma}{\partial s^4} + \frac{\partial^2 w_\Sigma}{\partial \tau^2} = 0 \tag{10}$$

относительно суммарного перемещения $w_\Sigma = \sum_{n=1}^{N} w_n$. Аналогичные уравнения получаем для любой функции $w_n(s,\ \tau)$, если $w_n = w_{n+1}$ для всех $n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$.

Уравнение (10) позволяет найти собственные частоты свободных малых колебаний системы нанобалок, которые не зависят от межмолекулярного взаимодействия. На таких частотах система совершает малые колебания, эквивалентные колебаниям одной отдельно взятой балки. В частности, для системы консольных нанобалок подобные моды есть собственные функции краевой задачи (8)–(10) (см. учебное пособие И. М. Бабакова[1]):

$$w_\Sigma = \frac{1}{2}\left\{c_1\left[\operatorname{ch}\left(\omega^{\frac{1}{2}}s\right)-\cos\left(\omega^{\frac{1}{2}}s\right)\right]+c_2\left[\operatorname{sh}\left(\omega^{\frac{1}{2}}s\right)-\sin\left(\omega^{\frac{1}{2}}s\right)\right]\right\}e^{i\omega\tau},$$

где $i = \sqrt{-1}$, а безразмерные собственные частоты $\omega^{(k)}$ – это корни уравнения

$$\operatorname{ch}\omega^{\frac{1}{2}}\cos\omega^{\frac{1}{2}}+1=0. \tag{11}$$

[1] *Бабаков И. М.* Теория колебаний : учеб. пособие для студентов высш. техн. учеб. заведений. 3-е изд., стер. М. : Наука, 1968. 560 с.

Заметим, однако, что указанное свойство о наличии мод с частотами, не зависящими от межмолекулярных сил, является следствием линеаризации исходной нелинейной системы уравнений при условии выполнения сильных неравенств (4).

Далее на примере системы из двух и трех нанобалок рассмотрим случаи, когда силы Ван-дер-Ваальса оказывают значительное влияние на собственные частоты малых колебаний.

Собственные колебания нанопинцета

Рассмотрим механическую систему из двух нанобалок ($N = 2$), изображенных на рис. 2. Данную систему можно рассматривать как упрощенную модель нанопинцета, который, как правило, состоит из двух консольных захватов, изготовленных из УНТ либо из кремния.

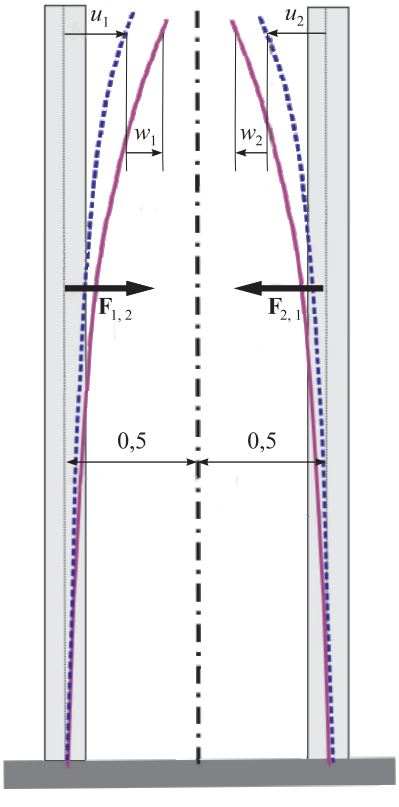


Рис. 2. Механическая модель деформирования нанопинцета, состоящего из двух нанобалок, под действием сил Ван-дер-Ваальса

Fig. 2. Mechanical model of deformation of a nanotweezer consisting of two nanobeams under action of van der Waals forces

На нижних краях рассматриваем условия жесткой заделки, верхние края предполагаем свободными. Формы колебаний, не зависящие от сил Ван-дер-Ваальса, для которых $w_1 = w_2$, рассмотрены выше для случая произвольного N. Здесь изучим формы колебаний, симметричные относительно срединной линии, разделяющей зазор. Для таких форм колебаний

$$u = u_1,\ u_2 = -u,\ u_1 - u_2 = U = 2u,\ \alpha^* = 2\alpha.$$

Тогда система уравнений (5) вырождается в одно дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4U}{ds^4} - \frac{\alpha^*}{(1-U)^{\frac{5}{2}}} = 0. \tag{12}$$

Для форм колебаний в окрестности деформированного состояния ввиду симметрии мод колебаний следует принять, что $w = w_1 = -w_2$. Тогда вместо системы двух уравнений (7) получаем одно дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial^4 w}{\partial s^4} - \frac{5\alpha^*}{2\left[1-U(s)\right]^{\frac{7}{2}}} w + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0. \tag{13}$$

Анализ деформированного состояния системы. Уравнение (12) не поддается точному решению и является объектом многочисленных исследований (см. анализ литературы в публикациях [9; 11]), в которых предлагаются различные приближенные методы интегрирования и определения критического значения параметра Ван-дер-Ваальса $\alpha^* = \alpha^*_{cr}$. Остановимся на подходе, предложенном в статье [11], согласно которому безразмерная сила Ван-дер-Ваальса

$$f(s) = \frac{\alpha^*}{(1-U)^{\frac{5}{2}}}$$

аппроксимируется степенной функцией

$$f_m(s) = f(0) + \left[f(U_T) - f(0) \right] s^m, \tag{14}$$

где

$$f(0) = \alpha^*, \;\; f(U_T) = \frac{\alpha^*}{(1-U_T)^{\frac{5}{2}}}, \tag{15}$$

U_T – перемещение свободного края консоли ($s = 1$), а m – положительное вещественное число. Здесь U_T, m – параметры, подлежащие определению. Заметим, что модель, основанная на аппроксимации (14), является обобщением ранее разработанных и хорошо апробированных линейной и квадратичной моделей [9; 10], в которых $m = 1$ и $m = 2$ соответственно.

Если принять обобщенную модель (14), (15), то решение уравнения (12) находится в виде полинома

$$U(s) = U_m(s;\, U_T,\, \alpha^*) = \frac{f(U_T) - f(0)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} s^{m+4} + \frac{f(0)}{24} s^4 + \frac{a_3}{6} s^3 + \frac{a_2}{2} s^2, \tag{16}$$

где константы $a_2,\; a_3$ определяются из граничных условий для консоли и составляют

$$a_2 = \frac{1}{2} f(0) + \frac{f(U_T) - f(0)}{m+2},\; a_3 = -f(0) - \frac{f(U_T) - f(0)}{m+1}.$$

Тогда для перемещения свободного края балки получаем неявное уравнение

$$U_T = U_m(1;\, U_T,\, \alpha^*) \equiv \frac{f(U_T) - f(0)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} + \frac{f(0)}{24} + \frac{a_3}{6} + \frac{a_2}{2}. \tag{17}$$

Уравнение (17) должно быть дополнено условием равенства сил Ван-дер-Ваальса, действующих на балку в какой-либо промежуточной точке $0 < s^* < 1$:

$$f_m(s^*) = f\left[U_m(s^*) \right]. \tag{18}$$

В частности, при $s^* = \frac{1}{2}$ уравнение (18) с учетом формул (14) и (15) принимает вид

$$1 + \frac{1}{2^m} \left[\frac{1}{(1-U_T)^{\frac{5}{2}}} - 1 \right] = \frac{1}{\left[1 - U_m\left(\frac{1}{2};\, U_T,\, \alpha^* \right) \right]^{\frac{5}{2}}}.$$

В итоге мы пришли к системе двух уравнений (17), (18) относительно показателя степени $m(\alpha^*)$ и перемещения $U_T(\alpha^*)$ свободного края консоли, решение которой параметрически зависит от координаты s^*. Процедура реализации данного метода осложнена отсутствием критерия корректного выбора точки $s = s^*$. В качестве такового, в частности, может выступать условие минимума среднеквадратичной погрешности выполнения условия (18) в других точках, отличных от $s = 0,\; s^*,\; 1$. Детальная разработка данного критерия, условие выполнения которого зависит от многих факторов (геометрических размеров консоли, зазора, порядка нелинейности в уравнении в зависимости от типа межмолекулярных сил), выходит за рамки данной статьи и может быть предметом дальнейших исследований. Заметим лишь, что в статье [10] при изучении явления втягивания наноразмерной консольной балки со стороны неподвижного электрода все расчеты выполнялись при $s^* = \frac{1}{2}$. Здесь ограничимся реализацией частного случая модели (14), (15), а именно квадратичной модели, согласно которой степень $m = 2$ фиксирована.

В этом случае уравнение (16) может быть решено численно с любой степенью точности относительно прогиба U_T при заданном значении параметра α^*, однако при этом условие (18) будет выполняться приближенно. Заметим, что данная модель хорошо себя зарекомендовала при исследовании деформирования консольной двустенной УНТ под действием межмолекулярных сил [10] и показала удовлетворительное совпадение с результатами атомистического моделирования [21].

На рис. 3 показана зависимость перемещения U_T от безразмерного параметра Ван-дер-Ваальса α^*, найденная в рамках квадратичной модели (при $m = 2$). Как видно, $U_T\left(\alpha^*\right)$ – монотонно возрастающая функция параметра α^* такая, что $U_T\left(\alpha^*\right) \to +\infty$ при $\alpha \to \alpha^*_{\text{cr}} \approx 1{,}323\,8$. Неограниченный рост перемещения $U_T\left(\alpha^*\right)$ означает, что при достижении критического значения зазора между захватами нанопинцета

$$g^{\perp\perp}_{\text{cr}} = \left(\frac{3Ah_l^2 l^4}{128\alpha^*_{\text{cr}} EIr^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{7}} \tag{19}$$

имеет место явление взаимного втягивания наноконсолей, приводящее к касанию их свободных концов. Отметим, что критическое число $\alpha^*_{\text{cr}} \approx 1{,}323\,8$ находится из условия на экстремум обратной функции $\alpha^*\left(U_T\right)$.

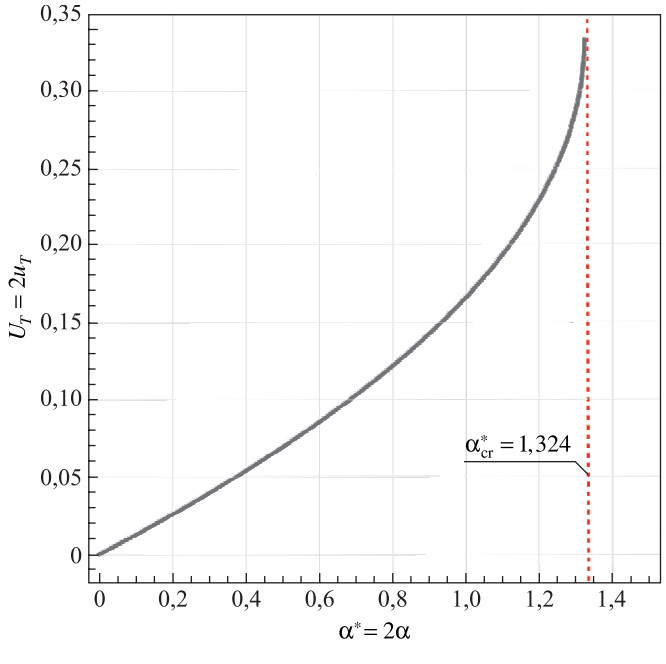


Рис. 3. Перемещение кончика захвата нанопинцета
как функция безразмерного параметра Ван-дер-Ваальса

Fig. 3. Displacement of the nanotweezer gripper tip
as a function of a dimensionless van der Waals parameter

Далее будем исследовать свободные малые колебания нанопинцета при $\alpha < \alpha^*_{\text{cr}}$, т. е. при $g > g^{\perp\perp}_{\text{cr}}$.

Анализ свободных малых колебаний. Разыскивая решение уравнения (13) в виде $w = y(s)\mathrm{e}^{i\omega\tau}$, где ω – искомая безразмерная частота собственных колебаний, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами

$$\frac{d^4 y}{ds^4} - \left[\frac{5\alpha^*}{2\left[1 - U(s)\right]^{\frac{7}{2}}} + \lambda \right] y = 0, \tag{20}$$

в котором функция $U(s)$ считается известной и находится по формуле (16) для любого фиксированного параметра α^*. Соответствующие граничные условия имеют вид

$$y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0. \tag{21}$$

Решение краевой задачи (20), (21) на собственные значения $\lambda = \omega^2$ может быть найдено численно методом прогонки, подобно тому как это сделано в статье [15]. На рис. 4, *а*, с использованием логарифмической шкалы представлены значения первых трех собственных чисел $\lambda^{(k)}$ как функций параметра α^*, а на рис. 4, *б*, изображена аппроксимация первого собственного значения непрерывной функцией. Как и следовало ожидать, с ростом параметра Ван-дер-Ваальса наименьшая собственная частота $\lambda^{(1)}$ нанопинцета быстро убывает, стремясь к нулю при $\alpha \to \alpha^*_{cr} \approx 1{,}323\,8$. Тенденция к уменьшению второго, третьего и последующих собственных значений с ростом параметра α^* менее заметна. Отметим, что $\lambda^{(k)} \neq 0$ для $k \geq 2$, если параметр α^* достигает критического значения, соответствующего эффекту потери устойчивости типа втягивания.

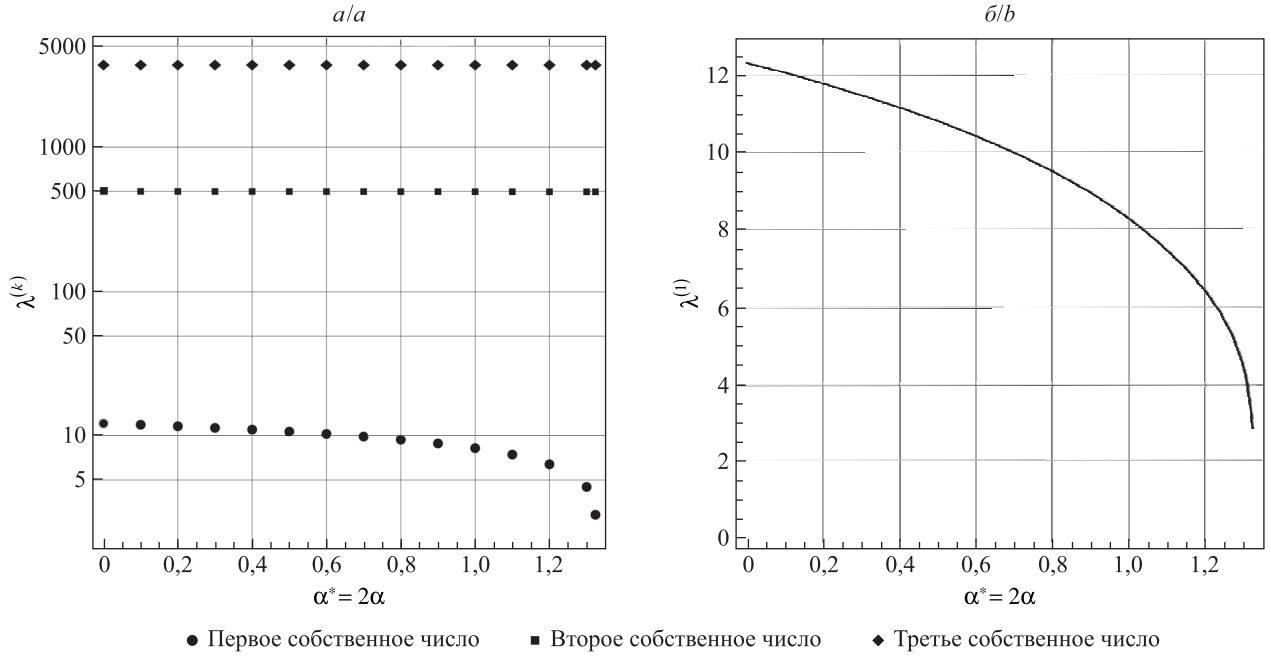


Рис. 4. Зависимость собственных значений краевой задачи (20), (21)
от безразмерного параметра Ван-дер-Ваальса: *а* – значения первых трех собственных чисел;
б – аппроксимация первого собственного значения непрерывной функцией

Fig. 4. Dependence of eigenvalues of the boundary value problem (20), (21)
on a dimensionless van der Waals parameter: *a* – the first three eigenvalues;
b – approximation of the first eigenvalue by a continuous function

При $\alpha^* = 0$ задача (20), (21) имеет собственные значения

$$\lambda^{(1)}(0) = \left(\omega^{(1)}\right)^2 \approx 12{,}360\,0,\ \ \lambda^{(2)}(0) = \left(\omega^{(2)}\right)^2 \approx 485{,}481,$$

$$\lambda^{(3)}(0) = \left(\omega^{(3)}\right)^2 \approx 3807{,}02,\ \ldots,$$

где $\omega^{(k)}$ – корни трансцендентного уравнения (11), соответствующие модам, не зависящим от сил Ван-дер-Ваальса. Таким образом, при любом фиксированном $\alpha^* \neq 0$ спектр собственных частот нанопинцета формируется из двух частей. Первая часть соответствует собственным значениям краевой задачи (20), (21), найденным при $\alpha^* \neq 0$, а вторая часть – собственным значениям краевой задачи (8)–(10). При этом номер собственной частоты нанопинцета не совпадает с номером собственного числа $\lambda^{(k)}$ краевой задачи (20), (21) или с номером собственного значения задачи (8)–(10). Отметим также, что при $\alpha^* \neq 0$ фундаментальной (наименьшей) собственной частотой механической системы становится частота $\omega_f = \sqrt{\lambda^{(1)}\left(\alpha^*\right)}$, которая меньше $\sqrt{\lambda^{(1)}(0)} \approx 3{,}516$.

Рассмотренная здесь модель нанопинцета является упрощенной. Она игнорирует действие электростатических сил, активирующих деформирование гибких захватов. Кроме того, данная модель не учитывает реальную геометрию захватов, которые могут иметь переменное сечение. Тем не менее предложенный здесь метод исследования свободных малых колебаний может быть использован для изучения нижнего

спектра собственных частот нанопинцета с более сложной геометрией захватов. Для определения высших частот с геометрией захватов, близкой к реальной геометрии, может быть использован ВКБ-подход, подобно тому как это сделано в работе [22] при исследовании колебаний нанобалки переменного сечения. Однако одной из нерешенных проблем остается корректное определение сил Ван-дер-Ваальса между наноконсолями с переменным вдоль оси сечением (например, с коническим профилем захвата).

Колебания трех и более параллельно ориентированных нанобалок

Рассмотрим механическую систему из трех нанобалок ($N = 3$). Ввиду принятой симметрии механической системы

$$u = u_1 = -u_3,\ u_2 = 0$$

и три статических уравнения (6) вырождаются в одно дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4u}{ds^4} - \frac{\alpha}{(1-u)^{\frac{5}{2}}} = 0,$$

которое совпадает с уравнением (12) с точностью до параметра Ван-дер-Ваальса (в уравнении (12) $\alpha^* = 2\alpha$). Таким образом, построенная на рис. 3 кривая, которая описывает перемещение свободного конца захвата нанопинцета (как функции параметра α^*), может быть использована для определения перемещений свободных концов первой и третьей нанобалок, что позволяет найти статическое перемещение нанобалок $u(s)$ по формуле (16), где вместо α^* следует брать α. В данном случае критическое значение зазора между УНТ, при котором происходит потеря устойчивости (взаимное втягивание и касание верхних краев), составляет

$$g_{\text{cr}}^{\perp\perp\perp} = \left(\frac{3Ah_t^2 l^4}{256\alpha_{\text{cr}}^* EIr^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{7}} < g_{\text{cr}}^{\perp\perp},$$

где $g_{\text{cr}}^{\perp\perp}$ находится по формуле (19), соответствующей нанопинцету. Как видно, присоединение к паре УНТ третьей нанотрубки приводит к уменьшению критического зазора.

Все возможные формы малых собственных колебаний системы из трех нанобалок в окрестности деформированного состояния описываются уравнениями (7) при $N = 3$. Рассмотрим осесимметричные формы колебаний, на которые сильно влияют силы Ван-дер-Ваальса. Для таких форм $w = w_1 = -w_3,\ w_2 = 0$ и система уравнений (7) вырождается в одно уравнение

$$\frac{\partial^4 w}{\partial s^4} - \frac{5\alpha}{2\left[1-u(s)\right]^{\frac{7}{2}}} w + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0,$$

которое с точностью до статического перемещения и параметра Ван-дер-Ваальса идентично уравнению (13). Из этого следует, что данные, представленные на рис. 4, *б*, могут быть использованы для определения собственных частот системы из трех параллельно ориентированных УНТ с учетом сил Ван-дер-Ваальса. Принимая во внимание равенство $\alpha^* = 2\alpha$ и установленную зависимость $\lambda^{(1)}(\alpha^*)$ на рис. 4, *б*, можно сделать вывод, что присоединение к паре УНТ дополнительной нанотрубки приводит к повышению фундаментальной частоты системы, которое можно объяснить увеличением общей жесткости системы.

Решение задачи при $N \geq 4$ сопряжено со значительными трудностями. Так, при $N = 4$ начальное статическое деформирование нанобалок определяется системой двух уравнений

$$\frac{d^4u_1}{ds^4} - \frac{\alpha}{\left[1-(u_1-u_2)\right]^{\frac{5}{2}}} = 0,$$

$$\frac{d^4u_2}{ds^4} - \frac{\alpha}{\left[1-2u_2\right]^{\frac{5}{2}}} + \frac{\alpha}{\left[1-(u_1-u_2)\right]^{\frac{5}{2}}} = 0,\ u_4 = -u_1,\ u_3 = -u_2,$$

а динамические уравнения, которые описывают свободные малые колебания, симметричные относительно срединной линии механической системы, принимают вид

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial s^4} - \frac{5\alpha\left(w_1 - w_2\right)}{2\left[1-\left(u_1-u_2\right)\right]^{\frac{7}{2}}} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^4 w_2}{\partial s^4} - \frac{5\alpha w_2}{\left(1-2u_2\right)^{\frac{7}{2}}} + \frac{5\alpha\left(w_1 - w_2\right)}{2\left[1-\left(u_1-u_2\right)\right]^{\frac{7}{2}}} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial \tau^2} = 0,\ w_4 = -w_1,\ w_3 = -w_2.$$

Решения этих задач могут быть найдены с использованием приближенных подходов, использованных выше для нанопинцета.

Заключение

Выполнена постановка задачи о свободных малых колебаниях расположенной в одной плоскости системы из N параллельно ориентированных нанобалок с учетом сил притяжения Ван-дер-Ваальса. Выведены две системы дифференциальных уравнений, первая из которых служит для определения начального статического деформирования под действием межмолекулярных сил, а вторая описывает малые колебания в окрестности деформированного состояния. Показано наличие форм колебаний, не зависящих от сил Ван-дер-Ваальса, при которых вся система балок колеблется как одна балка, свободная от этих сил. Подробно исследованы симметричные формы колебаний системы из двух и трех УНТ, для которых влияние межмолекулярных сил является значительным и приводит к снижению всех собственных частот системы балок по сравнению с формами колебаний, не зависящими от сил взаимного притяжения. На примере нанопинцета показано, что уменьшение зазора между захватами приводит к снижению фундаментальной частоты колебаний системы, а при достижении критического значения зазора между захватами наблюдается явление взаимного втягивания захватов, сопровождающееся касанием их свободных концов. Также обнаружено, что выявленная функциональная зависимость наименьшей собственной частоты симметричных колебаний нанопинцета от безразмерного параметра Ван-дер-Ваальса может быть использована для определения наименьшей частоты собственных симметричных компланарных колебаний системы из трех нанобалок.

Разработанный метод исследования малых колебаний двух нанобалок может быть обобщен для нанопинцета с более сложной геометрией захватов, а также с учетом действия электростатических сил и сил Казимира. Выполненные постановки задач могут стать основой для дальнейшего численного моделирования колебаний «леса» нанотрубок, выращиваемых на подложке. Кроме того, предполагается дальнейшее развитие метода, основанного на аппроксимации равнодействующей межмолекулярных и электростатических сил, действующих на балку, степенной функцией произвольного порядка. Данный метод позволит с большей точностью определять статическое деформирование низкоразмерной консоли как сенсорного элемента всевозможных МЭМС и НЭМС.

Библиографические ссылки

1. Bsoul A, Mohamed Ali MS, Takahata K. Piezoresistive pressure sensor using vertically aligned carbon nanotube forests. *Electronics Letters*. 2011;47(14):807–808. DOI: 10.1049/el.2011.1498.

2. Karlsson T, Hallander P, Liu F, Poot T, Åkermo M. Sensing abilities of embedded vertically aligned carbon nanotube forests in structural composites: from nanoscale properties to mesoscale functionalities. *Composites Part B: Engineering*. 2023;255:110587. DOI: 10.1016/j.compositesb.2023.110587.

3. Kim P, Lieber CM. Nanotube nanotweezers. *Science*. 1999;286(5447):2148–2150. DOI: 10.1126/science.286.5447.2148.

4. Akita S, Nakayama Y, Mizooka S, Takano Y, Okawa T, Miyatake Y, et al. Nanotweezers consisting of carbon nanotubes operating in an atomic force microscope. *Applied Physics Letters*. 2001;79(11):1691–1693. DOI: 10.1063/1.1403275.

5. Farrokhabadi A, Rach R, Abadyan M. Modeling the static response and pull-in instability of CNT nanotweezers under the Coulomb and van der Waals attractions. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*. 2013;53:137–145. DOI: 10.1016/j.physe.2013.05.003.

6. Farrokhabadi A, Mokhtari J, Rach R, Abadyan M. Modeling the influence of the Casimir force on the pull-in instability of nanowire-fabricated nanotweezers. *International Journal of Modern Physics B*. 2015;29(2):1450245. DOI: 10.1142/S0217979214502452.

7. Lee J, Kim S. Manufacture of a nanotweezer using a length controlled CNT arm. *Sensors and Actuators A: Physical*. 2005;120(1):193–198. DOI: 10.1016/j.sna.2004.11.012.

8. Bianchi G, Sorrentino A, Radi E, Castagnetti D. Electrostatic pull-in instability for tweezer architectures. *Meccanica*. 2022;57(8):1767–1781. DOI: 10.1007/s11012-022-01546-0.

9. Mikhasev G, Radi E, Misnik V. Modeling pull-in instability of CNT nanotweezers under electrostatic and van der Waals attractions based on the nonlocal theory of elasticity. *International Journal of Engineering Science*. 2024;195:104012. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2023.104012.

10. Mikhasev G, Radi E, Misnik V. Pull-in instability analysis of a nanocantilever based on the two-phase nonlocal theory of elasticy. *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 2022;8(4):1456–1466. DOI: 10.22055/jacm.2022.40638.3619.

11. Mikhasev G, Radi E. Effect of surface stresses on pull-in instability of a nanocantilever under electrostatic and intermolecular forces. *International Journal of Engineering Science*. 2025;217:104356. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2025.104356.

12. Khaniki HB, Ghayesh MH, Amabili M. A review on the statics and dynamics of electrically actuated nano and micro structures. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2021;129:103658. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103658.

13. Zang MM, Ahmadian MT. Dynamic pull-in instability of electrostatically actuated beams incorporating Casimir and van der Waals forces. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part C, Journal of Mechanical Engineering Science*. 2010;224(9): 2037–2047. DOI: 10.1243/09544062JMES1716.

14. Wang KF, Zeng S, Wang BL. Large amplitude free vibration of electrically actuated nanobeams with surface energy and thermal effects. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2017;131–132:227–233. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.06.049.

15. Mikhasev GI, Misnik VV, Botogova MG. Effect of electrostatic and intermolecular forces on free small vibrations of a microcantilever. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2024;3:62–72. EDN: OHFGGI.

16. Zhang R, Zhang Y, Zhang Q, Xie H, Qian W, Wei F. Growth of half-meter long carbon nanotubes based on Schulz – Flory distribution. *ACS Nano*. 2013;7(7):6156–6161. DOI: 10.1021/nn401995z.

17. Peddieson J, Buchanan GR, McNitt RP. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *International Journal of Engineering Science*. 2003;41(3–5):305–312. DOI: 10.1016/S0020-7225(02)00210-0.

18. Chang T. A molecular based anisotropic shell model for single-walled carbon nanotubes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2010;58(9):1422–1433. DOI: 10.1016/j.jmps.2010.05.004.

19. Huang Y, Wu J, Hwang KC. Thickness of graphene and single-wall carbon nanotubes. *Physical Review B*. 2006;74(24):245413. DOI: 10.1103/PhysRevB.74.245413.

20. Lamoreaux SK. The Casimir force: background, experiments, and applications. *Reports on Progress in Physics*. 2005;68(1): 201–236. DOI: 10.1088/0034-4885/68/1/R04.

21. Dequesnes M, Rotkin SV, Aluru NR. Calculation of pull-in voltages for carbon-nanotube-based nanoelectromechanical switches. *Nanotechnology*. 2002;13(1):120–131. DOI: 10.1088/0957-4484/13/1/325.

22. Mikhasev G. Free high-frequency vibrations of nonlocally elastic beam with varying cross-section area. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2021;33(4):1299–1312. DOI: 10.1007/s00161-021-00977-6.

Получена 18.11.2025 / исправлена 10.02.2026 / принята 17.03.2026.
Received 18.11.2025 / revised 10.02.2026 / accepted 17.03.2026.

УДК 004.942, 621.65, 531.3, 532

РАЗРАБОТКА ЦИФРОВОГО ДВОЙНИКА ТРЕХПЛУНЖЕРНОГО ГИДРАВЛИЧЕСКОГО НАСОСА

***М. А. ЖУРАВКОВ*[1)], *М. А. НИКОЛАЙЧИК*[1)], *И. Н. КАРПОВИЧ*[1)], *А. В. ПОЛЯГОШКО*[1)], *Ю ГУАНБИН*[2)], *МА ВАНЬШЭН*[3)]**

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*
[2)]*Харбинский политехнический университет, ул. Вест Дажи, 92, 150001, г. Харбин, Китай*
[3)]*Чунцинские насосные системы, ул. Цзиншэн роуд, 8, 400033, г. Чунцин, Китай*

Аннотация. Представлен процесс разработки цифрового двойника триплексного плунжерного насоса. В его основу положена математическая модель, построенная на физических принципах работы рассматриваемого устройства. Модель учитывает рабочие параметры и взаимодействие компонентов внутри насоса. Для обучения системы прогнозирования использованы данные о трех ключевых типах неисправностей. Рассматриваемыми отказами являются утечки, закупорки входного канала и износ подшипника, а также их комбинации. Цифровой двойник позволяет выявлять характерные признаки зарождающихся отказов на ранней стадии и находить конкретную причину.

Ключевые слова: цифровой двойник; плунжерный гидравлический насос; моделирование неисправностей; прогнозная модель.

Образец цитирования:
Журавков МА, Николайчик МА, Карпович ИН, Полягошко АВ, Ю Гуанбин, Ма Ваньшэн. Разработка цифрового двойника трехплунжерного гидравлического насоса. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2026;2:62–76 (на англ.).
EDN: KLETWO

For citation:
Zhuravkov MA, Nikolaitchik MA, Karpovich IN, Poliahoshko AA, Yu Guangbin, Ma Wansheng. Development of digital twin of a three-plunger hydraulic pump. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2026; 2:62–76.
EDN: KLETWO

Авторы:
Михаил Анатольевич Журавков – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики механико-математического факультета.
Михаил Александрович Николайчик – кандидат физико-математических наук, доцент; ведущий научный сотрудник кафедры теоретической и прикладной механики механико-математического факультета.
Иван Николаевич Карпович – младший научный сотрудник кафедры теоретической и прикладной механики механико-математического факультета.
Александр Владимирович Полягошко – студент механико-математического факультета. Научный руководитель – М. А. Николайчик.
Ю Гуанбин – доктор физико-математических наук; профессор школы мехатроники.
Ма Ваньшэн – руководитель исследовательского отдела.

Authors:
Michael A. Zhuravkov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of theoretical and applied mechanics, faculty of mechanics and mathematics.
zhuravkov@bsu.by
https://orcid.org/0000-0002-7420-5821
Mikhail A. Nikolaitchik, PhD (physics and mathematics), docent; leading researcher at the department of theoretical and applied mechanics, faculty of mechanics and mathematics.
nikolaitchikma@bsu.by
https://orcid.org/0000-0003-3733-1615
Ivan N. Karpovich, junior researcher at the department of theoretical and applied mechanics, faculty of mechanics and mathematics.
karpovichin@bsu.by
https://orcid.org/0009-0003-5056-3880
Alexander A. Poliahoshko, student at the faculty of mechanics and mathematics.
polsaige@gmail.com
https://orcid.org/0009-0006-3917-7075
Yu Guangbin, doctor of science (physics and mathematics); professor at the school of mechatronics engineering.
johnnyzhyq@gmail.com
https://orcid.org/0009-0007-8063-0051
Ma Wansheng, head of the research department.
wanshengma@gmail.com
https://orcid.org/0009-0009-8682-0475

DEVELOPMENT OF DIGITAL TWIN OF A THREE-PLUNGER HYDRAULIC PUMP

M. A. ZHURAVKOV[a], *M. A. NIKOLAITCHIK*[a], *I. N. KARPOVICH*[a], *A. A. POLIAHOSHKO*[a], *Yu GUANGBIN*[b], *MA WANSHENG*[c]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
[b]*Harbin Institute of Technology, 92 West Dazhi Street, Harbin 150001, China*
[c]*Chongqing Pump, 8 Jingsheng Road, Chongqing 400033, China*

Corresponding author: I. N. Karpovich (karpovichin@bsu.by)

Abstract. This paper presents the development and modelling of a digital twin of a triplex plunger pump. Its mathematical model is based on the physical process. The model takes into account the operating parameters and interaction of components inside the pump. Data on three key types of malfunctions are used to train the prediction system. The faults considered are leaks, inlet channel blockages, and bearing wear, as well as combinations thereof. The digital twin allows the characteristic signs of incipient failures to be identified at an early stage and the specific cause to be found.

Keywords: digital twin; plunger hydraulic pump; fault simulation; predictive model.

Introduction

Digital twin technology, a key enabler of digital transformation and data-driven decision-making across industries, has undergone substantial evolution over the past two decades. In the current era of digital transformation, digital twins have emerged as an essential technology, offering virtual counterparts of physical systems, processes, or products throughout their entire life cycle.

A digital twin is defined as a comprehensive set of virtual information constructs that fully describe a potential or actual physical object. Provided it is developed with sufficient fidelity, a digital twin can yield the same insights as direct examination of the manufactured physical product[1].

This technology is particularly valuable for modelling complex systems that interact with their environment in multiple ways, making long-term performance difficult to forecast. Examples include large-scale mining equipment and aircraft engines. When a physical asset is deployed, its digital counterpart can monitor and evaluate wear, fatigue, or specific stress patterns. The information generated can inform future design improvements and maintenance strategies [1].

Modelling and simulation are fundamental to digital twin development. They produce virtual representations of physical systems, enabling analysis, optimisation, and informed decision-making [2]. Techniques such as multiphysics modelling, finite element analysis, and computational fluid dynamics are commonly employed. Digital twin models generally fall into three categories: physics-based, data-driven, and hybrid models [1; 3].

Physics-based models use mathematical principles and physical laws to describe system behaviour and are widely applied in engineering disciplines like structural and fluid dynamics analysis. In contrast, data-driven models leverage machine learning and statistical methods to predict behaviour by analysing historical and real-time data. Hybrid models integrate both approaches, marrying the accuracy of physics-based modelling with the adaptability of data-driven techniques.

A core aspect of the digital twin concept is simulation that facilitates real-time, bidirectional interaction between the virtual model and the physical object. Unlike the conventional modelling, this approach incorporates real-time data gathered from the physical system via Internet of Things (IoT) technology. Parameters in the physical world can be estimated using image recognition and laser measurement, while control is managed through electrical, programmable, embedded, and networked systems [4].

Data forms the cornerstone of any digital twin. Implementing a digital twin requires the selection and integration of various data acquisition tools, including sensors, RFID tags and readers, cameras, and scanners. This data must be transmitted in real or near-real time. The significant volume, velocity, and variety of this data present challenges for the cloud transmission. Edge computing offers an effective solution by pre-processing data locally, reducing network load, and mitigating data leakage risks. Simultaneously, 5G technology facilitates an efficient real-time data transfer. Data mapping and fusion technologies, such as the commonly cited XML, are also crucial for interpreting the collected information.

[1] *Allen B. D.* Digital twins and living models at NASA [Electronic resource]. URL: https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20210023699/downloads/ASME%20Digital%20Twin%20Summit%20Keynote_final.pdf (date of access: 27.08.2025).

The IoT plays a pivotal role in advancing digital twins by supplying real-time sensor data from physical assets. IoT devices collect diverse parameters like temperature, pressure, vibration, and humidity, which are then transmitted to the digital twin platform for analysis [5]. This continuous data integration allows digital twins to deliver precise and timely insights into system performance.

As an example of industrial application, one can refer to the mining enterprise digital twin components previously developed by the authors [6; 7].

This study focuses on the development process of a digital twin for a three-plunger hydraulic pump.

Method modelling

A plunger pump is classified as a volume pump, where the working chamber's volume changes periodically due to the reciprocating motion of the plunger within the hydraulic cylinder. In terms of structure, the working chamber is isolated from the external environment by a sealing mechanism. During operation, the mechanical energy from the piston pump is converted directly into the pressure energy of the liquid [8; 9].

Figure 1 shows the crank OA rotating with uniform angular velocity of u, when the crank rotating angle $\varphi = 0 \sim \pi$, is the suction stroke, the crank rotating angle $\varphi = \pi \sim 2\pi$ is the discharge stroke. When cross head is at the left of crank, crank is rotating along clockwise.

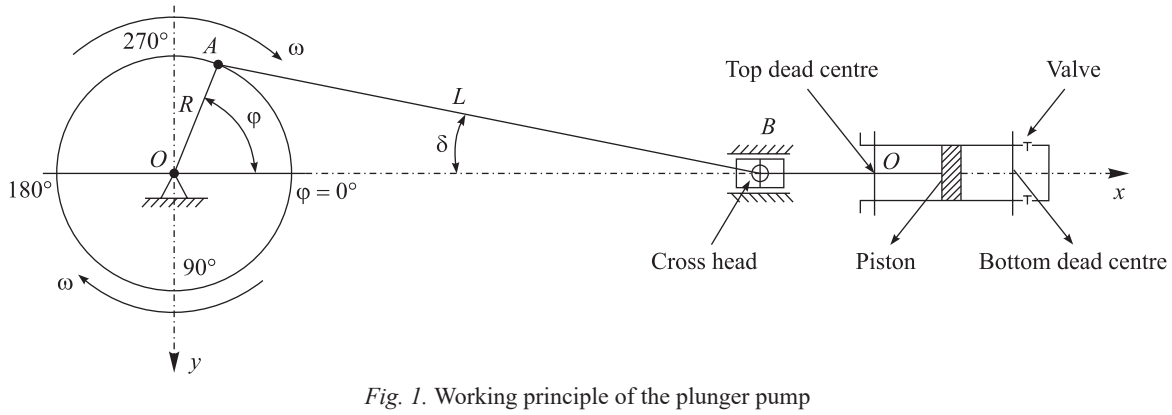


Fig. 1. Working principle of the plunger pump

Plunger displacement formula is stated as follows:

$$s \approx r\left(1 \mp \cos\varphi \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi\right).$$

Plunger velocity formula is of the form

$$u \approx r\omega\left(\sin\varphi + \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi\right).$$

The relation between the output pressure p and pump supply (productivity) Q can be stated as follows:

$$p(Q) = \begin{cases} p_{\max}, \text{ when } Q < Q_1, \\ \dfrac{A}{Q}, \text{ when } Q_1 \le Q < Q_{\max}. \end{cases}$$

Here $p_{\max}$ is the maximum pressure, and it doesn't change with the increase in the supply Q up to some value Q_1. Above that value, the output pressure declines non-linearly down to $Q_{\max}$. A corresponds to the maximum useful power of the plunger pump [10].

Specification of the model

The basis for the pump model was the stainless-steel plunger pump model 1051 from CAT pumps. The manufacturer provided open-source CAD models of the pump, which were imported into Simulink. This was utilised to create a mechanical model of the pump for 3D multibody simulation. To accurately represent the dynamic behaviour of the system, the pump was enhanced with hydraulic and electric components. Certain parameters required for developing a digital twin, such as bore, stroke, and shaft diameter, were available in the manufacturer's data sheet[2].

[2]Data sheet: 15 frame plunger pumps // Cat Pumps : website. URL: https://www.catpumps.com/sites/default/files/2020-09/1051_G_0.pdf (date of access: 27.08.2025).

Working principle of the triplex plunger pump digital twin

The principle of operation of the pump in question is as follows. The motor drive rotates the crankshaft, after which the motion is transmitted to three plungers that create pressure. Each plunger, as it moves backward, draws fluid from the container through the inlet valve. Before the liquid from the container enters the inlet valve, it passes through a 5 m long, 3 cm radius tube.

Hydraulic pump subsystem

The hydraulic pump subsystem contains three identical plunger models, the housing and the crank. Camshaft has the radius of 5 cm and width of 1.5 cm, while radius of crankshaft is 3 cm and its length is 4.6 cm. In the housing, the centre-to-centre distance between the plungers is 3.2 cm and the distance between the bearings is 20.75 cm [11].

First plunger subsystem

Consider the subsystem that represents the functioning of the first plunger. This subsystem consists of the plunger, the cylinder, the connecting rod, the hydraulic actuator, and the check valves that manage the flow to the intake and exhaust manifolds. The plunger, constructed from metal with the density of 7750 kg/m^3, measures 7.5 cm in length and has the radius of 1.2 cm. The cylinder is 11.8 cm long, with the outer radius of 2.25 cm. The gap between the plunger and the cylinder wall is 0.5 mm. The piston stroke is 0.03 m. The connecting rod measures 7.25 cm in length. Its width at the pin is 8 mm, while at the crank it is 15 mm. The height of the piston along the radius is 1.14 cm.

A hydraulic actuator functions as a mechanical device that transforms the pressure of hydraulic fluid into a mechanical motion, which can be linear, rotary, or oscillatory. It operates using a piston inside a cylinder to apply force and generate movement. The model of the hydraulic actuator can be characterised by the following equations:

$$F = A_A p_A - A_B p_B - F_c,$$

$$q_A = A_A v, \quad q_B = A_B v,$$

$$\frac{dx}{dt} = v,$$

$$v = v_R - v_C,$$

$$F_C = \begin{cases} \left(x - x_E\right) K_p \vartheta, \text{ if } x > x_E,\ v > 0, \\ \left(x - x_R\right) K_p \vartheta, \text{ if } x < x_R,\ v < 0, \\ 0 \text{ otherwise}, \end{cases}$$

$$x_E = S - x_0, \quad x_R = -x_0,$$

where F is the force developed by the cylinder; v is the cylinder rod velocity; v_R and v_C are absolute velocities of the cylinder rod and the cylinder case, respectively; A_A and A_B are piston areas at port A side and port B side; q_A and q_B are flow rates through port A into the cylinder and trough port B from the cylinder; x is the piston position; x_0 is the initial distance between the piston and cap A; F_C is hard stop force; x_E is the distance the piston can travel to fully extend from the initial position; x_R is the distance the piston can travel to fully retract from the initial position; S is the piston stroke.

The purpose of the check valve is to permit the flow in one direction and block it in the opposite direction.

$$\Delta p = p_A - p_B.$$

The valve stays closed as long as the pressure difference across it is below the cracking pressure (fig. 2). Once the cracking pressure is achieved, the valve control element (such as a spool, ball, or poppet) is pushed off its seat, creating a path between the inlet and outlet. If the flow rate is sufficiently high and the pressure keeps increasing, the passage area will expand further until the control element reaches its maximum position. At that point, the valve passage area is at its fullest.

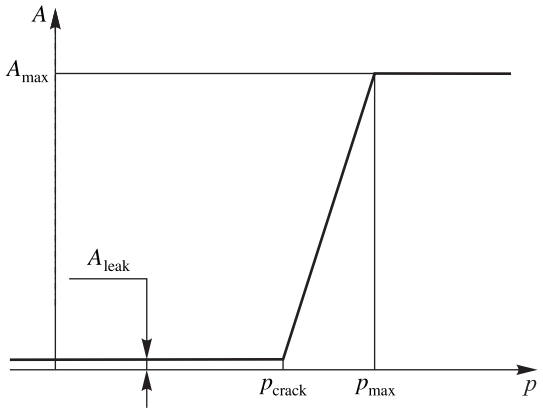


Fig. 2. Dependency between the valve passage area A and the pressure differential across

The opening area of the valve is set as a function of pressure

$$A = A(p).$$

The flow rate through the valve is determined according to the following equations:

$$q = C_D A \sqrt{\frac{2}{\rho}} \frac{p}{\left(p^2 + p_{\text{cr}}^2\right)^{\frac{1}{4}}},$$

$$A(p) = \begin{cases} A_{\text{leak}} \text{ for } p \le p_{\text{crack}}, \\ A_{\text{leak}} + k\left(p - p_{\text{crack}}\right) \text{ for } p_{\text{crack}} < p < p_{\text{max}}, \\ A_{\text{max}} \text{ for } p \ge p_{\text{max}}, \end{cases}$$

$$k = \frac{A_{\text{max}} - A_{\text{leak}}}{p_{\text{max}} - p_{\text{crack}}},$$

$$\Delta p = p_A - p_B,$$

$$p_{\text{cr}} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\text{Re}_{\text{cr}}\,\vartheta}{C_D D_H}\right)^2,$$

$$D_H = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}.$$

Here q is the flow rate, p_A and p_B are gauge pressures at the block terminals, C_D is the flow discharge coefficient, A is the instantaneous orifice passage area, $A(p)$ is the pressure-dependent orifice passage area, A_{max} is the fully open valve passage area, A_{leak} is the closed valve leakage area, p_{crack} is the valve cracking pressure, p_{max} is the pressure needed to fully open the valve, p_{cr} is the minimum pressure for turbulent flow, Re_{cr} is the critical Reynolds number, D_H is the instantaneous orifice hydraulic diameter, ρ is the fluid density, ϑ is the fluid kinematic viscosity.

For the model developed the following parameters were assumed: maximum passage area $A_{\text{max}} = 1 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2$, cracking pressure $p_{\text{crack}} = 50\,000$ Pa, maximum opening pressure $p_{\text{max}} = 140\,000$ Pa, flow discharge coefficient $C_D = 0.7$, leakage area $A_{\text{leak}} = 1 \cdot 10^{-12}\,\text{m}^2$. The block positive direction is from port A to port B. This means that the flow rate is positive if it flows from A to B, and the pressure differential is determined as $\Delta p = p_A - p_B$. The opening of the valve is directly proportional to the difference in pressure. Factors such as inertia, friction, springs, and other loads on the valve are not taken into account.

Model validation

Parameter estimation. As already mentioned, some of the parameters required to create a digital copy of the pump are known from the model description supplied by the manufacturer. However, some of the data may differ from model to model and may be specified as gaps and ranges. In this case, the digital model has to

be validated based on measured data from a real sample. For our model the unknown parameters are upper and lower pressures at which the three check valves feeding the outlet will open and close. Since these pressures depend on the temperature of the fluid transported, we don't have the exact values for them.

To start the validation of our digital twin we can roughly estimate the values of lower pressure boundary when the outlet is closed and the upper pressure boundary when the outlet is opened: $p_{\text{low}} = 50\,000$ Pa, $p_{\text{up}} = 140\,000$ Pa.

As we can see with these numbers being chosen as values of pressures, the simulated results of the model don't perfectly align with the measured ones (fig. 3). That's why we need to start the process of parameter estimation. We select parameter values, run a simulation, and calculate the difference between the simulated and the measured curves. Using this information, we adjust the parameter values and execute another simulation.

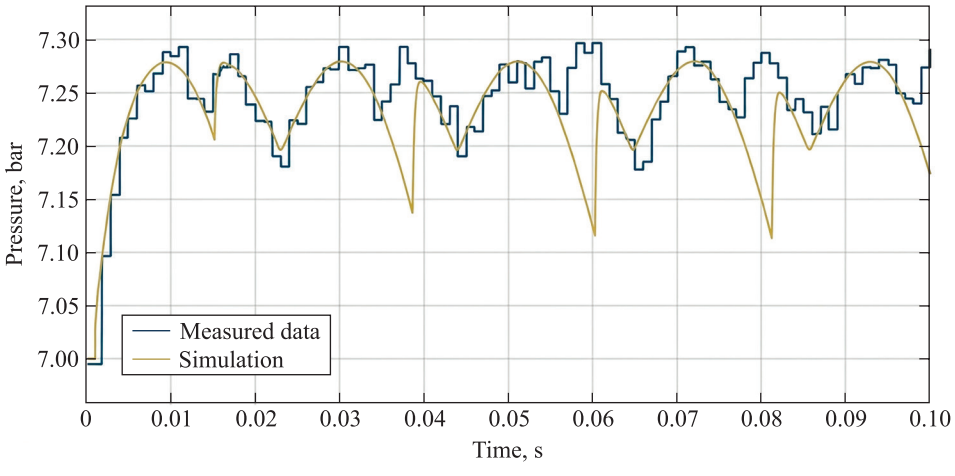


Fig. 3. Simulated output pressure compared with the measured pressure

Sum of square errors method. For the parameter estimation the sum of square errors method (SSE) is used. SSE is a part of one of the general methods most commonly used in the estimation of parameters – the least squares method. The method can be described as follows.

Consider the following variables and parameters: Y is the response or dependent variable, X is the auxiliary or independent variable, A and B are the parameters. The response variable is linear with the parameters $Y = A + BX$.

The objective of the method is to estimate the parameters of the model, based on the observed pairs of values and applying a certain criterium function (the observed pairs of values are constituted by selected values of the auxiliary variable and by the corresponding observed values of the response variable), that is observed values x_i and y_i for each pair I, where $i = 1, 2, \ldots, i, \ldots, n$. Values to be estimated are A and B, and $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_i, \ldots, Y_n)$ for n observed pair of values.

Object function (or criterium function)

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} (y_i - Y_i)^2.$$

In the least squares method, the estimators are the values of $A(a)$ and $B(b)$ which minimise the object function. Thus, one has to calculate the derivatives $\frac{\partial \Phi}{\partial A}, \frac{\partial \Phi}{\partial B}$, equate them to zero and solve the system of equations in A and B.

The solution of the system can be presented as

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x \bar{y} = \frac{1}{n}\sum y,$$

$$S_{xx} = \sum (x - \bar{x})(x - \bar{x}),\ S_{xy} = \sum (x - \bar{x})(y - \bar{y}),$$

$$b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}},\ a = \bar{y} - b\bar{x}.$$

Notice that the observed values of y, for the same set of selected values of X, depend on the collected sample. For this reason, the problem of the simple linear regression is usually presented in the form $y = A + BX + \varepsilon$, where ε is a random variable with expected value equal to zero and variance equal to σ^2. So, the expected value of y will be Y or $A + BX$ and the variance of y will be equal to the variance of ε.

The terms deviation and residual will be used in the following ways. Deviation is the difference between y_{observed} and y_{mean} $(\bar{y})$, i. e., deviation = $(y - \bar{y})$.

To analyse the adjustment of the model to the observed data, it is necessary to consider the following characteristics: total sum of squares of the deviations of the observed values [12]

$$SQ = \sum (y - \bar{y})^2.$$

The less is the difference (i. e., error), the better the chosen values are the better the correspondence between the real model and the simulated one.

After several iterations the proper values of $p_{\text{low}} = 30\,000$ Pa, $p_{\text{up}} = 120\,000$ Pa can be obtained. Now the simulated model can reproduce results that are consistent with the measured ones (fig. 4).

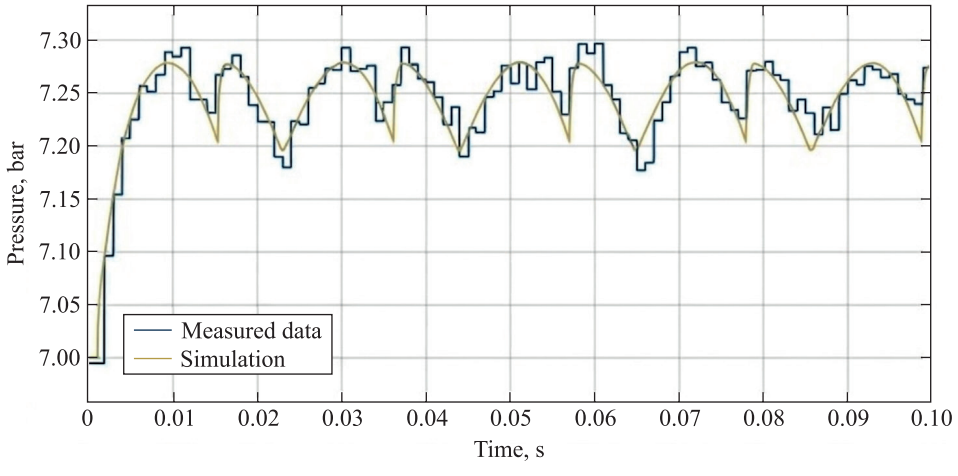


Fig. 4. Simulated output pressure compared with the measured pressure after parameter estimation

Thus, with a validated pump model, it is now possible to run simulations and obtain values for outlet volumetric flow rate, pump speed, and outlet pressure (fig. 5).

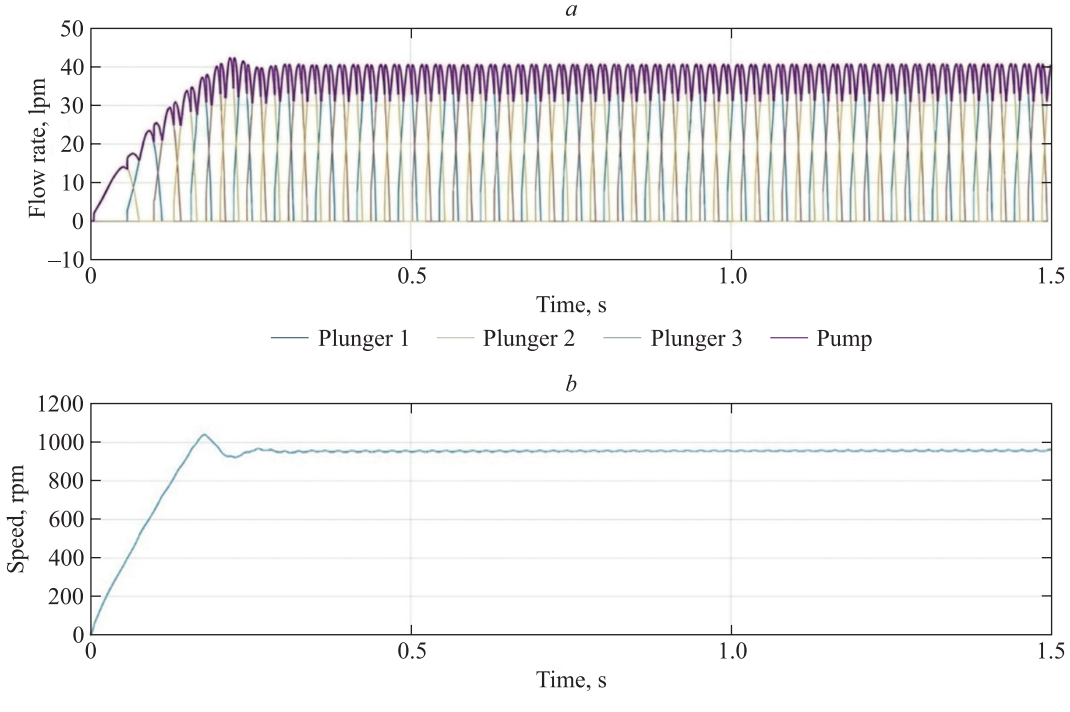


Fig. 5. Volumetric flow rate at output (*a*) and pump speed (*b*) of the pump with default configuration

The faults considered in this paper are categorised into three types: seal leakage, blocked inlet, and worn bearing.

Fault modelling. Seal leakage. The modelling of typical pump faults, such as seal leakage, is a critical step towards the predictive maintenance, which has been actively researched for hydraulic systems [13; 14]. Consider the first case. Seal leakage – fluid escapes through the seal gap between plunger and cylinder. The seal leakage

is defined by a certain parameter (hereinafter referred to as the leakage parameter). The leakage is modelled by changing this parameter in one of the pump cylinders. The leakage parameter is represented as a fraction of the maximum cylinder area. In other words, to simulate leakage, we reduce the area of the cylinder bore through which the liquid passes by taking away a fraction of it – the leakage parameter.

The formula for the leakage flow rate is written as follows:

$$Q_{\text{leak}} = C_d A_{\text{leak}} \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}},$$

$$A_{\text{leak}} = A_{\max} n_{\text{leak}},$$

where Q_{leak} is the leakage flow rate, m^3/s; C_d is the discharge coefficient; A_{leak} is the leakage orifice area, m^2; $\Delta P = P_{\text{in}} - P_{\text{out}}$ is the pressure difference in the cylinder and in the leakage area; $A_{\max}$ is the maximum orifice area without leakage; n_{leak} is the leakage fraction in inlet cylinder.

After running the simulation with a leak in the seal, the following results were obtained. From the graphs above, it can be seen that the volume flow rate at the outlet drops compared to the model without any faults (fig. 6 and 7). Also, the cylinder pressure drops in the system and the piston stroke becomes insufficient.

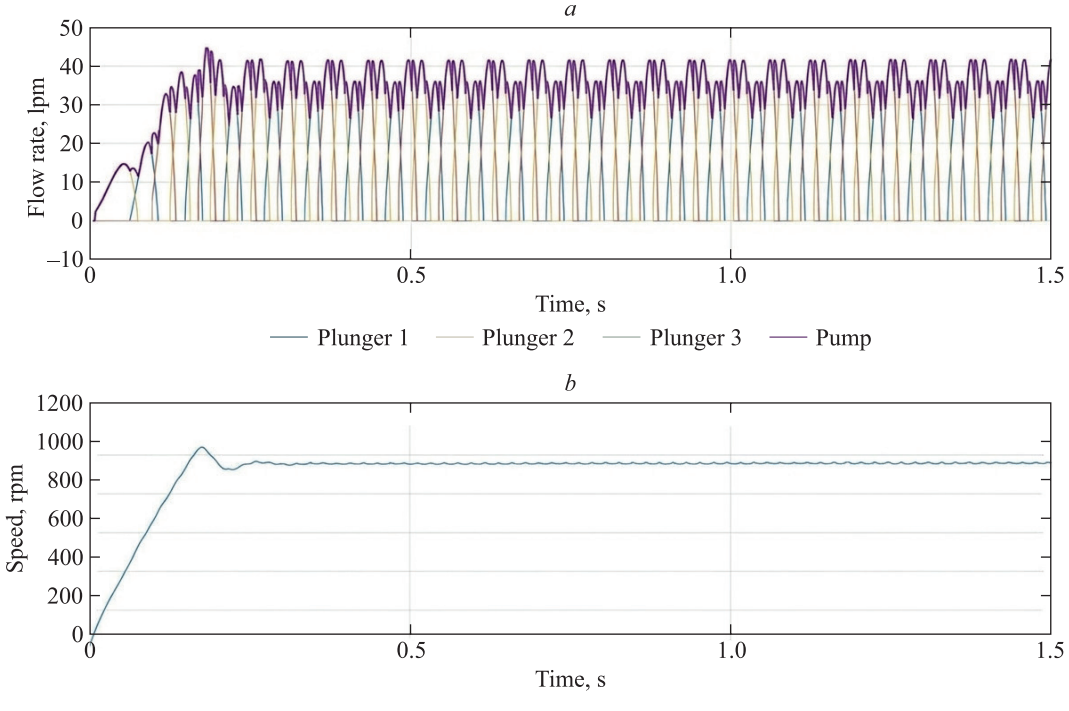


Fig. 6. Volumetric flow rate at output (*a*) and pump speed (*b*) of the pump with seal leakage

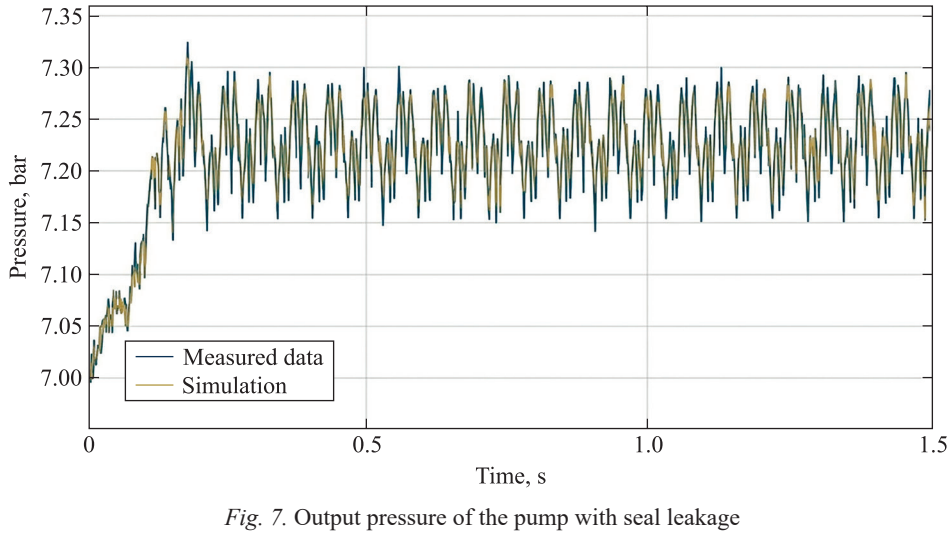


Fig. 7. Output pressure of the pump with seal leakage

Fault modelling. Blocked inlet. A blocked inlet is an inlet restriction where fluid flow is impeded due to a gap, cavitation, or a blocked valve. The case of blocked inlet in this model is realised by reducing the maximum area of the inlet valve with a coefficient of n_{block}.

$$A_{\text{leak}} = A_{\max} n_{\text{leak}}.$$

From these graphs it is easy to see that when the inlet is blocked, the flow and pressure in the pump drop dramatically (fig. 8 and 9). The pump itself becomes intermittent and there is a lack of fluid in the cylinder.

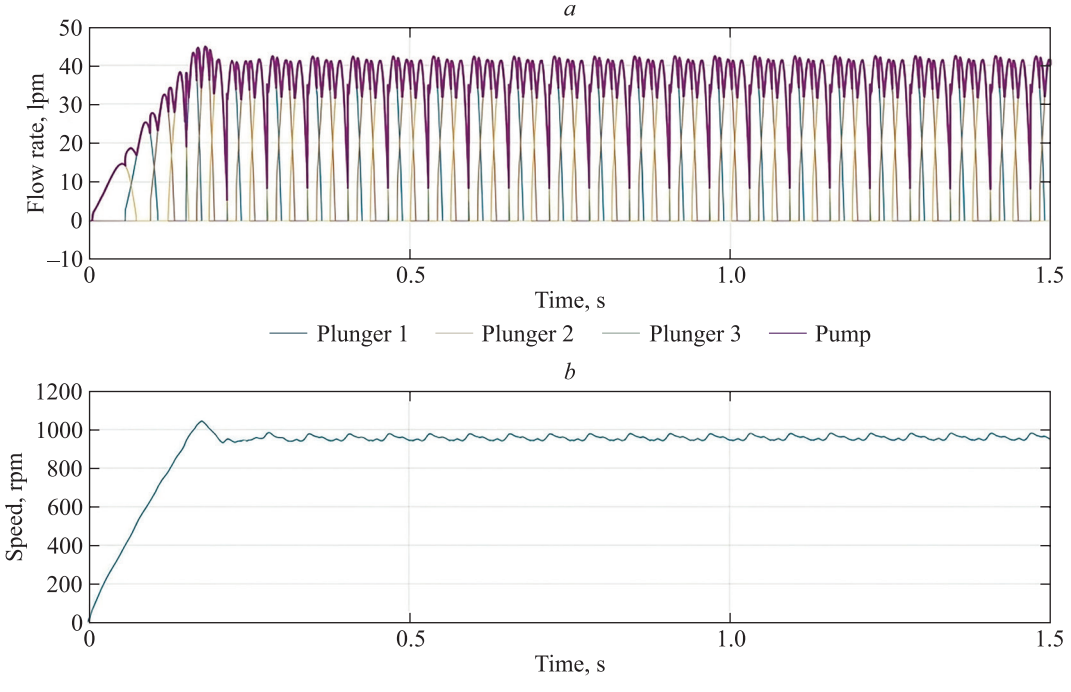


Fig. 8. Volumetric flow rate at output (*a*) and pump speed (*b*) of the pump with blocked inlet

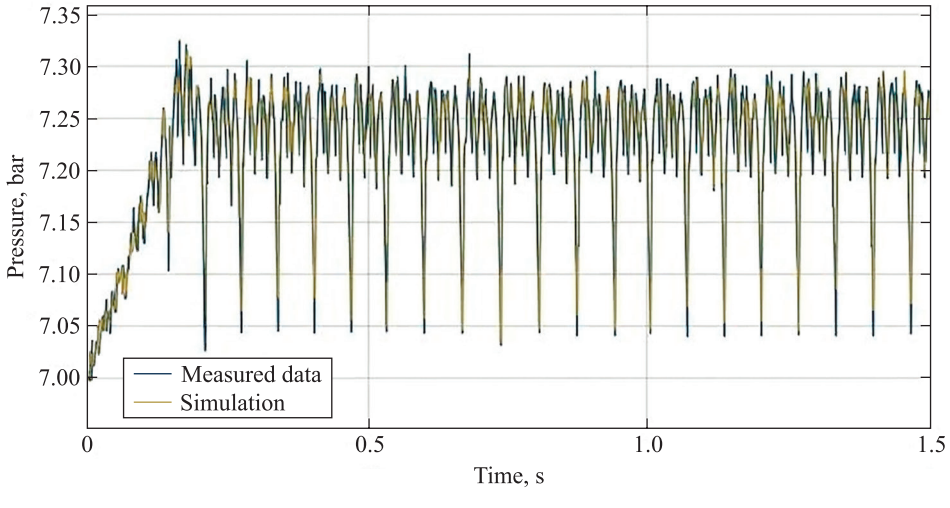


Fig. 9. Output pressure of the pump with blocked inlet

Fault modelling. Worn bearing. A worn bearing is modelled through the coefficient of viscous friction. Rotational friction can be described by the following law:

$$\tau = b\omega,$$

where τ is the resisting torque; *b* is the viscous friction coefficient; ω is the angular speed of shaft rotation. If the bearing is worn, the coefficient of viscous friction increases. This in turn requires more torque to maintain the same speed. If the shaft rotates slower, this will cause the pistons to pump less fluid. Irregularities in the shaft rotation can also result in changes in the torque transmitted, changes in the hydraulic system pressure, and vibration of the housing or rotor (fig. 10).

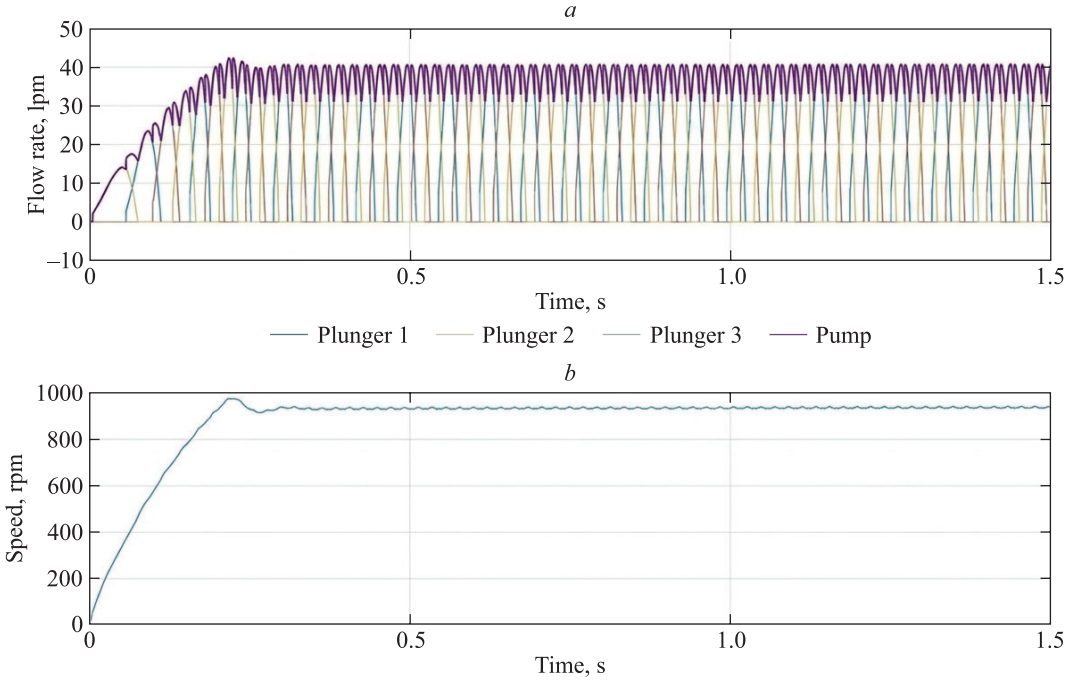


Fig. 10. Volumetric flow rate at output (*a*) and pump speed (*b*) of the pump with worn bearing. The speed has increased

Creating a predictive model

Design of experiments. Conducting these simulations is a part of design of experiments. The design of experiments is a special technique for planning, conducting and analysing experiments, using which we have the opportunity to study the influence of various factors (variables) on the result (output characteristic) as efficiently as possible. In other words, the design of experiments is a systematic way of testing in which we decide in advance what to change and how to do it. From this we can subsequently understand which parameters affect the system and estimate how much they do. This will allow us to build a mathematical model of the behaviour of the system and find the optimal settings for it [15; 16].

In our case, the parameters used in the design of experiments are the cylinder leakage fraction, inlet blockage area, and viscous friction coefficient. By utilising the simulation data to create pressure data for the pump across all potential fault conditions, a large number of scenarios can be created for the digital twin. To avoid random errors in the sensor, each scenario must be simulated a large number of times. To model a large number of simulations, an approach can be used in which the simulation takes some time before reaching a steady state. The part where the system reaches steady state is simulated only once, after which each subsequent simulation starts from the point where the system reached steady state. In this way, up to two-thirds of the computation time can be saved (fig. 11).

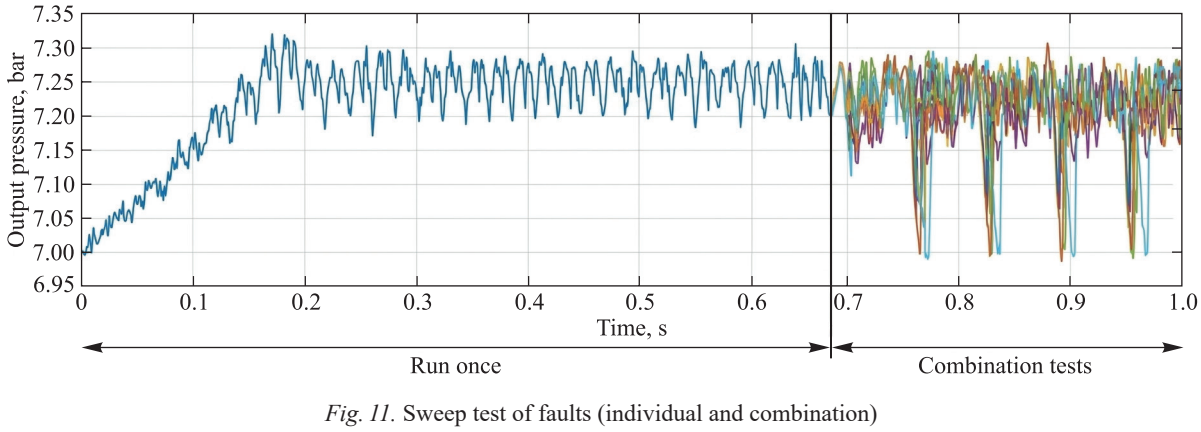


Fig. 11. Sweep test of faults (individual and combination)

Data pre-processing. The large number of simulations performed allows the creation of a large data set, which is one of the key factors for creating an adequate digital twin model, since it is on the basis of this data that the predictive model is trained. The more data on the flow rate, pressure, and pump outlet speed are obtained in different configurations of sample behaviour, the better the model will be able to predict the mechanism behaviour. However, it is important to keep in mind that when collecting data from sensors, or modelling them, the phenomenon of noise – short-term spikes that are atypical for the model in question and beyond the sensitivity of the sensor – can often appear. Therefore, before loading data into the model for its subsequent training, it is important to process the information received from the sensors, to get rid of noise and gaps. After this procedure, the processed data can be used to train the predictive model.

Having collected the leakage output pressure data at the first plunger, we load this data into the *MATLAB* environment for further processing.

As shown in fig. 12, the following problems can be seen in the raw data. There is noise in the graph, which shows up as spikes that exceed the maximum sensor sensitivity of 9 bar. There are gaps in the data (points where the output pressure has not been measured). The data is time-shifted – even though the traces are the same duration, the traces are preceded by different measurement delays.

Now it is necessary to process the information obtained: we get rid of outliers (values at the sensor limit) and fill in the gaps where the data has not been measured. To do this, we remove all areas where the output pressure exceeds the maximum value of 9 bar. We fill in the gaps using linear interpolation

$$y = y_1 + \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1),$$

where time is used as the independent variable x and the dependent parameter y is the output pressure (see fig. 12).

One can see that the noise and gaps are now absent from the processed data plot. Having tested the data processing steps on a single trace, we will apply these operations to all collected data. The graphs below show all the output pressure data before and after processing (fig. 13).

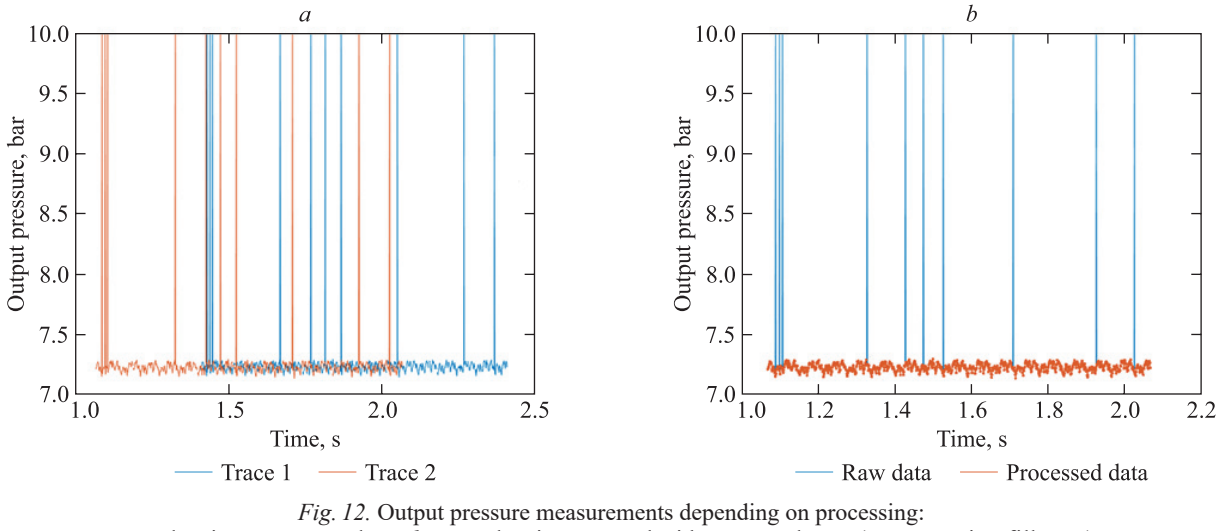


Fig. 12. Output pressure measurements depending on processing:
a – data is not processed yet; *b* – raw data is compared with processed ones (remove noise, fill gaps)

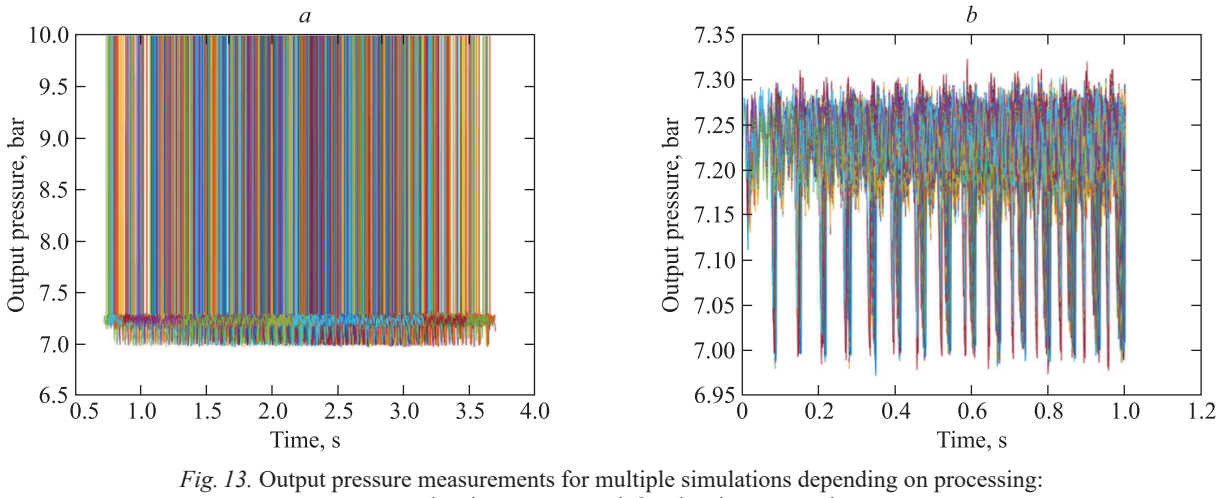


Fig. 13. Output pressure measurements for multiple simulations depending on processing:
a – data is not processed; *b* – data is processed

Display the sensor data for different pump faults and combinations of faults. We can compare how the behaviour of a triplex plunger pump changes as the parameters in the pump degrade. The cyclic nature of the time domain signal provides unique signatures for each fault and their combinations (fig. 14).

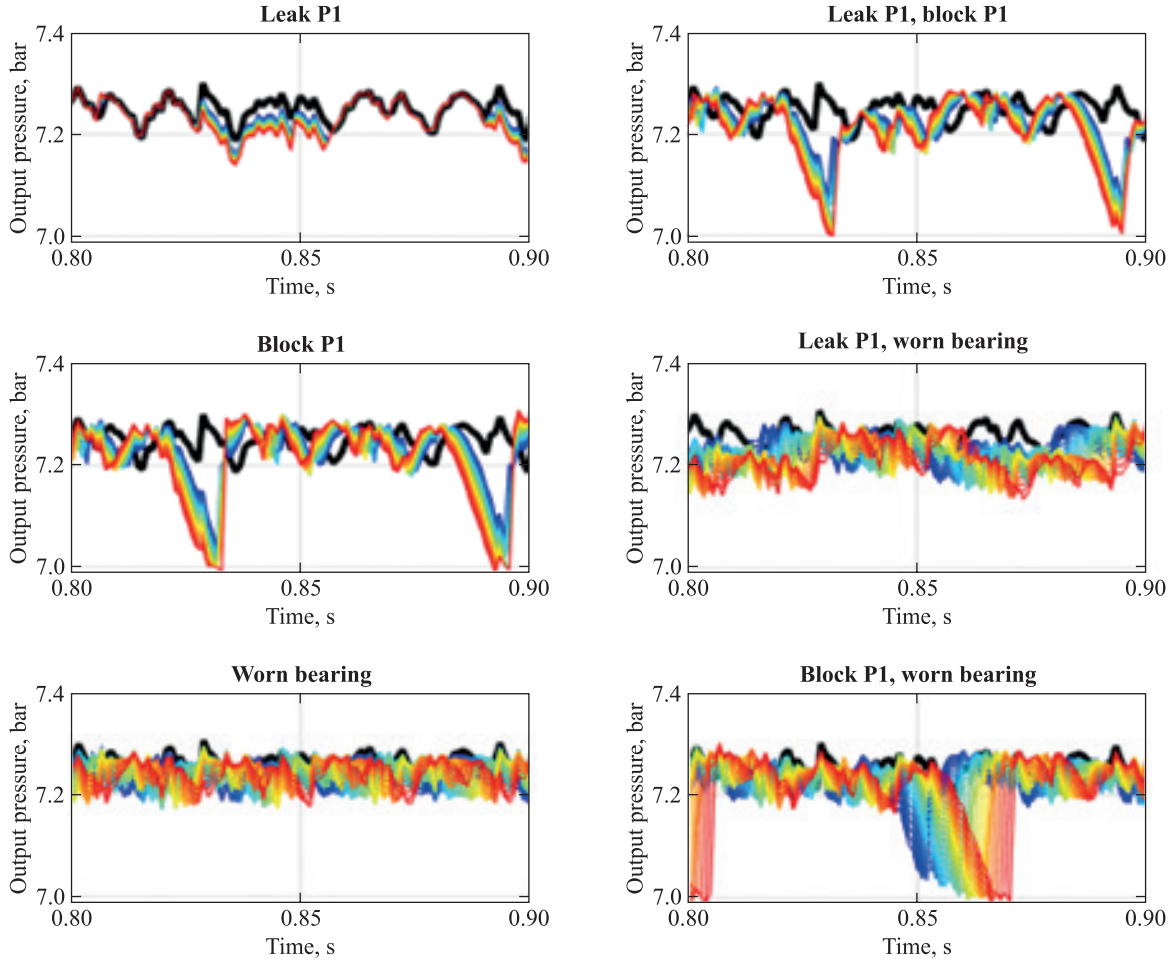


Fig. 14. Output pressure measurements for multiple simulations depending on processing

Machine learning algorithm

Fourier transforms. Once the sensor data has been processed, the patterns and distinguishing features of each fault need to be extracted from it. This information will be used as the input data for the machine learning algorithm. The signal under consideration is periodic, so we will apply Fourier transforms [17; 18].

Signal $y(t_i)$, given at discrete points in time t_i, is translated to a uniform time grid

$$t_k = k\Delta t,$$

where $k = 0, 1, \ldots, N-1$; $\Delta t = \dfrac{t_{\text{end}}}{N-1}$,

$$y_{\text{intp}}(t_k) = \text{interp1}(t_i, y(t_i), t_k).$$

To reduce spectrum leakage, Hamming window function is applied [19]

$$y_w(t_k) = y_{\text{intp}}(t_k) w_k, \; w_k = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi k}{N-1}\right),$$

where w_k are the coefficients of Hamming window.

Then the discrete Fourier transform is performed

$$Y_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_w(t_k) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}, \; n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Spectrum modulus (amplitude at each frequency)

$$P_n = |Y_n| = \sqrt{\mathrm{Re}(Y_n)^2 + \mathrm{Im}(Y_n)^2}.$$

Corresponding angular frequency

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{N\Delta t},\ n = 0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{N}{2}.$$

In our case we consider only frequencies from the range $\omega_n \in (20,\ 500)$ rad/s. For these frequencies, the signal amplitudes at these frequencies are returned. By computing Fourier transforms for all fault simulations, we can observe how the faults progress in the frequency space (fig. 15).

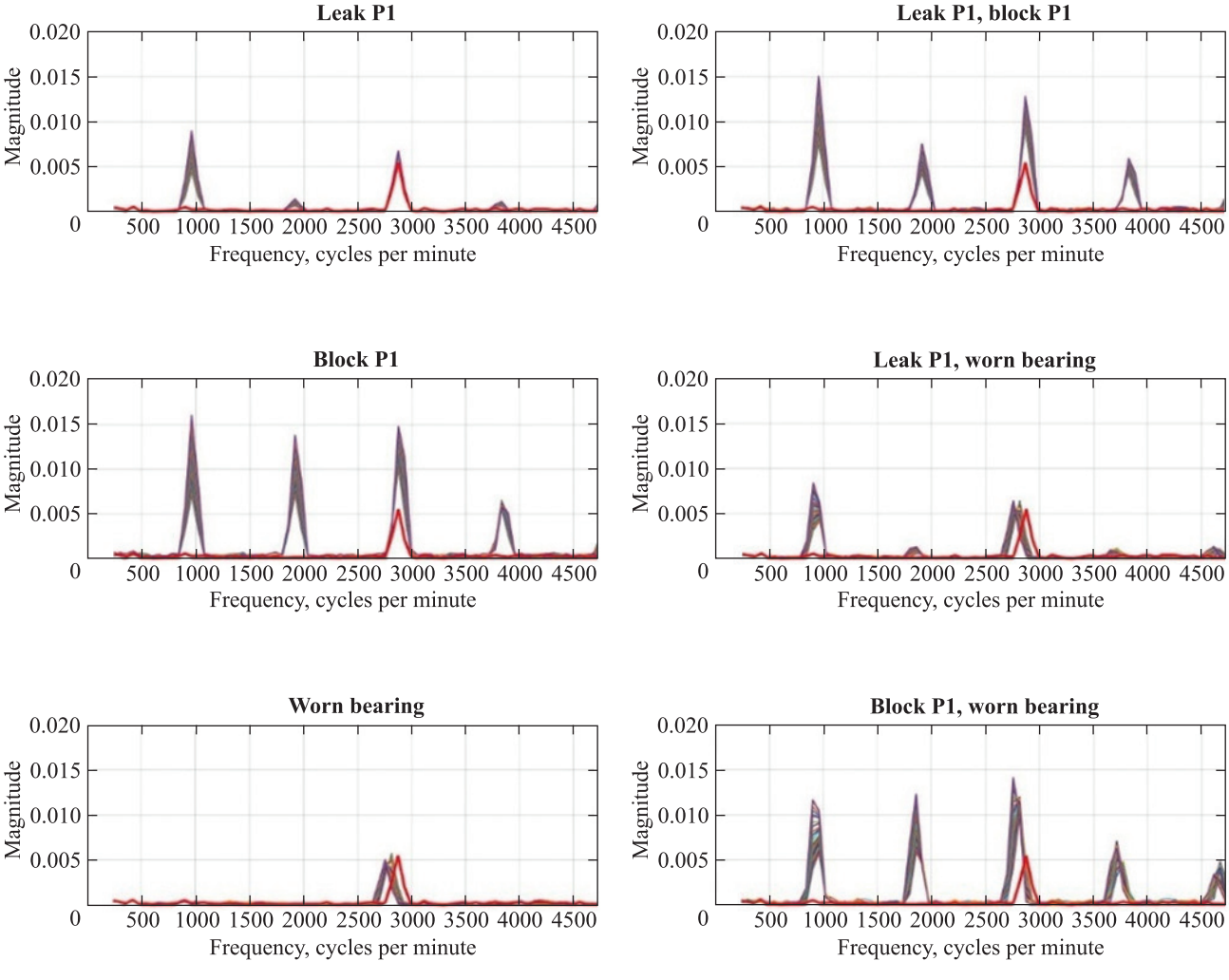


Fig. 15. Frequencies for different fault scenarios

The FFT results for every fault scenario are compiled into a table that includes the faults introduced, as well as the recorded frequencies and signal magnitudes. Consequently, the number of parameters to take into account is fairly limited. Now we can use *Machine Learning Toolbox* to import there all the necessary data for training the fault detection algorithm. We will use a subset of the generated data to validate the trained algorithm.

Extraction algorithm. The algorithm for extracting features from the pressure signals obtained from the pump model for subsequent training of the machine learning model can be described as follows. By performing Fourier transforms, the algorithm extracts the main peaks of the amplitude spectrum and also reads the mean values of the signals [20].

Definitions:

- N_p – number of points to analyse (time window);
- $T_j(t)$ – time axis for the j^{th} simulation;
- $P_j(t)$ – output pressure in the j^{th} simulation;

- $S_j(f)$ – signal amplitude spectrum $P_j(t)$;
- f_j – frequency vector corresponding to $S_j(f)$;
- $f_{nom} = 958 \cdot 3$ – nominal speed multiplied by 3 steps.

1. Converts a signal in the time domain to the frequency domain. For each test j [21]

$$\hat{P}_j(f) = \left| \mathcal{F}\left\{ P_j(t) w(t) \right\} \right|,$$

where $\mathcal{F}\{\cdot\}$ – discrete Fourier transform; $w(t)$ – Hamming window. Speed standardisation

$$f_j^{\text{norm}} = \frac{f_j}{f_{\text{norm}}}.$$

2. Extraction of peaks in the spectrum. From the spectrum $\hat{P}_j(f)$ peaks with a threshold of prominence (height relative to neighbours) are selected

$$\left\{ \left(f_{j,1}, A_{j,1}\right), \ldots, \left(f_{j,K}, A_{j,K}\right) \right\} = \text{findpeaks}\left(\hat{P}_j(f),\ \text{prominence} > 0.000\,5\right),$$

where K – number of peaks found. The found peaks are converted to relative frequencies

$$\delta f_k = \left| \frac{f_{j,k}}{f_{\text{nom}}} - 1 \right|$$

and sorted by proximity to the fundamental frequency f_{nom}:

$$\text{sort}\left(\delta f_k\right) \Rightarrow 5 \text{ closest peaks are selected.}$$

3. Calculation of average pressure values:

$$\overline{P}_j = \frac{1}{N_p} \sum_{n=1}^{N_p} P_j(t_n).$$

As a result, a string of features is formed for each test j

$$x_j = \left[\delta f_{j,1},\ A_{j,1},\ \ldots,\ \delta f_{j,5},\ A_{j,5},\ \overline{P}_j \right],$$

where $\delta f_{j,k}$ is the frequency of the k^{th} peak relative to the main peak; $A_{j,k}$ is the k^{th} peak amplitude; $\overline{P}_j$ is the average pressure.

Subsequently, we import the trained algorithm that has achieved maximum accuracy in detecting pump faults based on measured data into a digital twin. Validation using seven test cases shows that the algorithm is able to reliably detect these seven scenarios.

Conclusions

The article focuses on uncovering the significance of digital twins in various areas of human endeavour. Thus, this work has successfully developed a digital twin of a triplex plunger pump with an integrated predictive model capable of diagnosing and predicting failures based on the analysis of system input and output data. The model was trained on three separate fault cases: leakage, closed inlet, and worn bearing, as well as various combinations of them. This allowed the model to effectively recognise the characteristic signs of failures, forming a stable knowledge base for accurate prediction of the equipment's technical condition.

The resulting system demonstrates high application relevance for practical implementation in predictive maintenance strategies. Predictive maintenance reduces downtime and prevents equipment failures by enabling maintenance planning based on actual demand rather than a predefined schedule. By automating data analysis and the model's ability to adapt, the digital twin can respond quickly to changes in the operating environment. This approach forms the basis for intelligent condition management and contributes to more sustainable and reliable operation of engineering systems.

The novelties of this investigation are:

1. A system stabilisation approach was used to accelerate computation. The simulation took some time to reach a steady state. This part of the system was simulated only once, after which each subsequent simulation started from the point at which the system reached steady state.

2. Fourier transforms were used to extract the key data needed to train the predictive model. The signal was transformed from the time domain to the frequency domain, after which peaks – maximum values – were extracted from the frequency spectrum.

References

1. Parrott A, Warshaw L. *Industry 4.0 and the digital twin: manufacturing meets its match*. [S. l.]: Deloitte University Press; 2017. 18 p. (A Deloitte series on Industry 4.0, digital manufacturing enterprises, and digital supply networks).

2. Liu M, Fang S, Dong H, Xu C. Review of digital twin about concepts, technologies, and industrial applications. *Journal of Manufacturing Systems*. 2021;58(part B):346–361. DOI: 10.1016/j.jmsy.2020.06.017.

3. Hananto AL, Tirta A, Herawan SG, Idris M, Soudagar MEM, Djamari DW, et al. Digital twin and 3D digital twin: concepts, applications, and challenges in Industry 4.0 for digital twin. *Computers*. 2024;13(4):100. DOI: 10.3390/computers13040100.

4. Wang Z, Gupta R, Han K, Wang H, Ganlath A, Ammar N. Mobility digital twin: concept, architecture, case study, and future challenges. *IEEE Internet of Things Journal*. 2022;9(18):17452–17467. DOI: 10.1109/JIOT.2022.3156028.

5. Bhatti G, Mohan H, Singh RR. Towards the future of smart electric vehicles: digital twin technology. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2021;141:110801. DOI: 10.1016/j.rser.2021.110801.

6. Zhuravkov MA, Nikolaitchik MA. Construction of mine elements digital twins. *Mining Mechanical Engineering and Machine-Building*. 2023;2:5–14. Russian. EDN: ARDPNA.

7. Zhuravkov MA, Nikolaitchik MA, Wang Z, Yu G. Fatigue life prediction of hoist drum-rail contact pair based on digital twin. *Results in Engineering*. 2025;26:105271. DOI: 10.1016/j.rineng.2025.105271.

8. Andenyangtso NE, El-Suleiman A, Chollom TD, Yekini B. Development of a test stand for determining the technical condition of a plunger pump. *FUW Trends in Science & Technology Journal*. 2024;9(1):410–414.

9. Lian Z, Liu Y, Lin T, Li L, Lei Z, Han C. Study on the fluid flow rule of five-cylinder plunger pump hydraulic end. *Petroleum*. 2018;4(4):457–465. DOI: 10.1016/j.petlm.2017.11.001.

10. Velikanov NL, Naumov VA, Koryagin SI. Characteristics of plunger pumps. *Russian Engineering Research*. 2018;38(6):428–430. DOI: 10.3103/S1068798X18060175.

11. Karassik IJ, Messina JP, Cooper P, Heald CC. *Pump handbook*. 4th edition. New York: McGraw-Hill; 2007. 1632 p.

12. Cadima EL. *Fish stock assessment manual*. Rome: FAO; 2003. XX, 161 p. (FAO fisheries technical paper; No. 393).

13. Rivera DL, Scholz MR, Fritscher M, Krauss M, Schilling K. Towards a predictive maintenance system of a hydraulic pump. *IFAC-Papers Online*. 2018;51(11):447–452. DOI: 10.1016/j.ifacol.2018.08.346.

14. Green E, Taylor L. Development of a predictive maintenance framework for hydraulic systems using IoT and machine learning. *International Journal of Mechanical Industrial and Control Systems Engineering*. 2024;1(2):48–53. DOI: 10.61132/ijmicse.v1i2.83.

15. Box GEP, Hunter JS, Hunter WG. *Statistics for experimenters: design, innovation, and discovery*. 2nd edition. Hoboken: Wiley-Interscience; 2005. XVII, 633 p. (Wiley series in probability and statistics).

16. Montgomery DC. *Design and analysis of experiments*. 9th edition. Hoboken: John Wiley & Sons; 2017. XV, 734 p.

17. van Drongelen W. *Signal processing for neuroscientists: an introduction to the analysis of physiological signals*. Amsterdam: Academic Press; 2007. Chapter 6, Continuous, discrete, and fast Fourier transform; p. 91–105. DOI: 10.1016/B978-012370867-0/50006-1.

18. Ma L, Jiang A, Jiang W. The intelligent diagnosis of a hydraulic plunger pump based on the MIGLCC-DLSTM method using sound signals. *Machines*. 2024;12(12):869. DOI: 10.3390/machines12120869.

19. Patseika PG, Rouba YA, Smatrytski KA. On the approximation of conjugate functions and their derivatives on the segment by partial sums of Fourier – Chebyshev series. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2024;2:6–18. EDN: ZITNRS.

20. Lughofer E, Sayed-Mouchaweh M, editors. *Predictive maintenance in dynamic systems: advanced methods, decision support tools and real-world applications*. Cham: Springer; 2019. XIII, 567 p. DOI: 10.1007/978-3-030-05645-2.

21. Patseika PG, Rouba YA. Fejer means of rational Fourier – Chebyshev series and approximation of function $|x|^s$. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;3:18–34. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-3-18-34.

Received 19.12.2025 / revised 10.02.2026 / accepted 17.03.2026.

Теория вероятностей и математическая статистика

Probability theory and mathematical statistics

УДК 519.872

АНАЛИЗ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ-ЗАПАСАНИЯ С УЧЕТОМ ВРЕМЕНИ ОБСЛУЖИВАНИЯ ФАЗОВОГО ТИПА В УСЛОВИЯХ ГИБРИДНОЙ ПОЛИТИКИ ПОПОЛНЕНИЯ

А. МЕЛИКОВ[1)]***, Ш. ОЗКАР***[2)]

[1)]*Бакинский инженерный университет,*
ул. Гасана Алиева, 120, AZ0101, г. Хырдалан, Азербайджан
[2)]*Балыкесирский университет, кампус Чагыш, 10145, г. Балыкесир, Турция*

Аннотация. Исследуется одноканальная система обслуживания-запасания с гибридной политикой пополнения запасов. Поступление заявок подчиняется пуассоновскому процессу, а время обслуживания имеет фазовое распределение. Гибридная политика пополнения запасов определяется следующим образом: когда уровень запасов падает до точки s, применяется политика (s, Q) при условии, что количество заявок в системе меньше порогового

Образец цитирования:
Меликов А, Озкар Ш. Анализ системы обслуживания-запасания с учетом времени обслуживания фазового типа в условиях гибридной политики пополнения. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2026;2:77–88 (на англ.).
EDN: ONFKIK

For citation:
Melikov A, Ozkar S. Analysis of queuing-inventory system with phase-type service time under hybrid replenishment policy. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2026;2:77–88.
EDN: ONFKIK

Авторы:
Агаси Меликов – доктор технических наук, член-корреспондент НАН Азербайджана, профессор; проректор по научной работе, профессор кафедры математики и информатики факультета информационных и компьютерных технологий.
Шерифе Озкар – доктор философии по статистике, доцент; доцент кафедры международной торговли и логистики факультета экономики и менеджмента.

Authors:
Agassi Melikov, doctor of science (engineering), corresponding member of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, full professor; vice-rector for scientific affairs and professor at the department of mathematics and computer science, faculty of information and computer technologies.
amelikov@beu.edu.az
https://orcid.org/0000-0003-3721-7820
Serife Ozkar, PhD (statistics), docent; associate professor at the department of international trade and logistics, faculty of economics and administrative sciences.
serife.ozkar@balikesir.edu.tr
https://orcid.org/0000-0003-3475-5666

CC BY NC

значения *r*; если в этот момент количество заявок больше или равно *r*, применяется политика (s, S). Математическая модель исследуемой системы построена как многомерная непрерывная цепь Маркова. Установлено условие устойчивости, и стационарное распределение системы рассчитано с использованием матрично-геометрического метода. Представлены численные результаты.

Ключевые слова: система обслуживания-запасания; гибридная политика пополнения; распределения фазового типа; матрично-геометрический метод.

ANALYSIS OF QUEUING-INVENTORY SYSTEM WITH PHASE-TYPE SERVICE TIME UNDER HYBRID REPLENISHMENT POLICY

A. MELIKOV[a]***, S. OZKAR***[b]

[a]*Baku Engineering University, 120 Hasan Aliyev Street, Khirdalan AZ0101, Azerbaijan*
[b]*Balikesir University, Çağış Campus, Balikesir 10145, Turkey*

Corresponding author: A. Melikov (amelikov@beu.edu.az)

Abstract. We investigate a single-server queuing-inventory system with a hybrid replenishment policy. Customer arrivals follow a Poisson process and service times have a phase-type distribution. A hybrid inventory replenishment policy is defined as follows: when the inventory level falls to *s*, the (s, Q) policy is applied, provided that the number of customers in the system is less than a threshold *r*; if at this point the customers quantity is greater than or equal to *r*, the (s, S) policy is applied. The mathematical model of the investigated queuing-inventory system is constructed as a multi-dimensional continuous-time Markov chain. The stability condition is established, and steady-state distribution is calculated using the matrix-geometric method. Numerical results are presented.

Keywords: queuing-inventory system; hybrid replenishment policy; phase-type service distribution; matrix-geometric method.

Introduction

Many real-world systems can be modelled using queuing-inventory systems (QIS), which combine the properties of both queuing and inventory systems. These systems have been intensively studied by various authors in the last three decades (see the review papers [1–5]). One of the main topics encountered in the QIS models is to determine the replenishment policy (RP). In practice, policies (s, S) and (s, Q) are usually used as a RP. In (s, S) policy, when the inventory level drops to the reorder point *s*, $0 \le s < S$, an order is placed and upon replenishment the inventory level becomes *S*, where *S* denotes the maximum warehouse (storage) capacity of the system. The policy states that the replenishment quantity varies in order to fill the maximum capacity of the inventory when the reorder is placed. This RP is also commonly referred to as «Up to *S*» policy. In (s, Q) policy, when the inventory level drops to *s*, $s < \frac{S}{2}$, an order quantity of $Q = S - s$ is placed and upon replenishment the inventory level becomes a sum of the current items in the inventory and order quantity, i. e. (s, Q) policy states that the replenishment quantity is always fixed.

Above-mentioned policies do not take into account the current number of customers in the system. Therefore, these policies can lead to increasing the reorder rate or unreasonably high levels of inventory that have no buyers. In both cases, the key performance indicators of the QIS under study deteriorate. QIS models with queue-independent RPs are discussed in detail in a large amount of available literature (see, for example, recent works [6–12] and their bibliography).

Clearly, RPs that take into account both the current queue length and the inventory level are more efficient than state-independent policies. In recent years, some authors have begun to study QIS models, in which the type of RP changes only depending on the current inventory level, i. e. they do not take into account the number of customers in the queue (see [13–17] and their bibliography). To the best of our knowledge, QIS models under queue-dependent RPs have received little research. The first work devoted to the study of the QIS model, in which

the RP type changes depending on both the current inventory level and the queue length, is paper [18]. In that paper, the QIS model was considered under simple Poisson/exponential assumptions. This work is an extension of the model considered in paper [18] for the case of phase-type distribution (PH-distribution) of service time.

Model description

Customers arrive to the system according to Poisson process with parameter λ. Upon arrival, customers line up in one infinite queue. Customer service is carried out in the order of their arrival, and after servicing a customer the inventory level decreases by one item. We define the threshold parameter r, $r > 0$, for the number of customers in the system. The hybrid RP is defined as follows: (i) if the inventory level drops to s and the number of customers in the system is less than r, then $(s,\ Q)$ policy is applied; (ii) when the inventory level drops to s and the number of customers in the system is more or equal to r, then $(s,\ S)$ policy is applied.

The service times follow PH-distribution with parameters $(\beta,\ T)$. The service rate is given by $\mu = \left[\beta(-T)^{-1}e\right]^{-1}$ and T^0 is a column vector satisfying $Te + T^0 = 0$. Formulas for computation of other characteristics of the PH-distribution can be found in papers [19–21].

The customer arriving at the moment when the warehouse is empty is lost and permanently leaves the system. When inventory levels drop to zero, customers in the queue begin to lose patience, i. e., at these moments, only one customer (at any point in the queue) becomes impatient, regardless of the length of the queue. The impatience time is assumed to have an exponential distribution with parameter τ.

Lead times follow exponential distribution with parameter θ_1 for $(s,\ Q)$ policy (with parameter θ_2 for $(s,\ S)$ policy).

Our goal is to determine the key performance measures of the QIS under study.

Steady state analysis

Let $N(t)$, $I(t)$ and $J(t)$ denote the number of customers in the system, the inventory level and the phase of the service process at time t, respectively. The process $\{(N(t),\ I(t),\ J(t)),\ t \geq 0\}$ is a continuous-time Markov chain and the state space is given as follows:

$$\Omega = \{(0,\ i) : 0 \leq i \leq S\} \cup \{(n,\ i,\ j) : n \geq 1,\ 0 \leq i \leq S,\ 1 \leq j \leq m\}.$$

The level $\{(0,\ i) : 0 \leq i \leq S\}$ of dimension $(S+1)$ corresponds to the case when there are no customers in the system and the inventory level is i. The level $\{(n,\ i,\ j) : n \geq 1,\ 0 \leq i \leq S,\ 1 \leq j \leq m\}$ of dimension $m(S+1)$ corresponds to the case when there are n customers in the system, the inventory level is i and the service process is in one of m phases.

The generator matrix of the system has a block-tridiagonal matrix structure, which is given by

$$Q = \begin{bmatrix} B_0 & A_0 & & & & & & \\ C_0 & B_1 & A & & & & & \\ & C & B_1 & A & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & C & B_1 & A & & \\ & & & & C & B_2 & A & \\ & & & & & C & B_2 & A \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (1)$$

The upper-diagonal matrices in (1) are A_0 with dimension $(S+1)\times m(S+1)$ and A with dimension $m(S+1)\times m(S+1)$ are given by

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \lambda\beta & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda\beta \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \lambda I & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda I \end{pmatrix}.$$

The lower-diagonal matrices in (1) are C_0 with dimension $m(S+1)\times(S+1)$ and C with dimension $m(S+1)\times m(S+1)$ are given by

$$C_0 = \begin{pmatrix} \tau e_m & & & \\ T^0 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & T^0 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} \tau I & & & \\ T^0\beta & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & T^0\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

The main-diagonal matrices in (1) are B_0 with dimension $(S+1)\times(S+1)$, B_1 and B_2 with dimension $m(S+1)\times m(S+1)$ are given by

$$B_0 = \begin{pmatrix} -\theta_1 & & \theta_1 & & & \\ & -(\theta_1+\lambda) & & \theta_1 & & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & & -(\theta_1+\lambda) & & & \theta_1 \\ & & & -\lambda & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -\lambda \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -(\theta_1+\tau)I & & \theta_1 I & & & \\ & d_1 & & \theta_1 I & & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & & d_1 & & & \theta_1 I \\ & & & T-\lambda I & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & T-\lambda I \end{pmatrix}$$

with $d_1 = T-(\theta_1+\lambda)I$,

$$B_2 = \begin{pmatrix} -(\theta_2+\tau)I & & & & \theta_2 I \\ & d_2 & & & \theta_2 I \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & d_2 & & \theta_2 I \\ & & & T-\lambda I & \\ & & & & \ddots \\ & & & & T-\lambda I \end{pmatrix}$$

with $d_2 = T-(\theta_2+\lambda)I$.

Stability condition

Let $\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_s, \pi_{s+1}, \ldots, \pi_S)$ be the steady-state probability vector of the finite generator $D = A + B_2 + C$. This matrix is given by

$$D = \begin{pmatrix} -\theta_2 I & & & & & & \theta_2 I \\ T^0\beta & T-\theta_2 I & & & & & \theta_2 I \\ & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ & & T^0\beta & T-\theta_2 I & & & \theta_2 I \\ & & & T^0\beta & T & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & T^0\beta & T \end{pmatrix}.$$

The probability vector π satisfies the following balance equations:

$$\pi D = 0 \text{ and } \pi e = 1. \tag{2}$$

We can rewrite the equations in (2) as follows:

$$-\pi_0 \theta_2 I + \pi_1 T^0 \beta = 0,$$

$$\pi_i \left(T - \theta_2 I\right) + \pi_{i+1} T^0 \beta = 0,\ 1 \le i \le s,$$

$$\pi_i T + \pi_{i+1} T^0 \beta = 0,\ s+1 \le i \le S-1, \tag{3}$$

$$\left(\pi_0 + \ldots + \pi_s\right) \theta_2 I + \pi_S T = 0,$$

with the normalising condition

$$\sum_{i=0}^{S} \pi_i e = 1. \tag{4}$$

Adding the first three equations in (3), we obtain the following equality:

$$\sum_{i=1}^{S-1} \pi_i T - \sum_{i=0}^{s} \pi_i \theta_2 I - \sum_{i=1}^{S} \pi_i T^0 \beta = 0. \tag{5}$$

The equality given in (5) is first multiplied by the matrix T^{-1} and then by the column vector e_m on the right to obtain the following equation:

$$\sum_{i=1}^{S-1} \pi_i e_m - \sum_{i=0}^{s} \pi_i \theta_2 \left(-T\right)^{-1} e_m = \sum_{i=1}^{S} \pi_i T^0 \beta \left(-T\right)^{-1} e_m. \tag{6}$$

We obtain

$$\pi_S e_m = \sum_{i=0}^{s} \pi_i \theta_2 \left(-T\right)^{-1} e_m$$

by multiplying the last equality in (3) by the matrix T^{-1} and the vector e_m, respectively. Using the obtained equation and the service rate $\mu = \left[\beta \left(-T\right)^{-1} e\right]^{-1}$, the equation in (6) becomes as following:

$$\mu \sum_{i=1}^{S} \pi_i e_m = \sum_{i=1}^{S} \pi_i T^0. \tag{7}$$

Finally, by using the normalising condition in (4), we can rewrite the equality in (7) as follows:

$$\mu \left(1 - \pi_0 e_m\right) = \sum_{i=1}^{S} \pi_i T^0. \tag{8}$$

According to paper [22], the system is stable if and only if $\pi A e_m < \pi C e_m$. That is,

$$\lambda \left(1 - \pi_0 e_m\right) < \tau \pi_0 e_m + \sum_{i=1}^{S} \pi_i T^0. \tag{9}$$

From (8) and (9) we conclude that the following theorem is true.

Theorem 1. *The queuing-inventory system under study is stable if and only if the following condition is satisfied:*

$$\lambda < \mu + \frac{\tau \pi_0 e_m}{1 - \pi_0 e_m}.$$

By solving the system of balance equations in (3), (4), the probability vector π_0 can be obtained.

Let $x = \left(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_r,\ x_{r+1},\ \ldots\right)$ be the vector of steady-state probabilities of the generator matrix Q in (1). That is, the vector x satisfies the following balance equations:

$$xQ = 0 \text{ and } xe = 1.$$

$(S+1)$-dimensional row vector x_0 is partitioned into components represented as

$$x_0 = \left[x_0(0),\ x_0(1),\ \ldots,\ x_0(S)\right].$$

Here $x_0(i)$ gives the probability that there are zero customers in the system and the inventory level is $i,\ 0 \le i \le S$. The row vector x_n of dimension $m(S+1)$ is partitioned into components represented as

$$x_n = \left[x_n(0),\ x_n(1),\ \ldots,\ x_n(S)\right],\ n \ge 1.$$

Here $x_n(i)$ of dimension m gives the steady-state probabilities that there are n customers in the system, the inventory level is i, $0 \le i \le S$, and the service process is in one of m phases.

The following theorem can be used to calculate the probabilities of the system (see [22]).

Theorem 2. *Under the stability condition given in theorem 1 the steady-state probability vector x is obtained by solving the following system of linear equations:*

$$x_0 B_0 + x_1 C_0 = 0,$$

$$x_0 A_0 + x_1 B_1 + x_2 C = 0,$$

$$x_{n-1} A + x_n B_1 + x_{n+1} C = 0,\ 2 \le n \le r-2,$$

$$x_{r-2} A + x_{r-1}\left[B_1 + RC\right] = 0$$

with

$$x_0 e + \sum_{n=1}^{r-2} x_0 e + x_{r-1}\left(I - R\right)^{-1} e = 1,$$

where the rate matrix R is the minimal non-negative solution to the matrix quadratic equation

$$R^2 C + R B_2 + A = 0.$$

The QBD structure of the generator given in (1), under the stability condition, yields a modified matrix-geometric solution. So, the probabilities of non-boundary states are given by

$$x_{n+r} = x_{r-1} R^{n+1},\ n \ge 0.$$

The performance measures

Below there are the key performance measures of the system:

- the expected loss rate of customers due to no inventory

$$ELR_1 = \lambda x_0(0) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n(0) e;$$

- the expected loss rate of customers due to impatience

$$ELR_2 = \tau \sum_{n=1}^{\infty} x_n(0) e;$$

- the expected number of customers in the system

$$EN = \sum_{n=1}^{r-1} n x_n e + x_{r-1} R\left[r\left(I - R\right)^{-1} + R\left(I - R\right)^{-2} \right] e;$$

- the expected inventory level

$$EI = EI_1 + EI_2,$$

$$EI_1 = \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{i=1}^{S} i x_n(i) e,\ \ EI_2 = \sum_{n=r}^{\infty} \sum_{i=1}^{S} i x_n(i) e;$$

- the expected order size

$$ES = ES_1 + ES_2,$$

$$ES_1 = (S-s) \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{i=0}^{s} x_n(i) e,\ \ ES_2 = \sum_{n=r}^{\infty} \sum_{i=S-s}^{S} i x_n(S-i) e;$$

• the expected replenishment rate

$$ER = \theta_1 \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{i=0}^{s} x_n(i)\, e + \theta_2 \sum_{n=r}^{\infty} \sum_{i=0}^{s} x_n(i)\, e.$$

Numerical study

Here we examine how some performance measures behave in different scenarios. For the service times the Erlang distribution (**ERLS**), exponential distribution (**EXPS**) and hyper-exponential distribution (**HEXS**) are considered. Each of the distributions has the same mean of 1, but qualitatively different. The values of the standard deviation of **ERLS**, **EXPS** and **HEXS** are 0.707 11, 1 and 2.244 72, respectively. The distributions are normalised at a specific value for the service rate μ.

ERLS:

$$\beta = (1 \quad 0),\ T = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

EXPS:

$$\beta = (1),\ T = (-1).$$

HEXS:

$$\beta = (0.9 \quad 0.1),\ T = \begin{pmatrix} -1.9 & 0 \\ 0 & -0.19 \end{pmatrix}.$$

The tables and figures in this section give the behaviour of some performance measures when the arrival rate λ changes and when the service rate μ changes. For this purpose, we fix some parameter values in all tables and figures. That is, the replenishment rate when the system operates under (s, Q) policy is $\theta_1 = 1$, the replenishment rate when the system operates under (s, S) policy is $\theta_2 = 1.5$, the impatient rate is $\tau = 2$, and the maximum inventory level is $S = 20$. In the examples given in tables and figures, when the service rate changes, the arrival rate is fixed as $\lambda = 2$ and when the arrival rate changes, the service rate is fixed as $\mu = 4$.

The way the expected number of customers in the system *EN* changes when there are different service time distributions by varying the threshold value as $r = 4, 8$ and the reorder point as $s = 3, 7$ is given in table 1 when the values of λ are increased and in table 2 when the values of μ are increased. When the arrival rate of customers increases, the traffic intensity increases, i. e. more customers are expected to be in the system. This observation is represented in table 1 for all scenarios. It is seen more clearly in the dense system that the coefficients of variation (CV) in service time distributions have an effect on *EN* values. The value of CV is 1 in **EXPS**, less than 1 in **ERLS** and greater than 1 in **HEXS**. Table 1 shows that when the value of CV increases, the values of *EN* also increase. This increase is less in the system with lower dense (i. e., see the case of $\lambda = 2.2$) and more in the system with higher dense (i. e., see the case of $\lambda = 3.8$).

Table 1

The expected number of customers in the system for arrival rate

s	λ	*r* = 4			*r* = 8		
		ERLS	**EXPS**	**HEXS**	**ERLS**	**EXPS**	**HEXS**
3	2.2	1.015	1.174	2.455	1.013	1.171	2.443
	2.6	1.471	1.752	3.990	1.462	1.738	3.958
	3.0	2.247	2.754	6.756	2.211	2.709	6.681
	3.4	3.908	4.921	12.785	3.791	4.791	12.629
	3.8	10.051	12.842	33.803	9.696	12.503	33.502
7	2.2	1.044	1.209	2.539	1.042	1.207	2.531
	2.6	1.529	1.824	4.180	1.522	1.815	4.156
	3.0	2.373	2.916	7.213	2.347	2.884	7.155
	3.4	4.271	5.400	14.189	4.186	5.307	14.064
	3.8	12.756	16.399	43.311	12.496	16.149	43.058

As the speed of customer service increases, the traffic intensity decreases, meaning that fewer customers are expected to be in the system. This behaviour of *EN* is given in table 2 for all scenarios. The effect of the CV on the values of *EN* is seen more clearly in the dense system. Table 2 shows that when the value of CV increases, the values of *EN* also increase. This increase is less in the system with lower traffic intensity (i. e., see the case of $\mu = 3.8$) and more in the system with higher traffic intensity (i. e., see the case of $\mu = 2.2$). In all scenarios, comparing with other service time distributions, it is clearly seen that the expected number of customers in the system is the largest in the **HEXS** case, especially in a dense system.

Table 2

The expected number of customers in the system for service rate

s	μ	$r = 4$			$r = 8$		
		ERLS	**EXPS**	**HEXS**	**ERLS**	**EXPS**	**HEXS**
3	2.2	6.969	8.831	23.143	6.815	8.678	22.991
	2.6	2.565	3.158	7.816	2.526	3.112	7.749
	3.0	1.603	1.918	4.419	1.591	1.903	4.386
	3.4	1.177	1.377	2.977	1.173	1.371	2.959
	3.8	0.935	1.075	2.197	0.933	1.072	2.188
7	2.2	7.630	9.814	26.827	7.583	9.763	26.754
	2.6	2.670	3.301	8.314	2.656	3.283	8.279
	3.0	1.654	1.983	4.614	1.648	1.976	4.595
	3.4	1.209	1.417	3.082	1.207	1.414	3.072
	3.8	0.958	1.102	2.264	0.957	1.101	2.258

In this model a customer loss is considered to occur in two different scenarios: (i) if there are no items in the inventory when a customer arrives, the customer does not enter the system (the customer is lost) – ELR_1; (ii) if the number of items in the inventory is zero when the customer in the service receives service and leaves, a customer in the queue shows impatience and leaves the queue at a certain rate (the customer is lost) – ELR_2. Changing on both of the expected loss rates of customers when the values of λ are increased and also when the values of μ are increased are given in table 3. It illustrates two service time distributions, the threshold value $r = 4$ and the reorder point $s = 3$.

Table 3

The expected loss rate of customers because of no inventory and impatient

λ	μ	ELR_1		ELR_2	
		ERLS	**HEXS**	**ERLS**	**HEXS**
1.4	–	0.021 6	0.024 9	0.004 5	0.006 5
2.2	–	0.081 1	0.088 0	0.018 9	0.025 2
3.0	–	0.168 2	0.175 8	0.045 8	0.058 0
3.8	–	0.220 8	0.251 1	0.082 6	0.104 4
–	2.2	0.035 6	0.049 8	0.021 7	0.036 5
–	3.0	0.055 9	0.063 9	0.018 6	0.026 8
–	3.8	0.061 8	0.068 3	0.014 9	0.020 5
–	4.6	0.064 2	0.069 8	0.012 2	0.016 1

The more customers come to the system, the more likely the system will have zero inventory. So, as expected, as the values of λ increase, both ELR_1 and ELR_2 values increase. As customers arriving at the same constant rate receive faster service (as μ increases), the probability of the number of items in the inventory being zero increases. Consequently, the case at which an incoming customer encounters zero items and therefore does

not join the system, in other words ELR_1, increases as μ increases. The situation where the inventory level is zero when a customer receives service is expected to increase as μ increases. However, since an increase in μ will also cause the decrease of the number of customers in the system, it is seen that the expected loss rate of customers due to impatience ELR_2 also decreases in table 3.

As the arrival rate increases (as the traffic intensity increases), the expected number of items in the inventory *EI* decreases until the system reaches a certain density and then increases (fig. 1). This behaviour is valid for both threshold values of *r*, but at large *r* values the change point is seen when the system is denser.

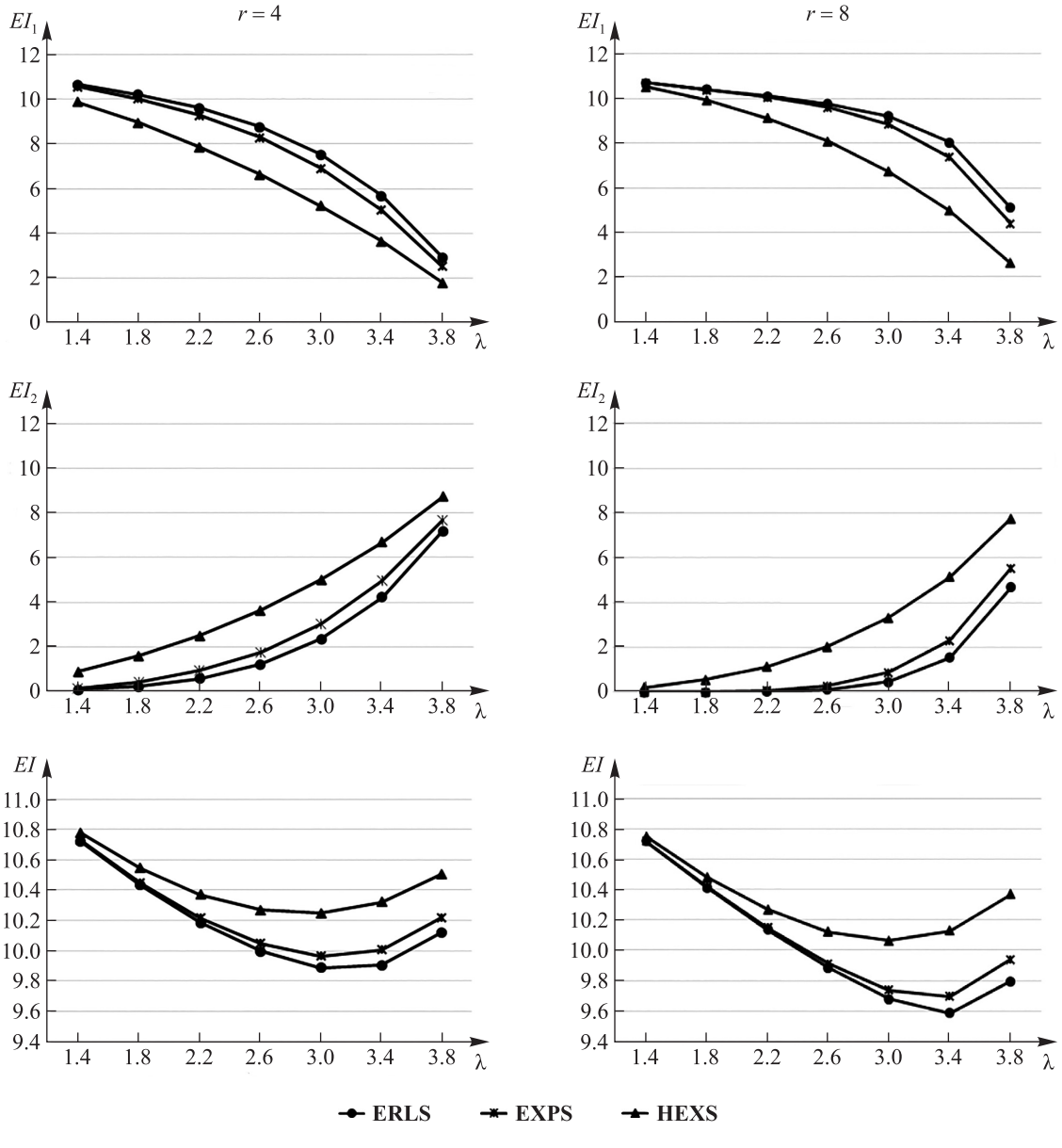


Fig. 1. The expected number of items in the inventory versus the arrival rate

(s, Q) policy is followed until the value of *EN* reaches *r*. In other words, the size of orders arriving in the inventory is constant up to the threshold value *r* (as much as $S - s = Q$). While the system operates in this policy the expected number of items in the inventory is represented by EI_1. (s, S) policy is followed when the value of *EN* becomes *r* and more. Namely, after the threshold value is reached, the number of items in the inventory will always be at the maximum level *S* with the orders coming. As the system operates in this policy the expected number of items in the inventory is represented by EI_2. As the arrival rate of customers increases, the expected number of customers in the system also increases. Therefore, fig. 1 shows that the increase in the arrival rate causes the values of EI_1 to decrease and the values of EI_2 to increase. In other words, when the traffic intensity

is low in the system, the system operates more in (s, Q) policy, and as the intensity increases, the frequency of operation in (s, S) policy increases. It is clearly seen from fig. 1 that the CV has an effect on the values of *EI*. In the cases where the variation in service times is 1 and less than 1 (in **ERLS** and **EXPS** cases), the values of *EI* are almost the same, especially at low arrival rates. Compared to **ERLS** and **EXPS** service times, the values of *EI* are higher in **HEXS** service time with high variation. When looking at EI_1 and EI_2 parts in fig. 1, the values of these performance measures in the case of **HEXS** are apart from the others.

As the service rate μ increases, the expected number of customers in the system decreases and so the value of *EI* decreases (fig. 2). The behaviours of EI_1 and EI_2 values are seen to be exactly the opposite of that in fig. 1.

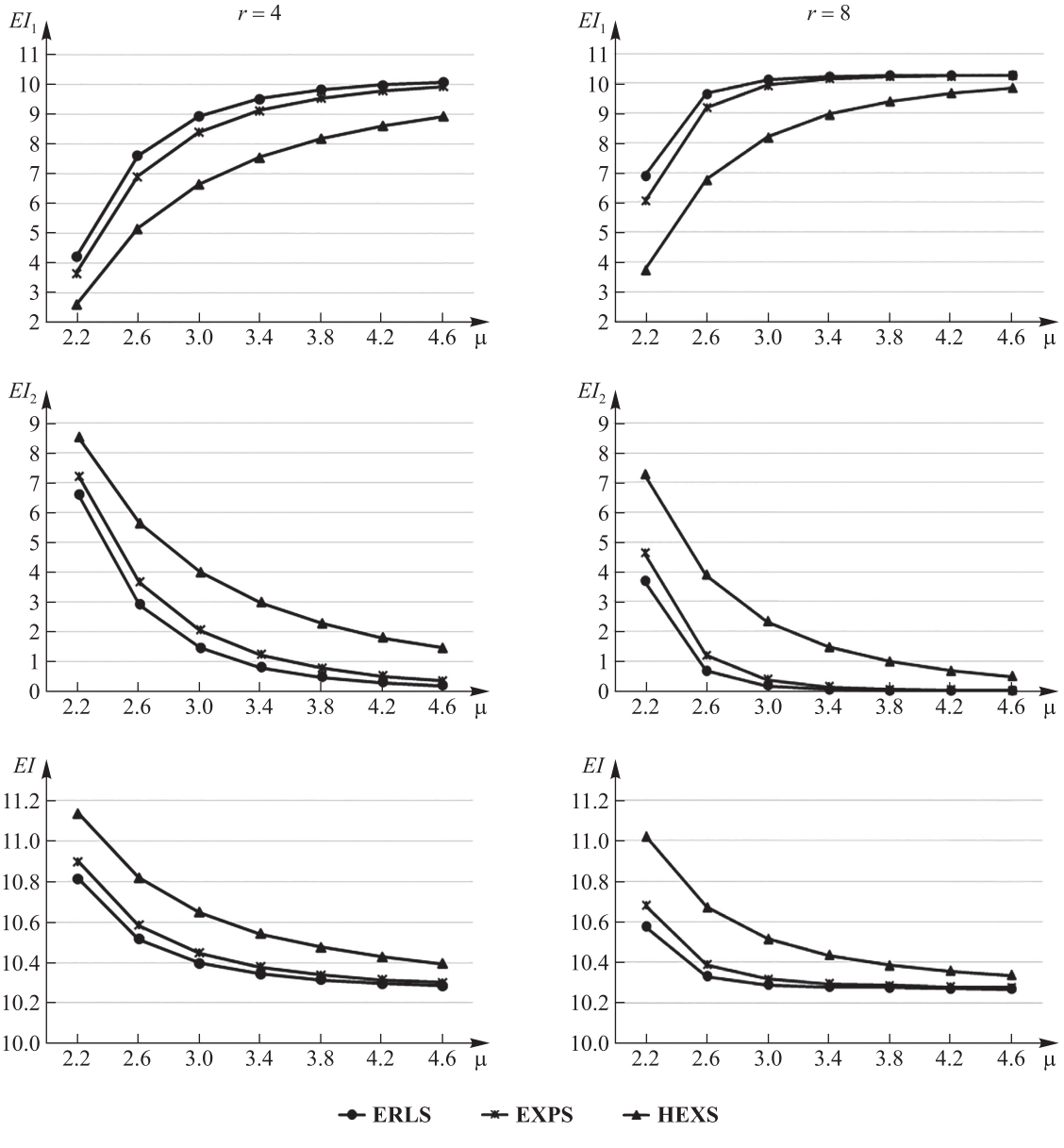


Fig. 2. The expected number of items in the inventory versus the service rate

As the number of customers entering the system increases, the expected order size *ES* is supposed to increase. This increase occurs rapidly until the system reaches a certain density, but after the system reaches a certain density, it remains almost the same (see $\lambda = 3.4,\ 3.8$). This result is observed in fig. 3. As previously commented, the inventory policy applied changes depending on the values of λ. If customers arrive with a low λ rate, the system is not of high density and (s, Q) policy is followed more. So, the values of ES_1 are expected to be larger. For example, when looking at the case of $\lambda = 1.4$, the values of ES_2 are almost zero while the values of ES_1 are around 1.5. On the other hand, if customers arrive with a high λ rate, the system is of high density and (s, S) policy is followed more. For example, when looking at the cases of $\lambda = 3$ and more, it is seen that the values of ES_1 decrease and the values of ES_2 increase.

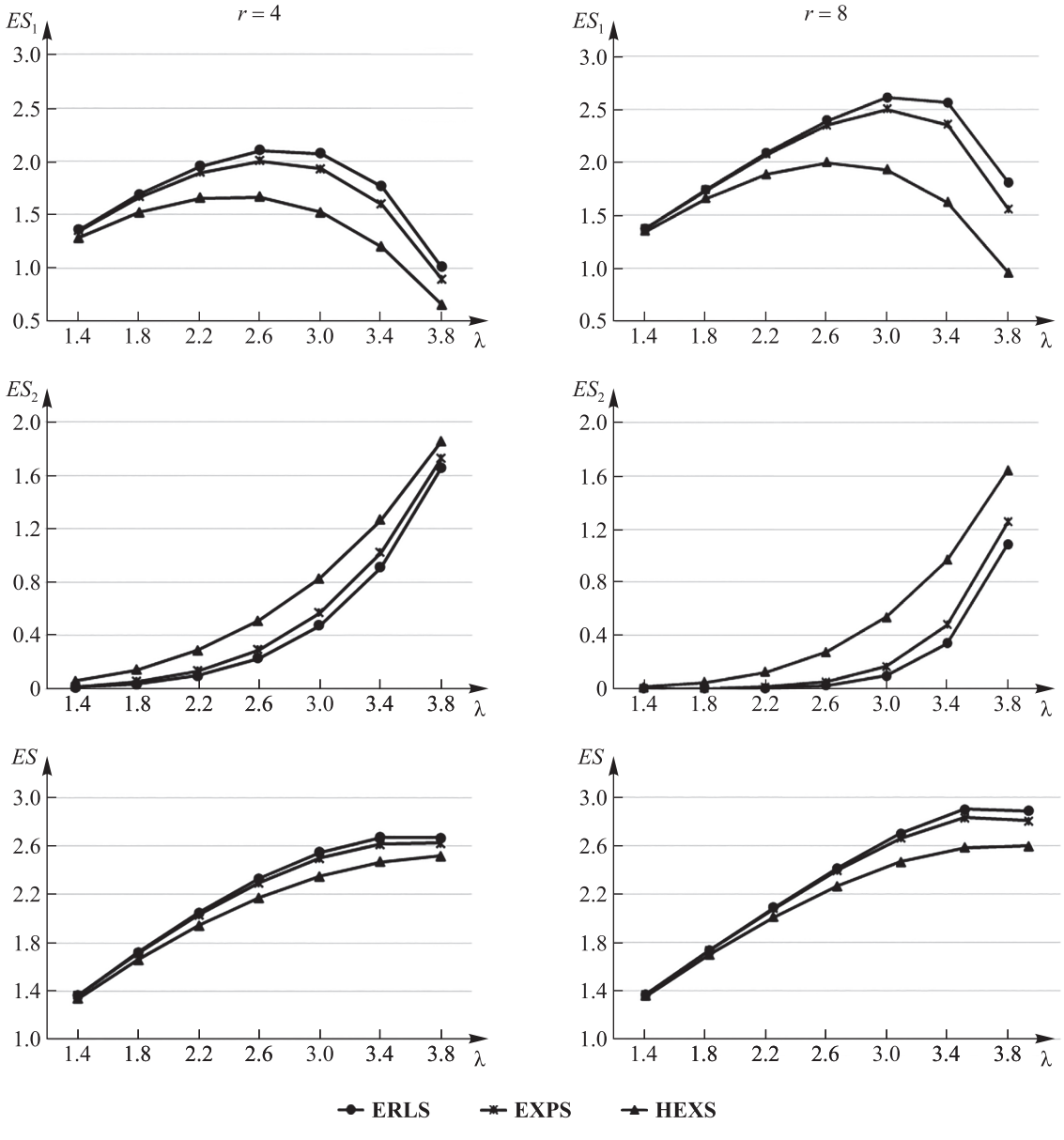


Fig. 3. The expected order size versus the arrival rate

Conclusions

A new queue-dependent hybrid replenishment policy is developed in the QIS model with PH-distribution of service time. It is based on the combined use of known replenishment policies (s, Q) and (s, S). When the inventory level drops to the reorder point s if the number of customers in the system is less than a threshold value r, then (s, Q) policy is applied, and if the number is more or equal to r, then (s, S) policy is applied. To calculate the performance measures of the proposed replenishment policy, a matrix-geometric approach is used. Numerical examples performed in different scenarios demonstrate the behaviour of the system performance measures. As directions for further research, we can point out the study of a similar QIS model with MAP arrivals and solving optimisation problems for such models.

References

1. Bijvank M, Vis IFA. Lost-sales inventory theory: a review. *European Journal of Operational Research*. 2011;215(1):1–13. DOI: 10.1016/j.ejor.2011.02.004.

2. Krishnamoorthy A, Manikandan R, Lakshmy B. A revisit to queueing-inventory system with positive service time. *Annals of Operations Research*. 2015;233:221–236. DOI: 10.1007/s10479-013-1437-x.

3. Krishnamoorthy A, Shajin D, Narayanan VC. Inventory with positive service time: a survey. In: Anisimov V, Limnios N, editors. *Queueing theory 2: advanced trends*. London: ISTE; 2021. p. 201–238 (Sciences. Mathematics: queuing theory and applications). Co-published by the John Wiley & Sons. DOI: 10.1002/9781119755234.ch6.

4. Salini K, Arya PS, Manikandan R. Queueing-inventory systems: a survey. arXiv:2308.06518v3 [Preprint]. 2023 [cited 2025 March 21]: [40 p.]. Available from: https://arxiv.org/abs/2308.06518v3.

5. Wang J, Zhang Y. Research progress on queueing-inventory systems. *Operations Research Transactions*. 2025;29(3):77–92. Chinese. DOI: 10.15960/j.cnki.issn.1007-6093.2025.03.004.

6. Chakravarthy SR, Rumyantsev A. Analytical and simulation studies of queueing-inventory models with MAP demands in batches and positive phase type services. *Simulation Modeling Practice and Theory*. 2020;103:102092. DOI: 10.1016/j.simpat.2020.102092.

7. Otten S, Daduna H. Stability of queueing-inventory systems with customers of different priorities. *Annals of Operations Research*. 2023;331(2):963–983. DOI: 10.1007/s10479-022-05140-1.

8. Shajin D, Jacob J, Krishnamoorthy A. On a queueing inventory problem with necessary and optional inventories. *Annals of Operations Research*. 2022;315(2):2089–2114. DOI: 10.1007/s10479-021-03975-8.

9. Rasmi K, Jacob MJ, Rumyantsev AS, Krishnamoorthy A. A multi-server heterogeneous queuing-inventory system with class-dependent inventory access. *Mathematics*. 2021;9(9):1037. DOI: 10.3390/math9091037.

10. Jeganathan K, Anzen Koffer V, Pavai Madheswari S, Venkatesan T. An investigation on retrial queueing-inventory system with server maintenance based on customer satisfaction. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*. 2025;11(5):193. DOI: 10.1007/s40819-025-02023-4.

11. Jeganathan K, Anzen Koffer V, Lakshmanan K, Ammar SI. Performance analysis of synergistic servers in a multi-server queueing-inventory system with encouraged arrivals. *Journal of the Indian Society for Probability and Statistics*. 2026;27(1):159–202. DOI: 10.1007/s41096-025-00255-7.

12. Dudin AN. Admission control in a parcel delivery system with account of the finite capacity of the warehouse at the pick-up point. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;1:68–78. EDN: ZIAXUB.

13. Melikov A, Mirzayev R, Nair SS. Double sources queuing-inventory system with hybrid replenishment policy. *Mathematics*. 2022;10(14):2423. DOI: 10.3390/math10142423.

14. Melikov AZ, Mirzayev RR, Nair SS. Numerical study of a queuing-inventory system with two supply sources and destructive customers. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2022;61(4):581–598. DOI: 10.1134/S1064230722030091.

15. Lawrence AS, Melikov A, Sivakumar B. Analysis and optimization of hybrid replenishment policy in a double-sources queueing-inventory system with MAP arrivals. *Annals of Operations Research*. 2023;331(2):1249–1267. DOI: 10.1007/s10479-023-05646-2.

16. Mirzayev RR. A model of a queuing system with a base stock policy and two supply sources. *Informatics and Control Problems*. 2022;42(1):26–32. DOI: 10.54381/icp.2022.1.04.

17. Mirzayev R. Optimal cost analysis in a double-source queuing-inventory system under hybrid replenishment policy. *Journal of Baku Engineering University. Mathematics and Computer Science*. 2025;9(1):19–25. DOI: 10.30546/09090.2025.210.019.

18. Ozkar S, Melikov A. Algorithmic approach to study queueing-inventory systems with queue-dependent hybrid replenishment policy. In: Dudin A, Nazarov A, Moiseev A, editors. *Information technologies and mathematical modelling: queueing theory and related fields. Revised selected papers of the 23rd International conference; 2024 October 20–26; Karshi, Uzbekistan*. Cham: Springer; 2025. p. 288–302 (Communications in computer and information science; volume 2472). DOI: 10.1007/978-3-031-88307-1_23.

19. Chakravarthy SR. *Introduction to matrix-analytic methods in queues 1: analytical and simulation approach – basics*. London: ISTE; 2022. XV, 341 p. (Mathematics and statistics series). Co-published by the John Wiley & Sons. DOI: 10.1002/9781394165421.

20. Chakravarthy SR. *Introduction to matrix-analytic methods in queues 2: analytical and simulation approach – queues and simulation*. London: ISTE; 2022. XV, 415 p. (Mathematics and statistics series). Co-published by the John Wiley & Sons. DOI: 10.1002/9781394174201.

21. Dudin AN, Klimenok VI, Vishnevsky VM. *The theory of queuing systems with correlated flows*. Cham: Springer; 2020. XXII, 410 p. DOI: 10.1007/978-3-030-32072-0.

22. Neuts MF. *Matrix-geometric solutions in stochastic models: an algorithmic approach*. Baltimore: John Hopkins University Press; 1981. XIII, 332 p.

Received 12.01.2026 / revised 15.02.2026 / accepted 25.03.2026.

УДК 519.21

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАМКНУТЫХ СЕТЕЙ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ВРЕМЯ ПРЕБЫВАНИЯ ЗАЯВОК

Ю. В. МАЛИНКОВСКИЙ[1)]***, С. Ю. ЕВМЕНЕНКО***[1)]

[1)]*Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, ул. Советская, 104, 246028, г. Гомель, Беларусь*

Аннотация. Рассматривается замкнутая сеть массового обслуживания с однолинейными узлами и ограничением на время пребывания заявок в узлах. Предполагается, что время обслуживания заявки единственным прибором *i*-го узла, а также номинальное время ее пребывания в указанном узле зависят от текущего числа заявок в этом узле. Заявки, номинальное время пребывания которых в узле закончилось, мгновенно и независимо от других заявок перемещаются по узлам в соответствии с матрицей, отличной от матрицы маршрутизации обслуженных заявок. Доказывается нечувствительность стационарного распределения вероятностей состояний сети к форме распределения длительностей обслуживания заявок при фиксированных первых моментах.

Ключевые слова: теория массового обслуживания; стохастический процесс; теория вероятностей; замкнутая сеть обслуживания.

STEADY-STATE DISTRIBUTION OF CLOSED QUEUING NETWORKS WITH A LIMIT ON CUSTOMER SOJOURN TIME

Yu. V. MALINKOVSKY[a]***, S. Yu. EVMENENKO***[a]

[a]*Francisk Skorina Gomel State University, 104 Savieckaja Street, Gomiel 246028, Belarus*

Corresponding author: S. Yu. Evmenenko (stas.evmenenko@yandex.ru)

Abstract. A closed queuing network with single-server nodes and a constraint on the sojourn time of requests within nodes is considered. It is assumed that the service time of the request by a single device in the i^{th} node, as well as the nominal sojourn time, depend on the current number of requests in this node. Requests whose nominal sojourn time in a node has elapsed instantly and independently of other requests transition between nodes according to a routing matrix distinct from the one governing the movement of requests upon service completion. It is proven that the steady-state distribution of network state probabilities is insensitive to the shape of the service time distribution, provided the first moments remain fixed.

Keywords: queuing theory; stochastic process; probability theory; closed queuing network.

Образец цитирования:
Малинковский ЮВ, Евмененко СЮ. Стационарное распределение замкнутых сетей с ограничением на время пребывания заявок. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2026;2:89–96.
EDN: ODMBEI

For citation:
Malinkovsky YuV, Evmenenko SYu. Steady-state distribution of closed queuing networks with a limit on customer sojourn time. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2026;2:89–96. Russian.
EDN: ODMBEI

Авторы:
Юрий Владимирович Малинковский – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики факультета математики и технологий программирования.
Станислав Юрьевич Евмененко – старший преподаватель кафедры фундаментальной и прикладной математики факультета математики и технологий программирования.

Authors:
Yury V. Malinkovsky, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of fundamental and applied mathematics, faculty of mathematics and programming technologies.
malinkovsky@gsu.by
Stanislav Yu. Evmenenko, senior lecturer at the department of fundamental and applied mathematics, faculty of mathematics and programming technologies.
stas.evmenenko@yandex.ru

CC BY NC

Введение

Сети массового обслуживания (СеМО) с ограничением на номинальное время пребывания – это математические модели, используемые для анализа систем, в которых заявки обслуживаются каналами (приборами, серверами), но при этом существует ограничение на максимальное время нахождения заявки в системе. Если это время превышено, заявка покидает систему без завершения обслуживания. Такие модели широко применяются в телекоммуникациях, транспортных системах, логистике, ИТ-инфраструктуре и других областях. В работах [1; 2] установлена инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний СеМО с несколькими типами заявок в предположении, что распределения длительностей обслуживания имеют рациональные преобразования Лапласа – Стилтьеса. В публикациях [3–5] приведены фундаментальные результаты, касающиеся инвариантности СеМО. Современные результаты относительно нечувствительности стационарного распределения получены, например, в работе [6]. СеМО с ограничением на номинальное время пребывания позволяют моделировать реальные системы, где важно учитывать временные ограничения. Анализ таких систем помогает оптимизировать процессы, минимизировать потери и повысить эффективность работы. В статьях [7; 8] представлены результаты для сетей Джексона с ограничением на номинальное время пребывания.

В работе [9] показано, что для открытой СеМО с дисциплиной обслуживания LCFS-PR и ограничением на номинальное время пребывания заявок в узлах стационарное распределение вероятностей состояний сети не зависит от конкретных законов распределения длительностей обслуживания: достаточно лишь зафиксировать математическое ожидание при условии, что номинальные времена пребывания заявок в узлах подчиняются экспоненциальному закону распределения. В статье [10] доказана инвариантность стационарного распределения модифицированных сетей Джексона и Гордона – Ньюэлла. Ранее в рамках исследований гомельской научной школы в области мультипликативных сетей аналогичная инвариантность была установлена для СеМО, допускающих наличие «отрицательных» заявок [11].

В настоящей работе рассматривается замкнутая СеМО с однолинейными узлами, экспоненциальным ограничением на время пребывания заявок в узлах и произвольным распределением длительностей обслуживания заявок. Доказывается нечувствительность стационарного распределения вероятностей состояний сети к форме распределения длительностей обслуживания заявок при фиксированных первых моментах.

Марковский случай

Замкнутая СеМО состоит из N однолинейных узлов (систем). В сети циркулирует постоянное число заявок K, поэтому число мест для ожидания можно считать равным K.

Состояние сети в момент времени t описывается вектором $\mathbf{n}(t) = \left(n_1(t), \ldots, n_N(t)\right)$, где $n_i(t)$ – количество задач в i-м узле в момент времени t.

Длительности обслуживания заявок в узлах имеют произвольную функцию распределения $B_i(n_i, t)$, причем математическое ожидание фиксировано с помощью равенства

$$\left(\mu_i(n_i)\right)^{-1} = \int_0^{+\infty} \left[1 - B_i(n_i, t)\right] dt, \tag{1}$$

где $\mu_i(n_i)$ – интенсивность потока заявок, покидающих i-й узел за счет окончания времени обслуживания.

При рассмотрении марковского случая будем считать, что условное распределение времени обслуживания заявки единственным прибором i-го узла, когда в нем находится n_i заявок, является показательным с параметром $\mu_i(n_i)$ $(i = \overline{1, N})$, зависящим от числа заявок n_i в i-м узле, т. е. $B_i(n_i, t) = 1 - \exp\{-\mu_i(n_i)t\}$ $(t > 0)$. Предположим, что $\mu_i(0) = 0$, $\mu_i(n_i) > 0$ для $n_i > 0$.

Время с момента поступления заявки в узел до того момента, когда она покинет узел не в результате обслуживания, будем называть номинальным временем пребывания. Номинальное время пребывания каждой заявки в i-м узле представляет собой случайную величину, условное распределение которой (если в i-м узле находится n_i заявок) является экспоненциальным с параметром $\dfrac{\nu_i(n_i)}{n_i}$ $(i = \overline{1, N})$. Номинальное время пребывания заявки в узле не реализуется (обнуляется), если в течение этого времени закончится ее обслуживание. Таким образом, условная вероятность того, что номинальное время пребывания каждой заявки в i-м узле закончится в промежутке $[t, t+h)$, если в момент времени t в узле находилось n_i заявок, равна $\dfrac{\nu_i(n_i)}{n_i}h + o(h)$ при $h \to 0$, а условная вероятность окончания номинального времени пребывания хотя бы одной из этих заявок равна $\nu_i(n_i)h + o(h)$. Предполагается, что $\nu_i(0) = 0$, $\nu_i(n_i) > 0$ для $n_i > 0$.

Положим, что длительности обслуживания заявок и номинальные времена пребывания заявок в узлах являются взаимно независимыми случайными величинами.

Дисциплина обслуживания заявок – LCFS-PR. Заявка, поступающая в узел, вытесняет заявку с прибора и начинает обслуживаться (позиция n_i+1), а вытесненная заявка становится первой в очереди на дообслуживание (позиция n_i), сдвигая стоящие в очереди заявки. При повторном поступлении на прибор заявка продолжает дообслуживаться оставшееся время. Таким образом, поступающая в узел заявка имеет абсолютный приоритет перед всеми остальными заявками, находящимися в узле. Нумерация заявок в очереди на каждый узел осуществляется от конца очереди к прибору. Если случайная величина v – время от начала до завершения обслуживания заявки, а h – время от начала обслуживания заявки до его прерывания, то при возобновлении обслуживания заявке остается обслуживаться в течение времени $v-h$.

Заявка, обслуженная в i-м узле, мгновенно и независимо от других заявок с вероятностью p_{ij} переходит в j-й узел ($i, j=\overline{1, N}$, $\sum\limits_{j=1}^{N} p_{ij}=1$, $p_{ii}=0$). Заявка, номинальное время пребывания которой в i-м узле закончилось, мгновенно и независимо от других заявок с вероятностью r_{ij} направляется в j-й узел ($i, j=\overline{1, N}$, $\sum\limits_{j=1}^{N} r_{ij}=1$, $r_{ii}=0$).

Введем стохастические квадратные матрицы $P=\left(p_{ij}\right)$ и $R=\left(r_{ij}\right)$ порядка N ($i, j=\overline{1, N}$), которые назовем матрицами маршрутизации обслуженных и просроченных по номинальному времени пребывания заявок соответственно. Очевидно, что матричная функция $S(\mathbf{n})=\left(s_{ij}(n_i),\ i, j=\overline{1, N}\right)$, где $s_{ij}(n_i)=\dfrac{\mu_i(n_i)\,p_{ij}+\nu_i(n_i)\,r_{ij}}{\mu_i(n_i)+\nu_i(n_i)}$, $s_{ii}(n_i)=0$, элементы i-й строки которой зависят от числа n_i заявок в i-м узле, также является стохастической матрицей и по смыслу управляет движением заявок между узлами 1, 2, …, N без учета причины, по которой заявка покидает узел (окончание времени обслуживания или номинального времени пребывания). Действительно,

$$\sum_{j=1}^{N} s_{ij}(n_i)=\frac{1}{\mu_i(n_i)+\nu_i(n_i)}\left(\mu_i(n_i)\sum_{j=1}^{N} p_{ij}+\nu_i(n_i)\sum_{j=1}^{N} r_{ij}\right)=\frac{1}{\mu_i(n_i)+\nu_i(n_i)}\left(\mu_i(n_i)+\nu_i(n_i)\right)=1.$$

Будем называть эту матрицу $S(\mathbf{n})$ матрицей маршрутизации.

Обозначим через $\varepsilon_i(n_i)$ условную интенсивность потока заявок, выходящего из i-го узла, который находится в состоянии n_i ($i=\overline{1, N}$). Так как заявки не рождаются и не теряются при прохождении узлов, то в стационарном режиме выполняется следующий закон сохранения:

$$\varepsilon_j(n_j-1)=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i(n_i)\,s_{ij}(n_i+1),\ j=\overline{1, N},\ \mathbf{n}\in X. \tag{2}$$

Далее предполагается, что матрица $S(\mathbf{n})$ при любом $\mathbf{n}\in X$ неприводима. Для ее неприводимости достаточно (но не необходимо), чтобы неприводимой была хотя бы одна из матриц – P или R. Тогда уравнение (2), которое будем называть уравнением трафика, при фиксированных $\mathbf{n}\in X$, $\mu_i(n_i)$, $\nu_i(n_i)$, $i=\overline{1, N}$, будет иметь единственное с точностью до постоянного множителя положительное решение. Если изменять эти параметры, то решения уравнения трафика (2) будут являться функциями от них.

Пусть $\left\{p(\mathbf{n}),\ \mathbf{n}\in X\right\}$ – предельное эргодическое распределение цепи Маркова $\mathbf{n}(t)$, которое в этом случае будет единственным решением уравнения глобального равновесия

$$p(\mathbf{n})\sum_{i=1}^{N}\left(\mu_i(n_i)+\nu_i(n_i)\right)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(p\left(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i\right)\right)\left(\mu_j\left(n_j+1\right)p_{ji}+\nu_j\left(n_j+1\right)r_{ji}\right), \tag{3}$$

удовлетворяющим условию нормировки $\sum\limits_{\mathbf{n}\in X} p(\mathbf{n})=1$. Здесь $\mathbf{e}_i$ – единичный вектор i-го направления, причем предполагается, что $p(\mathbf{n})=0$ при $\mathbf{n}\notin X$. Разобьем уравнение глобального равновесия (3) на уравнения локального равновесия, которые получаются, если для каждого узла приравнять интенсивность потока вероятности из состояния $\mathbf{n}$ за счет ухода заявок из этого узла и интенсивность потока вероятности в состояние $\mathbf{n}$ за счет поступления заявок в данный узел из других узлов:

$$p(\mathbf{n})\left(\mu_i(n_i)+\nu_i(n_i)\right)=\sum_{j=1}^{N} p\left(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i\right)\left(\mu_j\left(n_j+1\right)p_{ji}+\nu_j\left(n_j+1\right)r_{ji}\right). \tag{4}$$

Так как уравнение (3) получается в результате суммирования уравнений (4) по $i = \overline{1, N}$, то всякое решение уравнений локального равновесия (4) будет являться решением уравнения глобального равновесия (3).

Изолируем i-й узел от сети, помещая его в фиктивную среду, отличающуюся от условий функционирования узла в сети только тем, что в него поступает поток моментов последовательных скачков процесса чистого размножения с интенсивностью рождения $\varepsilon_i(n_i)$, зависящей от числа заявок n_i в этом узле. Получается процесс размножения и гибели $\tilde{n}_i(t)$ с интенсивностями рождения $\varepsilon_i(n_i)$ $(n_i = 0, 1, \ldots)$ и интенсивностями гибели $\mu_i(n_i) + \nu_i(n_i)$ $(n_i = 1, 2, \ldots)$. При этом стационарные вероятности цепи Маркова $\tilde{n}_i(t)$, если они существуют, удовлетворяют следующим уравнениям равновесия для вертикальных сечений в графе переходов процесса размножения и гибели:

$$\frac{p_i(n_i - 1)}{p_i(n_i)} = \frac{\mu_i(n_i) + \nu_i(n_i)}{\varepsilon_i(n_i - 1)} \quad (n_i = 1, 2, \ldots),\ i = \overline{1, N}. \tag{5}$$

Из уравнений (4) легко понять, что стационарные вероятности состояний изолированного узла имеют вид

$$p_i(n_i) = p_i(0) \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\varepsilon_i(l-1)}{\mu_i(l) + \nu_i(l)},\ i = \overline{1, N}, \tag{6}$$

где

$$p_i(0) = \left(\sum_{n_i=0}^{+\infty} \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\varepsilon_i(l-1)}{\mu_i(l) + \nu_i(l)} \right)^{-1},$$

и, кроме того, что условие

$$\sum_{n_i=1}^{+\infty} \prod_{l=0}^{n_i - 1} \frac{\varepsilon_i(l-1)}{\mu_i(l) + \nu_i(l)} < +\infty$$

является необходимым и достаточным для эргодичности процесса размножения и гибели $\tilde{n}_i(t)$.

Докажем, что вероятности

$$p(\mathbf{n}) = \left[C(N, K) \right]^{-1} p_1(n_1)\, p_2(n_2) \ldots p_N(n_N), \tag{7}$$

где $C(N, K)$ – нормирующая постоянная, удовлетворяют уравнениям локального равновесия (4), а значит, и уравнениям глобального равновесия (3). В силу однородности уравнений локального равновесия (4) при подстановке произведения (7) в уравнения (4) можно не учитывать нормирующий множитель $\left[C(N, K) \right]^{-1}$. Прежде всего отметим, что из формул (5) и (7) следует, что

$$\frac{p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i)}{p(\mathbf{n})} = \frac{p_j(n_j + 1)}{p_j(n_j)} \frac{p_i(n_i - 1)}{p_i(n_i)} = \frac{\varepsilon_j(n_j)}{\varepsilon_i(n_i - 1)} \frac{\mu_i(n_i) + \nu_i(n_i)}{\mu_j(n_j + 1) + \nu_j(n_j + 1)},\ \text{если } n_i \neq 0. \tag{8}$$

Проверим, что произведение (7) удовлетворяет уравнениям (4). Если $n_i = 0$, то очевидно, что уравнения (4) превращаются в тождество $0 = 0$. Если же $n_i \neq 0$, то, разделив уравнения (4) на $p(\mathbf{n})$ и подставив в полученные равенства формулы (7) и (8), а затем использовав уравнение трафика (2), получим

$$\mu_i(n_i) + \nu_i(n_i) = \sum_{j=1}^{N} \frac{p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i)}{p(\mathbf{n})} \left(\mu_j(n_j + 1)\, p_{ji} + \nu_j(n_j + 1) r_{ji} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon_j(n_j)}{\varepsilon_i(n_i - 1)} \frac{\mu_i(n_i) + \nu_i(n_i)}{\mu_j(n_j + 1) + \nu_j(n_j + 1)} \left(\mu_j(n_j + 1)\, p_{ji} + \nu_j(n_j + 1) r_{ji} \right) =$$

$$= \frac{\mu_i(n_i) + \nu_i(n_i)}{\varepsilon_i(n_i - 1)} \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon_j(n_j)}{\mu_j(n_j + 1) + \nu_j(n_j + 1)} \left(\mu_j(n_j + 1)\, p_{ji} + \nu_j(n_j + 1) r_{ji} \right) =$$

$$= \frac{\mu_i(n_i) + \nu_i(n_i)}{\varepsilon_i(n_i - 1)} \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j(n_j) \frac{\mu_j(n_j + 1)\, p_{ji} + \nu_j(n_j + 1) r_{ji}}{\mu_j(n_j + 1) + \nu_j(n_j + 1)} =$$

$$= \frac{\mu_i(n_i) + \nu_i(n_i)}{\varepsilon_i(n_i - 1)} \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j(n_j)\, s_{ji}(n_j + 1) = \mu_i(n_i) + \nu_i(n_i),$$

т. е. уравнения (4) превращаются в тождество.

По эргодической теореме Маркова цепь Маркова с непрерывным временем и конечным числом состояний эргодична тогда и только тогда, когда она неприводима. Пространство состояний цепи Маркова $\mathbf{n}(t)$ конечно в силу выполнения условия $n_1(t)+n_2(t)+\ldots+n_N(t)=K$, а ее неприводимость, очевидно, эквивалентна неприводимости матрицы маршрутизации при каждых фиксированных n_i.

Из условия нормировки $\sum_{\mathbf{n}\in X} p(\mathbf{n})=1$ находим нормирующую постоянную

$$C(N, K)=\sum_{\mathbf{n}\in \mathbf{Z}_+^N:\, n_1+n_2+\ldots+n_N=K} p_1(n_1)\,p_2(n_2)\ldots p_N(n_N). \qquad (9)$$

Теорема 1. *Если матрица маршрутизации неприводима, то цепь Маркова* $\mathbf{n}(t)$ *эргодична, а ее единственное стационарное распределение имеет форму произведения (7) с множителями (6), где* $\{\varepsilon_i(n_i),\ i=\overline{1, N}\}$ *– решение уравнения трафика (2);* $C(N, K)$ *– нормирующая постоянная, определенная с помощью равенства (9).*

Таким образом, как и в обычной сети Гордона – Ньюэлла, в стационарном режиме в каждый фиксированный момент времени *t* состояния узлов $n_1(t),\ n_2(t),\ \ldots,\ n_N(t)$ зависимы, что является очевидным следствием линейной зависимости $n_1(t)+n_2(t)+\ldots+n_N(t)=K$ координат случайного вектора $\mathbf{n}(t)$.

Длительность обслуживания заявок, имеющая произвольную функцию распределения

Теперь будем предполагать, что длительности обслуживания заявок в узлах имеют произвольную функцию распределения $B_i(n_i, t)$, причем математическое ожидание фиксировано с помощью равенства (1). В этом случае процесс $\mathbf{n}(t)$ не является марковским. Далее докажем, что для такого процесса справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Случайный процесс, описывающий число заявок в замкнутой сети в момент времени t, имеет финальное строго положительное распределение в форме произведения (7) с множителями (6), где* ε_i *находятся из уравнения трафика (2), а* $C(N, K)$ *определяется с помощью равенства (9).*

Доказательство. Пусть $\tau_{ik}(t)$ – остаточное время обслуживания заявки в *i*-м узле с момента времени *t* до момента окончания времени обслуживания, где *k* – номер позиции, на которой находится заявка, от конца очереди к прибору. Положим, что вектор $\boldsymbol{\tau}_i(t)$ содержит остаточные времена обслуживания заявок, находящихся в *i*-м узле. Поскольку, вообще говоря, процесс $\mathbf{n}(t)$ не является марковским, рассмотрим марковский процесс $\xi(t)=\{\mathbf{n}(t),\ \boldsymbol{\tau}(t)\}$, добавляя к $\mathbf{n}(t)$ непрерывную компоненту $\boldsymbol{\tau}(t)=(\boldsymbol{\tau}_1(t),\ \boldsymbol{\tau}_2(t),\ \ldots,\ \boldsymbol{\tau}_N(t))$. Введем обозначение

$$F(\mathbf{n},\ \mathbf{x})=F(\mathbf{n},\ x_{1,1},\ \ldots,\ x_{1,n_1},\ x_{2,1},\ \ldots,\ x_{2,n_2},\ \ldots,\ x_{N,1},\ \ldots,\ x_{N,n_N})=$$
$$=\lim_{t\to+\infty} P\{\mathbf{n}(t)=\mathbf{n},\ \tau_{i,1}(t)<x_{i,1},\ \ldots,\ \tau_{i,n_i}(t)<x_{i,n_i},\ i=\overline{1, N}\}.$$

По эргодической теореме Маркова случайный процесс $\mathbf{n}(t)$ в марковском случае эргодичен. Используя теорему Смита [12] для регенерирующих процессов, можно доказать, что существуют финальные вероятности $F(\mathbf{n},\ \mathbf{x})$.

Так как $\mathbf{n}(t)$ – марковский процесс, существует стационарное эргодическое распределение процесса $\mathbf{n}(t)$, а следовательно, в общем случае и процесса $\boldsymbol{\zeta}(t)$, так как $\boldsymbol{\zeta}(t)$ получается из $\mathbf{n}(t)$ добавлением непрерывных компонент.

Положим, что $[\tilde{x}_i]$ – вектор, все элементы которого совпадают с элементами вектора $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N)$, а на месте *i*-го элемента находится элемент $\tilde{x}_i$, и $[\tilde{x}_i,\ \tilde{x}_j]$ – вектор, все элементы которого совпадают с элементами вектора $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N)$, а на месте *i*-го и *j*-го элементов находятся элементы $\tilde{x}_i$ и $\tilde{x}_j$ соответственно.

Несложно доказать, что при $\mu_i(n_i)^{-1}<+\infty\ (i=\overline{1, N})$ существуют конечные пределы $F(\mathbf{n}, \mathbf{x})=\lim_{t\to+\infty} F(\mathbf{n}, t, \mathbf{x})$, где $F(\mathbf{n},\ t,\ x_{1,1},\ \ldots,\ x_{1,n_1},\ x_{2,1},\ \ldots,\ x_{2,n_2},\ \ldots,\ x_{N,1},\ \ldots,\ x_{N,n_N})=P\{\mathbf{n}(t)=\mathbf{n},\ \tau_{i,1}(t)<x_{i,1},\ \ldots,\ \tau_{i,n_i}(t)<x_{i,n_i},\ i=\overline{1, N}\}$.

Пусть h – положительная малая величина. Рассмотрим вероятность события

$$F\left(\mathbf{n}, t+h, \mathbf{x}\right) = P\left\{\mathbf{n}\left(t+h\right) = \mathbf{n},\ \tau_{i,1}\left(t+h\right) < x_{i,1},\ \ldots,\ \tau_{i,n_i}\left(t+h\right) < x_{i,n_i},\ i = \overline{1, N}\right\},$$

описывая все способы появления данного события при различных гипотезах в момент времени t.

Способ 1. Хотя бы в одном из узлов, скажем j-м узле, было на одну заявку больше, чем в состоянии $\mathbf{n}$, а в каком-то другом узле, скажем i-м узле $(j \neq i)$, было на одну заявку меньше, чем в состоянии $\mathbf{n}$. За время h у заявки, находящейся в j-м узле на позиции $n_j + 1$, закончилось время обслуживания в j-м узле и она перешла в i-й узел (вероятность p_{ji}). За остаточное время заявка не успела покинуть i-й узел за счет окончания времени обслуживания (вероятность $B_i\left(n_i, x_{i,n_i} + \theta_1 h\right)$). Вероятность описанного способа

$$F\left(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ h,\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right) B_i\left(n_i, x_{i,n_i} + \theta_1 h\right) p_{ji},$$

здесь и далее $0 < \theta_i < 1$.

Способ 2. Хотя бы в одном из узлов, скажем j-м узле, было на одну заявку больше, чем в состоянии $\mathbf{n}$, а в каком-то другом узле, скажем i-м узле $(j \neq i)$, было на одну заявку меньше, чем в состоянии $\mathbf{n}$. Остаточное время обслуживания заявки, находящейся в j-м узле на позиции $n_j + 1$, входило в диапазон $\left[h,\ h + x_{j,n_j+1}\right]$. За время h у этой заявки закончилось номинальное время пребывания в j-м узле и она перешла в i-й узел (вероятность $\left(\nu_j\left(n_j+1\right)h + o\left(h\right)\right) r_{ji}$). За остаточное время заявка не успела обслужиться в i-м узле (вероятность $B_i\left(n_i, x_{i,n_i} + \theta_2 h\right)$). Вероятность описанного способа

$$F\left(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ x_{j,n_j+1} + h,\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right) B_i\left(n_i, x_{i,n_i} + \theta_2 h\right)\left(\nu_j\left(n_j+1\right)h + o\left(h\right)\right) r_{ji} -$$

$$- F\left(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ h,\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right) B_i\left(n_i, x_{i,n_i} + \theta_2 h\right)\left(\nu_j\left(n_j+1\right)h + o\left(h\right)\right) r_{ji}.$$

Способ 3. Сеть находилась в состоянии $\mathbf{n}$, и за время h заявки не покидали i-й узел ни за счет окончания времени обслуживания (вероятность $B_i\left(n_i, x_{i,n_i} + \theta_3 h\right)$), ни за счет окончания номинального времени пребывания (вероятность $1 - \nu_i\left(n_i\right)h + o\left(h\right)$). Вероятность описанного способа

$$F\left(\mathbf{n},\ t,\ \mathbf{x}\right)\left(1 - \nu_i\left(n_i\right)h + o\left(h\right)\right) B_i\left(n_i, x_{i,n_i} + \theta_3 h\right).$$

Способ 4. Сеть находилась в состоянии $\mathbf{n}$. Остаточное время обслуживания заявки, находящейся в i-м узле на позиции n_i, входило в диапазон $\left[h,\ h + x_{i,n_i}\right]$. Вероятность описанного способа

$$F\left(\mathbf{n},\ t,\ \left[x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i} + h\right]\right) - F\left(\mathbf{n},\ t,\ \left[x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i},\ h\right]\right).$$

Таким образом, получим следующую систему дифференциально-разностных уравнений

$$F\left(\mathbf{n},\ t+h,\ \mathbf{x}\right) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} F\left(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ h,\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right) B_i\left(n_i, x_{i,n_i} + \theta_1 h\right) p_{ji} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} F\left(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ x_{j,n_j+1} + h,\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right) \times$$

$$\times B_i\left(n_i, x_{i,n_i} + \theta_2 h\right)\left(\nu_j\left(n_j+1\right)h + o\left(h\right)\right) r_{ji} -$$

$$- \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} F\left(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ h,\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right) \times$$

$$\times B_i\left(n_i, x_{i,n_i} + \theta_2 h\right)\left(\nu_j\left(n_j+1\right)h + o\left(h\right)\right) r_{ji} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} F\left(\mathbf{n},\ t,\ \mathbf{x}\right)\left(1 - \nu_i\left(n_i\right)h + o\left(h\right)\right) B_i\left(n_i, x_{i,n_i} + \theta_3 h\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\left(F\left(\mathbf{n},\ t,\ \left[x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i} + h\right]\right) - F\left(\mathbf{n},\ t,\ \left[x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1},\ h\right]\right)\right).$$

Рассматривая $F(\mathbf{n},\ t,\ \mathbf{x})$ как сложные функции от t и предполагая, что у них существуют частные производные первого порядка по переменным t, x_{i,n_i} и x_{i,n_i+1}, запишем разложение этих функций по формуле Тейлора:

$$F(\mathbf{n},\ t+h,\ \mathbf{x}) = F(\mathbf{n},\ t,\ \mathbf{x}) + \frac{\partial F(\mathbf{n},\ t,\ \mathbf{x})}{\partial t} h + o(h),$$

$$F\left(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ h,\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right) =$$

$$= \frac{\partial F\left(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ 0,\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right)}{\partial x_{j,n_j+1}} h + o(h),$$

$$B_i\left(n_i, x_{i,n_i} + \theta_i h\right) = B_i\left(n_i, x_{i,n_i}\right),$$

$$F\left(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ x_{j,n_j+1}+h,\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right) =$$

$$= F\left(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ x_{j,n_j+1},\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right) +$$

$$+ \frac{\partial F\left(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ x_{j,n_j+1},\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right)}{\partial x_{j,n_j+1}} h + o(h),$$

$$F\left(\mathbf{n},\ t,\ \left[x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i}+h\right]\right) = F(\mathbf{n},\ t,\ \mathbf{x}) + \frac{\partial F(\mathbf{n},\ t,\ \mathbf{x})}{\partial x_{i,n_i}} h + o(h),$$

$$F\left(\mathbf{n},\ t,\ \left[x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1},\ h\right]\right) = \frac{\partial F\left(\mathbf{n},\ t,\ \left[x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1},\ 0\right]\right)}{\partial x_{i,n_i}} h + o(h).$$

Приводя подобные слагаемые, деля обе части полученного соотношения на h и устремляя h к нулю, получаем

$$\frac{\partial F(\mathbf{n},\ t,\ \mathbf{x})}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F(\mathbf{n},\ t,\ \mathbf{x})}{\partial x_{i,n_i}} - \frac{\partial F\left(\mathbf{n},\ t,\ \left[x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1},\ 0\right]\right)}{\partial x_{i,n_i}}\right) - \sum_{i=1}^{N} F(\mathbf{n},\ t,\ \mathbf{x}) B_i\left(n_i, x_{i,n_i}\right) \nu_i(n_i) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F\left(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ 0,\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right)}{\partial x_{j,n_j+1}} B_i\left(n_i, x_{i,n_i}\right) p_{ji} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} F\left(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i,\ t,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ x_{j,n_j+1},\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right) B_i\left(n_i, x_{i,n_i}\right) \nu_j\left(n_j+1\right) r_{ji}.$$

Так как предельные функции не зависят от времени, имеем

$$\sum_{i=1}^{N} F(\mathbf{n},\ \mathbf{x}) B_i\left(n_i, x_{i,n_i}\right) \nu_i(n_i) + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F\left(\mathbf{n},\ \left[x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1},\ 0\right]\right)}{\partial x_{i,n_i}} - \frac{\partial F(\mathbf{n},\ \mathbf{x})}{\partial x_{i,n_i}}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F\left(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ 0,\ x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right)}{\partial x_{j,n_j+1}} B_i\left(n_i, x_{i,n_i}\right) p_{ji} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} F\left(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i,\ \left[x_{j,1},\ \ldots,\ x_{j,n_j},\ x_{j,n_j+1}, x_{i,1},\ \ldots,\ x_{i,n_i-1}\right]\right) B_i\left(n_i, x_{i,n_i}\right) \nu_j\left(n_j+1\right) r_{ji}. \qquad (10)$$

Нетрудно убедиться, что неотрицательным абсолютно непрерывным по x решением уравнения является

$$F(\mathbf{n},\ \mathbf{x}) = p(\mathbf{n}) \prod_{i=1}^{N} \prod_{k=1}^{n_i} \mu_i(k) \int_0^{x_{ik}} \left[1 - B_i(n_i,\ u)\right] du, \tag{11}$$

где $p(\mathbf{n})$ – стационарная вероятность состояния $\mathbf{n}$ в процессе $\mathbf{n}(t)$ в марковском случае. Действительно, подставляя решение (11) в уравнение (10), деля обе части полученного соотношения на $F(\mathbf{n},\ \mathbf{x})\, B_i\left(n_i, x_{i,n_i}\right)$ и умножая на $p(\mathbf{n}) \int_0^{x_{i,n_i}} \left[1 - B_i(n_i,\ u)\right] du$, получаем уравнение глобального равновесия для марковского случая (2), что доказывает теорему 2.

Заключение

Для замкнутых СеМО с произвольным распределением длительностей обслуживания заявок в узлах доказана нечувствительность стационарного распределения к форме распределения длительностей обслуживания заявок при фиксированных первых моментах.

Процесс проектирования новых и модернизации уже существующих сетей требует комплексного подхода, а также учета множества факторов, таких как пропускная способность, безопасность, надежность, устойчивость к внешним воздействиям и другие технические параметры. Именно здесь результаты, полученные в рамках данной работы, становятся важным инструментом для инженеров и специалистов в области телекоммуникаций.

Кроме того, представленные результаты могут быть использованы при принятии обоснованных решений на различных стадиях жизненного цикла сетевой инфраструктуры – от выбора технологий до их внедрения и дальнейшей эксплуатации. Этот подход особенно важен в условиях постоянного роста объемов передаваемых данных, а также в контексте стремительного развития новых технологий, таких как 5G, интернет вещей (IoT), облачные вычисления и т. д., иными словами, всех тех технологий, которые требуют от сетей высокой гибкости и масштабируемости.

Не менее важным является применение полученных данных для оптимизации уже действующих сетевых решений. Модернизация существующих информационно-вычислительных сетей и сетей передачи данных направлена на повышение их эффективности, снижение эксплуатационных затрат, улучшение качества обслуживания и снижение рисков, связанных с возможными сбоями или утечками данных. В этом контексте знания, полученные в ходе исследований, помогают идентифицировать слабые места в текущих системах и находить пути их устранения с учетом современных стандартов и технологических тенденций.

Библиографические ссылки

1. Baskett F, Chandy KM, Muntz RR, Palacios FG. Open, closed, and mixed networks of queues with different classes of customers. *Journal of the Association for Computing Machinery*. 1975;22(2):248–260. DOI: 10.1145/321879.321887.

2. Towsley D. Queuing network models with state-dependent routing. *Journal of the Association for Computing Machinery*. 1980;27(2):323–337. DOI: 10.1145/322186.322196.

3. Ивницкий ВА. Об условии инвариантности стационарных вероятностей для сетей массового обслуживания. *Теория вероятностей и ее применения*. 1982;27(1):188–192.

4. Barbour AD. Networks of queues and the method of stages. *Advances in Applied Probability*. 1976;8(3):584–591. DOI: 10.2307/1426145.

5. Samelson CL, Bulgren WG. A note on product-form solution for queuing networks with Poisson arrivals and general service-time distributions with finite means. *Journal of the Association for Computing Machinery*. 1982;29(3):830–840. DOI: 10.1145/322326.322338.

6. Кузнецов НА, Семенихин КВ. Анализ и оптимизация управляемой модели замкнутой сети массового обслуживания. *Автоматика и телемеханика*. 2020;3:67–85. DOI: 10.31857/S0005231020030058.

7. Малинковский ЮВ. Сети Джексона с однолинейными узлами и ограниченным временем пребывания или ожидания. *Автоматика и телемеханика*. 2015;4:67–79. EDN: TTFYHZ.

8. Малинковский ЮВ. Стационарное распределение вероятностей состояний G-сетей с ограниченным временем пребывания. *Автоматика и телемеханика*. 2017;10:155–167. EDN: ZHYWVF.

9. Малинковский ЮВ, Евмененко СЮ. Инвариантность стационарного распределения открытой сети обслуживания с экспоненциальным ограничением на время пребывания. *Автоматика и телемеханика*. 2024;9:93–100. DOI: 10.31857/S0005231024090057.

10. Малинковский ЮВ. Инвариантность стационарного распределения состояний модифицированных сетей Джексона и Гордона – Ньюэлла. *Автоматика и телемеханика*. 1998;9:29–36.

11. Довженок ТС. Инвариантность стационарного распределения сетей с обходами и отрицательными заявками. *Автоматика и телемеханика*. 2002;9:97–110. EDN: NUINVJ.

12. Гнеденко БВ, Коваленко ИН. *Введение в теорию массового обслуживания*. Москва: Наука; 1966. 432 с. (Физико-математическая библиотека инженера).

Получена 18.12.2025 / исправлена 10.02.2026 / принята 24.02.2026.
Received 18.12.2025 / revised 10.02.2026 / accepted 24.02.2026.

УДК 519.872

АНАЛИЗ МНОГОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С МАРКОВСКИМ ВХОДНЫМ ПОТОКОМ И ДИНАМИЧЕСКИМ ЦЕНООБРАЗОВАНИЕМ

О. С. ДУДИНА[1)]***, С. А. ДУДИН***[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Аннотация. Исследована математическая модель многолинейной системы массового обслуживания с марковским входным процессом (*Markovian arrival process*, MAP) и механизмом адаптивного управления доступом, основанным на динамическом ценообразовании и политике «отпусков» приборов. Поведение системы описано трехмерной цепью Маркова с непрерывным временем, выписан ее инфинитезимальный генератор. Приведены явные формулы для основных характеристик производительности, включая среднее число активных и занятых приборов, вероятности потерь. Численные эксперименты показывают, что использование динамического ценообразования и управления ресурсами имеет решающее значение для баланса между качеством обслуживания и операционной эффективностью. Кроме того, определена оптимальная стратегия ценообразования, которая максимизирует экономическую прибыль системы за счет управления балансом между перегрузкой и отказами клиентов.

Ключевые слова: динамическое ценообразование; марковский входной процесс; управление доступом; политика «отпусков» приборов; служба такси.

ANALYSIS OF A MULTI-SERVER SYSTEM WITH MARKOVIAN ARRIVAL PROCESS AND DYNAMIC PRICING

O. S. DUDINA[a]***, S. A. DUDIN***[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

Corresponding author: O. S. Dudina (dudina@bsu.by)

Abstract. This paper presents a mathematical model of a multi-server queuing system which integrates a Markovian arrival process (MAP) with an adaptive admission control mechanism based on dynamic pricing and a comprehensive server vacation policy. By formulating the system dynamics as a three-dimensional continuous-time Markov chain, we derive its infinitesimal. We provide explicit formulas for key performance measures, including average numbers of active

Образец цитирования:
Дудина ОС, Дудин СА. Анализ многолинейной системы с марковским входным потоком и динамическим ценообразованием. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2026;2:97–109 (на англ.).
EDN: TPYPWY

For citation:
Dudina OS, Dudin SA. Analysis of a multi-server system with Markovian arrival process and dynamic pricing. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2026; 2:97–109.
EDN: TPYPWY

Авторы:
Ольга Сергеевна Дудина – кандидат физико-математических наук; ведущий научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории прикладного вероятностного анализа кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики.
Сергей Александрович Дудин – кандидат физико-математических наук; ведущий научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории прикладного вероятностного анализа кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики.

Authors:
Olga S. Dudina, PhD (physics and mathematics); leading researcher at the laboratory of applied probabilistic analysis, department of probability theory and mathematical statistics, faculty of applied mathematics and computer science.
dudina@bsu.by
https://orcid.org/0000-0002-6788-8783
Sergei A. Dudin, PhD (physics and mathematics); leading researcher at the laboratory of applied probabilistic analysis, department of probability theory and mathematical statistics, faculty of applied mathematics and computer science.
dudins@bsu.by
https://orcid.org/0000-0002-9439-8755

CC BY NC

and busy servers, and loss probabilities. Numerical experiments demonstrate that the synergy between dynamic pricing and resource management is crucial for balancing the quality of service and operational efficiency. Furthermore, we identify an optimal pricing strategy that maximises the system's economic profit by managing the trade-off between congestion and customer rejection.

Keywords: dynamic pricing; Markovian arrival process; admission control; server vacation policy; ride-hailing platform.

Introduction

Modern digital platforms for passenger transportation are complex dynamic ecosystems whose functioning relies heavily on the ability to effectively manage the real-time balance between the supply and demand under conditions of high uncertainty. The operational efficiency of such aggregators is directly determined by the quality of the analytical tools employed, which must adapt to the stochastic nature of incoming trip requests and the constantly shifting availability of resources on duty. In this study, the operation of a taxi service is modelled as a multi-server bufferless queuing system, where identical vehicles act as the service units. The absence of a waiting buffer in this model reflects the specific nature of mobile ride-hailing applications: if no free vehicle is available in the immediate vicinity at the moment of the request, the potential customer is typically unwilling to wait, abandons the search, or switches to a competitor's service, resulting in an immediate and permanent loss of the request for the system.

A key feature of the proposed approach is the detailed consideration of the human factor and economic levers for the demand management. Unlike classical models, this framework accounts for the variable presence of drivers on duty: they may temporarily leave the system for breaks and return to work based on the current fleet workload and the platform's operational strategy. This mechanism allows for an accurate representation of the flexible work schedules typical to modern aggregators. Simultaneously, the model incorporates an adaptive admission control mechanism through dynamic pricing. It is assumed that a potential customers decision to join the system depends on the offered fare: as the current price increases, the likelihood of the user confirming the trip request decreases. Consequently, the system does not merely distribute requests passively but actively regulates the incoming traffic intensity, balancing between profit maximisation and the risk of customer rejection due to excessive pricing.

The literature on queuing systems with dynamic pricing is already quite extensive; therefore, we do not aim to provide a comprehensive survey, citing only a few key works instead.

Paper [1] is frequently cited as the pioneering work on optimal dynamic pricing policies. The author considers the problem of maximising the expected reward in an $M/M/s$-type queue, where the service cost is adjusted to encourage or discourage arrivals. The price is selected from a finite set at each moment the number of users in the system changes. Assuming all underlying distributions are exponential, the study employs the theory of semi-Markov decision processes. It is shown that the optimal strategy is monotonic, specifically, the optimal price is a non-decreasing function of the number of users. Furthermore, a computational algorithm for determining the optimal strategy parameters (thresholds) is provided.

In work [2], a rental firm with two classes of users, contract and walk-in, is analysed. Contract users are managed via an admission policy, while walk-in users are controlled through pricing. The authors demonstrate that optimal policies are monotone with respect to the system parameters. A similar model is analysed in paper [3], which shows that if the revenue from walk-in users is sufficiently large, optimal policies are not always monotonic relative to the number of contract users. In publication [4], a general framework for investigating how optimal policies vary with system parameters is proposed within the context of event-based dynamic programming (see, for example, [5]).

The study by [6] is one of the few to consider non-constant arrival and service rates, assuming them to be bounded, periodic functions of time. Using the Markov decision processes approach, the authors show that under both infinite-horizon discounted and average reward criteria, the optimal pricing and admission control strategies are non-decreasing in the number of users for any fixed time. They propose a pointwise stationary approximation and a heuristic to improve its implementation, demonstrating its utility through numerical experiments. Additionally, paper [7] considers an inventory model with an MMPP (Markov-modulated Poisson process) demand flow under three pricing policies: static, state-dependent (based on the MMPP), and stock-dependent. Given the similarities between inventory and queuing models, hybrid queuing-inventory systems have become a prominent research subject.

Various aspects of the dynamic pricing in ride-hailing platforms are discussed in works such as [8–14]. Among these works, only paper [14] deals with correlated arrival flow of customers. This paper proposes a novel predictive dynamic pricing mechanism, where decision moments coincide with the transition epochs of the MAP's

underlying process. The authors analyse a multi-server retrial queuing model, where customers' decisions to join, balk, or postpone the service (enter an orbit) depend on the current price. The system's behaviour is described by a multidimensional Markov chain with state-inhomogeneous transitions. The main disadvantage of paper [14] is the assumption that the number of available cars is constant and does not change in time. In modern ride-hailing systems like Uber, the number of active cars is never static and fluctuates in real-time. The primary engine behind this is dynamic pricing. Because drivers operate as independent contractors, they have the freedom to choose when to log on or off. When the demand spikes during heavy rain, major events, or rush hour, the system automatically raises fares to attract more drivers start work. Drivers are naturally more motivated to work during these peak hours because the earning potential is significantly higher. This creates a self-regulating cycle: as prices go up, the supply of active cars increases to meet the demand. Once the rush subsides and the extra incentives disappear, many drivers head home, and the number of active vehicles drops. In this paper, we eliminate this disadvantage by considering a queuing model with variable number of active servers.

Our goal is to develop a comprehensive analytical model that allows calculating the key performance measures of the service. These include the probability of service denial due to a lack of available cars on the line and the average number of active drivers on duty. The model integrates a dynamic pricing mechanism that adjusts the flow of incoming requests based on vehicle availability. This not only optimises the aggregator's total profit but also helps in balancing the overall workload of the fleet. The results of our paper can be applied to determine the optimal pricing policy.

Beyond the passenger transportation sector, this mathematical framework can be effectively adapted to describe other shared-resource systems. Specifically, it is well-suited for cloud computing environments, where virtual servers are switched to energy-saving modes during periods of low demand. Furthermore, the model is highly relevant for next-generation wireless networks, where base stations dynamically adjust the number of active communication channels, and for modern call centres, where operators join the service or take breaks based on the current density of incoming calls.

Mathematical model

We consider the operation of a taxi service as a multi-server bufferless queuing system with N identical vehicles (servers). The structure of the system is illustrated in fig. 1.

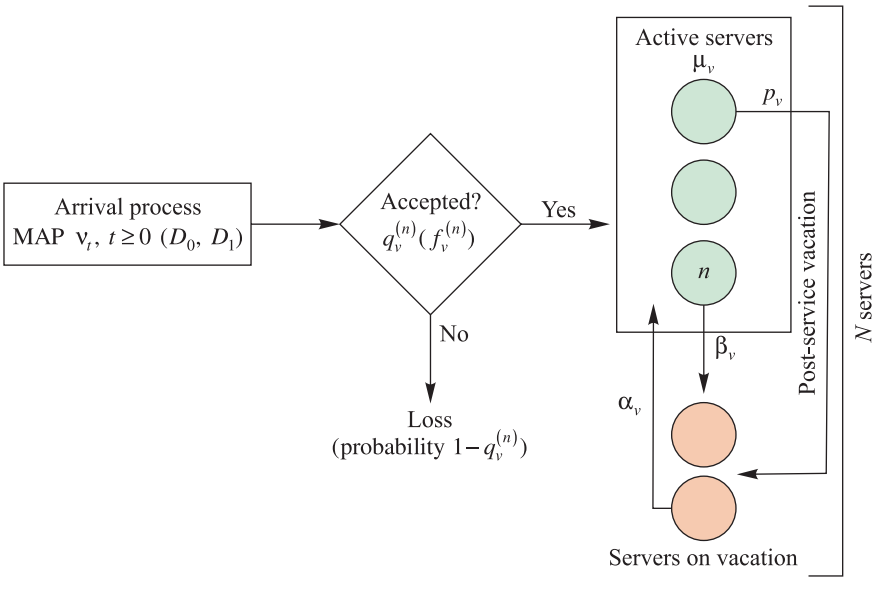


Fig. 1. The structure of the queue

The flow of incoming trip requests is modelled by a Markovian arrival process (MAP) defined by the matrix pair (D_0, D_1) of the dimension $W \times W$. This process is controlled by an irreducible underlying Markov chain ν_t, $t \geq 0$, with the state space $\{1, 2, \ldots, W\}$, which represents the current demand state (e. g., peak hours, weather conditions, or traffic density). D_0 contains the intensities of transitions that do not result in an arrival, and D_1 contains the intensities of transitions accompanied by a request generation. The fundamental arrival rate λ of trip requests is calculated using the formula

$$\lambda = \boldsymbol{\theta} D_1 \boldsymbol{e},$$

where $\boldsymbol{\theta}$ is the stationary state vector of the underlying Markov chain with generator $D = D_0 + D_1$, satisfying the equations

$$\boldsymbol{\theta}\left(D_0 + D_1\right) = \mathbf{0}, \ \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{e} = 1,$$

where $\mathbf{0}$ is a row vector of zeros, and $\boldsymbol{e}$ is a column vector of ones. A more detailed description of the MAP can be found in paper [15].

The average arrival rate λ_v when the process ν_t is in the state v, $v = \overline{1, W}$, is defined as $\lambda_v = \left(D_1\right)_v \boldsymbol{e}$, where $\left(D_1\right)_v$ is the v^{th} row of the matrix D_1. We assume that the states of the MAP are numbered in the increasing order of intensities λ_v, i. e., $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_W$.

To manage the fleet workload and maximise the efficiency, the platform implements dynamic pricing (surge pricing). If a request arrives when the city is in demand state $v \in \{1, 2, \ldots, W\}$ and there are $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ active drivers on the line, the request is accepted for service with the probability $q_v^{(n)}$. This probability depends on the pricing coefficient $f_v^{(n)}$. Otherwise, with the probability $1 - q_v^{(n)}$ the request rejects the price and leaves the system. As the surge multiplier $f_v^{(n)}$ increases, the acceptance probability $q_v^{(n)}$ decreases, reflecting the customer's decision to reject the trip due to high cost. If all active vehicles are already occupied, the request is lost.

The number of available vehicles is dynamic, reflecting the behaviour of drivers who may switch between being on-duty and taking a vacation state.

1. Post-service vacation: upon completing a trip, a driver enters a vacation state with the probability p_v, $v = \overline{1, W}$. Otherwise, with the probability $1 - p_v$, they remain active and ready for the next ping.

2. Idle-to-vacation transition: an active but idle driver (waiting for an order) may go offline with the intensity β_v, $v = \overline{1, W}$. This mechanism models drivers logging off during low-demand periods.

3. Recovery: a driver currently on vacation returns to the active fleet with the intensity α_v, $v = \overline{1, W}$.

The trip duration (service time) follows an exponential distribution with rate μ_v, which accounts for the average travel speed in the current demand state v.

Process of system states

The behaviour of the system is described by a regular irreducible continuous-time Markov chain

$$\xi_t = \{n_t, m_t, \nu_t\}, \ t \ge 0,$$

defined on the state space

$$\mathcal{S} = \left\{\left(n_t, m_t, \nu_t\right) : 0 \le n_t \le N, \ 0 \le m_t \le n_t, \ 1 \le \nu_t \le W\right\}, \tag{1}$$

where at the time t, $t \ge 0$, n_t is the number of available active servers (active drivers); m_t is the number of busy servers (occupied vehicles); ν_t is the state of the underlying process of the MAP (the current demand state of the city).

By enumerating the state space (1) lexicographically, we group individual states into macro-states $\left(n, m\right)$, where the first two components are fixed. The set of states characterised by a fixed value n of the first component is defined as level n.

Theorem 1. *The infinitesimal generator Q of the process ξ_t, $t \ge 0$, has a block-tridiagonal structure*

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{0,0} & Q_{0,1} & O & \ldots & O & O \\ Q_{1,0} & Q_{1,1} & Q_{1,2} & \ldots & O & O \\ O & Q_{2,1} & Q_{2,2} & \ldots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \ldots & Q_{N,N-1} & Q_{N,N} \end{pmatrix},$$

where non-zero blocks $Q_{n,k}$, $|n-k| \le 1$, $n, k = \overline{0, N}$, are defined by the following expressions.

1. Server recovery block ($k = n+1$):

$$Q_{n,n+1} = \left(N - n\right)\hat{I}_n \otimes \mathcal{A}, \ n = \overline{0, N-1},$$

where

$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_W\},$$

$$\hat{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+2)}.$$

2. Server vacation block ($k = n-1$):

$$Q_{n,n-1} = \Delta_n^- \otimes \mathcal{B} + \Omega_n^- \otimes \mathcal{MP},\ n = \overline{1,\ N},$$

where

$$\mathcal{B} = \operatorname{diag}\{\beta_v,\ v = \overline{1,\ W}\},\ \mathcal{M} = \operatorname{diag}\{\mu_v,\ v = \overline{1,\ W}\},\ \mathcal{P} = \operatorname{diag}\{p_v,\ v = \overline{1,\ W}\},$$

$$\Delta_n^- = \begin{pmatrix} n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & n-1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}_{(n+1)\times n}, \quad \Omega_n^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & n \end{pmatrix}_{(n+1)\times n}.$$

3. Diagonal block ($k = n$):

$$Q_{0,0} = D_0 + D_1 - N\mathcal{A},$$

$$Q_{n,n} = I_{n+1} \otimes D_0 + \tilde{I}_n \otimes (I_W - \mathcal{Q}_n) D_1 + (I_{n+1} - \tilde{I}_n) \otimes D_1 +$$

$$+ \bar{\Omega}_n^- \otimes \mathcal{M}(I_W - \mathcal{P}) + \Omega_n^+ \otimes \mathcal{Q}_n D_1 -$$

$$- C_n \otimes \mathcal{M} - (N-n) I_{n+1} \otimes \mathcal{A} - B_n \otimes \mathcal{B},\ n = \overline{1,\ N},$$

where

$$\mathcal{Q}_n = \operatorname{diag}\{q_v^{(n)},\ v = \overline{1,\ W}\},$$

$$\tilde{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}, \quad C_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)},$$

$$B_n = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}, \quad \Omega_n^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)},$$

$$\bar{\Omega}_n^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & n & 0 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}.$$

Here the notation $\operatorname{diag}\{\ldots\}$ *denotes a diagonal matrix with the diagonal elements listed in brackets.*

P r o o f. The block-tridiagonal structure of the infinitesimal generator Q arises from the fact that in an infinitesimal time interval, the number of available active servers n_t can change by at most one unit.

The off-diagonal blocks are derived as follows.

1. Server recovery ($n \to n+1$): with $(N-n)$ servers currently on vacation, each returning to the active state at the rate α_v, the transition rate is $(N-n)\alpha_v$. Since the number of busy servers m remains constant during this transition, the expansion matrix $\hat{I}_n$ is applied. Thus $Q_{n,\,n+1} = (N-n)\hat{I}_n \otimes \mathcal{A}$.

2. Server vacation ($n \to n-1$). This transition occurs in two cases:

• idle server vacation: an active but idle server moves to the vacation state with the intensity β_v. With $(n-m)$ idle servers, this is captured by the term $\Delta_n^- \otimes \mathcal{B}$;

• post-service vacation: a busy server completes the service (at the rate μ_v) and enters a vacation state with the probability p_v. This is captured by $\Omega_n^- \otimes \mathcal{MP}$.

The resulting block is $Q_{n,\,n-1} = \Delta_n^- \otimes \mathcal{B} + \Omega_n^- \otimes \mathcal{MP},\ n = \overline{1,\ N}$.

The diagonal entries of the block matrices $Q_{n,\,n}$ are negative, and their absolute values represent the total exit rates of the process ξ_t, $t \geq 0$, from the corresponding states. A transition out of the current state may occur due to the following events.

1. Change in the state of the underlying process ν_t: the exit rates are determined by the absolute values of the diagonal entries of the matrix $I_{n+1} \otimes D_0$ for $n = \overline{0,\ N}$. Note that the process ν_t may transit to the same state upon a customer arrival if the customer is either: rejected and leaves the system (is lost), or lost due to the lack of available active servers. In this case, the change does not occur. The intensities of these events are given by the diagonal entries of the matrices $\tilde{I}_n \otimes (I_W - \mathcal{Q}_n)D_1$ and $(I_{n+1} - \tilde{I}_n) \otimes D_1$, respectively.

2. Service completion: the corresponding transition rates are determined by the diagonal elements of the matrix $C_n \otimes \mathcal{M}$.

3. Server activation: one of the $(N-n)$ servers currently on vacation returns to the active state. The transition rates are given by the elements of the matrix $(N-n)I_{n+1} \otimes \mathcal{A}$.

4. Transition to the vacation state: one of n idle active servers moves to the vacation state. The intensities of these transitions are defined by the elements of the matrix $B_n \otimes \mathcal{B}$.

The non-negative off-diagonal entries of the diagonal blocks $Q_{n,\,n}$ represent the transition rates of the Markov chain ξ_t, $t \geq 0$, that do not result in a change in the number of active servers n. These transitions occur in the following cases.

1. Transitions of the underlying process ν_t:

(i) the process ν_t changes its state without generating a customer;

(ii) a customer arrival occurs, but the customer is lost due to rejection by the admission control mechanism or the absence of available active servers;

(iii) an arriving customer is accepted for service.

The intensities are determined by off-diagonal entries of the matrix $I_{n+1} \otimes D_0$ for case (i), the entries of the matrix $\tilde{I}_n \otimes (I_W - \mathcal{Q}_n)D_1 + (I_{n+1} - \tilde{I}_n) \otimes D_1$ for case (ii) and the entries of the matrix $\Omega_n^+ \otimes \mathcal{Q}_n D_1$ for case (iii).

2. Service completion: a server finishes the service but remains in the active state. The intensities are provided by the off-diagonal elements of the matrix $\bar{\Omega}_n^- \otimes \mathcal{M}(I_W - \mathcal{P})$.

Combining these parts, we obtain the complete expression for the diagonal block for $Q_{n,\,n}$. The proof is complete.

Once the block-tridiagonal structure of the infinitesimal generator Q is established (see theorem 1), we proceed to determine the stationary probability distribution of the process ξ_t, $t \geq 0$.

Let $\boldsymbol{\pi}(n,\ m)$ be the row vector of stationary probabilities:

$$\boldsymbol{\pi}(n,\ m) = \big(\pi(n,\ m,\ 1),\ \pi(n,\ m,\ 2),\ \ldots,\ \pi(n,\ m,\ W)\big),$$

where $0 \leq n \leq N$, $0 \leq m \leq n$. Each component $\pi(n,\ m,\ \nu)$, $1 \leq \nu \leq W$, represents the steady-state probability that there are n active servers, m busy servers, and the underlying process ν_t is in the state ν. Since the Markov chain ξ_t, $t \geq 0$, is irreducible, regular, and has a finite state space, the stationary distribution exists for any system parameters.

Subvectors $\boldsymbol{\pi}_n$ corresponded to the state space level, where n active servers are present are structured as follows:

$$\boldsymbol{\pi}_n = \big(\boldsymbol{\pi}(n,\ 0),\ \boldsymbol{\pi}(n,\ 1),\ \ldots,\ \boldsymbol{\pi}(n,\ n)\big),\ n = \overline{0,\ N}.$$

Let $\boldsymbol{\pi}$ be the stationary probability vector, partitioned according to the number of active servers n as follows:

$$\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_0,\ \boldsymbol{\pi}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{\pi}_N).$$

The vector $\boldsymbol{\pi}$ is the unique solution to the system of equilibrium equations

$$\boldsymbol{\pi} Q = \mathbf{0},\ \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{e} = 1. \tag{2}$$

The block-tridiagonal structure of the generator Q facilitates the use of numerically stable methods, such as the stable algorithm from paper [16], to solve system (2).

Performance measures

Once the stationary probability vector $\boldsymbol{\pi}_n$, $n = \overline{0,\ N}$, is obtained, the following performance measures can be calculated:

- the average number of active servers (active drivers)

$$E_{\text{act}} = \sum_{n=1}^{N} n\boldsymbol{\pi}_n\boldsymbol{e};$$

- the average number of busy servers (occupied vehicles)

$$E_{\text{busy}} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=1}^{n} m\boldsymbol{\pi}(n,\ m)\boldsymbol{e};$$

- the average intensity of the output flow of requests (average trip completion rate)

$$\lambda_{\text{out}} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n} m\boldsymbol{\pi}(n,\ m)\mathcal{M}\boldsymbol{e};$$

- the probability that an arriving customer is rejected due to all active servers being busy upon the arrival («no cars are available» probability)

$$P_{\text{arr}-\text{loss}} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{N}\boldsymbol{\pi}(n,\ n)D_1\boldsymbol{e};$$

- the probability that an arriving customer decides not to join the system despite the presence of idle active servers because the current surge price is too high (surge price rejection probability)

$$P_{\text{join}-\text{loss}} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{n-1}\boldsymbol{\pi}(n,\ m)(I-\mathcal{Q}_n)D_1\boldsymbol{e};$$

- the total loss probability: the probability that an arriving customer is rejected due to either all active servers being busy or the dynamic pricing mechanism

$$P_{\text{loss}} = \frac{1}{\lambda}\left[\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{m=0}^{n-1}\boldsymbol{\pi}(n,\ m)(I-\mathcal{Q}_n)D_1 + \boldsymbol{\pi}(n,\ n)D_1\right)\boldsymbol{e} + \boldsymbol{\pi}(0,\ 0)D_1\boldsymbol{e}\right] = P_{\text{arr}-\text{loss}} + P_{\text{join}-\text{loss}}$$

or

$$P_{\text{loss}} = 1 - \frac{\lambda_{\text{out}}}{\lambda}.$$

The two distinct formulas obtained for the loss probability P_{loss} can be used to verify the correctness of the calculated stationary state probabilities;

- the average intensity of active servers going into a vacation state (average driver log-off intensity)

$$R_{\text{vac}} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{n}\boldsymbol{\pi}(n,\ m)\left[(n-m)\mathcal{B} + m\mathcal{M}\mathcal{P}\right]\boldsymbol{e};$$

- the average activation intensity of servers from the vacation state (average driver log-on intensity)

$$R_{\text{act}} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{n}(N-n)\boldsymbol{\pi}(n,\ m)\mathcal{A}\boldsymbol{e}.$$

Remark. Since the system operates in a steady state, the following relation holds:

$$R_{\text{vac}} = R_{\text{act}}.$$

Numerical examples

This section evaluates the performance of the proposed model within a real-world taxi aggregator scenario. We analyse how dynamic pricing strategies (surge pricing) and driver work-rest cycles impact the platform's service quality and overall profitability.

We consider a regional fleet of $N = 150$ vehicles. The incoming demand for rides is modelled as a MAP with the following fundamental matrices:

$$D_0 = \begin{pmatrix} -3.082\,03 & 0.030\,820\,3 & 0.015\,410\,1 \\ 0.154\,101 & -7.705\,07 & 0.154\,101 \\ 0.154\,101 & 0.077\,050\,7 & -15.410\,1 \end{pmatrix}, \; D_1 = \begin{pmatrix} 3.035\,8 & 0 & 0 \\ 0 & 7.396\,87 & 0 \\ 0 & 0 & 15.179 \end{pmatrix}.$$

The MAP has the fundamental arrival rate $\lambda = 5$, $c_{\text{cor}} = 0.207\,8$ and $c_{\text{var}} = 1.742\,1$ and represents three distinct city states.

1. State 1 (low demand): $\lambda_1 = 3.035\,8$ requests per minute (e. g., late night or early morning).
2. State 2 (moderate demand): $\lambda_2 = 7.396\,87$ requests per minute (e. g., standard business hours).
3. State 3 (peak demand): $\lambda_3 = 15.179$ requests per minute (e. g., rush hours or bad weather).

The average trip durations are 10 min $(\mu_1 = 0.1)$ in low traffic, 12.5 min $(\mu_2 = 0.08)$ in standard city traffic and 16.7 min $(\mu_3 = 0.06)$ during peak hours due to congestion.

The recovery intensity regulates the rate at which drivers rejoin the active car fleet from breaks, varying from 200 min $(\alpha_1 = 0.005)$ during low demand, 125 min $(\alpha_2 = 0.008)$ in moderate periods and 83.33 min $(\alpha_3 = 0.012)$ during peak hours to maintain system stability.

The idle vacation intensity represents the rate at which active but idle drivers (those waiting for an order) choose to log off, varying from 200 min $(\beta_1 = 0.005)$ during low demand, 333 min $(\beta_2 = 0.003)$ in moderate periods and to 1000 min $(\beta_3 = 0.001)$ during peak hours as they prefer to stay online when the likelihood of receiving a request is higher.

The post-service vacation probability defines the likelihood of a driver logging off immediately after a trip completion, which decreases from $p_1 = 0.07$ (7 %) during low demand, $p_2 = 0.05$ (5 %) in moderate periods to $p_3 = 0.02$ (2 %) in peak periods as higher earning potential and surge pricing incentivise drivers to stay online.

We assume that the system implements the dynamic pricing based on the load coefficient $R_v^{(n)} = \dfrac{\lambda_v}{n\mu_v}$, $n = \overline{0,\ N}$. The pricing coefficients $f_v^{(n)}$ are defined by formula

$$f_v^{(n)} = \begin{cases} f_1, \text{ if } R_v^{(n)} < 0.7, \\ f_2, \text{ if } 0.7 \le R_v^{(n)} < 1.5, \\ f_3, \text{ if } R_v^{(n)} \ge 1.5. \end{cases}$$

The corresponding acceptance probabilities $q_v^{(n)}$ are calculated as follows:

$$q_v^{(n)} = \begin{cases} 0.98, \text{ if } f_v^{(n)} = f_1, \\ \min\left\{0.98,\ \dfrac{0.5}{\max\left\{0.7 f_v^{(n)}, 1\right\}} + \dfrac{0.5}{\left(f_v^{(n)}\right)^2}\right\} \text{ otherwise.} \end{cases}$$

We set $f_1 = 1$ and vary the pricing coefficients f_2 and f_3 within the intervals $[1,\ 3]$ and $[f_2,\ 3]$, respectively, with a step of 0.1. These coefficients directly determine the request acceptance probability $q_v^{(n)}$, where higher prices lead to a lower probability of customer admission to the system. Then we investigate the influence of pricing coefficients f_2 and f_3 on the key system performance metrics.

Figure 2 illustrates the dependence of the average number of active servers, E_{act}, on the pricing coefficients f_2 and f_3. It can be observed that E_{act} depends only slightly on these parameters. In this specific case, E_{act} increases as f_2 and f_3 rise, reaching its maximum when the pricing coefficients are at their peak. However, this trend may change if different values for the intensities β_v and probabilities p_v, $v = 1,\ 2,\ 3$, are selected.

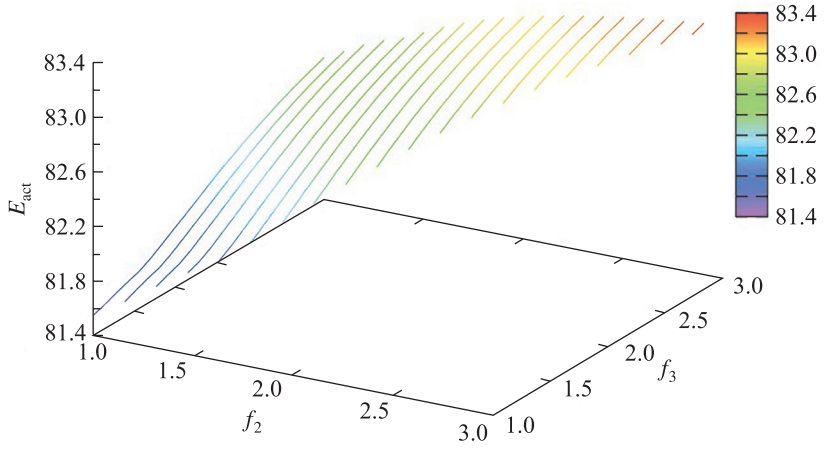


Fig. 2. The dependence of E_{act} on f_2 and f_3

Conversely, fig. 3 depicts the impact of the pricing coefficients on the average number of busy servers E_{busy}. The plot shows a clear downward trend, where E_{busy} decreases as f_2 and f_3 grow. This result confirms that the adaptive admission control mechanism effectively regulates the number of busy servers by discouraging customer arrivals through increased pricing during periods of high demand, thus preventing system congestion.

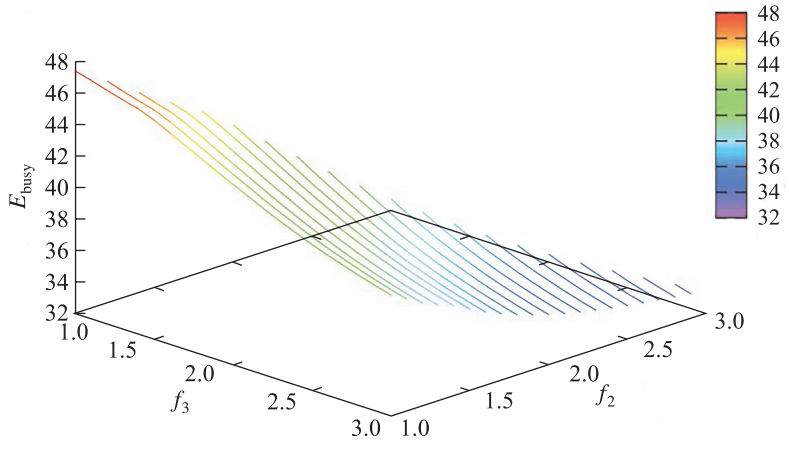


Fig. 3. The dependence of E_{busy} on f_2 and f_3

Figure 4 illustrates the dependence of the probability that an arriving customer is rejected due to all active servers being busy, denoted as $P_{arr-loss}$, on the pricing coefficients f_2 and f_3. The plot reveals a consistent decrease in $P_{arr-loss}$ as the values of f_2 and f_3 increase. This downward trend is explained by the fact that higher prices lead to a lower acceptance probability $q_v^{(n)}$, which reduces the overall number of requests admitted to the system. As a result, the active servers are less likely to be fully occupied, decreasing the probability that a new arrival finds no free server available.

Figure 5 shows the dependence of $P_{join-loss}$, the probability that a customer decides not to join the system due to the dynamic pricing mechanism despite the presence of idle servers, on the coefficients f_2 and f_3. This probability exhibits a significant upward trend as the pricing coefficients grow. Since the admission control mechanism intentionally reduces the acceptance probability $q_v^{(n)}$ as the price increases to manage congestion, the likelihood of a customer being rejected by the pricing rule rises accordingly. This behaviour confirms the effective operation of the adaptive admission control, which uses higher prices to discourage arrivals during high-load periods.

Figure 6 demonstrates the dependence of the average intensity of the output flow of requests, denoted as λ_{out}, on the pricing coefficients f_2 and f_3. The plot reveals that λ_{out} decreases as f_2 and f_3 rise. This is a direct consequence of the adaptive admission control mechanism: higher pricing reduces the acceptance probability $q_v^{(n)}$, which results in a smaller number of requests being admitted and subsequently processed by the system per unit of time.

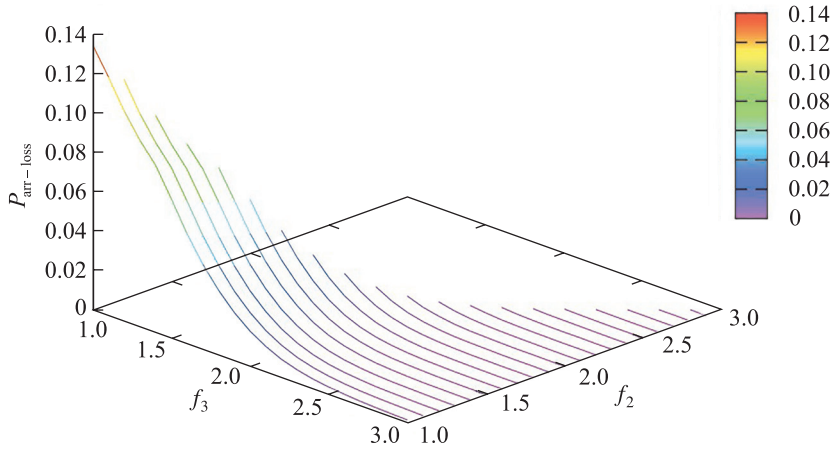


Fig. 4. The dependence of $P_{\text{arr}-\text{loss}}$ on f_2 and f_3

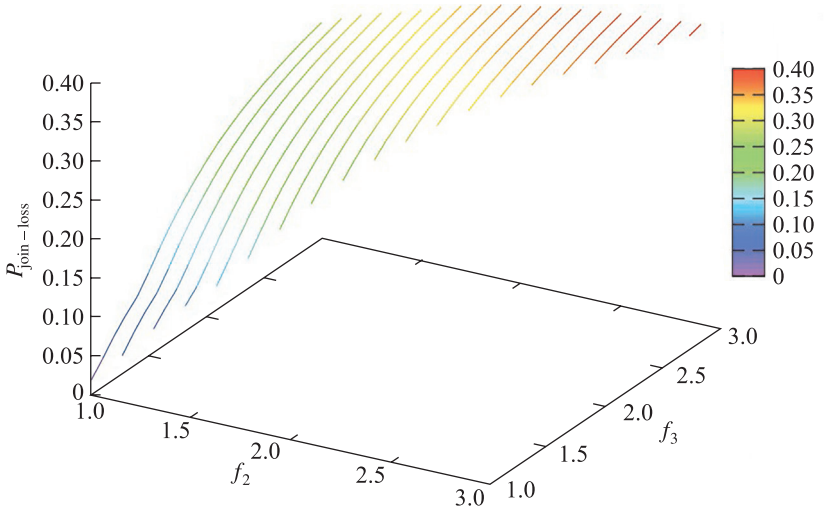


Fig. 5. The dependence of $P_{\text{join}-\text{loss}}$ on f_2 and f_3

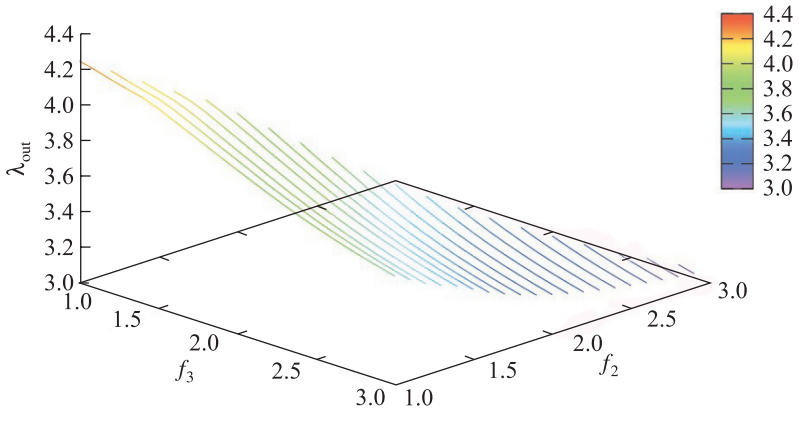


Fig. 6. The dependence of λ_{out} on f_2 and f_3

The total loss probability as a function of the pricing coefficients is depicted in fig. 7. It is observed that P_{loss} increases significantly as f_2 and f_3 grow. Although higher prices lead to a decrease in the probability of rejection due to all servers being busy ($P_{\text{arr}-\text{loss}}$), the sharp rise in rejections caused directly by the pricing mechanism ($P_{\text{join}-\text{loss}}$) dominates the overall behaviour. This leads to an increase in the total probability that an arriving customer is rejected, either due to the system congestion or the dynamic pricing strategy.

Figure 8 illustrates the average intensity of active servers transitioning into the vacation state R_{vac}, in relation to f_2 and f_3. This intensity also slightly depends on f_2 and f_3. In this case, the intensity decreases as the pricing coefficients increase. However, a different choice of intensities and probabilities may alter this trend.

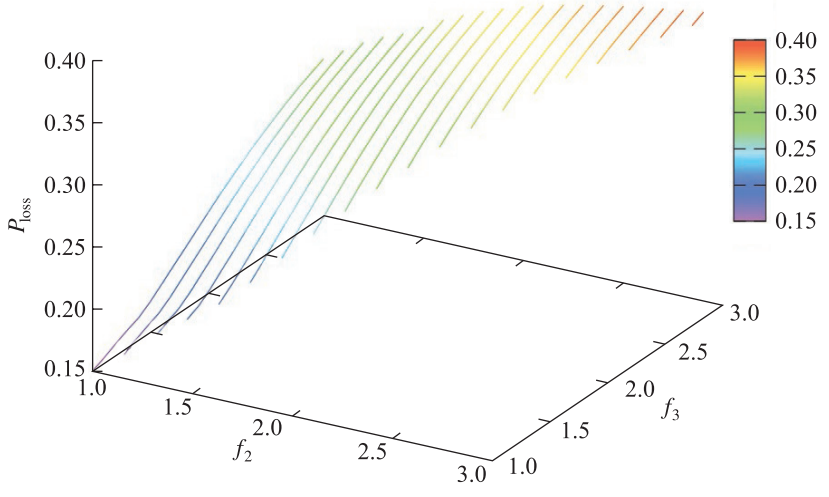


Fig. 7. The dependence of P_{loss} on f_2 and f_3

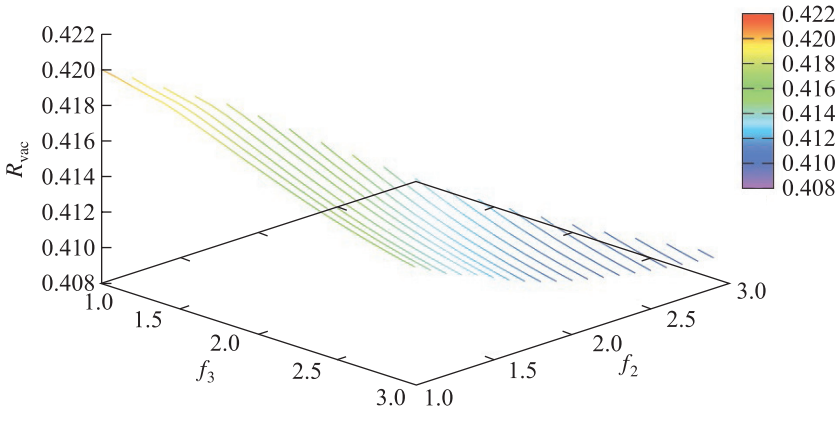


Fig. 8. The dependence of R_{vac} on f_2 and f_3

To evaluate the system's economic efficiency, we define the expected system profit per unit time as follows:

$$J = a\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{n-1}\boldsymbol{\pi}(n,\, m)\mathcal{Q}_n D_1 \operatorname{diag}\left\{f_v^{(n)},\, n=\overline{1,\, W}\right\}\boldsymbol{e} - b_1\lambda P_{\text{arr}-\text{loss}} - b_2\lambda P_{\text{join}-\text{loss}},$$

where a is the revenue earned per successfully served customer excluding price coefficients; b_1 and b_2 are the penalty cost per rejected customer due to either all active servers being busy or due to the lack of available active servers.

The first term, $a\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{n-1}\boldsymbol{\pi}(n,\, m)\mathcal{Q}_n D_1 \operatorname{diag}\left\{f_v^{(n)},\, n=\overline{1,\, W}\right\}\boldsymbol{e}$, represents the expected revenue earned by the system per unit time while the second term, $b_1\lambda P_{\text{arr}-\text{loss}} + b_2\lambda P_{\text{join}-\text{loss}}$, quantifies the economic impact of service denials. The optimisation problem is to find the optimal vector of controllable parameters $f_v^{(n)}$, $n=\overline{1,\, W}$, that maximises the objective function J.

Set $a=1$, $b_1=2$ and $b_2=0.5$.

Figure 9 illustrates the behaviour of the expected system profit J as a function of the pricing coefficients f_2 and f_3.

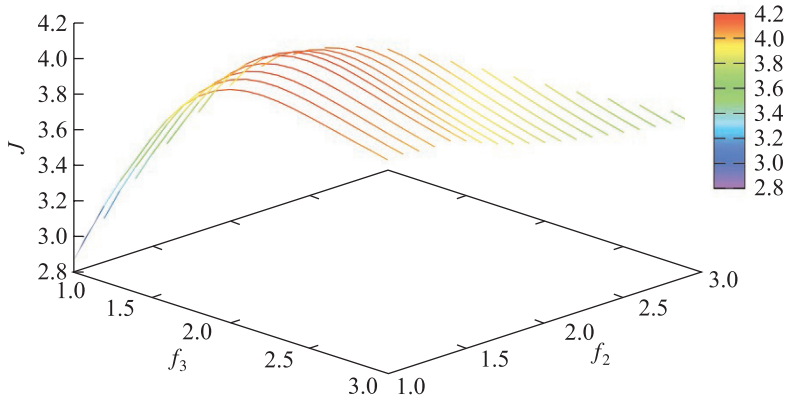


Fig. 9. The dependence of the cost function J on f_2 and f_3

The 3D surface plot in fig. 9 demonstrates a clear non-monotonic relationship, indicating the existence of an optimal pricing strategy. Initially, as f_2 and f_3 increase, the profit J rises due to the effective congestion control and balanced request acceptance. However, beyond the optimal point, further increases in pricing lead to a significant rise in the probability $P_{\text{join}-\text{loss}}$, which negatively impacts the total revenue. According to the numerical analysis, the maximum profit $J^* = 4.1816$ is achieved at the optimal values $f_2^* = 1.4$ and $f_3^* = 2.1$.

Conclusions

In this paper, we have developed a comprehensive mathematical model of a multi-server queuing system with a MAP, adaptive admission control and a complex server vacation policy. The qualitative analysis of the proposed model reveals that the synergy between dynamic pricing and server management is essential for maintaining a balance between quality of service and operational efficiency. The adaptive admission control mechanism, which regulates a request acceptance based on the current load, proves to be a highly effective tool for the congestion management. It ensures system stability by discouraging new arrivals during peak periods, thereby preventing the exhaustion of active resources. Simultaneously, the inclusion of both post-service and idle server vacation policies allows the system to significantly reduce the energy consumption and operational expenditures during periods of low traffic intensity.

Our investigation into the system's economic efficiency further suggests that the pricing coefficients must be carefully optimised to maximise total profit. While increased pricing reduces the probability of loss due to busy servers, it simultaneously increases the likelihood of requests being rejected by the admission control mechanism. The existence of an optimal pricing strategy indicates that resource providers in cloud data centres and next-generation communication networks can fine-tune these parameters to achieve the best economic outcome.

The findings of this paper can be extended to the case of a phase-type service time distribution (see [17]).

References

1. Low DW. Optimal dynamic pricing policies for an *M*/*M*/*s* queue. *Operations Research*. 1974;22(3):545–561. DOI: 10.1287/opre.22.3.545.

2. Gans N, Savin S. Pricing and capacity rationing for rentals with uncertain durations. *Management Science*. 2007;53(3):390–407. DOI: 10.1287/mnsc.1060.0651.

3. Son J-D. Optimal admission and pricing control problem with deterministic service times and sideline profit. *Queueing Systems*. 2008;60(1–2):71–85. DOI: 10.1007/s11134-008-9087-4.

4. Çil EB, Örmeci EL, Karaesmen F. Effects of system parameters on the optimal policy structure in a class of queueing control problems. *Queueing Systems*. 2009;61(4):273–304. DOI: 10.1007/s11134-009-9109-x.

5. Koole G. Structural results for the control of queueing systems using event-based dynamic programming. *Queueing Systems*. 1998;30(3–4):323–339. DOI: 10.1023/A:1019177307418.

6. Yoon S, Lewis ME. Optimal pricing and admission control in a queueing system with periodically varying parameters. *Queueing Systems*. 2004;47(3):177–199. DOI: 10.1023/B:QUES.0000035313.20223.3f.

7. Gayon J-P, Talay-Değirmenci I, Karaesmen F, Örmeci EL. Optimal pricing and production policies of a make-to-stock system with fluctuating demand. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. 2009;23(2):205–230. DOI: 10.1017/S026996480900014X.

8. Alwan AA, Ata B, Zhou Y. A queueing model of dynamic pricing and dispatch control for ride-hailing systems incorporating travel times. *Queueing Systems*. 2024;106(1–2):1–66. DOI: 10.1007/s11134-023-09901-y.

9. Castillo JC, Knoepfle D, Weyl EG. Matching and pricing in ride hailing: wild goose chases and how to solve them. *Management Science*. 2024;71(5):4377–4395. DOI: 10.1287/mnsc.2022.00096.

10. Chen Q, Lei Y, Jasin S. Real-time spatial-intertemporal pricing and relocation in a ride-hailing network: near-optimal policies and the value of dynamic pricing. *Operations Research*. 2024;72(5):2097–2118. DOI: 10.1287/opre.2022.2425.

11. Guo D, Fan Z-P, Liu Y. The strategic analysis of service mode selection for a ride-hailing platform. *International Transactions in Operational Research*. 2024;31(5):3135–3172. DOI: 10.1111/itor.13271.

12. Tripathy M, Bai J, Heese HS. Driver collusion in ride-hailing platforms. *Decision Sciences*. 2023;54(4):434–446. DOI: 10.1111/deci.12561.

13. Wang C, Wang J, Zhang Y, Malenje JO, Han Y. Optimizing taxi-pooling operations to enhance efficiency and revenue: a queuing model approach. *Mathematics*. 2024;12(20):3210. DOI: 10.3390/math12203210.

14. Dudin A, Dudin S, Dudina O. Analysis of a retrial queueing system suitable for modeling operation of ride-hailing platforms with the dynamic service pricing. *Axioms*. 2025;14(9):714. DOI: 10.3390/axioms14090714.

15. Dudin AN. Admission control in a parcel delivery system with account of the finite capacity of the warehouse at the pick-up point. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2025;1:68–78. EDN: ZIAXUB.

16. Dudin SA, Dudina OS. Call center operation model as a *MAP*/*PH*/*N*/*R* – *N* system with impatient customers. *Problems of Information Transmission*. 2011;47(4):364–377. DOI: 10.1134/S0032946011040053.

17. Dudina OS. Analytical modelling of systems with a ticket queue. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2024;2:40–53. Russian. EDN: NSXUQQ.

Received 01.04.2026 / revised 08.06.2026 / accepted 09.06.2026.

Теоретические основы информатики

Theoretical foundations of computer science

УДК 004.896:004.942

УСОВЕРШЕНСТВОВАННЫЙ МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ОКНА ДЛЯ ЛОКАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ В УСЛОВИЯХ МНОЖЕСТВА ПРЕПЯТСТВИЙ

И ТАН[1)]***, Д. Ю. ПЕРЦЕВ***[1)]***, Д. В. КУПРИЯНОВА***[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Беларусь*

Аннотация. Рассматриваются ограничения классического метода динамического окна в задачах локального планирования траектории: отсутствие плавности траектории, неустойчивость состояния, недостаточная адаптация к глобальной навигации. В качестве решения предлагается усовершенствованный метод динамического окна, работающий в условиях множества препятствий. Данный метод оптимизирует оценку траектории за счет

Образец цитирования:
И Тан, Перцев ДЮ, Куприянова ДВ. Усовершенствованный метод динамического окна для локальной навигации в условиях множества препятствий. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2026;2:110–121 (на англ.).
EDN: XZXUKP

For citation:
Yi Tang, Pertsau DYu, Kupriyanava DV. Multi-constraint enhanced dynamic window approach for robust and smooth local navigation. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2026;2:110–121.
EDN: XZXUKP

Авторы:
И Тан – аспирант кафедры информационных технологий автоматизированных систем факультета информационных технологий и управления. Научный руководитель – кандидат технических наук, доцент О. В. Герман.
Дмитрий Юрьевич Перцев – кандидат технических наук, доцент; доцент кафедры электронных вычислительных машин факультета компьютерных систем и сетей.
Диана Вячеславовна Куприянова – старший преподаватель кафедры электронных вычислительных машин факультета компьютерных систем и сетей.

Authors:
Yi Tang, postgraduate student at the department of information technologies in automated systems, faculty of information technology and control.
tangyijcb@163.com
https://orcid.org/0009-0008-7673-017X
Dmitry Yu. Pertsau, PhD (engineering), docent; associate professor at the department of electronic computer machines, faculty of computer systems and networks.
pertsev@bsuir.by
https://orcid.org/0000-0003-3830-378X
Dziana V. Kupriyanava, senior lecturer at the department of electronic computer machines, faculty of computer systems and networks.
d.kupriianova@bsuir.by

введения нескольких дополнительных параметров: двустороннего отклонения от курса, соблюдения общей траектории, контроля изменения кривизны и подавления рывков при движении. Они интегрированы в единую функцию оценки, которая способствует более плавному, обоснованному и динамически повторяемому созданию траектории. Для проверки эффективности предлагаемого метода проводится серия экспериментов с применением различных карт, включающих как простое, так и сложное окружение. Усовершенствованный метод сравнивается с классическим методом динамического окна и несколькими его улучшенными вариантами. Устанавливается, что предлагаемый метод достигает более высоких характеристик с точки зрения качества пути, безопасности и общей надежности планирования, демонстрируя улучшенную адаптивность и надежность при решении сложных навигационных задач.

Ключевые слова: метод динамического окна; планирование местного пути; оптимизация для множества препятствий; глобальная и локальная координация; плавность траектории; автономный обход препятствий.

Вклад авторов. И Тан выполнил основную часть исследовательской работы, включая разработку дизайна проекта, проведение экспериментов, анализ данных и подготовку чернового варианта рукописи. Д. Ю. Перцев осуществлял научное руководство исследованием, давал ценные рекомендации на всех этапах работы и тщательно отредактировал рукопись, повысив ее научный уровень и логическую стройность. Д. В. Куприянова внесла ряд правок в черновой вариант статьи и участвовала в разработке дизайна исследования.

MULTI-CONSTRAINT ENHANCED DYNAMIC WINDOW APPROACH FOR ROBUST AND SMOOTH LOCAL NAVIGATION

***Yi TANG*[a], *D. Yu. PERTSAU*[a], *D. V. KUPRIYANAVA*[a]**

[a]*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics,*
6 P. Browki Street, Minsk 220013, Belarus

Corresponding author: Yi Tang (tangyijcb@163.com)

Abstract. The limitations of the traditional dynamic window approach in local path planning, including poor trajectory smoothness, unstable control performance and insufficient global navigation guidance, are examined. An improved multi-constraint dynamic window approach is proposed as a solution. This method enhances the trajectory evaluation by introducing several refined constraint metrics: dual-angle heading deviation, global path adherence, curvature variation control and jerk suppression. They are integrated into a unified multi-objective scoring function that promotes smoother, more reasonable and dynamically feasible trajectory generation. To verify the effectiveness of the proposed approach, a series of experiments is conducted across various representative map scenarios, including both standard and complex environments. The enhanced algorithm is compared with the classical dynamic window approach and several of its improved variants. It is established that the proposed approach achieves superior performance in terms of path quality, safety and overall planning robustness, demonstrating improved adaptability and reliability in solving complex navigation tasks.

Keywords: dynamic window approach; local path planning; multi-constraint optimisation; global-local coordination; trajectory smoothness; autonomous obstacle avoidance.

Author's contribution. Yi Tang carried out the majority of the research work, including project design, experimental execution, data analysis and manuscript drafting. D. Yu. Pertsau supervised the study, provided valuable guidance throughout the research process and carefully revised the manuscript to enhance its scientific quality and coherence. D. V. Kupriyanava made some corrections to the draft version and worked on the design of the work.

Introduction

Due to the continuous development of intelligent and automation tools, mobile robots are being increasingly applied in various fields such as industry, healthcare and logistics. As a core component of autonomous navigation, path planning has become one of the most critical research topics in the field of robotics. The goal of path planning is to generate an optimal path from the robot's starting position to its target destination that is safe, collision-free and meets performance requirements. It concerns not only the safety of robot motion,

but also addresses the challenge of optimising navigation in complex and dynamically changing environments to ensure efficient and reliable task execution [1].

Path planning algorithms are usually divided into global path planning and local path planning. Global path planning assumes complete knowledge of the environment and generates a globally optimal path based on a pre-constructed map. Classical algorithms such as A* and Dijkstra are widely used and are well-suited for static and well-structured environments [2]. In contrast, local path planning relies on real-time perception of the environment, enabling the robot to dynamically adjust its motion strategy during execution in response to environmental uncertainties and obstacle changes. In practice, mobile robots are often encountering dynamically changing environments and incomplete sensor information. In such conditions the flexibility and real-time adaptability of local path planning are particularly crucial, especially in tasks involving dynamic obstacle avoidance and path reconfiguration [1]. As a result, local path planning serves as an essential foundation for ensuring safe navigation and successful task completion for mobile robots.

The dynamic window approach (DWA) is a classic local path planning algorithm, first proposed by D. Fox, W. Burgard and S. Thrun in 1997 [3]. This method generates possible short-term trajectories by simulating the robot's motion in the velocity space in real time and selects the optimal trajectory to execute based on a scoring function applied to the possible trajectories. However, the traditional DWA algorithm has limited consideration of the robot's kinematic and dynamic characteristics during trajectory generation. At the same time, factors such as trajectory smoothness, stability and curvature variation are not properly taken into account. As a result, the robot may experience abrupt turns or sudden velocity changes during motion, which can negatively affect the stability of the control system and reduce the reliability of trajectory. To this end, the researchers have proposed various improvements from different perspectives. As for the target guideline, X. Gong and his colleagues [4] introduced a fuzzy control mechanism based on the distances to the target and surrounding obstacles, which allows to dynamically adjust the velocity and heading weights within the DWA. This approach has improved the adaptability of the algorithm to various environments. However, because it is based on manually developed fuzzy rules, it lacks a systematic mechanism to guide the path shape effectively, especially in dynamic and time-varying scenarios. To solve the problem of deviation from the global path, A.-Z. Liu, C. Liu, L. Li, R.-C. Wang and Z. Lu [5] proposed a function for estimating the similarity of trajectories based on dynamic time warping to enforce shape consistency between local trajectories and the global path. However, this method aligns the trajectories only geometrically, without considering motion smoothness or control continuity, which can lead to unstable execution in high-curvature regions. To improve control stability, Z. Wang and G. Li [6] introduced constraints on trajectory curvature variation and jerk (i. e., the derivative of linear and angular velocities), enabling more continuous and stable command outputs. However, their approach embeds these constraints as additional cost terms without unified coordination within the evaluation framework, which can lead to conflicts with other objectives and degrade the overall quality of planning. In addition, Y. Lu and C. Da [7] combined an improved ant colony optimisation algorithm with DWA, incorporating a direction angle cost function and velocity sampling optimisation to improve obstacle avoidance and simultaneously improve directional attraction to the target. However, due to the slow convergence of search based on the ant colony optimisation algorithm, this method remains limited in highly dynamic environments. Integrated strategies combining global and local planning have recently attracted increasing attention. W. Sang, Y. Yue, K. Zhai and M. Lin [8] proposed a two-stage planning framework that integrates an improved A* algorithm for global path generation and DWA for local execution. The nodes of the global path are used as dynamic sub-goals for the DWA, and the cubic B-spline is used to smooth the global trajectory. Although this method works well in structured static environments, it suffers from fixed parameter settings that can lead to delayed responses and trajectory deviation in complex and dynamic scenarios.

In summary, although the existing studies have proposed various improvements to the DWA, several limitations remain. These include insufficient consistency of local and global paths, which can cause the robot to get stuck in local minima during navigation; insufficient consideration of trajectory smoothness and dynamic stability, which can lead to sudden motions and reduced task performance; simplified mechanisms for attracting targets, which are often ineffective over long distances, resulting in detours or reduced navigation efficiency. To address these issues, this paper proposes an improved multi-constraint dynamic window approach (MC-DWA). The proposed method introduces multiple evaluation dimensions and constraint mechanisms, constructs a unified multi-objective scoring model to enhance the global rationality, local smoothness and control stability of the planned path. The key improvements are the following.

1. Enhanced heading guidance and target alignment. A dual-angle deviation evaluation mechanism is introduced to assess the angular deviation between the predicted trajectory endpoint and both the target direction and the global path orientation. Then a weighted course evaluation function is created. This mechanism enhances

the robot's directional alignment toward the goal and its coordination with the global path, reducing deviations from the intended navigation route.

2. Global path adherence constraint. During local planning, a segment of the global path near the robot's current position is dynamically extracted. The average minimum distance between predicted trajectory points and this local path segment is computed and used as a path adherence score. This design ensures spatial consistency between local and global paths, prevents the robot from entering densely obstructed regions and improves the overall rationality and safety of path planning.

3. Trajectory smoothness and dynamic stability control. To ensure continuity and dynamic feasibility, MC-DWA includes constraints on trajectory curvature variation and jerk (i. e., the rate of change of linear and angular velocity). Curvature variation reflects the geometric smoothness of the path, while jerk quantifies the smoothness of control commands. The combined control of these two indicators effectively suppresses trajectory fluctuations and sudden speed changes, thereby improving path stability and control robustness.

4. Unified trajectory scoring model. MC-DWA establishes a comprehensive trajectory-scoring model that combines multiple evaluation indicators (heading consistency, path adherence, smoothness and stability, target attraction) using weighted fusion. This enables multi-dimensional assessment and quality control of the trajectory within a unified decision-making system.

With these enhancements, the MC-DWA algorithm significantly improves global-local coordination, trajectory smoothness control and adaptability to difficult obstacles, while retaining the real-time performance advantages of the original DWA. As a result, it provides a more robust and efficient path planning solution for autonomous navigation of mobile robots in difficult conditions.

Multi-constraint dynamic window approach

Basic principles of the classical DWA algorithm. The classical DWA algorithm is a real-time local path planning algorithm. Its core concept is to sample multiple pairs of linear and angular velocities within the velocity space based on the robot's current state. By evaluating the predicted short-term trajectories corresponding to these velocity combinations, the method selects the optimal control command to effectively avoid obstacles and direct the robot to the goal. The set of selected velocity pairs in the velocity space must satisfy kinematic constraints, dynamic constraints and safety constraints [3].

1. Kinematic constraints V_{kin}. The robot's velocities must comply hardware limits, including the allowable ranges of linear velocity v and angular velocity ω. Assume that the minimum and maximum values of the linear velocity are $v_{\min}$ and $v_{\max}$, and the minimum and maximum values of the angular velocity are $\omega_{\min}$ and $\omega_{\max}$, respectively. Then the set of velocities that satisfy the kinematic constraints can be calculated as follows:

$$V_{\text{kin}} = \left\{ (v,\ \omega) \mid v \in \left[v_{\min},\ v_{\max} \right],\ \omega \in \left[\omega_{\min},\ \omega_{\max} \right] \right\}.$$

Typically, the robot is unable to move in the opposite direction ($v_{\min} \geq 0$), and the allowable angular velocity is symmetrical in both directions, i. e., $\omega_{\min} = -\omega_{\max}$.

2. Dynamic constraints V_{dyn}. Due to the robot's limited acceleration capabilities, the change in velocity within a single control time step Δt is also limited. Let the current linear and angular velocities be v_0 and ω_0, respectively, and let the maximum allowable linear and angular accelerations be $a_v^{\max}$ and $a_\omega^{\max}$. Then the set of velocities satisfying the dynamic constraints can be expressed in equation:

$$V_{\text{dyn}} = \left\{ (v,\ \omega) \middle| \begin{array}{l} v \in \left[v_0 - a_v^{\max}\Delta t,\ v_0 + a_v^{\max}\Delta t \right] \\ \omega \in \left[\omega_0 - a_\omega^{\max}\Delta t,\ \omega_0 + a_\omega^{\max}\Delta t \right] \end{array} \right\}.$$

3. Safety constraints V_{safe}. The robot must ensure that it does not collide with any obstacles. Assume that the robot is moving at the current velocity v_c and applies the maximum deceleration of braking a_{brake} (here $a_{\text{brake}} = -a_v^{\max}$), the required braking distance d_{brake} can be calculated using $d_{\text{brake}} = \dfrac{v_c^2}{2\left|a_{\text{brake}}\right|}$. A possible velocity is considered safe only if the minimum distance to obstacles $d_{\min}$ along the predicted trajectory, is bigger than the sum of d_{brake} and safe margin d_{sm}. Thus, V_{safe} is calculated as follows:

$$V_{\text{safe}} = \left\{ (v,\ \omega) \mid v_c \leq \sqrt{2\left|a_{\text{brake}}\right|\left(d_{\min} - d_{\text{sm}}\right)} \right\}.$$

Then the final dynamic window is defined as the intersection of three sets of constraints:

$$V_{\text{dw}} = V_{\text{kin}} \cap V_{\text{dyn}} \cap V_{\text{safe}}.$$

Each velocity pair $(v,\ \omega) \in V_{\text{dw}}$ is forward-simulated over a short time horizon T, generating a corresponding trajectory. The quality of each trajectory is then evaluated using a weighted evaluation function:

$$G = \alpha \cdot \text{heading} + \beta \cdot \text{clearance} + \gamma \cdot \text{velocity}.$$

In this formula, the heading term measures the angular alignment between the trajectory endpoint and the target direction, promoting goal-oriented motion. The clearance term is the shortest distance between the predicted trajectory and nearby obstacles, which provides safer paths. The velocity term prefers trajectories with higher speeds, which contributes to the efficient use of time. The weights α, β, γ are tuning parameters used to balance these three objectives according to the task requirements. The detailed formula is given in paper [3].

Multi-constraint enhanced DWA. Although DWA has significant advantages in terms of real-time performance and dynamic obstacle avoidance, it still faces significant challenges in complex or highly dynamic environments. Firstly, its evaluation function is relatively simple and usually takes into account only basic factors such as goal direction, velocity and obstacle proximity, while lacking effective integration of global path information. As a result, the robot may deviate from the planned global path during local planning and become trapped in local minima. Secondly, in densely cluttered environments, improper weighting of the obstacle distance term may result in excessive deviation from the route or unnatural avoidance behaviours, deteriorating the quality of the path and travel efficiency. Furthermore, the conventional DWA does not sufficiently take into account the smoothness of the trajectory or dynamic controllability; it lacks restrictions on acceleration, curvature variation and other dynamic characteristics, which can lead to movement jitter, increased energy consumption or even control instability during execution.

To effectively eliminate these limitations in trajectory generation, this paper proposes a redesigned trajectory evaluation function, resulting in MC-DWA. By introducing constraint terms with clear physical meaning and engineering applicability, MC-DWA enhances global consistency, control stability and dynamic adaptability in difficult environmental conditions, while maintaining the real-time benefits of the original algorithm. Specific improvements are described in details below.

Enhanced heading guidance and target alignment. To improve the robot's directional control capabilities during navigation, MC-DWA implements a dual orientation consistency evaluation mechanism, including target orientation consistency and global path orientation consistency. In particular, let the terminal orientation of the predicted trajectory be θ_{pred}, the orientation of the target point be θ_{goal}, and the terminal orientation of the global path be θ_{final}. Figure 1 shows a diagram of orientation angles in MC-DWA. In addition, the orientation deviations between them are calculated using the following expression:

$$\Delta\theta_{\text{goal}} = \left|\theta_{\text{pred}} - \theta_{\text{goal}}\right|,$$

$$\Delta\theta_{\text{final}} = \left|\theta_{\text{pred}} - \theta_{\text{final}}\right|.$$

Based on this, the heading consistency score is calculated by the formula

$$H(v,\ \omega) = \lambda_1 \frac{\pi - \Delta\theta_{\text{goal}}}{\pi} + \lambda_2 \frac{\pi - \Delta\theta_{\text{final}}}{\pi},$$

where λ_1 and λ_2 are weighting factors to balance the contributions of goal direction and path direction alignment, respectively (here we set $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$).

However, when the robot is far from the target, heading-based scoring alone may be insufficient to provide strong attraction toward the goal [9]. To solve this problem, a goal distance factor is included in the evaluation function. The exponential attraction function is used to introduce a non-linear response to distance variations:

$$G_{\text{att}}(v,\ \omega) = -\exp\left(\alpha\, d_g(v,\ \omega)\right),$$

where $d_g(v,\ \omega)$ represents the Euclidean distance between the predicted trajectory endpoint and the goal, and $\alpha = 0.5$ is a configurable parameter to control the strength of the attractive force. Therefore, the heading guidance and target alignment evaluation function is denoted as $O(v,\ \omega)$:

$$O(v,\ \omega) = H(v,\ \omega) + G_{\text{att}}(v,\ \omega).$$

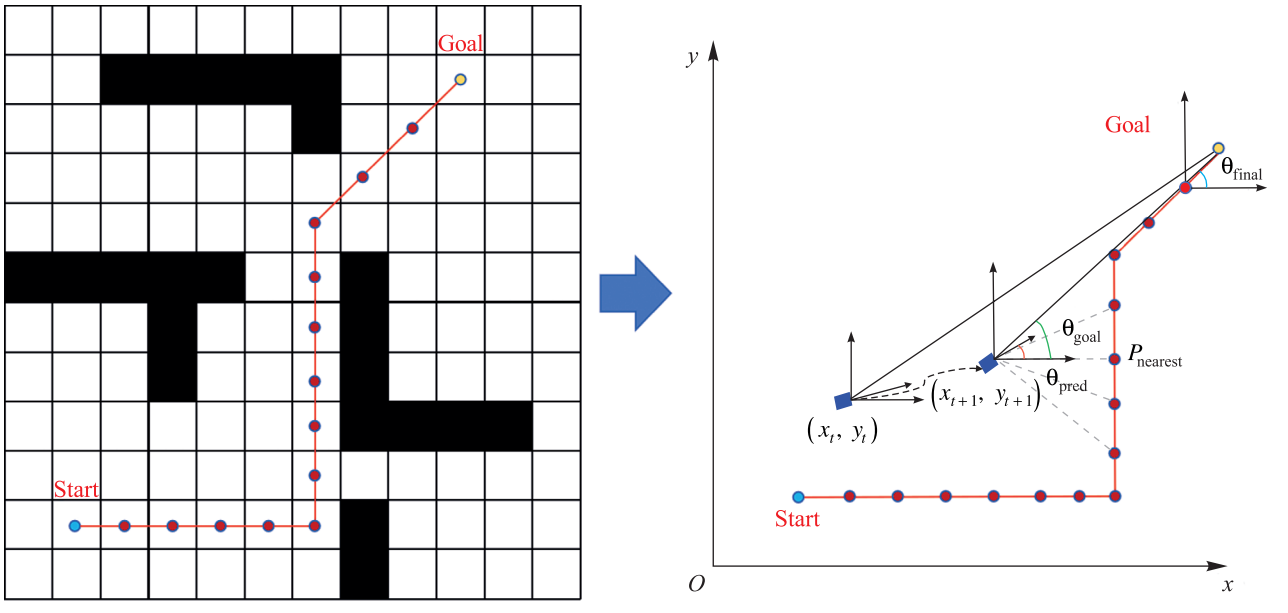


Fig. 1. Illustration of orientation consistency angles

Global path adherence constraint. To solve the problem in classical DWA, where local path planning may deviate significantly from the global reference path, which causes the robot to fall into local minima, we are introducing a global path adherence constraint. Specifically, let the global path generated by a global planner (e. g., A*) be denoted as $P_{\text{global}} = \{P_1, P_2, \ldots, P_L\}$, where each $P_i = (x_i, y_i)$ represents a waypoint on the global path. At each control cycle the algorithm first identifies the index i^* of the global path point closest to the robot's current position $X_c = (x_c, y_c)$. A local segment P_{local} of the global path is selected, consisting of M consecutive nodes starting from P_{global}. Then given the predicted trajectory consisting of T points, denoted as $T_{\text{pred}} = \{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$, the path adherence metric is defined as the maximum deviation between the predicted trajectory and the selected local global path segment. The calculation process is described in equations

$$i^* = \arg\min_{1 \le i \le L} \|P_i - X_c\|_2,$$

$$P_{\text{local}} = \{P_{i^*}, P_{i^*+1}, \ldots, P_{i^*+M-1}\},$$

$$D(v, \omega) = -\max_{1 \le i \le N} \min_{p \in P_{\text{local}}} \|t_i - p\|_2.$$

Here $\|\cdot\|_2$ indicates L_2 distance (Euclidean distance). By focusing on path consistency within the local range and avoiding interference of distant path points in the local evaluation, the accuracy and stability of the local trajectory can be significantly improved.

Trajectory smoothness and dynamic stability control. In classical DWA the lack of temporal continuity in decision-making often leads to abrupt changes in velocity and steering, resulting in trajectories intermittent and unstable robot motion [4]. To solve this problem, MC-DWA introduces a penalty term based on the variation in motion state from the previous time step during candidate velocity selection. In addition, MC-DWA enhances the trajectory evaluation function by incorporating constraints on trajectory curvature variation and jerk (i. e., the rate of change of acceleration), optimising trajectory smoothness and dynamic stability from both spatial and dynamic perspectives. Specifically, the curvature variation is defined as the average absolute second-order difference of consecutive trajectory points in the lateral direction, serves as a lightweight yet highly effective heuristic proxy for lateral oscillation:

$$C_{\text{var}}(v, \omega) = -\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N-2} \left| \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + \varepsilon} \right|,$$

where ε is a small constant to prevent division by zero. This expression captures the local bending intensity of the trajectory. Furthermore, jerk metrics, which are introduced for both linear and angular velocities to suppress control shocks during execution, can be calculated as follows:

$$J_v(v, \omega) = -\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N-2} \left| \frac{a_{v,\, i+1} - a_{v,\, i}}{\Delta t} \right|,$$

$$J_{\omega}(v,\ \omega) = -\frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N-2}\left|\frac{a_{\omega,\,i+1} - a_{\omega,\,i}}{\Delta t}\right|.$$

Its design limits sudden changes in velocity commands, improving trajectory control and smooth execution, especially for mobile platforms that require high trajectory continuity. The overall smoothness and stability evaluation function is denoted as $S(v,\ \omega)$:

$$S(v,\ \omega) = C_{\text{var}}(v,\ \omega) + J_{v}(v,\ \omega) + J_{\omega}(v,\ \omega).$$

At the same time, dynamic stability control is especially important during high-speed cornering. For mobile platforms with significant velocity or centre of mass height (e. g., differential-drive robots or automated forklifts), a sharp turn at high speed can cause skidding or even rollover. To mitigate this, MC-DWA includes restrictions on the radius of curvature and lateral acceleration during the velocity space filtering stage. Specifically, the maximum allowable angular velocity at a given linear velocity is limited based on the lateral acceleration threshold a_{lat}, as formulated in equation

$$V_{\text{lat}} = \left\{(v,\ \omega)\,|\,v\omega < a_{\text{lat}}\right\}.$$

This constraint ensures that the resulting centrifugal force during turning does not exceed the platform's stability limit, thereby enhancing dynamic controllability and operational safety. Accordingly, in MC-DWA the admissible velocity space of the dynamic window is defined as

$$V_{\text{dw}} = V_{\text{kin}} \cap V_{\text{dyn}} \cap V_{\text{safe}} \cap V_{\text{lat}}.$$

Unified trajectory scoring model. In order to effectively integrate the aforementioned constraints, MC-DWA creates a complex trajectory evaluation function:

$$\text{score}(v,\ \omega) = w_{O}O(v,\ \omega) + w_{D}D(v,\ \omega) + w_{S}S(v,\ \omega).$$

Here w_{O}, w_{D} and w_{S} are weighting factors that can be changed to adapt to specific applications. In this paper, all values are 1. The final scoring function with multiple metrics acting synergistically, allows the robot to generate smooth, robust and goal-oriented feasible paths in complex environments.

Experiments and results

Experimental environment and parameter settings. The improved DWA algorithm framework was implemented on the *MATLAB R2024a* platform. To systematically evaluate the effectiveness of path planning performance and control stability, 50 two-dimensional grid maps were designed, covering typical navigation tasks such as dense obstacle regions and long corridor intersections. Each map includes a defined start and goal point with a guaranteed feasible global reference path.

All evaluation metrics were obtained statistically based on these 50 representative test scenarios, which are characterised by different map structures, obstacle densities and dynamic obstacle patterns. This diverse task setup ensures strong generalisation and a realistic level of complexity, thereby providing a more objective and comprehensive verification of the proposed method's robustness and adaptability in difficult dynamic conditions. The robot's control and physical parameters used in the simulation are shown in table 1.

Table 1

Simulation parameters

Name	Symbol	Value
Time step	Δt	0.1 s
Horizon	T	2.0 s
Max step	–	500
Maximum linear velocity	$v_{\max}$	2.0 m/s
Minimum linear velocity	$v_{\min}$	0 m/s
Maximum linear acceleration	$a_{v}^{\max}$	0.4 m/s^2
Minimum linear acceleration	$a_{v}^{\min}$	–0.4 m/s^2

Ending of the table 1

Name	Symbol	Value
Robot radius	–	0.4
Safe margin	d_{sm}	0.2
Maximum lateral acceleration	a_{lat}	1.0 m · rad/s^2
Maximum angular velocity	ω_{max}	1.57 rad/s
Minimum angular velocity	ω_{min}	–1.57 rad/s
Maximum angular acceleration	a_{ω}^{max}	0.78 rad/s^2
Minimum angular acceleration	a_{ω}^{min}	–0.78 rad/s^2

Comparison of the proposed MC-DWA algorithm with other improved DWA algorithms. To comprehensively evaluate the practical performance of the proposed MC-DWA algorithm, we conducted a systematic comparison with the classical DWA algorithm as well as three representative improved variants: energy efficient DWA (EDWA) [10], fuzzy adaptive DWA (fuzzy-DWA) [11] and predictive DWA (pred-DWA) [12].

To ensure fairness, all algorithms were tested under the same initial conditions and map configurations, and a unified evaluation framework was adopted to quantify performance across multiple dimensions. Specifically, the evaluation metrics include minimum safe distance (MSD), which measures the minimum distance between the robot and obstacles along the path and reflects the safety margin; time step (TS), which denotes the total number of control cycles required to achieve the goal and indicates the efficiency of time use; path length (PL), which evaluates the overall compactness and rationality of the planned trajectory; path curvature (PC), which quantifies trajectory smoothness and dynamic controllability based on the average curvature variation. Taken together, these metrics provide a comprehensive overview of each algorithm's performance in terms of path safety, efficiency, smoothness and control stability. Table 2 provides a comparative analysis of the proposed MC-DWA against the classical DWA and three representative improved variants for four key performance metrics.

Table 2

Comparison of the proposed MC-DWA algorithm with other DWA algorithms

Method	MSD	PL	PC	TS
Classical DWA	0.20	35.67	0.706	357
EDWA	0.19	30.41	0.513	304
Fuzzy-DWA	0.16	35.15	0.792	352
Pred-DWA	0.22	33.04	0.763	330
MC-DWA	0.53	37.97	0.323	380

Overall, the MC-DWA demonstrates excellent performance in terms of path safety, trajectory smoothness and control stability, which confirms the effectiveness of its multi-constraint fusion mechanism.

As for MSD, MC-DWA provides a minimum obstacle clearance of 0.53, which is significantly higher than other algorithms, indicating improved obstacle avoidance safety and greater navigational redundancy. This improvement is mainly due to the introduction of restrictions on compliance with the global path, which ensures that local trajectories remain closely aligned with global navigation goals and allows you to effectively bypass areas with dense obstacles. For PC, MC-DWA gives an average change in curvature equal to 0.323, which indicates a high degree of trajectory smoothness. In contrast, classical DWA, pred-DWA and fuzzy-DWA have curvature values exceeding 0.7, suggesting more pronounced oscillations in their paths. This result directly reflects the effectiveness of the curvature variation constraint and jerk suppression mechanisms used in MC-DWA, which

help to soften sharp turns and sudden velocity changes, thereby improving trajectory executability and control system stability. As for PL, MC-DWA produces a trajectory length of 37.97, which is slightly longer than some other methods such as EDWA and pred-DWA, but comparable to classical DWA and fuzzy-DWA. This result is closely related to the dual heading guidance mechanism implemented in MC-DWA, which improves the stability of the robot's directional consistency and goal orientation, while reducing oscillations and heading deviations. Although the path is a bit longer, this compromise is acceptable, given the substantial gains in safety and controllability. In terms of TS, MC-DWA completes the navigation in 380 control cycles, which is slightly higher than classical DWA and fuzzy-DWA, while EDWA is the most time-efficient. Although MC-DWA is slightly behind in time efficiency, the smoother and safer trajectories it generates make it more suitable for dynamic or high-risk environments, emphasising the balance between control stability and trajectory quality.

Thus, MC-DWA surpasses existing algorithms in several key performance metrics, in particular, in trajectory smoothness and obstacle avoidance safety. These improvements stem from its trajectory evaluation mechanism, which integrates multi-dimensional control constraints and global guidance strategies. This design effectively eliminates the limitations of traditional DWA in trajectory continuity and dynamic feasibility, significantly improving the algorithm's robustness and adaptability in complex dynamic environments and providing a more practical and reliable solution for high-quality path planning in real-world applications for mobile robots.

Visualisation. To further provide an intuitive comparison of the path planning performance across different environments, the experimental results were visualised. Figure 2, *a*, and figure 2, *b*, illustrate the paths generated using the proposed MC-DWA algorithm, classical DWA and improved A* algorithm under normal and dense obstructed environments, respectively. To avoid visual clutter, only these three representative algorithms were selected for comparison.

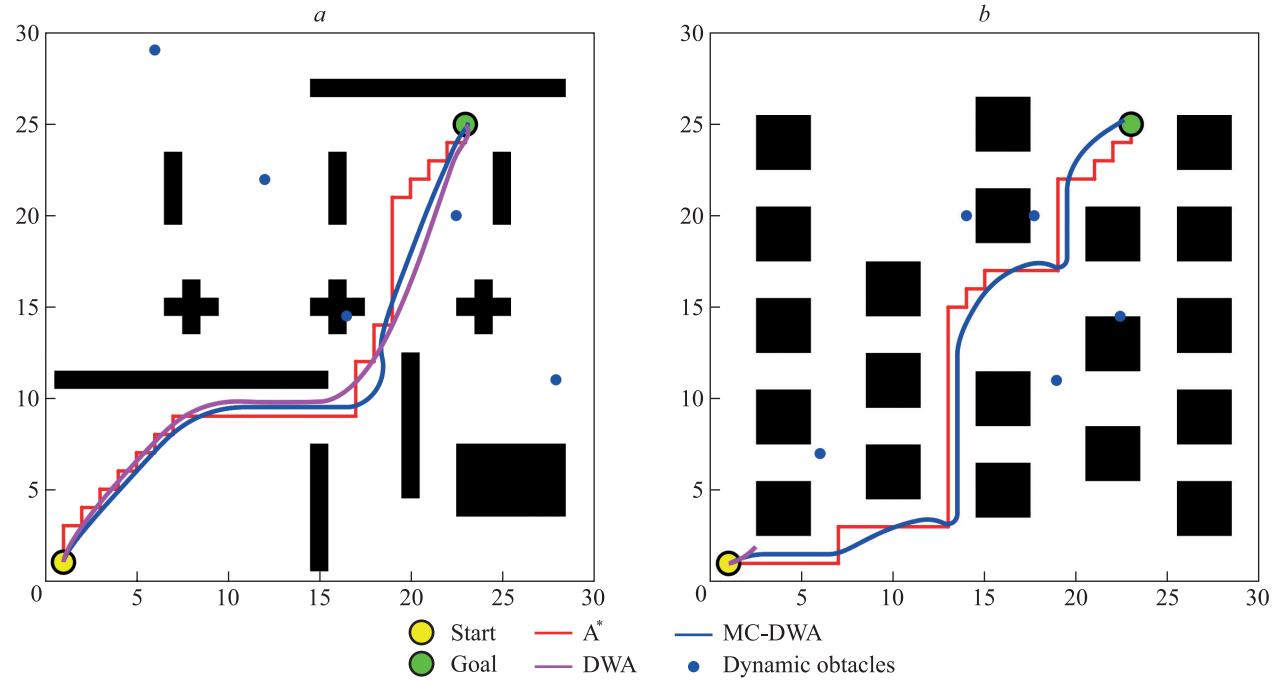


Fig. 2. Visual comparison using classical DWA algorithms and the global A* algorithm on different maps: *a* – normal environment; *b* – dense obstructed environment

From the visualisation, it can be seen that under normal conditions, although the classical DWA is able to successfully reach the target, its generated path tends to closely follow the boundaries of static obstacles, which creates a higher risk of collision. In more difficult environment with dense obstacles the classical DWA often fails to complete navigation, which often leads to an interruption of the path or a complete stop of the robot due to the lack of effective global guidance and dynamic obstacle avoidance strategies.

In contrast, the proposed MC-DWA successfully completes the navigation task in both environments. Its generated trajectories ensure good adherence to the global path and constant maintenance of a safe distance from surrounding obstacles throughout the motion process (greater than the predefined minimum safety distance), demonstrating excellent adaptability to difficult environmental conditions and increased path safety.

Furthermore, figure 3 shows a visual comparison of the proposed algorithm and several representative algorithms in two typical complex environments. The purpose of this experiment is to evaluate the robustness and planning capability of each algorithm when solving problems such as long-distance obstacle interference and densely cluttered obstacle fields.

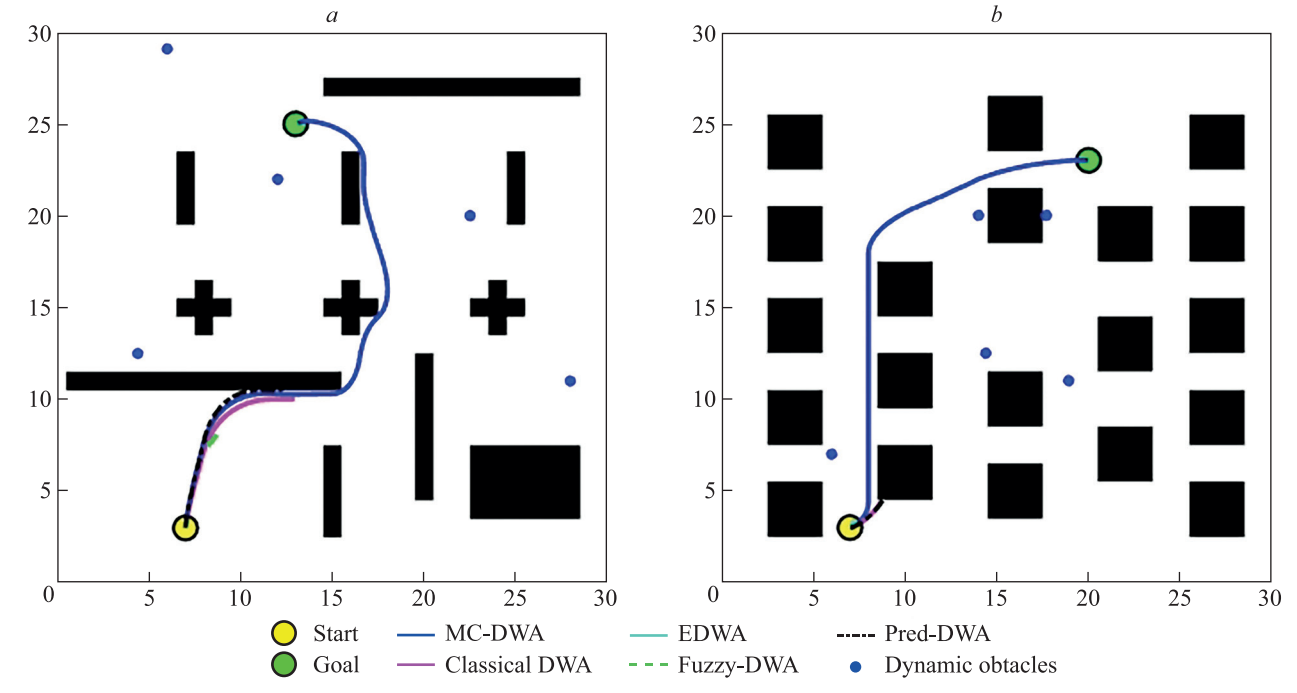


Fig. 3. Visual comparison using different DWA algorithms in complex environments:
a – environment with a distant obstacle; *b* – environment with densely distributed obstacles

As shown in fig. 3, *a*, the scenario involves a distant obstacle that creates a critical impediment to the planned path. The results demonstrate that, except MC-DWA, all other algorithms fail to navigate around the obstacle and eventually become stuck. Further analysis reveals that this problem is primarily related to the lack of effective target-oriented guidance, causing traditional algorithms to lose directional cues near the obstacle. In contrast, MC-DWA uses an exponential attraction mechanism in trajectory estimation, which enhances the goal-directed driving force while maintaining safety, allowing the robot to traverse complex terrain and move smoothly toward the target. Figure 3, *b*, shows an extremely complex environment consisting of densely distributed obstacles. In this scenario classical DWA and other improved methods are generally limited by local information and tend to fall into local minima, halting progress. However, MC-DWA introduces a global path keeping constraint, which allows for better alignment of local planning with global navigation objectives. This mechanism allows the robot to avoid local traps and successfully reach the goal. Throughout the entire process, the generated path maintains safe distances from obstacles, while demonstrating good continuity and dynamic stability.

Figure 4 illustrates the dynamic behaviour of various path planning algorithms during execution. The left part of the fig. 4 shows the trajectory followed by each method, demonstrating their obstacle avoidance performance and convergence behaviour near the goal. The right part depicts the time-series variations of linear and angular velocities throughout the planning process, which serve to assess motion continuity and control smoothness.

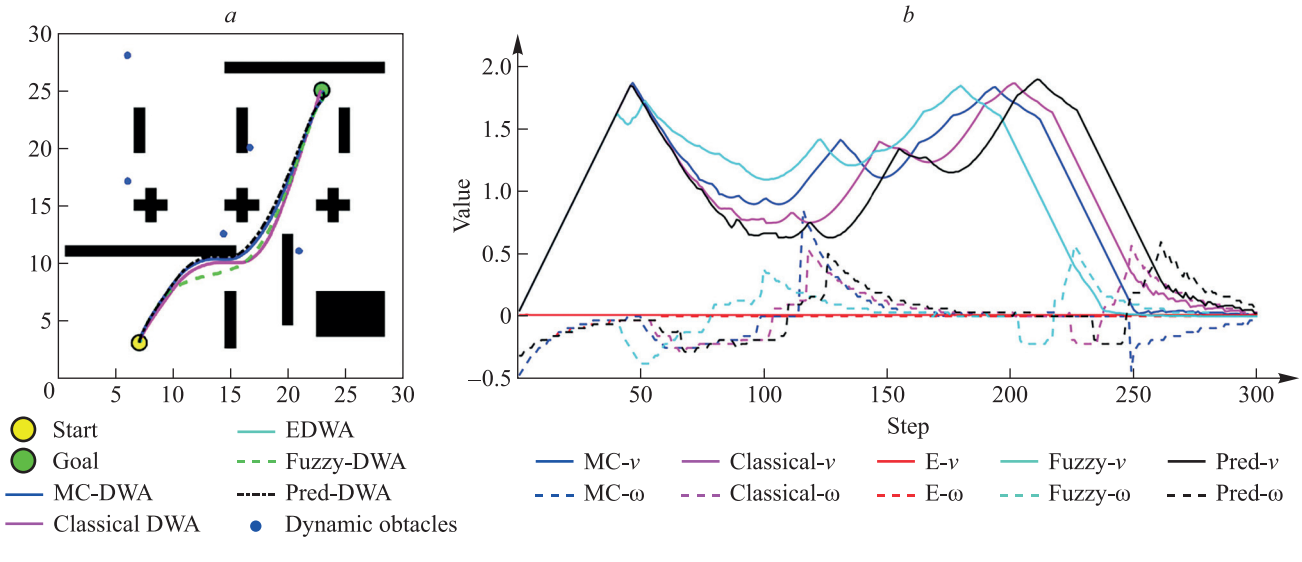


Fig. 4. Dynamic behaviour of various path planning algorithms during execution: *a* – comparison of path planning algorithms; *b* – visualisation of changes in linear and angular speed during the planning process

Among the compared methods, all algorithms except EDWA successfully completed the navigation task. Notably, fuzzy-DWA achieved the fastest arrival by taking advantage of the flexibility provided by fuzzy rules. However, it exhibited frequent and irregular fluctuations in both linear and angular velocities, indicating the absence of effective constraints on control smoothness and revealing limitations in the fuzzy rule base's tuning capability. This unstable velocity jumps the reliability of the movement. Classical DWA and pred-DWA suffered from pronounced oscillations, particularly during the deceleration phase near the goal, where significant jitter was observed in both velocity profiles. This instability suggests that these methods are unable to provide smooth braking and precise goal alignment, which may negatively impact docking precision and overall control robustness. In contrast, the proposed MC-DWA exhibits significantly smoother transitions in both velocity and steering control. The performance improvement is primarily due to the inclusion of jerk penalties (for linear and angular accelerations) in the evaluation function, which effectively suppresses abrupt control variations. As a result, MC-DWA provides improved motion continuity and system stability during trajectory execution. In addition, MC-DWA has become the second fastest method to reach the goal, which indicates a good balance between efficiency and control quality. Also the trajectory visualisation on the left side of fig. 4 shows that MC-DWA consistently maintains a safe distance from both static and dynamic obstacles throughout the entire execution process, without any incidents of near-collision or critical proximity. This highlights the method's reliability in ensuring safety, especially in complex environments.

Discussion

The experimental results demonstrate that the proposed MC-DWA is superior to classical DWA and its typical variants across multiple key performance metrics. Whether in terms of trajectory smoothness, minimum obstacle distance or overall path length, MC-DWA has greater robustness and environmental adaptability. This performance gain is primarily due to the integration of several fine-grained constraint designs within the trajectory evaluation mechanism, dual-angle heading deviation, global path adherence assessment, curvature variation control and jerk suppression. Collectively, these improvements significantly enhance the rationality, continuity and feasibility of planned trajectories, while maintaining the real-time responsiveness inherent in the original DWA framework.

Despite promising results in rule design and trajectory quality, MC-DWA remains, in fact, a manually developed heuristic method. Its evaluation function and weighting parameters are set manually, which makes it impossible to dynamically adjust in various environments and task scenarios. In practical applications, this often requires manual parameter settings for each new context, which limits the algorithm's generalisability and deployment efficiency. Moreover, heuristic methods are inherently difficult to model complex, multi-dimensional and temporally dynamic features of real-world environments. In particular, in conditions associated with numerous dynamic obstacles or high-dimensional state input data, the performance limit of traditional methods becomes obvious [13].

To address these challenges, recent advances in deep reinforcement learning (DRL) have provided new perspectives for path planning. DRL offers end-to-end learning capability, allowing agents to autonomously learn optimal navigation strategies through continuous interaction with the environment, thereby eliminating the need for explicit modeling and hand-written rules [14]. Compared to traditional methods, DRL-based planning approaches have superior adaptability, policy expressiveness and cross-task transferability, making them particularly suitable for dynamic, uncertain or frequently changing environments.

Based on this understanding, future research may explore the possibility of using the MC-DWA heuristic framework as an initial policy or hybrid guidance model for DRL-based navigation systems. By integrating the experience of creating rule-based paths into the training process of deep neural networks, it is possible to effectively combine heuristic knowledge with data-driven learning. This hybrid approach potentially preserves the interpretability and stability of traditional methods, while increasing the intelligence and generalising capabilities of path planning algorithms. This could pave the way for the development of highly reliable and robust intelligent mobile robotic systems capable of navigating complex real-world scenarios.

Conclusions

This article proposes an improved MC-DWA to address several limitations of the traditional DWA in local path planning. By introducing multi-dimensional trajectory constraints and a fused estimation mechanism, the proposed method comprehensively optimises trajectory evaluation in terms of heading consistency, global path adherence, trajectory smoothness and control stability. Specifically, MC-DWA includes a dual-heading guidance strategy to improve goal alignment, uses a path adherence constraint to increase consistency between local planning and global navigation intent and integrates curvature variation and jerk constraints to improve trajectory

smoothness and dynamic feasibility. A unified weighted estimation model has been developed to support multi-objective trajectory decision making.

To confirm the effectiveness of the proposed method, comparative experiments were conducted on a series of simulation maps with varying environmental complexity. Three representative improved DWA algorithms were selected as baselines. All experiments were performed on a unified simulation platform using evaluation metrics such as navigation time, path length, curvature smoothness and minimum obstacle distance. The results show that MC-DWA outperforms both classical DWA and several improved variants in planning efficiency, trajectory quality and obstacle avoidance safety, demonstrating excellent robustness and practical applicability.

The source code for the MC-DWA function and the maps used for the simulation is published and available for free non-commercial use[1].

Future work will focus on extending MC-DWA to the ROS2 and Gazebo simulation platforms to further evaluate its generalisation ability and engineering adaptability in dynamically modeled environments. Furthermore, we plan to deploy the proven MC-DWA algorithm on a real mobile robotic platform to conduct physical experiments in real-world scenarios, facilitating its practical application in industrial and service robotics.

References

1. Yang L, Li P, Qian S, Quan H, Miao J, Liu M, et al. Path planning technique for mobile robots: a review. *Machines*. 2023; 11(10):980. DOI: 10.3390/machines11100980.

2. Sánchez-Ibáñez JR, Pérez-del-Pulgar CJ, García-Cerezo A. Path planning for autonomous mobile robots: a review. *Sensors*. 2021;21(23):7898. DOI: 10.3390/s21237898.

3. Fox D, Burgard W, Thrun S. The dynamic window approach to collision avoidance. *IEEE Robotics & Automation Magazine*. 1997;4(1):23–33. DOI: 10.1109/100.580977.

4. Gong X, Gao Y-F, Wang F-B, Zhu D-R, Zhao W, Wang F, et al. A local path planning algorithm for robots based on improved DWA. *Electronics*. 2024;13(15):2965. DOI: 10.3390/electronics13152965.

5. Liu A-Z, Liu C, Li L, Wang R-C, Lu Z. An improved fuzzy-controlled local path planning algorithm based on dynamic window approach. *Journal of Field Robotics*. 2024;42(2):430–454. DOI: 10.1002/rob.22419.

6. Wang Z, Li G. Research on path planning algorithm of driverless ferry vehicles combining improved A* and DWA. *Sensors*. 2024;24(13):4041. DOI: 10.3390/s24134041.

7. Lu Y, Da C. Global and local path planning of robots combining ACO and dynamic window algorithm. *Nature: Scientific Reports*. 2025;15:9452. DOI: 10.1038/s41598-025-93571-8.

8. Sang W, Yue Y, Zhai K, Lin M. Research on AGV path planning integrating an improved A* algorithm and DWA algorithm. *Applied Sciences*. 2024;14(17):7551. DOI: 10.3390/app14177551.

9. Zhang Z, Xue Y, Figueroa N, Åkesson K. Gradient field-based dynamic window approach for collision avoidance in complex environments. arXiv:2504.03260v2 [Preprint]. 2025 [cited 2025 October 12]: [6 p.]. Available from: https://arxiv.org/abs/2504.03260v2.

10. Henkel C, Bubeck A, Xu W. Energy efficient dynamic window approach for local path planning in mobile service robotics. *IFAC-Papers Online*. 2016;49(15):32–37. DOI: 10.1016/j.ifacol.2016.07.610.

11. Liu A-Z, Liu C, Li L, Wang R-C, Lu Z. An improved fuzzy-controlled local path planning algorithm based on dynamic window approach. *Journal of Field Robotics*. 2025;42(2):430–454. DOI: 10.1002/rob.22419.

12. Missura M, Bennewitz M. Predictive collision avoidance for the dynamic window approach. In: Institute of Electrical and Electronics Engineers. *2019 International conference on robotics and automation; 2019 May 20–24; Montreal, Canada*. Montreal: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2019. p. 8620–8626. DOI: 10.1109/ICRA.2019.8794386.

13. Abubakr OA, Jaradat MA, Abdel-Hafez MF. Intelligent optimization of adaptive dynamic window approach for mobile robot motion control using fuzzy logic. *IEEE Access*. 2022;10:119368–119378. DOI: 10.1109/ACCESS.2022.3220703.

14. Wu C, Yu W, Li G, Liao W. Deep reinforcement learning with dynamic window approach based collision avoidance path planning for maritime autonomous surface ships. *Ocean Engineering*. 2023;284:115208. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2023.115208.

Received 02.11.2025 / revised 23.02.2026 / accepted 24.02.2026.

[1]MC_DWA: multi-constraint enhanced DWA for robust and smooth local navigation // GitHub : website. URL: https://github.com/tyjcbzd/MC_DWA (date of access: 12.10.2025).

Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2026;2:122–130
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2026;2:122–130

УДК 004.05

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАЗМЕЩЕНИЯ И МИГРАЦИИ ВИРТУАЛЬНЫХ МАШИН НА ГЕТЕРОГЕННЫХ ПЛАТФОРМАХ ВИРТУАЛИЗАЦИИ

В. П. КОЧИН[1)]***, А. В. ШАНЦОВ***[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Аннотация. Определена необходимость применения гетерогенных платформ виртуализации, выделены основные преимущества их использования. Рассмотрена проблематика обеспечения эффективного размещения и миграции виртуальных машин на гетерогенной платформе. Обоснована потребность в формализации процессов размещения и миграции виртуальных машин. Предложена математическая модель размещения виртуальных машин, основанная на наборах требований виртуальных машин и наборе ресурсов, предоставляемых платформой виртуализации. Определено ограничение в размещении виртуальных машин на хостах платформы виртуализации. Предложена математическая модель миграции виртуальных машин, реализующая оптимизацию затрат на функционирование виртуальных машин. Разработаны алгоритм и математическая модель динамической балансировки виртуальных машин на гетерогенной платформе виртуализации. Представленная математическая модель учитывает требования к загруженности хостов платформы виртуализации, предоставляет оптимальный выбор наборов виртуальных машин и целевых хостов для осуществления балансировки.

Ключевые слова: информационные технологии; облачные вычисления; гетерогенная платформа виртуализации.

MATHEMATICAL MODELS OF VIRTUAL MACHINE PLACEMENT AND MIGRATION ON HETEROGENEOUS VIRTUALISATION PLATFORMS

V. P. KOCHYN[a]***, A. V. SHANTSOV***[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

Corresponding author: A. V. Shantsov (downseason@mail.ru)

Abstract. The necessity of using heterogeneous virtualisation platforms has been determined, and the main advantages of their use are highlighted. The problems of ensuring the efficient placement and migration of virtual machines on a heterogeneous platform are considered. The need to formalise the processes of virtual machine placement and migration is substantiated. The mathematical model for the placement of virtual machines is proposed, based on the sets of requirements of virtual machines and the set of resources provided by the virtualisation platform. A limitation has been defined in the placement of virtual machines on virtualisation platform hosts. The mathematical model of virtual machine migration is

Образец цитирования:
Кочин ВП, Шанцов АВ. Математические модели размещения и миграции виртуальных машин на гетерогенных платформах виртуализации. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2026;2:122–130.
EDN: YHKHOJ

For citation:
Kochyn VP, Shantsov AV. Mathematical models of virtual machine placement and migration on heterogeneous virtualisation platforms. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2026;2:122–130. Russian.
EDN: YHKHOJ

Авторы:
Виктор Павлович Кочин – кандидат технических наук, доцент; проректор по учебной работе и интернационализации образования.
Артем Владимирович Шанцов – аспирант кафедры технологий программирования факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – В. П. Кочин.

Authors:
Victor P. Kochyn, PhD (engineering), docent; vice-rector for academic affairs and internationalisation of education.
kochyn@bsu.by
Artem V. Shantsov, postgraduate student at the department of programming technologies, faculty of applied mathematics and computer science.
downseason@mail.ru

proposed that implements cost optimisation for the operation of virtual machines. The algorithm and the mathematical model of dynamic balancing of virtual machines on a heterogeneous virtualisation platform have been developed. The presented mathematical model takes into account the requirements for the workload of virtualisation platform hosts, represents the optimal choice of virtual machine sets and target hosts for balancing.

Keywords: information technology; cloud computing; heterogeneous virtualisation platform.

Введение

Технологии виртуализации являются неотъемлемой частью современной вычислительной инфраструктуры, обеспечивая эффективное использование ресурсов, снижение затрат и повышение отказоустойчивости инфраструктуры. Однако по мере увеличения масштаба и сложности виртуализированных сред растет потребность в формализации процессов управления, особенно в части распределения нагрузки на облачной платформе. Без четко определенных процедур существенно возрастает риск нерационального использования ресурсов, снижения производительности и возникновения уязвимостей инфраструктуры [1–3].

Повысить гибкость и отказоустойчивость современных ИТ-инфраструктур, а также эффективность управления ими позволяет применение гетерогенных платформ виртуализации. Однако для реализации всех преимуществ гетерогенной платформы виртуализации необходима формализация процессов управления платформой, в частности процессов размещения, миграции и динамической балансировки виртуальных машин (ВМ).

Преимущества применения гетерогенных платформ виртуализации

Применение гетерогенных платформ виртуализации направлено на повышение гибкости и устойчивости ИТ-инфраструктуры и оказывает существенное влияние на защищенность обрабатываемых ресурсов. Гетерогенная платформа виртуализации включает в себя две и более подсистемы виртуализации, построенные на различных гипервизорах, объединенных в один вычислительный кластер [4]. Применение гетерогенных платформ виртуализации имеет ряд существенных преимуществ. Основными из них являются следующие преимущества.

1. Повышение гибкости и совместимости. Гетерогенные платформы виртуализации предполагают использование различных гипервизоров, архитектур и аппаратных решений в рамках одной ИТ-инфраструктуры, что, в свою очередь, позволяет:

- интегрировать унаследованные и современные информационные системы;
- адаптироваться под конкретные задачи и сервисы, используя наиболее подходящие технологии в каждом случае.

2. Минимизация рисков зависимости от одного вендора (*vendor lock-in*). Применение нескольких платформ виртуализации (например, *VMware ESXi*, *Microsoft Hyper-V*, *Kernel-based Virtual Machine* (*KVM*), *Xen*, *OpenStack* и др.) снижает зависимость от одного поставщика и обеспечивает:

- свободу выбора и конкуренции между вендорами, что влияет на конечную стоимость обслуживания платформы;
- гибкость при смене платформы, например, в случае изменения лицензирования или политик вендора;
- возможность миграции между платформами без полной реконфигурации инфраструктуры.

3. Оптимизация затрат и использование существующих ресурсов. Применение различных платформ виртуализации может быть оптимизировано по соотношению цены и производительности в зависимости от конкретных задач. Например, для тестовых сред и инфраструктуры платформы целесообразно использовать бесплатные решения с открытым исходным кодом (*KVM*, *Proxmox*), а для критичных бизнес-приложений – коммерческие решения, предоставляющие расширенные возможности управления и SLA (*VMware ESXi*, *Microsoft Hyper-V*).

4. Повышение устойчивости и отказоустойчивости. Гетерогенная структура платформы снижает риски при сбоях на уровне гипервизора или системного программного обеспечения. В случае если одна платформа виртуализации уязвима к определенной атаке или подвержена сбоям, другая платформа остается в работоспособном состоянии. Также критические подсистемы можно изолировать по разным гипервизорам, что повышает защищенность всей архитектуры.

5. Поддержка гибридных и мультиоблачных стратегий. Гетерогенные платформы виртуализации особенно актуальны при интеграции частных, публичных и периферийных облаков, что позволяет развертывать ВМ в разных средах с различными гипервизорами и сервисами (на публичных, например

Microsoft Azure, *Amazon Web Services* (*AWS*), *Google Cloud*, и частных облачных ресурсах) и осуществлять централизованное управление и оркестрацию с помощью кросс-платформенных инструментов (например, *Kubernetes*, *Terraform*, *Ansible*, *OpenStack*).

Математические модели размещения, миграции и балансировки ВМ

Развитие облачных вычислений и мультиоблачных стратегий предприятий привело к неизбежной гетерогенности программных платформ виртуализации. Современные центры обработки данных все чаще включают в себя узлы, использующие различные гипервизоры (*VMware ESXi*, *KVM*, *Microsoft Hyper-V*) и контейнерные среды (*Docker*, *Firecracker*, *Kata*), управляемые через разнородные API и облачные оркестраторы. Такая среда обеспечивает гибкость, но одновременно порождает множество технических, экономических и организационных вызовов.

Математическое моделирование размещения и миграции ВМ в указанных условиях становится неотъемлемым элементом интеллектуального управления ресурсами центров обработки данных и обеспечивает:

- оптимальное использование вычислительных мощностей, снижение избыточности и простоя узлов;
- сокращение лицензионных расходов за счет балансировки между коммерческими платформами и бесплатными платформами с открытым исходным кодом (*open-source*);
- поддержание высокого уровня отказоустойчивости и SLA даже при динамическом перераспределении нагрузки;
- уменьшение времени и стоимости миграций, особенно при кросс-платформенных переходах;
- формализацию и автоматизацию процессов, что критично для масштабируемости ИТ-инфраструктуры и минимизации человеческого фактора.

Без систематического подхода к планированию размещения ВМ в условиях гетерогенной виртуализации организация оказывается перед трудноразрешимыми компромиссами между затратами, производительностью и надежностью аппаратных ресурсов.

Таким образом, исследования в данной области имеют не только теоретическую, но и высокую прикладную ценность – от создания энергоэффективных облаков до построения стратегий миграции на платформы с открытым исходным кодом с минимальными затратами и рисками.

Наличие двух или более типов гипервизоров гетерогенной платформы виртуализации налагает требования к формализации процессов размещения и миграции ВМ. Формализация процессов размещения ВМ предполагает разработку строгих алгоритмов и критериев, определяющих выбор физического хоста для каждой ВМ [5]. Этот подход обеспечивает предсказуемость, масштабируемость и автоматизируемость управления гетерогенной платформой. Алгоритмы формализованного размещения учитывают набор требований к размещению ВМ (количество центральных процессоров, объем оперативной памяти, объем дискового пространства, пропускную способность сети, энергопотребление и др.), позволяя тем самым достичь максимально эффективного размещения ВМ на хостах платформы.

Пусть $P = \{p_1,\ p_2\}$ – набор платформ виртуализации, $H = \left\{h_1^k,\ h_2^k,\ \ldots,\ h_m^k\right\}$ – множество физических хостов, которые принадлежат платформе $k \in \{1,\ 2\}$, $V = \{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n\}$ – множество ВМ, а $R = \{\text{CPU, RAM, Disk, } \ldots\}$ – ресурсы, потребляемые ВМ.

Каждая ВМ $v_i \in V$ характеризуется вектором требований к ресурсам

$$\vec{r}_i = \left(r_i^{\text{CPU}},\ r_i^{\text{RAM}},\ r_i^{\text{Disk}},\ \ldots\right).$$

Каждый хост $h_j^k \in H$ характеризуется вектором доступных ресурсов

$$\vec{f}_j = \left(f_j^{\text{CPU}},\ f_j^{\text{RAM}},\ f_j^{\text{Disk}},\ \ldots\right),$$

а также вектором свободных ресурсов

$$\vec{c}_j = \left(c_j^{\text{CPU}},\ c_j^{\text{RAM}},\ c_j^{\text{Disk}},\ \ldots\right).$$

Вектор свободных ресурсов $\vec{c}_j$ хоста h_j^k в момент времени t определяется как

$$\vec{c}_j(t) = \vec{f}_j - \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i,$$

где n – количество ВМ, размещенных на хосте h_j^k в момент времени t.

Модель размещения ВМ на платформе определяется рядом условий. Необходимым условием размещения ВМ является наличие свободных ресурсов на хосте. Условие размещения ВМ v_i на хосте h_j^k в момент времени t определяется бинарной переменной $x_{ij}(t)$, значение которой присваивается исходя из сравнения вектора потребления ресурсов ВМ $\vec{r}_i$ с вектором свободных ресурсов $\vec{c}_j$ хоста h_j^k:

$$x_{ij}(t)=\begin{cases}1, \text{ если } \vec{r}_i \le \vec{c}_j(t),\\ 0, \text{ если } \vec{r}_i > \vec{c}_j(t).\end{cases}$$

Дополнительными условиями размещения ВМ являются обеспечение заданного уровня обслуживания и обеспечение требуемого уровня защищенности ВМ. Для обеспечения требуемого уровня защищенности ВМ может назначаться определенная платформа p_k. В таком случае значение переменной $x_{ij}(t)$ принимает вид

$$x_{ij}(t)=\begin{cases}1, \text{ если } \vec{r}_i \le \vec{c}_j(t) \wedge v_i \in p_k,\\ 0, \text{ если } \vec{r}_i > \vec{c}_j(t) \vee v_i \notin p_k.\end{cases}$$

Обеспечение заданного уровня обслуживания часто требует одновременного размещения набора ВМ на одном физическом хосте в целях минимизации потерь в производительности и задержек в обработке данных. Необходимость совместного размещения подмножества ВМ $V_m=\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ из множества всех ВМ V на одном физическом хосте h_j^k платформы виртуализации p_k в момент времени t определяется бинарной переменной

$$x_m(t)=\begin{cases}1, \text{ если } \sum\limits_{i=1}^{m}\vec{r}_i \le \vec{c}_j(t),\\ 0, \text{ если } \sum\limits_{i=1}^{m}\vec{r}_i > \vec{c}_j(t).\end{cases}$$

Предложенная модель обеспечивает системный подход к решению задачи размещения ВМ за счет введения формализованных критериев, основанных на векторном представлении ресурсных требований ВМ и ресурсных характеристик физических хостов. Модель позволяет учитывать не только аппаратные ограничения, но и дополнительные требования – уровень обслуживания, аспекты информационной безопасности. Введение бинарных переменных, отражающих размещения ВМ, формализует логику принятия решений и создает основу для разработки алгоритмов автоматизированного управления ресурсами.

Формализованные подходы дают возможность реализовать автоматизированные системы миграции ВМ между гипервизорами. Миграция используется для балансировки нагрузки, повышения энергоэффективности, технического обслуживания хостов и обеспечения непрерывности предоставляемых сервисов при возникновении сбоев. Использование формальных правил позволяет предусматривать сценарии сбоев, обеспечивая автоматическое перераспределение нагрузки, резервирование и соблюдение заданного уровня обслуживания для ВМ [6].

Пусть t – дискретное время, $x_{ij}(t)$ – статус размещения ВМ v_i на хосте h_j^k в момент времени t, $M(t)$ – множество миграций в момент времени t.

Миграция ВМ определяется бинарной переменной

$$x_{ij}(t)=\begin{cases}1, \text{ если } v_i \text{ перемещена на } h_j^k \text{ в момент времени } t+1,\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Ограничение миграции для каждой ВМ имеет вид

$$\left|x_{ij}(t+1)-x_{ij}(t)\right| \le 1.$$

Тогда переменная миграции определяется как

$$m_{ij}(t)=\left|x_{ij}(t+1)-x_{ij}(t)\right|.$$

Общее количество миграций задается формулой

$$M(t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}m_{ij}(t).$$

Рассмотрим применение модели миграции ВМ на примере оптимизации энергопотребления гетерогенной платформы. Оптимизация процесса включает учет энергопотребления всех хостов платформы и затрат на миграцию ВМ. Тогда минимизация общих затрат принимает вид

$$\min \sum_{j=1}^{m} P_j u_j(t) + \lambda M(t),$$

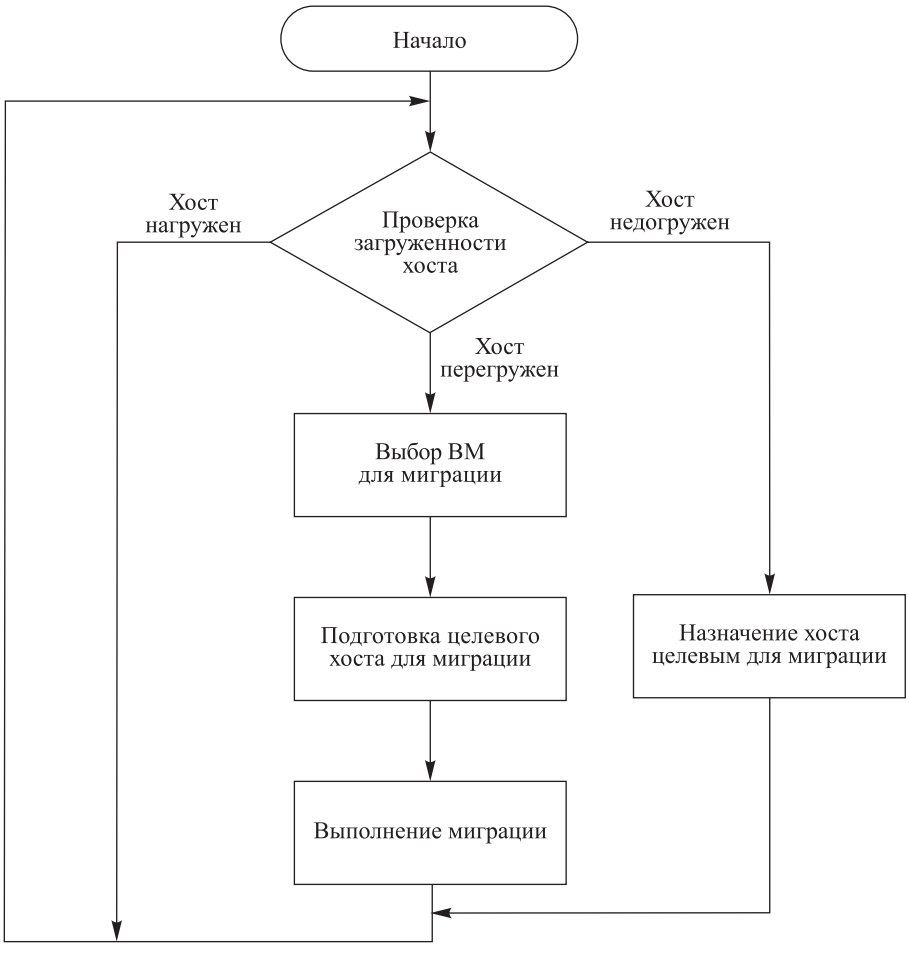
где P_j – энергопотребление хоста h_j^k,

$$u_j(t) = \begin{cases} 1, \text{если хотя бы одна ВМ перемещена на } h_j, \\ 0 \text{ в противном случае}, \end{cases}$$

а λ – весовой коэффициент миграции.

Далее на основе алгоритмов оптимизации [7] можно рассчитать оптимальное размещение ВМ при минимальном количестве миграций.

Формализация процесса балансировки нагрузки гетерогенной платформы виртуализации позволяет предусматривать сценарии сбоев, нарушений и кибератак [8], обеспечивая автоматическое перераспределение нагрузки и резервирование, в ходе которых осуществляется перенос ВМ с одного физического узла на другой без остановки предоставляемых сервисов. Алгоритм динамической балансировки представляет собой замкнутый цикл, состоящий из четырех этапов (см. рисунок).



Алгоритм динамической балансировки
Dynamic balancing algorithm

Этап 1: проверка загруженности хоста. Осуществляется проверка загруженности каждого хоста гетерогенной платформы виртуализации. Для этого вычисляется загрузка хоста по заданным критериям, таким как использование центрального процессора, оперативной памяти, дискового пространства и др.:

$$\text{Load}_j = \max\left(\frac{\text{CPU}_j^{\text{used}}}{\text{CPU}_j^{\text{total}}}, \frac{\text{RAM}_j^{\text{used}}}{\text{RAM}_j^{\text{total}}}, \frac{\text{Disk}_j^{\text{used}}}{\text{Disk}_j^{\text{total}}}, \ldots\right).$$

Помимо вычисления метрик нагрузки Load_j, для каждого хоста определяются пороговые значения метрик θ_{low} и θ_{high}:

- если $\text{Load}_j > \theta_{\text{high}}$, то хост считается перегруженным и возникает необходимость в миграции ВМ;
- если $\theta_{\text{low}} < \text{Load}_j < \theta_{\text{high}}$, то хост находится в нагруженном состоянии и балансировка не требуется;
- если $\text{Load}_j < \theta_{\text{low}}$, то хост считается недогруженным и на него в случае необходимости переносятся ВМ.

Этап 2: выбор ВМ для миграции. Выполняется поиск ВМ с оптимальными критериями для миграции. Для этого на каждом перегруженном хосте осуществляется сортировка ВМ по ресурсоемкости:

$$v_i = w_1\text{CPU}_i + w_2\text{RAM}_i + w_3\text{Disk} + \ldots,$$

где w – весовые коэффициенты для центрального процессора, оперативной памяти, дискового пространства.

После выполнения сортировки осуществляется выбор минимальных подмножеств $V^* \subset V$ таких, что после их удаления $\theta_{\text{low}} < \text{Load}_j < \theta_{\text{high}}$.

В условиях гетерогенной платформы виртуализации необходимо учитывать возможность временной недоступности хоста, вызванной сетевой деградацией, отказом гипервизора, техническим обслуживанием, кибератакой или нарушением целостности среды выполнения.

Для формализации данного состояния введем бинарную переменную доступности хоста

$$a_j(t) = \begin{cases} 1, \text{если хост } h_j \text{ доступен в момент времени } t, \\ 0, \text{если хост } h_j \text{ недоступен.} \end{cases}$$

Тогда множество доступных хостов в момент времени t определяется как

$$H^{\text{av}}(t) = \left\{h_j \in H \mid a_j(t) = 1\right\}.$$

Этап 3: подготовка целевого хоста для миграции. Осуществляется проверка доступности необходимых ресурсов для переноса ВМ.

Выбор целевого хоста для миграции выполняется только среди множества $H^{\text{av}}(t)$. Условие допустимости размещения ВМ v_i на хосте h_j дополняется ограничением доступности

$$x_{ij}(t) \le a_j(t).$$

Если для выбранной ВМ отсутствуют допустимые хосты во множестве $H^{\text{av}}(t)$, активируется процедура отложенной миграции:

- ВМ помещается в очередь ожидания Q_{mig};
- выполняется повторная попытка выбора через интервал Δt;
- при превышении порогового времени ожидания инициируется аварийная миграция на резервную платформу.

Для каждой ВМ $v_i \in V^*$ выполняется оценка набора подходящих хостов и выбирается хост согласно заданным критериям платформы.

$$T_i = \left\{h_j \mid \vec{r}_i \le \vec{c}_j - \vec{r}_j^{\,\text{used}}\right\}.$$

Этап 4: выполнение миграции.

Перед началом переноса проверяются:

- доступность исходного хоста $a_{\text{src}}(t)$;
- доступность целевого хоста $a_{\text{dst}}(t)$;
- сетевая связность между ними.

Если в процессе миграции обнаруживается потеря доступности целевого хоста, выполняется одна из следующих операций:

- откат (*rollback*) к исходному состоянию при использовании механизма предварительного копирования (*pre-copy*);
- переключение на альтернативный хост из множества допустимых хостов.

В случае полной недоступности исходного хоста инициируется процедура аварийного восстановления ВМ из последней консистентной точки (*checkpoint*), что может быть формализовано как

$$v_i(t+1) = \text{restore}(v_i,\ \text{backup}_k),$$

где backup_k – последняя корректная резервная копия ВМ.

Таким образом, алгоритм динамической балансировки расширяется до отказоустойчивой модели, учитывающей частичные и временные сбои элементов гетерогенной платформы.

Далее для каждой найденной пары (v_i, h_j) осуществляется проверка сетевой доступности и выполняется миграция, которая включает:

- фоновую синхронизацию памяти (копирование содержимого оперативной памяти на новый хост с минимальным воздействием на реализуемые процессы);
- кратковременную приостановку ВМ, перенос остаточной памяти и запуск на новом сервере;
- обновление сетевых маршрутов (сохранение сетевой идентичности ВМ при смене физического местоположения).

После выполнения миграции выполняется возврат к этапу 1.

Экспериментальные исследования

Целью экспериментальных исследований являлась оценка эффективности предложенных математических моделей размещения и динамической балансировки ВМ на гетерогенной платформе виртуализации по следующим критериям:

- уровню энергопотребления хостов;
- средней загрузке ресурсов;
- количеству миграций;
- устойчивости к временной недоступности узлов.

Конфигурация тестовой платформы. Моделирование проводилось для гетерогенного кластера, включающего 6 физических хостов, 2 типа гипервизоров (тип А и тип В) и 48 ВМ с различными профилями нагрузки. Параметры хостов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры хостов

Table 1

Host parameters

Параметры	Значение
CPU	32 vCPU
RAM	128 Гб
Disk	4 Тб
Среднее энергопотребление	420 Вт

ВМ были разделены на три класса.

1. *Compute-intensive* (высокая нагрузка на центральный процессор).
2. *Memory-intensive* (высокое потребление оперативной памяти).
3. *Mixed workload* (смешанная нагрузка).

Нагрузка моделировалась как дискретный временной процесс с шагом $\Delta t = 5$ мин в течение 24 ч.

Сравниваемые алгоритмы. Для оценки эффективности предложенной модели сравнивались три подхода.

1. Статическое размещение (*baseline*) – первоначальное размещение без последующей балансировки.
2. Классическая балансировка без учета доступности хостов – перераспределение по пороговым значениям нагрузки.
3. Предложенная модель – формализованная балансировка с учетом доступности хостов и стоимости миграции, а также с учетом механизма отложенной и аварийной миграции.

Результаты эксперимента. В ходе экспериментальных исследований были получены следующие результаты.

1. Энергопотребление. Данные о среднесуточном энергопотреблении кластера приведены в табл. 2.

Таблица 2

Среднесуточное энергопотребление кластера

Table 2

Average daily energy consumption of the cluster

Подход	Среднее энергопотребление в сутки, кВт · ч	Изменение, %
Статическое размещение	60,5	–
Классическая балансировка	54,2	–10,4
Предложенная модель	49,8	–17,7

Снижение энергопотребления достигается:
- за счет консолидации нагрузки;
- отключения недогруженных хостов;
- минимизации избыточных миграций.

2. Количество миграций. Как следует из табл. 3, снижение количества миграций составило 36,8 %, что подтверждает эффективность введенного штрафного коэффициента λ в целевой функции.

Таблица 3

Среднесуточное количество миграций

Table 3

Average daily number of migrations

Подход	Среднее число миграций в сутки
Классическая балансировка	38
Предложенная модель	24

3. Балансировка нагрузки. Данные о среднеквадратичном отклонении загрузки центрального процессора по хостам приведены в табл. 4.

Таблица 4

Среднеквадратичное отклонение загрузки центрального процессора по хостам

Table 4

Root mean square deviation of CPU load across hosts

Подход	σ(CPU), %
Статическое размещение	18,4
Классическая балансировка	9,7
Предложенная модель	7,2

Из табл. 4 видно, что предложенная модель обеспечивает более равномерное распределение нагрузки.

4. Обработка временной недоступности хоста. В эксперименте моделировалось временное отключение одного хоста на интервале 2 ч. Получены следующие результаты:
- в классической модели наблюдалась потеря 3 ВМ до восстановления узла;
- в предложенной модели 2 ВМ были автоматически перенесены, а 1 ВМ восстановлена из последней консистентной точки, при этом время деградации сервиса сократилось на 41 %.

Таким образом, расширение алгоритма динамической балансировки механизмами контроля доступности существенно повышает устойчивость платформы.

Проведенные эксперименты показали, что предложенная формализованная модель обеспечивает:
- снижение энергопотребления на 17–18 %;
- уменьшение количества миграций более чем на треть;
- более равномерную загрузку ресурсов;
- повышение устойчивости к временной недоступности узлов.

Наибольший эффект достигается в сценариях переменной нагрузки и при наличии разнородных профилей ВМ.

Заключение

В условиях стремительной цифровизации, роста количества рабочих нагрузок и усложнения ИТ-архитектур применение гетерогенных платформ позволяет гибко адаптироваться к современным требованиям, снижать операционные риски, оптимизировать затраты и повышать уровень защищенности активов. Формализация процессов размещения ВМ, внедрение эффективных механизмов миграции и балансировки нагрузки, комплексное обеспечение безопасности являются критически важными аспектами построения надежных и управляемых виртуализированных инфраструктур. В условиях постоянного роста числа ВМ и усложнения атакующих методов только системный и формализованный подход может обеспечить устойчивость и эффективность информационных систем, размещенных на гетерогенных платформах.

Библиографические ссылки

1. Кочин ВП, Шанцов АВ. Комплексная система защиты информации облачных ресурсов. В: Научно-исследовательский институт технической защиты информации. *Комплексная защита информации. Материалы XXVI научно-практической конференции; 25–27 мая 2021 г.; Минск, Беларусь*. Минск: Владимир Сивчиков; 2021. с. 332–334.

2. Кочин ВП. Модель сложных интегрированных систем. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2024;1:71–78. EDN: NANGXU.

3. Kochyn VP, Zherelo AV. Designing a secure fail-safe cloud repository of paperworks of students and employees of educational institutions. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2021;3:104–108. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-3-104-108.

4. Кочин ВП, Шанцов АВ. Гибридный режим функционирования облачных платформ. В: Романов ОА, редактор. *Информационно-коммуникационные технологии: достижения, проблемы, инновации (ИКТ-2022). Сборник статей II Международной научно-практической конференции; 30–31 марта 2022 г.; Полоцк, Беларусь*. Новополоцк: Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой; 2022. с. 189–193.

5. Соловьев ВП, Удовиченко АО. Метод планирования размещения группы виртуальных машин с перераспределением ресурсов. *Программные продукты и системы*. 2012;1:134–138.

6. Алексанков СМ. Модель динамической миграции виртуальных машин с гибридным подходом. *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2017;17(4):725–732. DOI: 10.17586/2226-1494-2017-17-4-725-732.

7. Васильева ЮО, Костенко ВА, Чупахин АА. Влияние политик размещения виртуальных машин на эффективность использования ресурсов центров обработки данных. *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*. 2020;3:95–100. DOI: 10.31857/S0002338820030166.

8. Ворожцов АС, Тутова НВ, Тутов АВ. Динамическое распределение вычислительных ресурсов центров обработки данных. *Т-Comm. Телекоммуникации и транспорт*. 2016;10(7):47–51. EDN: WINJQL.

Получена 26.05.2025 / исправлена 08.03.2026 / принята 09.06.2026.
Received 26.05.2025 / revised 08.03.2026 / accepted 09.06.2026.

УДК 003.26:004.056.55

СТЕГАНОГРАФИЧЕСКАЯ СТОЙКОСТЬ РАСТРИРОВАННЫХ ТЕКСТОВ-КОНТЕЙНЕРОВ К СТАТИСТИЧЕСКИМ АТАКАМ

П. П. УРБАНОВИЧ[1), 2)]***, М. Г. САВЕЛЬЕВА***[1)]***, Н. П. ШУТЬКО***[1)]

[1)]*Белорусский государственный технологический университет, ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Беларусь*
[2)]*Люблинский католический университет им. Иоанна Павла II, ал. Рацлавицке, 14, 20-950, г. Люблин, Польша*

Аннотация. Анализируется стойкость растрированных текстов-стегоконтейнеров с размещенной в них скрытой информацией к основным видам статистических атак (эффективность стегоанализа). Указанное размещение производится путем стеганографической модификации полутоновых оттенков отдельных пикселей, формирующих символы текста. Анализ выполняется с помощью известных и специально разработанных программных средств, в которых реализованы некоторые широко известные, а также предложенные ранее авторами данной статьи методы прямого и обратного стеганографического преобразования растрированных текстовых документов-контейнеров на основе модели RGB и на основе модификации полутоновых оттенков. Для сравнительной оценки и анализа стегостойкости к атакам различные типы текстовых стегоконтейнеров подвергаются проверке посредством таких наиболее известных методов статистического стегоанализа, как атака χ-квадрат, регулярно-сингулярный анализ, атака по образцам пар. Устанавливается, что все перечисленные методы реализации атак на растрированные текстовые стегоконтейнеры (растровые текстовые изображения) в формате PNG дают сравнительно (по отношению к растровым картинкам в том же формате) высокий уровень «ложной тревоги»: показывают наличие вложенной информации в исходном (пустом) документе. Самую большую погрешность дает метод «атака χ-квадрат». Два других метода стегоанализа характеризуются примерно одинаковой точностью. Разработанные инструментальные средства реализации атак на стегоконтейнеры позволяют решать ряд практических задач, связанных с анализом, выявлением и оценкой безопасности скрытой информации в растровых изображениях. Путем моделирования различных атак (визуальных, статистических, атак с известным исходным изображением и стегоключами) можно выявлять слабые места созданных стеганографических алгоритмов.

Ключевые слова: стеганография; стеганографический анализ; атака; растрирование; полутоновые оттенки; стеганографическая стойкость; программные средства.

Образец цитирования:
Урбанович ПП, Савельева МГ, Шутько НП. Стеганографическая стойкость растрированных текстов-контейнеров к статистическим атакам. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2026;2:131–141 (на англ.).
EDN: YUHNQX

For citation:
Urbanovich PP, Saveleva MG, Shutko NP. Steganographic resistance of rasterised text-containers to statistical attacks. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2026;2:131–141.
EDN: YUHNQX

Авторы:
Павел Павлович Урбанович – доктор технических наук, профессор; профессор кафедры информационных систем и технологий факультета информационных технологий[1)], профессор[2)].
Маргарита Геннадьевна Савельева – ассистент кафедры информационных систем и технологий факультета информационных технологий.
Надежда Павловна Шутько – кандидат технических наук, доцент; доцент кафедры информатики и веб-дизайна факультета информационных технологий.

Authors:
Pavel P. Urbanovich, doctor of science (engineering), full professor; professor at the department of information systems and technologies, faculty of information technologies[a], and professor[b].
p.urbanovich@belstu.by
https://orcid.org/0000-0003-2825-4777
Margaryta G. Saveleva, assistant at the department of information systems and technologies, faculty of information technologies.
saveleva@belstu.by
https://orcid.org/0009-0000-3250-8317
Nadzeya P. Shutko, PhD (engineering), docent; associate professor at the department of informatics and web-design, faculty of information technologies.
shutko_bstu@mail.ru
https://orcid.org/0009-0003-6409-6099

CC BY NC

Благодарность. Исследование выполнено при финансовой поддержке Правительства Республики Беларусь в рамках научно-исследовательского проекта «Методы, алгоритмы и программное обеспечение для размещения невидимой идентификационной информации в электронных картах и текстовых документах на основе стеганографии и избыточного кодирования».

STEGANOGRAPHIC RESISTANCE OF RASTERISED TEXT-CONTAINERS TO STATISTICAL ATTACKS

P. P. URBANOVICH[a, b]***, M. G. SAVELEVA***[a]***, N. P. SHUTKO***[a]

[a]*Belarusian State Technological University, 13a Sviardlova Street, Minsk 220006, Belarus*
[b]*The John Paul II Catholic University of Lublin, 14 Racławickie Alley, Lublin 20-950, Poland*

Corresponding author: P. P. Urbanovich (p.urbanovich@belstu.by)

Abstract. The resistance of rasterised text stego-containers with hidden information placed in them to the main types of statistical attacks (steganalysis efficiency) is analysed. This embedding is performed by steganographic modification of halftone shades of individual pixels that form text symbols. The analysis is carried out using well-known and specially developed copyright software, which implements some well-known, as well as previously proposed by the authors of this article methods of direct and reverse steganographic transformation of rasterised text documents-containers based on the RGB model and on the basis of modification of halftone shades. For comparative assessment and analysis of steganographic resistance to attacks, various types of text stego-containers are tested using most well-known statistical steganalysis methods, such as χ-square attack, regular singular analysis, sample pair attack. It is established that all the listed methods for implementing attacks on rasterised text stego-containers (rasterised text images) in PNG format give a relatively (in relation to rasterised images in the same format) high level of «false alarm»: they show the presence of embedded information in the original (empty) document. The most painful error is given by the χ-square attack. The other two steganalysis methods have approximately the same accuracy. The developed tools for implementing attacks on stego-containers allow solving a range of practical problems related to the analysis, identification and assessment of the security of hidden information in raster images. By simulating various attacks (visual, statistical, attacks with a known source image and stego-keys), it is possible to identify the weaknesses of the created steganographic algorithms.

Keywords: steganography; steganographic analysis; attack; rasterisation; halftone shades; steganographic resistance; software.

Acknowledgements. The research was carried out with the financial support of the Government of the Republic of Belarus within the framework of the research project «Methods, algorithms, and software for placing invisible identification information in electronic cards and text documents based on steganography and redundant coding».

Introduction

As is well known, the security of information systems and processes in cyberspace encompasses a set of legal norms governing liability for unlawful actions in the information sphere, methods and means for preventing, detecting and stopping unauthorised access to information resources or their use for various purposes [1]. An effective means of protecting electronic documents from illegitimate transactions is the use of steganographic hidden data transfer or storage channels [2–6]. However, the covert channels (stego-channels) may be used for criminal purposes [7–8].

The peculiarity of a covert channel consists in hiding the fact that a message (M) is transmitted or stored by placing it in another information (container or carrier, C). In essence, container C with secret data M contained within it creates a stego-channel or stego-container (S). At the same time, as in cryptographic systems, to implement direct steganographic transformation (creation of S) and the corresponding inverse transformation (extraction of M from S) it is necessary to generate and use the corresponding stego-key (K). This component of the stego-system depends on the type of container selected, the type of data placed in it, the methods of direct (F) and reverse (F^{-1}) stego-transmission, selection of elements or parameters of the container, which will be modified at transmission F and will be analysed at transmission F^{-1}. Therefore, the key is usually multi-component [9]: $K = \{K_i\}$, $i = [2,\ n]$; n can in practice take a value not exceeding 10 (if additional types

of transformations of M before executing F are considered as part of the key; for example, interference-resistant encoding, encryption, compression, etc. [10–12]).

Formally, F and F^{-1} transformations for specific M, C and K usually appear as Cartesian products:

$$F: S \leftarrow M \times C \times K, \quad (1)$$

$$F^{-1}: (M, C) \leftarrow S \times K. \quad (2)$$

The relative simplicity of expressions (1) and (2) does not mean that the practical implementation of the respective operations is trivial. Moreover, the conversion effort (2) for a third party (illegitimate user or steganalyst) must be as high as possible. The degree of this workmanship determines one of the main characteristics of each particular stego-system: resistance to attacks or stego-resistance. By concreteness the following is meant:

1. Data types that make up the basis (format) of file-container C: images (monochrome images should be separated into a separate subclass), text documents, audio, video and network protocols.

2. Methods and algorithms for embedding M in C. These can be divided into three classes:

1) a class of methods in which embedding is carried out by modifying the spatial domain of a container (spatial domain class). The approach covers many methods, including:

• simple modification of the least significant bit of pixel codes by least significant bit (LSB) method and its variations, histogram analysis methods and many others [13; 14];

• modification of the spatial and geometric parameters of text-containers C (created from MS Word processor) or individual groups of text characters [2; 15];

• monochrome image modification: grey level modification (GLM) methods based on the variation of grey shadow levels in images with grey gradations (the image is converted to reduce the range of binary pixel encoding values, e. g., from 0–255 to 0–15 or 0–17 (possibly used in combination with LSB methods)); methods based on using the mean value between two neighbouring pixel codes in the image (mid position value, MPV) (compared to GLM can also be applied to individual colour channels (e. g., R – G – B)); methods based on the variation of the difference between the brightness values of neighbouring pixels with sharper differences in intensity (pixel value difference, PVD) [16–18];

2) a class of methods based on the insertion of M into conversion factors (or frequency components) of image C (transform domain class). Discrete cosine transform (DCT) and discrete wavelet transform (DWT) are commonly used as transformations [13; 19; 20]. LSB-embedding can be used directly in DCT or DWT ratios, which combines the simplicity of LSB with the robustness of the transformed methods;

3) a class of adaptive domain methods [21], also known as masking techniques. These methods are based on using dynamic pixel selection to integrate data and assess the permissible bits that can be hidden within an object-carrier. The basis for implementation of methods is artificial intelligence technologies [22].

When planning our research (focusing primarily on rasterised text), we proceeded from well-known postulates: the initial histogram of pixel colour coordinate distribution (from 0 to 255) of a «clean» image is characterised by smoothness with soft transitions and natural noise; the possibility of detecting an embedded message based on the LSB modification of pixel codes is masked by natural noise or gradients; the false alarm probability (establishing the fact of embedding when it is absent) is determined by the presence of monotonous areas in the image (clear sky, green grass, etc.) or by the features of computer graphics. At the same time, the distribution histograms for rasterised text are close to binary or oligochromatic (black letters and a white background). The emergence of «dirty» phantom pixels around or inside the letters and against the background, associated with steganography, becomes obvious. In this regard, it is logical to assume that the probability of false alarms for text stego-containers must be significantly higher than that for image stego-containers (hypothesis).

The main objective of our research is the investigation and analysis of the stego-resistance of several types of strained document stego-containers of the text type, whose stego-transformation methods we have previously proposed [17; 18] in comparison with other methods, which belong to the spatial domain and transform domain classes.

Materials and research methods

Brief description of the investigated methods of raster graph and developed applications for their implementation. Raster text is essential for maintaining an accurate visual representation of content without editing it. This is especially important for official documents, certificates and contracts. The format provides a cross-platform compatibility, ensuring an identical display on any device and in any application, regardless

of the installed settings or software version. It is essential for digitising archival materials and paper documents, preserving the original look of the text after scanning. The format is also effective for protection against automatic copying, as text in the form of an image complicates the work of parsers and bots. In graphic design, raster text is easily integrated into various layouts, banners and promotional materials. Many organisations require documents to be provided in exactly the same form, especially when it comes to scanned signatures or legally significant copies. In addition, raster images serve as the source material for text recognition.

As basic objects of the study, two types of electronic files in above-mentioned PNG format were chosen: web-documents, in which a stego-conversion based on raster graphics and RGB model (method 1) is made [17], and documents based on half-tone modification (method 2) [18].

It is worth noting that the PNG format is characterised (in comparison, by default, with JPG, TIFF, BMP formats) by a higher resistance to digital noise and a good balance between the size of the stego-container and the preservation of embedded data. For example, the letter «a» (11 size) is shown in fig. 1 in a larger scale in PNG and JPG formats. At high compression quality (see fig. 1, *b*) the noise level is still weak, while at low compression quality (see fig. 1, *c*) image noise is evident.

As usual, in a two-dimensional raster a given pixel corresponds to the coordinates x, y ($x \in [1, X]$, $y \in [1, Y]$); X and Y are the dimensions of the image (one-solution) horizontally and vertically, respectively.

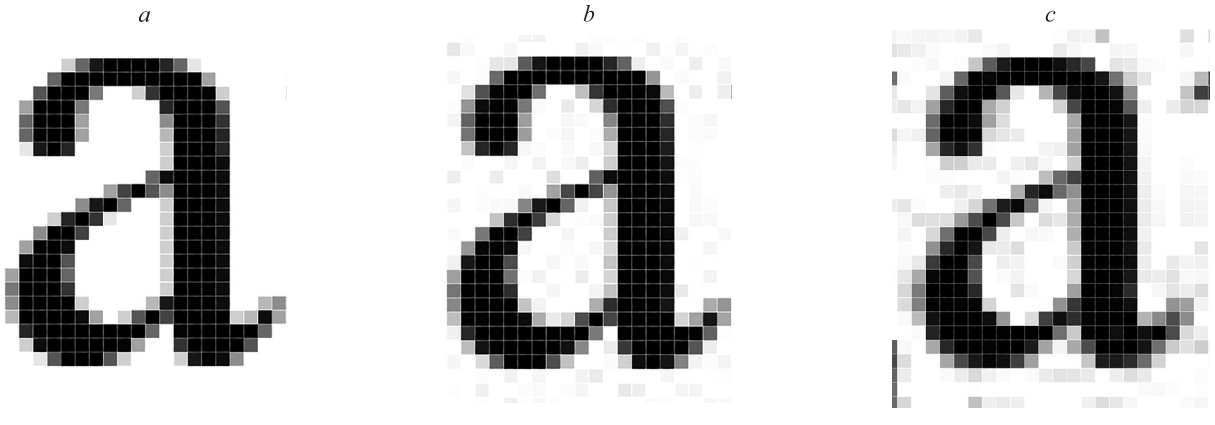


Fig. 1. Enlarged images of the rasterised letter «a»:
a – document element in PNG format; *b* – document element in JPG format with low compression;
c – document element in JPG format with high compression

To implement M into C (text elements of web-pages based on raster graphics and RGB model; conditionally – method 1 [17]) you must select a pixel array (Z) for which the coordinates of one or two colour channels match. In images with a large number of half-tons, monochromatic or black and white images it is advisable to select the pixels in which the implementation will take place using two colour channels.

The principles for forming array Z, selection of colour channels, whose codes can be modified, when implementing a secret message M, constitute the elements of the stego-key K. Formally $K = \left(K_g,\ K_p\right)$. Here K_g are keys to generating the message M in binary form $\left(M_2 \leftarrow M\right)$ taking into account possible preprocessing methods (encryption, compression, interference-stable encoding); K_p are keys that set M_2 integration or extraction algorithm.

An important feature of stego-conversion by the method described in paper [18] (method 2) is to determine and use keys from a set of K_p: $K_p = \left(K_{p1},\ K_{p2},\ K_{p3},\ K_{p4}\right)$. Here K_{p1} determines the selected colour channel in the individual pixel encoding colour model used; K_{p2} is related to the base pixel or some of its parameters (e. g., x and y); K_{p3} determines the order of pixel conversion or shift, when they are selected to insert the message M_2 symbol, meaning a shift in focus for steganographic transformation from the base pixel to the removed pixel (Δx, Δy) from the base; K_{p4} sets the pixel colour change limits when information is embedded. The pixels that will enter Z array must be characterised by equal K_{p1} and K_{p2}. The high degree of randomness in the selection of Z array elements for stego-conversion is intended to ensure a high level of resistance of the container to attacks.

For the implementation of the described steganographic methods (insertion or extraction of M and statistical processing of a S), a specialised application (*StegTool*; it is registered in the State Register of Information Resources of the Republic of Belarus under No. 1202544521) based on the Python programming language with using *Kivy* framework and *Pillow* libraries for image processing.

To implement the information embedding process according to expression (1) based on the above-described methods LSB, GLM, MPV, PVD, DCT and DWT a console application is developed (in Python, working name – *CryptoPolygraphy*), which can also perform certain types of attacks on the stego-container with analysis of the results.

Basic settings of the stego-methods under analysis are as follows:

• LSB: colour order – grayscale (8-bit); depth and order of bit embedding – 1 bit/pixel, random; scanning order – row-by-row, left-to-right;

• GLM: colour – grayscale (8-bit); grouping – pair of pixels (2 in a row); capacity – ~1 bit/pixel (but with grouping by 2); random change direction (+1/–1);

• MPV: colour – grayscale (BGR → GRAY conversion); block size – 2 × 2 pixels; used pixels – 3 (lower right is passed); modification – ±1 to pixel value; scan order in block – (0, 0) → (0, 1) → (1, 0) → pass (1, 1);

• PVD: block size – 2 × 2; pairs used – horizontal (p_1–p_2) and vertical (p_1–p_3); reference pixel p_4 not changed; horizontal pair handled first;

• DCT: embedding message bits into smaller bits of DCT image coefficients after discrete cosine transformation; block size – 8 × 8 pixels; channel – red (index 0);

• DWT: direct additive embedding into DWT coefficients with a fixed step; method changes the coefficients without considering their significance; Haar wavelet; decomposition level – 1.

Extraction of hidden information, steganalysis and attacks on stego-systems. In general, operations on stego-containers S of any format can be performed by legitimate users (according to expression (2)) or by a third party. In the first case, this user may be the creator (author) of object S (for proof of copyright on document C) or another person to whom the information M transmitted by covert channel is intended. In the second case, such users may be subjects, performing steganalysis operations or organising an attack on the stego-system.

Technically, several different objectives are pursued in the analysis of attacks and their implementation. The steganalyst tries to detect the presence of hidden data (detection), determine the type of embedding method used and in some cases decrypt hidden content. Similar tasks are also relevant to the above-mentioned field of digital forensics. The main objectives of the attacks are to compromise the stego-system, to carry out destructive actions and to obtain accurate data on individual (or all) components of the stego-system: M, C and K. However, the general scheme of third-party actions in both cases is practically identical.

Types of attacks on stego-systems. The following types of attacks [23] can be identified (by analogy with attacks on cryptographic systems) depending on the available input information:

• zero-knowledge attack (an attack without assumptions) is the most difficult and time-consuming situation for an attack source (denoted by I), as the stego-container still needs to be detected;

• stego only attack (an attack on a known cover image S or a variant of an attack with partial knowledge) when I knows that this object contains the message M; most common case;

• known cover attack (an attack on a known carrier C) when I knows a container; here compared to the previous case the problem may be complicated by the fact that the same stego-image can have different characteristics on different display devices;

• known cover and stego attack (S and C are known) when for message extraction available online steganalysis tools or specialised utilities can be used;

• known message attack (M is known) when a message is known to I and can be used for operations with the stego-object S. This seemingly trivial situation allows one to verify whether the specific message is indeed contained within the stego-object, which also helps in detecting forgeries or confirming authenticity. Knowledge of M and S helps to understand the implementation algorithm, which can lead to compromise of keys or implemented strainer methods, which in turn can be used (including the tasks of steganalysis) to train systems for the automatic detection of hidden information (including artificial intelligence based) or to test their effectiveness;

• chosen stego attack when a stego-object and stego-algorithms are available for analysis. I chooses or obtains access to a specific stego-object S in which M is assumed to be embedded. This type of attack is often used to assess the system's resistance by means of verification, how easily a message can be detected or retrieved from specific media;

• chosen message attack when a normal message is selected and transformed into a stego-message for further analysis. The result can be used to develop methods for detection or extraction of M from C;

• known stego attack when S, C and implementation stego-algorithm for embedding M in C are available for analysis. This allows an attacker to analyse the differences between some S_i and S_j:

$$S_i \leftarrow M_i \times C \times K', \; S_j \leftarrow M_j \times C \times K'$$

with $M_i \neq M_j$ and some stego-keys K' (K' may be a partial or complete match to K). The presence of a specific stego-object allows for more precise and powerful analysis methods to extract M, as well as to assess the vulnerabilities of the steganographic system in which the possibly known intruder stego-method is used.

This brief analysis indeed confirms the commonality of approaches in methods of implementing attacks on stego-systems and steganalysis.

Methods and means of steganalysis. Keeping in mind the purpose of our research, we will briefly describe the main methods and techniques for steganalysis of images and identify which of them will be used in our research. The vast majority of published research findings in steganography and steganalysis are related to images (e. g., sources [14; 15; 18–32]). It is important to note the specifics of rasterised text images compared to rasterised picture images. The first are characterised by high-contrast boundaries (text background); a clear reproduction of the outlines is required, and the pixels should not form «blurred» transitions. The second have more complex colour transitions; in this case, a more precise pixel grading is required.

The constantly expanding set of methods for analysing stego-objects can be divided into the following classes [21–32], corresponding to the above-mentioned classes of generating stego-containers:

- statistical methods based on the identification of anomalies in the statistical properties of an image, analysing histograms of brightness, distribution of colour channels and correlations between neighbouring pixels and pairs of colour channels (e. g., R – G, R – B, G – B); deviations from expected statistical characteristics (unusual patterns) may indicate that data are embedded;
- methods of frequency characteristic analysis based on the analysis of the frequency characteristics of a container using Fourier transform, DCT, wavelet transform, etc.;
- artificial intelligence based methods and algorithms (including machine learning, deep learning, peer-to-peer neural networks and genetic algorithms) which have been widely used recently in steganography studies. Modern neural network methods in steganography often utilise statistical features as a part of their input data for training. However, these methods are capable of detecting complex non-linear patterns that are difficult to identify using traditional statistical steganalysis techniques (analysis of this phenomenon was not within the scope of this paper).

Statistical methods and attack tools. Since the main objects of our study are text files-containers in which spatial parameters are exposed when embedding modification information [17; 18], it is advisable to limit ourselves to the most well-known methods of statistical steganalysis: χ-square attack, regular singular analysis (RSA or often just RS), sample pairs attack (SPA).

The method of χ-square attack was proposed by A. Westfeld and A. Pfitzmann [23]. The attack is based on statistical analysis of deviations in the distribution of pixel colour code bit values of an image from the expected even distribution. To compare the observed frequency of different code combinations in a selected plane with the theoretically expected frequency, the Pearson criterion χ^2 is used. Results of using the method to analyse images (pictures) [14; 23; 27; 29] show that the effectiveness of the attack decreases if the bits of M are randomly embedded into the array of pixels making up C, based on the LSB. This type of attack is not only used for LSB steganography [14]. The results of the analysis of container resistance in the form of strained texts to χ-square attacks by the authors of this article are not known.

The idea of RS-attack was proposed by J. Fridrich, M. Goljan and R. Du [33] to detect LSB-embeddings in half-tone images. The method uses groups of 4 pixels (blocks 2×2). For each group, a special flipping procedure is applied whereby each group falls into one of three types: regular, singular and unused. The RS-attack algorithm is based on the assumption that the number of regular and singular pixel groups in the original image and in the image after the use of flipping should be approximately equal. If the number of such groups changes significantly during the process of flipping, it means that the image being studied is a filled container. In articles [14; 29] it is argued that RS-attack is more effective compared to χ-square attack on stego-images with LSB-embeddings. There is no such data in the transmission of processed text-containers.

The method of SPA proposed by S. Dumitrescu, X. Wu and Z. Wang [24] and based on the analysis of pixel pairs of the image. It is most effective at detecting LSB-embeddings. The attack is based on a probabilistic model that takes into account the expected distribution of pair relationships in the original image and the calculated degree of deviation of the actual distribution from the theoretical one.

The SPA and RS methods are based on the same hypothesis and are almost similar.

All types of attacks discussed in this section are implemented using the *CryptoPolygraphy* application we created and above-mentioned. And the attack algorithm χ-square is implemented by us, and the codes of RS and SPA algorithms are integrated into *CryptoPolygraphy* from the source GitHub[1]. Figure 2 shows one of the application windows with the results of all the listed attacks.

[1]StegMachine // GitHub : website. URL: https://github.com/Panda-Lewandowski/StegMachine (date of access: 09.07.2025).

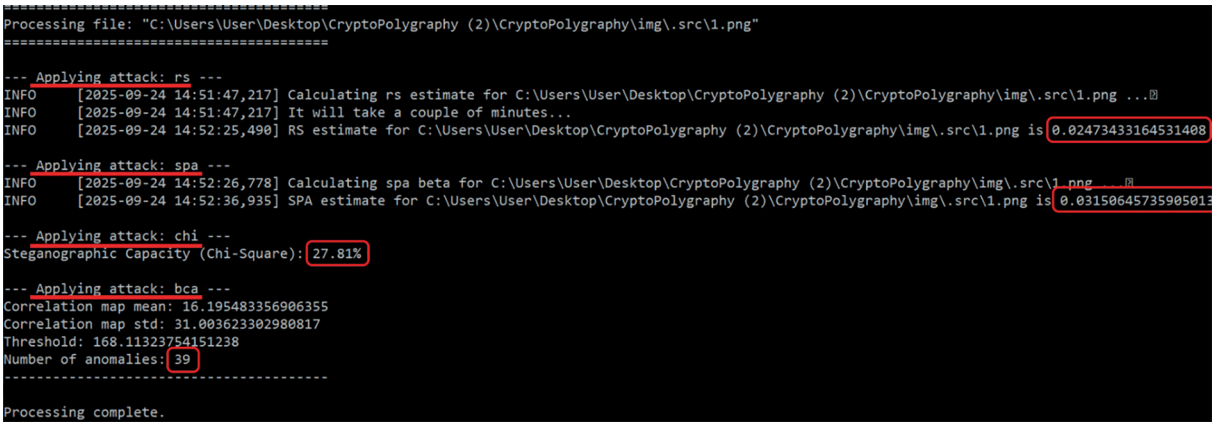


Fig. 2. Dialog window of the *CryptoPolygraphy* application, displaying the results of attacks on one of the stego-containers

Experimental results

Single-page (A4 format) rasterised texts, which are part of articles, were used as containers: C_1 is the article start page [17]; C_2 is the article second page [34]; C_{3-1} is the article start page [18] copied from the journal website in which this article is published; C_{3-2} is the same page as in the previous case, but borrowed from the final version of the article [18] that the authors received from the journal editorial board by e-mail; C_{3-3} is the same page as in the last two cases, but being part of the author's version of the article (after last edit). The original format of all these documents is PDF. *Adobe Photoshop CC 2017.1.1* was used to convert them to a PNG file. Additionally, for comparative assessment (relative to the mentioned text images), a graphic-type file-container – a well-known *Baboon* image (C_4) – was subjected to analysis.

The total volume (number of pixels forming the image) of containers ($N = X \times Y$) for C_1 is 7 292 357, for C_2 is 6 795 705, for C_{3-1} is 6 761 014, for C_{3-2} is 6 754 748, for C_{3-3} is 6 761 014, for C_4 is 6 760 000.

Using the above-described *CryptoPolygraphy* application, attacks were carried out on each of the specified containers, which did not contain any secret message. The steganalysis we performed can be attributed (with known conditions) to one of the types of above-described attacks: zero-knowledge attack, stego only attack or partial knowledge attack, known cover attack.

In each case, the steganalyser detected the presence of M while setting a certain number of pixels (P_c) that had allegedly undergone steganographic modification. These cases are known as «false alarm». Table 1 shows the results of this part of the experiment.

Table 1

Results of attacks on «empty» containers

Container	Conditional size of the message «detected» as a result of the attack					
	RS-attack		SPA		χ-Square attack	
	P_c	$\frac{P_c}{N}$, %	P_c	$\frac{P_c}{N}$, %	P_c	$\frac{P_c}{N}$, %
C_1	180 121	2.47	229 709	3.15	2 028 004	27.81
C_2	310 564	4.57	349 299	5.14	2 820 897	41.51
C_{3-1}	219 057	3.24	229 198	3.39	2 728 745	40.36
C_{3-2}	328 281	4.86	313 420	4.64	2 700 548	39.98
C_{3-3}	219 057	3.24	229 198	3.39	2 728 745	40.36
C_4	153 234	2.27	94 777	1.40	6 017 752	89.02

Metrics in the last table column $\left(\frac{P_c}{N} = 27.81\ \%\right)$ and the corresponding numerical values in fig. 2 (last row; obtained from *scipy.stats* library in Python) are usually expressed as the degree of deviation from the pure,

non-distorted text or as a percentage (as in our case) deviation from the reference sample. Typically, if the result is close to 0 %, the image is considered steganographically «clean» (or contains no visible signs of hidden information). In turn, the same type of attack on stego-text and stego-image (C_4) results in a significantly higher error rate in the second case. However, it has been confirmed that RS-attack and SPA lead to approximately the same result.

Next, 4 binary messages of different length were implemented in each container (the second row of the table header), that is conversion F (1) was executed. The relative steganographic capacity calculated for each case (ΔC – ratio of length M in bits to N) is given in table 2.

Table 2

Relative steganographic capacity of stego-containers

Container	ΔC, bit/pixel			
	1	2	3	4
C_1	$6.86 \cdot 10^{-4}$	$2.06 \cdot 10^{-3}$	$1.37 \cdot 10^{-2}$	1.37
C_2	$7.36 \cdot 10^{-4}$	$2.22 \cdot 10^{-3}$	$1.47 \cdot 10^{-2}$	1.47
C_{3-1}	$7.35 \cdot 10^{-4}$	$2.22 \cdot 10^{-3}$	$1.48 \cdot 10^{-2}$	1.48
C_{3-2}	$7.40 \cdot 10^{-4}$	$2.22 \cdot 10^{-3}$	$1.48 \cdot 10^{-2}$	1.48
C_{3-3}	$7.35 \cdot 10^{-4}$	$2.22 \cdot 10^{-3}$	$1.48 \cdot 10^{-2}$	1.48
C_4	$7.39 \cdot 10^{-4}$	$2.22 \cdot 10^{-3}$	$1.48 \cdot 10^{-2}$	1.48

The attack results (relative number of detected pixel modifications (P_s)) for each of the created stego-containers ($S_1 \leftarrow C_1, \ \ldots, \ S_4 \leftarrow C_4$) are presented in the form of histograms in fig. 3. Here the first horizontal row below the histograms specifies data for different volumes of the embedded message (as in table 2), the second horizontal row – the steganalytic method. The throughput of several methods (MPV, method 1, method 2) does not allow for the correct embedding of 1 Mbit message M (corresponding to the data in the right column of table 2) into the selected stego-container C. The explanatory information below the respective histograms indicates this.

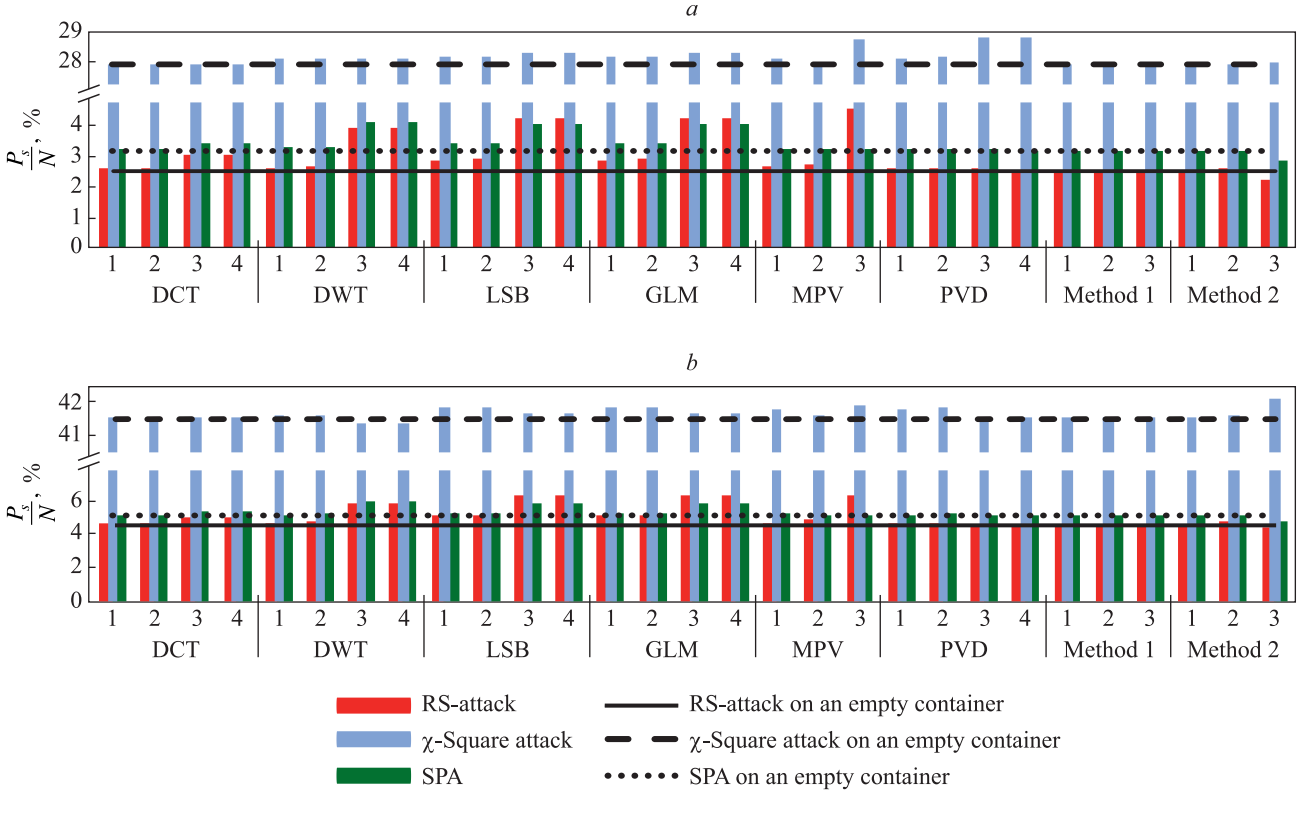


Fig. 3. Results of attacks on stego-containers S_i (beginning):
a – S_1; *b* – S_2

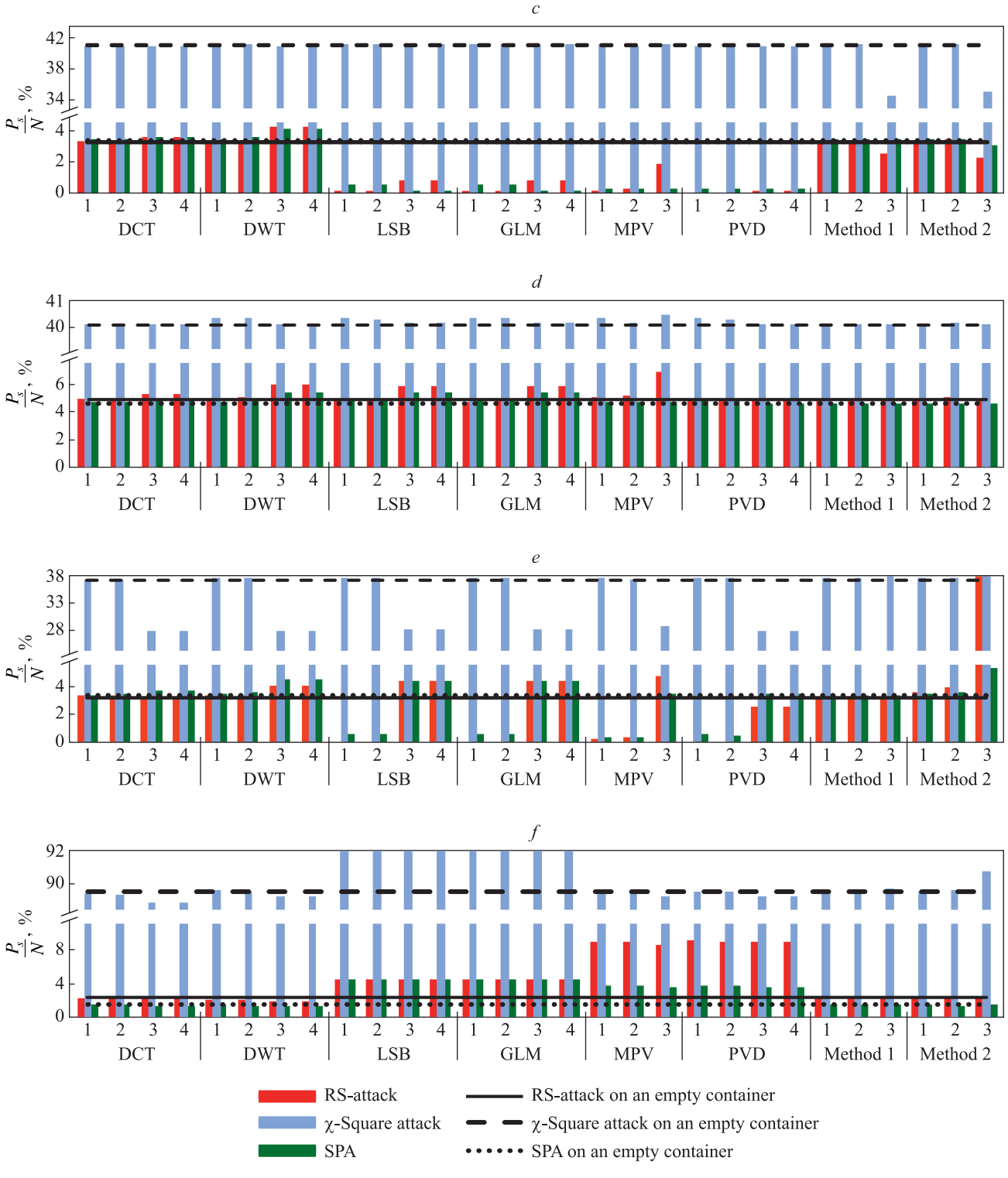


Fig. 3. Results of attacks on stego-containers S_i (ending):
$c - S_{3-1}$; $d - S_{3-2}$; $e - S_{3-3}$; $f - S_4$

Figure 4 shows the $\frac{P_s}{P_c}$ ratio, reflecting the attack relationship on empty (C) and filled containers (S) with message M. We should note an interesting fact: the stego-transformation of a strained text image based on LSB, GLM, MPV and PVD methods leads to the fact that in attacks of type RS and SPA a document container with a secret message causes less suspicion than empty one. In the second case there is a «false alarm».

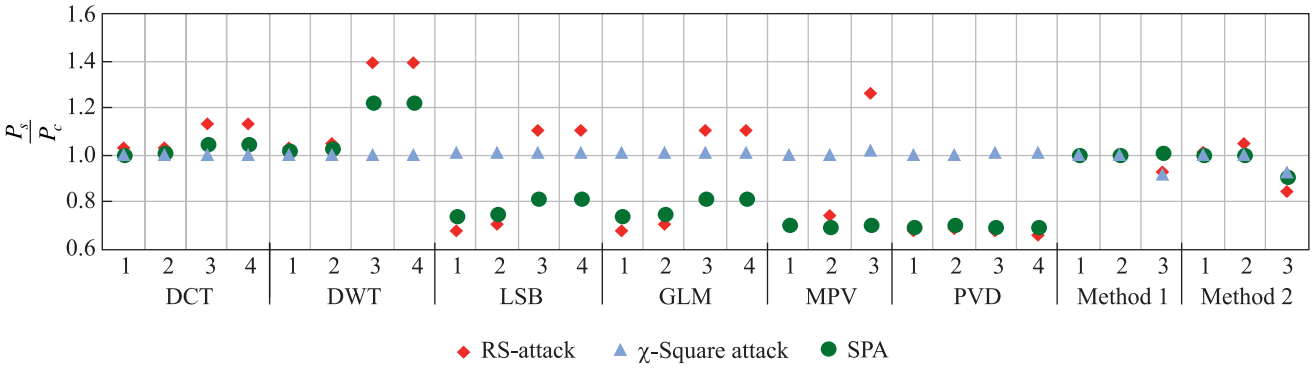


Fig. 4. Relationship between the effectiveness of attacks on a stego-container and an empty container in the form of rasterised text for different types of attacks

The presented results confirm the assumption that the techniques for steganographic transformations of processed image-pictures and text-based images should be developed and used taking into account the specific differences between these two types of documents. These differences are due primarily to the fact that text images have a much less complex colour transition.

Conclusions

The main result of the presented study is the demonstrative confirmation of the necessity to consider structural and chromatic differences between grayscale images and text images when addressing the tasks of covert communication or copyright protection based on steganography. The first images are characterised by more complex colour transitions, which requires a fine and smooth pixel gradation for accurate representation. The latter, however, feature sharp, distinct boundaries between the text and the background; in such cases, it is important to convey the outline accurately so that the pixels do not create a «blurring» effect. Because of this, the traditional methods of steganalysis (statistical attacks) developed for image-painting when applied to detect embedded information in text documents give a relatively high degree of error, which can be interpreted differently: grayscale text images are characterised by a higher level of steganographic robustness against statistical attacks.

However, we have confirmed that for both types of stego-containers under analysis with a high degree of randomness in the placement of secret messages in containers, the χ^2-based steganalysis method is the least effective among the three most well-known statistical methods (χ-square attack, RSA, SPA).

The result concerning different levels of stego-resistance of the same text stego-image, different font layout and conversion procedure of the original version from DOC to PNG format (produced by different applications; see fig. 3, *c*–*e*) is remarkable.

It has also been found that the stego-resistance of methods developed earlier by the article's authors (method 1 and method 2) is on a par with many known methods based on similar algorithms. In the discussion plan it can be noted that with the practical use of these solutions, as with other similar, characterised by a multi-key character of stego-transformations, difficulties may arise in reconciling key information between two parties (as well as in symmetric cryptography) stego-systems. One solution could be to use the neural network technology based on the so-called tree parity machines [34].

References

1. Admass WS, Munaye YY, Diro AA. Cyber security: state of the art, challenges and future directions. *Cyber Security and Applications*. 2024;2:100031. DOI: 10.1016/j.csa.2023.100031.

2. Urbanowicz P, Chourikov K, Rimorev A, Urbanovich N. Text steganography application for protection and transfer of the information. *Przegląd Elektrotechniczny*. 2010;86(7):95–97.

3. Evsutin O, Melman A, Meshcheryakov R. Digital steganography and watermarking for digital images: a review of current research directions. *IEEE Access*. 2020;8:166589–166611. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3022779.

4. Blinova EA, Urbanovich PP. Steganographic method based on hidden messages embedding into Bezier curves of SVG images. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2021;3:68–83. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-3-68-83.

5. Blinova EA, Stashevskaya IYu, Urbanovich PP. A steganographic method of embedding an identifier into the spatial data of an electronic map. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2023;1:76–87.

6. Zainal N, Hoshi AR, Ismail M, Rahem RT, Wadi SM. A hybrid steganography and watermark algorithm for copyright protection by using multiple embedding approaches. *Bulletin of Electrical Engineering and Informatics*. 2024;13(3):1877–1896. DOI: 10.11591/eei.v13i3.6337.

7. Dalal M, Juneja M. Steganography and steganalysis (in digital forensics): a cybersecurity guide. *Multimedia Tools and Applications*. 2021;80:5723–5771. DOI: 10.1007/s11042-020-09929-9.

8. Fernandes CS. Steganography and computer forensics – the art of hiding information: a systematic review. *ARIS2-Journal*. 2022;2(2):31–38. DOI: 10.56394/aris2.v2i2.20.

9. Urbanovich P, Shutko N. Theoretical model of a multi-key steganography system. In: Zapala AM, editor. *Recent developments in mathematics and informatics. Contemporary mathematics and computer science. Part 2, Computer science*. Lublin: Wydawnictwo KUL; 2016. p. 181–202.

10. Belhamra MA, Souidi EM. Steganography over redundant residue number system codes. *Journal of Information Security and Applications*. 2020;51:102434. DOI: 10.1016/j.jisa.2019.102434.

11. Hassan S, Muztaba MA, Hossain MS, Narman HS. A hybrid encryption technique based on DNA cryptography and steganography. In: Institute of Electrical and Electronics Engineers. *2022 IEEE 13th Annual information technology, electronics and mobile communication conference (IEMCON); 2022 October 12–15; Vancouver, Canada.* Vancouver: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2022. p. 501–508. DOI: 10.1109/IEMCON56893.2022.9946512.

12. Majeed MA, Sulaiman R, Shukur Z. New text steganography technique based on multilayer encoding with format-preserving encryption and Huffman coding. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*. 2022;13(12):163–172. DOI: 10.14569/IJACSA.2022.0131222.

13. Yao Y, Wang J, Chang Q, Ren Y, Meng W. High invisibility image steganography with wavelet transform and generative adversarial network. *Expert Systems with Applications*. 2024;249:123540. DOI: 10.1016/j.eswa.2024.123540.

14. Lou D-C, Hu C-H. LSB steganographic method based on reversible histogram transformation function for resisting statistical steganalysis. *Information Sciences*. 2012;188:346–358. DOI: 10.1016/j.ins.2011.06.003.

15. Agarwal M. Text steganographic approaches: a comparison. arXiv:1302.2718 [Preprint]. 2013 [cited 2025 July 9]: [16 p.]. Available from: https://arxiv.org/abs/1302.2718.

16. Pejaś J, Cierocki Ł. Reversible data hiding scheme for images using gray code pixel value optimization. *Procedia Computer Science*. 2021;192:328–337. DOI: 10.1016/j.procs.2021.08.034.

17. Saveleva MG, Urbanovich PP. Method of steganographic transformation of web-documents based on raster graphics and RGB model. *Proceedings of BSTU. Issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*. 2022;2:99–107. Russian. DOI: 10.52065/2520-6141-2022-260-2-99-107.

18. Saveleva MG, Urbanovich PP. Steganographic transformation based on the modification of halftone shades of rasterized documents. *Information and Control Systems.* 2024;6:2–14. Russian. DOI: 10.31799/1684-8853-2024-6-2-14.

19. Evsutin O, Melman A, Meshcheryakov R. Digital steganography and watermarking for digital images: a review of current research directions. *IEEE Access*. 2020;8:166589–166611. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3022779.

20. Hou D, Wang H, Zhang W, Yu N. Reversible data hiding in JPEG image based on DCT frequency and block selection. *Signal Processing*. 2018;148:41–47. DOI: 10.1016/j.sigpro.2018.02.002.

21. Shumskaya OO, Zhelezny M. Adaptive algorithm of replacement-based embedding of data into compressed JPEG images. *Information and Control Systems.* 2018;5:44–56. Russian. DOI: 10.31799/1684-8853-2018-5-44-56.

22. Liu J, Ke Y, Zhang Z, Lei Y, Li J, Zhang M, et al. Recent advances of image steganography with generative adversarial networks. *IEEE Access*. 2020;8:60575–60597. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.2983175.

23. Westfeld A, Pfitzmann A. Attacks on steganographic systems breaking the steganographic utilities EzStego, Jsteg, Steganos, and S-Tools – and some lessons learned. In: Pfitzmann A, editor. *Information hiding.* Berlin: Springer; 2000. p. 61–76 (Lecture notes in computer science; volume 1768).

24. Dumitrescu S, Wu X, Wang Z. Detection of LSB steganography via sample pair analysis. In: Petitcolas FAP, editor. *Information hiding.* Berlin: Springer; 2003. p. 355–372 (Lecture notes in computer science; volume 2578).

25. Luo X, Yang C, Liu F. Equivalence analysis among DIH, SPA, and RS steganalysis methods. In: Leitold H, Markatos EP, editors. *Communications and multimedia security (CMS 2006). Proceedings of the 10th IFIP International conference; 2006 October 19–21; Heraklion Crete, Greece.* Berlin: Springer; 2006. p. 355–372 (Lecture notes in computer science; volume 4237). DOI: 10.1007/11909033_15.

26. Karampidis K, Kavallieratou E, Papadourakis G. A review of image steganalysis techniques for digital forensics. *Journal of Information Security and Applications*. 2018;40:217–235. DOI: 10.1016/j.jisa.2018.04.005.

27. Vilkhovskiy DE. A survey of steganalysis methods in the papers of foreign authors. *Mathematical Structures and Modeling*. 2020;4:75–102. Russian. DOI: 10.24147/2222-8772.2020.4.75-102.

28. Kharin Yu, Vecherko EV. Statistical estimation of parameters for binary Markov chain models with embeddings. *Discrete Mathematics and Applications*. 2013;23(2):153–169. DOI: 10.1515/dma-2013-009.

29. Apau R, Asante M, Twum F, Ben Hayfron-Acquah J, Peasah KO. Image steganography techniques for resisting statistical steganalysis attacks: a systematic literature review. *PLoS ONE*. 2024;19(9):0308807. DOI: 10.1371/journal.pone.0308807.

30. Alqahtani J, Alghazzawi D, Cheng L. Steganalysis algorithm for PNG images based on fuzzy logic technique. *International Journal of Network Security & Its Applications*. 2016;8(6):1–16. DOI: 10.5121/ijnsa.2016.8601.

31. Farooq N, Selwal A. Image steganalysis using deep learning: a systematic review and open research challenges. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*. 2023;14:7761–7793. DOI: 10.1007/s12652-023-04591-z.

32. Aljarf A, Zamzami H, Gutub A. Integrating machine learning and features extraction for practical reliable color images steganalysis classification. *Soft Computing*. 2023;27(19):13877–13888. DOI: 10.1007/s00500-023-09042-7.

33. Fridrich J, Goljan M, Du R. Detecting LSB steganography in color, and gray-scale images. *IEEE MultiMedia*. 2001;8(4):22–28. DOI: 10.1109/93.959097.

34. Urbanovich PP, Shutko NP. Usage of hypercomplex numbers in a cryptographic key agreement protocol based on neural networks. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2024;2:81–92. EDN: MIPTIK.

Received 22.02.2026 / revised 14.05.2026 / accepted 09.06.2026.

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ В БГУ РАБОТ
INDICATIVE ABSTRACTS OF THE PAPERS DEPOSITED IN BSU

УДК 519.876.5(075.8)
Лаврова О. А. **Системная динамика и агентное моделирование** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 7-06-0533-04 «Математика и компьютерные науки» / О. А. Лаврова ; БГУ. Минск, 2026. 68 с. : ил. Библиогр.: с. 67–68. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/344565. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 31.03.2026, № 009631032026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Системная динамика и агентное моделирование» предназначен для магистрантов специальности 7-06-0533-04 «Математика и компьютерные науки» (профилизация «Компьютерная математика и системный анализ»). В ЭУМК содержатся тексты лекций, планы лабораторных занятий, планы практических занятий, перечень вопросов и практических заданий к экзамену, списки рекомендованной литературы и электронных ресурсов.

УДК 004.6(075.8)
Скакун В. В. **Базы данных** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 6-05-0533-05 «Радиофизика и информационные технологии», 6-05-0533-11 «Прикладная информатика», 6-05-0533-12 «Кибербезопасность» / В. В. Скакун ; БГУ. Минск, 2026. 193 с. : ил. Библиогр.: с. 193. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/344633. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 31.03.2026, № 009731032026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Базы данных» предназначен для студентов специальностей 6-05-0533-05 «Радиофизика и информационные технологии», 6-05-0533-11 «Прикладная информатика» и 6-05-0533-12 «Кибербезопасность». В ЭУМК содержатся основные понятия и свойства технологии баз данных и моделирования данных, описание и характеристики реляционной модели данных, языка программирования запросов SQL, методологии инфологического и даталогического моделирования, архитектуры многопользовательских и распределенных баз данных, а также сведения по программированию баз данных в СУБД MS SQL Server и MS Access.

УДК 004.42:004.738.5(075.8)
Зинченко Д. Н. **Веб-сервисы** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 08 «Математика и информационные технологии (по направлениям)» / Д. Н. Зинченко ; БГУ. Минск, 2026. 79 с. : ил. Библиогр.: с. 79. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/345082. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 08.04.2026, № 010307042026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Веб-сервисы» разработан в соответствии с образовательным стандартом первой ступени высшего образования для специальности 1-31 03 08 «Математика и информационные технологии (по направлениям)» (направление специальности 1-31 03 08-01 «Веб-программирование и интернет-технологии»). ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Веб-сервисы» студентам данной специальности. ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, списки рекомендованной литературы.

УДК 004.42:004.738.5(075.8)
Кравчук А. И. **.NET технологии** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 7-06-0533-04 «Математика и компьютерные науки», профилизация «Веб-программирование и интернет-технологии» / А. И. Кравчук, Е. В. Кремень, Ю. А. Кремень ; БГУ. Минск, 2026. 141 с. : ил. Библиогр.: с. 139. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/345090. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 08.04.2026, № 010407042026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «.NET технологии» предназначен для студентов специальности 7-06-0533-04 «Математика и компьютерные науки» (профилизация «Веб-программирование и интернет-технологии»). ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, списки рекомендованной литературы.

УДК 517.958(075.8)
Ломовцев Ф. Е. **Уравнения математической физики** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки» / Ф. Е. Ломовцев, Д. А. Булыно ; БГУ. Минск, 2026. 196 с. Библиогр.: с. 195–196. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/345206. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 10.04.2026, № 011010042026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) предназначен для студентов специальности 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки».

В ЭУМК содержатся лекционный материал, лабораторный практикум, вопросы для подготовки к зачету, список литературы.

УДК 519.876.5(075.8) + 004.8.032.26(075.8)
Голубева Л. Л. **Нейронные сети и генетические алгоритмы с Wolfram Mathematica** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ» / Л. Л. Голубева, А. Э. Малевич ; БГУ. Минск, 2026. 134 с. : ил. Библиогр.: с. 131–134. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/345333. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 16.04.2026, № 011716042026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Нейронные сети и генетические алгоритмы» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ». ЭУМК охватывает четыре раздела дисциплины: «Классификация и кластеризация», «Метод опорных векторов», «Метод обратного распространения ошибки», «Эволюционные и генетические алгоритмы». В ЭУМК содержатся тексты лекций, планы лабораторных занятий, задания для управляемой самостоятельной работы студентов, перечень вопросов к зачету, списки рекомендованной литературы и электронных ресурсов.

УДК 004.438(075.8)
Дубров Б. М. **Статистический анализ и язык R** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 08 «Математика и информационные технологии (по направлениям)», направление спец. 1-31 03 08-01 «Веб-программирование и интернет-технологии» / Б. М. Дубров ; БГУ. Минск, 2026. 29 с. : ил. Библиогр.: с. 29. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/345339. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 17.04.2026, № 011916042026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Статистический анализ и язык R» разработан в соответствии с образовательным стандартом первой ступени высшего образования для специальности 1-31 03 08 «Математика и информационные технологии (по направлениям)». ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Статистический анализ и язык R» студентам данной специальности. В ЭУМК содержатся краткий конспект лекций, перечень лабораторных занятий с материалами для работы, задания по управляемой самостоятельной работе.

УДК 004.75(075.8) + 004.415.2(075.8)
Дубров Б. М. **Архитектура распределенных приложений** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 7-06-0533-04 «Математика и компьютерные науки», профилизация «Веб-программирование и интернет-технологии» / Б. М. Дубров ; БГУ. Минск, 2026. 41 с. : ил. Библиогр.: с. 41. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/345574. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 17.04.2026, № 012016042026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Архитектура распределенных приложений» разработан в соответствии с образовательным стандартом второй ступени высшего образования для специальности 7-06-0533-04 «Математика и компьютерные науки». ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Архитектура распределенных приложений» студентам данной специальности. В ЭУМК содержатся конспект лекций, перечень лабораторных занятий с материалами для работы, задания по управляемой самостоятельной работе.

УДК 514.7(075.8) + 515.1(075.8)
Дифференциальная геометрия и топология : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ» / В. В. Балащенко, Г. О. Кукрак, В. Н. Куница, В. Л. Тимохович ; БГУ. Минск, 2026. 55 с. : ил. Библиогр.: с. 54. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/345579. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 17.04.2026, № 012216042026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Дифференциальная геометрия и топология» разработан в соответствии с образовательным стандартом общего высшего образования для специальности 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ». ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» студентам данной специальности. В ЭУМК содержатся краткий конспект лекций, материалы к практическим занятиям, материалы для управляемой самостоятельной работы.

УДК 514.7(075.8) + 515.1(075.8)
Дифференциальная геометрия и топология : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», профилизация «Математика» / В. В. Балащенко, Г. О. Кукрак, В. Н. Куница, В. Л. Тимохович ; БГУ. Минск, 2026. 62 с. : ил. Библиогр.: с. 61. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/345580. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 17.04.2026, № 012316042026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Дифференциальная геометрия и топология» разработан в соответствии с образовательным стандартом общего высшего образования для специальности 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки». ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» студентам данной специальности. В ЭУМК содержатся краткий конспект лекций, материалы к лабораторным занятиям, материалы для управляемой самостоятельной работы.

УДК 514.7(075.8) + 515.1(075.8)
Дифференциальная геометрия и топология : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», профилизация «Искусственный интеллект и математическая экономика» / В. В. Балащенко, Г. О. Кукрак, В. Н. Куница, В. Л. Тимохович ; БГУ. Минск, 2026. 59 с. : ил. Библиогр.: с. 58. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/345581. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 17.04.2026, № 012416042026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Дифференциальная геометрия и топология» разработан в соответствии с образовательным стандартом общего высшего образования для специальности 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки». ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» студентам данной специальности. В ЭУМК содержатся краткий конспект лекций, материалы к лабораторным занятиям, материалы для управляемой самостоятельной работы.

УДК 514.7(075.8) + 515.1(075.8)
Дифференциальная геометрия и топология : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-06 «Математика» / В. В. Балащенко, Г. О. Кукрак, В. Н. Куница, В. Л. Тимохович ; БГУ. Минск, 2025. 61 с. : ил. Библиогр.: с. 60. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/345582. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 17.04.2026, № 012516042026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Дифференциальная геометрия и топология» разработан в соответствии с образовательным стандартом общего высшего образования для специальности 6-05-0533-06 «Математика». ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» студентам данной специальности. В ЭУМК содержатся краткий конспект лекций, материалы к лабораторным занятиям, материалы для управляемой самостоятельной работы.

УДК 339.138:004.735.8(075.8)
Нагорный Ю. Е. **Маркетинг и поисковая оптимизация** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 08 «Математика и информационные технологии (по направлениям)» / Ю. Е. Нагорный ; БГУ. Минск, 2026. 81 с. : ил. Библиогр.: с. 81. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/346247. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 05.05.2026, № 013005052026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Маркетинг и поисковая оптимизация» разработан в соответствии с образовательным стандартом первой ступени высшего образования для специальности 1-31 03 08 «Математика и информационные технологии (по направлениям)». ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Маркетинг и поисковая оптимизация» студентам данной специальности. В ЭУМК содержатся конспект лекций, перечень лабораторных занятий с материалами для работы, задания по управляемой самостоятельной работе.

УДК 004:378.147.091.313(075.8)(075.8)
Позняк Ю. В. **Учебно-исследовательская работа студента** : электрон. учеб.-метод. комплекс с креатив. компонентом для спец. 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки» / Ю. В. Позняк, Д. А. Сьянов; БГУ. Минск, 2026. 12 с. Библиогр.: с. 12. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/346265. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 05.05.2026, № 013705052026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Учебно-исследовательская работа студента» разработан в соответствии с образовательным стандартом высшего образования для специальности 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки». ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Учебно-исследовательская работа студента» студентам данной специальности. В ЭУМК содержатся материалы для организации практических занятий, задания по управляемой самостоятельной работе.

УДК 004.42(075.8) + 004.432.045C++(075.8)
Галкин И. М. **Методы программирования** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 6-05-0533-06 «Математика», 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки» / И. М. Галкин ; БГУ. Минск, 2026. 122 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 121–122. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/346287. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 06.05.2026, № 013906052026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Методы программирования» предназначен для студентов первого курса специальностей 6-05-0533-06 «Математика», 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки» (профилизации «Математика», «Искусственный интеллект и математическая экономика»). ЭУМК содержит конспекты лекций, темы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов и список рекомендуемой литературы.

УДК 512(075.8) + 511(075.8)
Адмиралова А. Н. **Алгебра и теория чисел** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 6-05-0533-06 «Математика», 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ» : в 3 ч. Ч. 1 / А. Н. Адмиралова, В. В. Беняш-Кривец, С. В. Тихонов ; БГУ. Минск, 2026. 151 с. : ил. Библиогр.: с. 150–151. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/346326. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 07.05.2026, № 013105052026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Алгебра и теория чисел» (часть 1) предназначен для студентов специальностей 6-05-0533-06 «Математика», 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ». В ЭУМК содержится лекционный и практический материал, изучающийся в первом семестре первого

курса. Содержание ЭУМК предполагает изучение следующих вопросов: основ теории чисел, сравнений, комплексных чисел, матриц, перестановок и подстановок, определителей, многочленов от одной переменной.

УДК 512(075.8) + 511(075.8)
Адмиралова А. Н. **Алгебра и теория чисел** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 6-05-0533-06 «Математика», 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ» : в 3 ч. Ч. 2 / А. Н. Адмиралова, В. В. Беняш-Кривец, С. В. Тихонов ; БГУ. Минск, 2026. 137 с. : ил. Библиогр.: с. 136–137. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/346337. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 07.05.2026, № 013205052026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Алгебра и теория чисел» (часть 2) предназначен для студентов специальностей 6-05-0533-06 «Математика», 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ». В ЭУМК содержатся лекционный и практический материал, изучающийся во втором семестре первого курса. Содержание ЭУМК предполагает изучение следующих вопросов: векторных пространств, теории систем линейных уравнений, линейных отображений векторных пространств.

УДК 512(075.8) + 511(075.8)
Адмиралова А. Н. **Алгебра и теория чисел** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 6-05-0533-06 «Математика», 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ» / А. Н. Адмиралова, В. В. Беняш-Кривец, С. В. Тихонов ; БГУ. Минск, 2026. 181 с. : ил. Библиогр.: с. 179–180. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/346382. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 07.05.2026, № 013305052026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Алгебра и теория чисел» (часть 3) предназначен для студентов специальностей 6-05-0533-06 «Математика», 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ». В ЭУМК содержатся лекционный и практический материал, изучающийся в третьем семестре второго курса. Содержание ЭУМК предполагает изучение следующих вопросов: билинейных и квадратичных форм, евклидовых пространств и линейных операторов этих пространств, основ теории групп, колец и полей.

УДК 512.624.95(075.8)
Беняш-Кривец В. В. **Практическая криптография** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 7-06-0533-04 «Математика и компьютерные науки» / В. В. Беняш-Кривец, А. И. Каскевич, С. В. Тихонов ; БГУ. Минск, 2026. 99 с. : ил. Библиогр.: с. 98–99. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/346384. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 07.05.2026, № 013405052026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Практическая криптография» предназначен для студентов специальности 7-06-0533-04 «Математика и компьютерные науки» (профилизация «Компьютерная математика и системный анализ»). В ЭУМК содержится лекционный и практический материал. Содержание ЭУМК предполагает изучение следующих вопросов: алгебраических и теоретико-числовых основ, эллиптических кривых, алгоритмов факторизации и проверки числа на простоту, криптосистем с открытым ключом, электронной цифровой подписи.

УДК 512.624.95(075.8)
Беняш-Кривец В. В. **Теоретико-числовые алгоритмы информационной безопасности** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 7-06-0533-04 «Математика и компьютерные науки» / В. В. Беняш-Кривец, В. И. Каскевич, С. В. Тихонов ; БГУ. Минск, 2026. 100 с. : ил. Библиогр.: с. 99–100. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/346402. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 07.05.2026, № 013505052026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Теоретико-числовые алгоритмы информационной безопасности» предназначен для студентов специальности 7-06-0533-04 «Математика и компьютерные науки» (профилизации «Веб-программирование и интернет-технологии», «Математика»). В ЭУМК содержится лекционный и практический материал. Содержание ЭУМК пред-

полагает изучение следующих вопросов: алгебраических и теоретико-числовых основ, эллиптических кривых, алгоритмов факторизации и проверки числа на простоту, криптосистем с открытым ключом, электронной цифровой подписи.

УДК 51(072)(06) + 004(072)(06)

Проблемы преподавания высшей математики и информатики в условиях новой образовательной парадигмы : материалы Междунар. науч.-практ. конф. (Минск, 14 мая 2026 г.) / БГУ ; [редкол.: С. А. Самаль (отв. ред.) и др.]. Минск, 2026. 118 с. : ил., табл. Библиогр. в тексте. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/346415. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 08.05.2026, № 014308052026. Текст : электронный.

В сборнике представлены материалы докладов, включенных в программу Международной научно-практической конференции, которая проводится кафедрой общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета. Тематика сборника охватывает широкий спектр проблем современного университетского образования, проблемы эффективного преподавания математики и информатики для студентов различных специальностей высшей школы. В авторской редакции.

УДК 519.2(075.8)

Теория вероятностей и математическая статистика : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ» / А. Г. Гутор, Н. В. Лазакович, С. П. Сташулёнок, С. Л. Штин ; БГУ. Минск, 2026. 193 с. Библиогр.: с. 185–187. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/346436. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 08.05.2026, № 014408052026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) предназначен для студентов специальностей 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки» (профилизация «Математика»), 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ».

В ЭУМК содержатся лекционный материал, лабораторный практикум, примерные задания для управляемой самостоятельной работы студентов, задания открытого типа, вопросы для подготовки к зачету, темы проектов, список литературы.

УДК 004.415.53(075.8)

Шиманский Е. В. **Тестирование ПО** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки» (профилизации «Веб-программирование и интернет-технологии», «Математическое и программное обеспечение мобильных устройств») / Е. В. Шиманский ; БГУ. Минск, 2026. 53 с. : ил. Библиогр.: с. 51. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/347304. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 15.05.2026, № 014615052026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Тестирование ПО» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки». ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, списки рекомендованной литературы.

УДК 005.52:004(075.8)

Шиманский Е. В. **Системы бизнес-аналитики** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», профилизация «Веб-программирование и интернет-технологии» / Е. В. Шиманский ; БГУ. Минск, 2026. 101 с. : ил. Библиогр.: с. 99. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/347306. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 15.05.2026, № 014715052026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Системы бизнес-аналитики» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки». ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, списки рекомендованной литературы.

УДК 004.6(075.8)

Кушнеров А. В. **Базы данных** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ» / А. В. Кушнеров ; БГУ. Минск, 2026. 144 с. : ил. Библиогр.: с. 144.

Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/347507. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 25.05.2026, № 015225052026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Базы данных» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ». В ЭУМК содержатся тексты лекций, планы лабораторных занятий, планы практических занятий, перечень вопросов и практических заданий к экзамену, списки рекомендованной литературы и электронных ресурсов.

УДК 004.415.2(075.8)

Блинов И. Н. **Анализ и проектирование информационных систем** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», профилизации «Веб-программирование и интернет-технологии», «Математическое и программное обеспечение мобильных устройств» / И. Н. Блинов ; БГУ. Минск, 2026. 83 с. : ил. Библиогр.: с. 80. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/347666. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 28.05.2026, № 015328052026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Анализ и проектирование информационных систем» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки» (профилизации «Веб-программирование и интернет-технологии», «Математическое и программное обеспечение мобильных устройств»).

ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, списки рекомендованной литературы.

УДК 004.42:004.738.5(075.8)

Блинов И. Н. **Разработка веб-приложений** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки» / И. Н. Блинов ; БГУ. Минск, 2026. 178 с. : ил. Библиогр.: с. 176. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/347669. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 28.05.2026, № 015428052026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Разработка веб-приложений» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки». ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, списки рекомендованной литературы.

УДК 004.42(075.8)

Блинов И. Н. **Технологии программирования** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», профилизации «Веб-программирование и интернет-технологии», «Математическое и программное обеспечение мобильных устройств» / И. Н. Блинов ; БГУ. Минск, 2026. 277 с. : ил. Библиогр.: с. 277. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/347670. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 28.05.2026, № 015528052026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Технологии программирования» предназначен для магистрантов специальности 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки».

В ЭУМК содержатся тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, списки рекомендованной литературы.

УДК 004(075.8) + 519.6(075.8)

Никитин А. В. **Информационные технологии** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-13 «Механика и математическое моделирование» / А. В. Никитин ; БГУ. Минск, 2026. 163 с. : ил. Библиогр.: с. 161–163. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/347793. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 03.06.2026, № 016303062026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Информационные технологии» разработан в соответствии с образовательным стандартом первой ступени высшего образования для специальности 6-05-0533-13 «Механика и математическое моделирование». ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Информационные технологии» студентам данной специальности. В ЭУМК содержатся конспект лекций, перечень лабораторных занятий с материалами для работы, задания по управляемой самостоятельной работе.

УДК 519.6(075.8)
Дубров Б. М. **Математические модели в информационных технологиях** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 7-06-0533-04 «Математика и компьютерные науки», профилизации «Веб-программирование и интернет-технологии», «Математика», «Компьютерная математика и системный анализ» / Б. М. Дубров ; БГУ. Минск, 2026. 28 с. : ил. Библиогр.: с. 28. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/348049. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 05.06.2026, № 016804062026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Математические модели в информационных технологиях» разработан в соответствии с образовательным стандартом второй ступени высшего образования для специальности 7-06-0533-04 «Математика и компьютерные науки». ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Математические модели в информационных технологиях» студентам данной специальности. В ЭУМК содержатся конспект лекций, перечень лабораторных занятий с материалами для работы, задания по управляемой самостоятельной работе.

УДК 004.738.5:004.92(075.8)
Лукьянович И. Р. **Веб-дизайн** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», профилизации «Веб-программирование и интернет-технологии», «Математическое и программное обеспечение мобильных устройств» / И. Р. Лукьянович ; БГУ. Минск, 2026. 32 с. Библиогр.: с. 22–23. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/348053. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 05.06.2026, № 017105062026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Веб-дизайн» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки» (профилизации «Веб-программирование и интернет-технологии», «Математическое и программное обеспечение мобильных устройств»). ЭУМК содержит планы лекций, описания лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, списки рекомендованной литературы.

УДК 519.6(075.8) + 004.6(075.8)
Кремень Ю. А. **Анализ и визуализация данных** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-06 «Математика» / Ю. А. Кремень, Е. В. Кремень ; БГУ. Минск, 2026. 173 с. : ил. Библиогр.: с. 172. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/348055. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 05.06.2026, № 017205062026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Анализ и визуализация данных» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-06 «Математика». ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, списки рекомендованной литературы.

УДК 531.011(075.8)
Медведев Д. Г. **Аналитическая механика** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-13 «Механика и математическое моделирование» / Д. Г. Медведев, Д. Е. Мармыш, Н. Г. Чумак ; БГУ. Минск, 2026. 55 с. Библиогр.: с. 55. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/348832. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 19.06.2026, № 019219062026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Аналитическая механика» разработан в соответствии с образовательным стандартом первой ступени высшего образования для специальности 6-05-0533-13 «Механика и математическое моделирование». ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Аналитическая механика» студентам данной специальности. В ЭУМК содержатся конспект лекций, перечень лабораторных занятий с материалами для работы, задания по управляемой самостоятельной работе.

УДК 519.1(075.8) + 510.6(075.8)
Волчкова Г. П. **Дискретная математика и математическая логика** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 6-05-0533-09 «Прикладная математика», 6-05-0533-12 «Кибербезопасность» : в 6 ч. Ч. 2 / Г. П. Волчкова ; БГУ. Минск, 2026. 96 с. : ил. Библиогр.: с. 95–96. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/348832. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 25.06.2026, № 019725062026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Дискретная математика и математическая логика» (часть 2) предназначен для студентов специальностей 6-05-0533-09 «Прикладная

математика», 6-05-0533-12 «Кибербезопасность». В ЭУМК содержатся лекционный материал по теме «Множества», задания для практических занятий, наборы тестов для проверки знаний, список литературы.

УДК 004.432.045C++(075.8)
Серикова Н. В. **Программирование на C++** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-15 «Интеллектуальная электроника» / Н. В. Серикова, С. Н. Семенович ; БГУ. Минск, 2026. 205 с. : 28 табл. Библиогр.: с. 202–205. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/349570. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 25.06.2026, № 020025062026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Программирование на C++» предназначен для студентов факультета радиофизики и компьютерных технологий БГУ специальности 6-05-0533-15 «Интеллектуальная электроника». В ЭУМК содержатся основные теоретические сведения по языку C++ с примерами программ, перечисляются средства диагностики знаний, приводятся задания по лабораторным работам дисциплины, вопросы для подготовки к зачету и экзамену, список литературы для изучения.

УДК 004.056.5(075.8)
Перез Чернов А. Х. **Криптотехнологии** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 7-06-0533-04 «Математика и компьютерные науки», профилизация «Веб-программирование и интернет-технологии» / А. Х. Перез Чернов ; БГУ. Минск, 2026. 85 с. : ил. Библиогр.: с. 83–84. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/350356. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 07.07.2026, № 021306072026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Криптотехнологии» предназначен для студентов специальности 7-06-0533-04 «Математика и компьютерные науки».

В ЭУМК содержатся тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, списки рекомендованной литературы.

УДК 004.7(075.8)
Перез Чернов А. Х. **AWS и облачные технологии** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», профилизации «Веб-программирование и интернет-технологии», «Математическое и программное обеспечение мобильных устройств» / А. Х. Перез Чернов ; БГУ. Минск, 2026. 45 с. : ил. Библиогр.: с. 44. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/350369. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 07.07.2026, № 021406072026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «AWS и облачные технологии» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки».

В ЭУМК содержатся тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, списки рекомендованной литературы.

УДК 004.5:004.4(075.8) + 004.8(075.8)
Перез Чернов А. Х. **Проектирование и прототипирование пользовательских интерфейсов** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 7-06-0533-04 «Математика и компьютерные науки», профилизация «Веб-программирование и интернет-технологии» / А. Х. Перез Чернов ; БГУ. Минск, 2026. 68 с. : ил. Библиогр.: с. 64–66. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/350469. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 08.07.2026, № 021506072026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Проектирование и прототипирование пользовательских интерфейсов» предназначен для студентов специальности 7-06-0533-04 «Математика и компьютерные науки» (профилизация «Веб-программирование и интернет-технологии»).

В ЭУМК содержатся тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, списки рекомендованной литературы.

УДК 004.89(075.8)
Перез Чернов А. Х. **Системная архитектура и управление проектами** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», профилизации «Веб-программирование

и интернет-технологии», «Математическое и программное обеспечение мобильных устройств» / А. Х. Перез Чернов ; БГУ. Минск, 2026. 87 с. : ил. Библиогр.: с. 79–85. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/350471. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 08.07.2026, № 021606072026. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Системная архитектура и управление проектами» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки».

В ЭУМК содержатся тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, списки рекомендованной литературы.

СОДЕРЖАНИЕ

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Мурадян М. Г., Мурадян А. Г. Интегральное уравнение Фредгольма с разностным ядром, содержащим периодический множитель 6

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Глизбург В. И., Пчелинцев С. В. О классификации с точностью до изотопии простых 3-мерных коммутативных алгебр ниль-ранга 1 14

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Жалукевич Д. С. Преобразования эквивалентности семейств квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка функции двух переменных 28

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

Бедрицкий А. С., Тимохович В. Л. Об инфимуме проксимальных топологий гиперпространства 39

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Михасев Г. И., Мисник В. В., Ботогова М. Г. Свободные малые колебания системы параллельно ориентированных нанобалок с учетом сил Ван-дер-Ваальса 49

Журавков М. А., Николайчик М. А., Карпович И. Н., Полягошко А. В., Ю Гуанбин, Ма Ваньшэн. Разработка цифрового двойника трехплунжерного гидравлического насоса 62

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Меликов А, Озкар Ш. Анализ системы обслуживания-запасания с учетом времени обслуживания фазового типа в условиях гибридной политики пополнения 77

Малинковский Ю. В., Евмененко С. Ю. Стационарное распределение замкнутых сетей с ограничением на время пребывания заявок 89

Дудина О. С., Дудин С. А. Анализ многолинейной системы с марковским входным потоком и динамическим ценообразованием 97

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

И Тан, Перцев Д. Ю., Куприянова Д. В. Усовершенствованный метод динамического окна для локальной навигации в условиях множества препятствий 110

Кочин В. П., Шанцов А. В. Математические модели размещения и миграции виртуальных машин на гетерогенных платформах виртуализации 122

Урбанович П. П., Савельева М. Г., Шутько Н. П. Стеганографическая стойкость растрированных текстов-контейнеров к статистическим атакам 131

Аннотации депонированных в БГУ работ 142

CONTENTS

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

Muradyan M. G., Muradyan A. G. Fredholm integral equation with a difference kernel containing a periodic multiplier..... 6

MATHEMATICAL LOGIC, ALGEBRA AND NUMBER THEORY

Glizburg V. I., Pchelintsev S. V. On classification up to isotopy of simple 3-dimensional commutative algebras of nil-rank 1..... 14

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

Zhalukevich D. S. Equivalence transformations of families of second-order quasi-linear hyperbolic equations of a two-variable function..... 28

GEOMETRY AND TOPOLOGY

Bedritskiy A. S., Timokhovich V. L. On the infimum of proximal topologies of the hyperspace..... 39

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

Mikhasev G. I., Misnik V. V., Botogova M. G. Free small vibrations of a system of parallel-oriented nanobeams considering van der Waals forces..... 49

Zhuravkov M. A., Nikolaitchik M. A., Karpovich IN, Poliahoshko A. A., Yu Guangbin, Ma Wansheng. Development of digital twin of a three-plunger hydraulic pump..... 62

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

Melikov A, Ozkar S. Analysis of queuing-inventory system with phase-type service time under hybrid replenishment policy..... 77

Malinkovsky Yu. V., Evmenenko S. Yu. Steady-state distribution of closed queuing networks with a limit on customer sojourn time..... 89

Dudina O. S., Dudin S. A. Analysis of a multi-server system with Markovian arrival process and dynamic pricing..... 97

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

Yi Tang, Pertsau D. Yu., Kupriyanava D. V. Multi-constraint enhanced dynamic window approach for robust and smooth local navigation..... 110

Kochyn V. P., Shantsov A. V. Mathematical models of virtual machine placement and migration on heterogeneous virtualisation platforms..... 122

Urbanovich P. P., Saveleva M. G., Shutko N. P. Steganographic resistance of rasterised text-containers to statistical attacks..... 131

Indicative abstracts of the papers deposited in BSU..... 142

Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области математики и информатики), техническим наукам (в области информатики).

Журнал включен в наукометрические базы данных Scopus, Mathematical Reviews, Ulrichsweb, Google Scholar, zbMath, Russian Science Citation Index, РИНЦ, China National Knowledge Infrastructure.

Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. № 2. 2026

Учредитель:
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь.
Почтовый адрес: пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь.
Тел. (017) 259-72-34, (017) 259-72-38.
E-mail: jmathinf@bsu.by
URL: https://journals.bsu.by/index.php/mathematics

«Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика» издается с января 1969 г.
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика»
(ISSN 1561-834X).

Редактор *О. А. Семенец*
Технические редакторы *М. А. Панкратова, А. Р. Голик*
Корректор *Л. А. Меркуль*

Подписано в печать 31.07.2026.
Тираж 25 экз. Заказ 0000.

© БГУ, 2026

Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. No. 2. 2026

Founder:
Belarusian State University

Registered address: 4 Niezaliezhnasci Ave., Minsk 220030, Republic of Belarus.
Correspondence address: 4 Niezaliezhnasci Ave., Minsk 220030, Republic of Belarus.
Tel. (017) 259-72-34, (017) 259-72-38.
E-mail: jmathinf@bsu.by
URL: https://journals.bsu.by/index.php/mathematics

«Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics» published since January, 1969.
Until 2017 named «Vestnik BGU. Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika»
(ISSN 1561-834X).

Editor *O. A. Semenets*
Technical editors *M. A. Pankratova, A. R. Golik*
Proofreader *L. A. Merkul'*

Signed print 31.07.2026.
Edition 25 copies. Order number 0000.

© BSU, 2026