



БЕЛОРУССКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

ЖУРНАЛ  
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

# МАТЕМАТИКА ИНФОРМАТИКА

---

JOURNAL  
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

# MATHEMATICS and INFORMATICS

Издается с января 1969 г.  
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.  
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)

Выходит три раза в год

---

# 2

# 2020

---

МИНСК  
БГУ

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Главный редактор**      **ХАРИН Ю. С.** – доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси; директор Научно-исследовательского института прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.  
E-mail: kharin@bsu.by

**Заместители  
главного редактора**      **КРОТОВ В. Г.** – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.  
E-mail: krotov@bsu.by

**ДУДИН А. Н.** – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий лабораторией прикладного вероятностного анализа факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.  
E-mail: dudin@bsu.by

**Ответственный  
секретарь**      **МАТЕЙКО О. М.** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.  
E-mail: matseika@bsu.by

- Абламейко С. В.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
**Альтенбах Х.** Магдебургский университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия.  
**Антоневич А. Б.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
**Бауэр С. М.** Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.  
**Беняш-Кривец В. В.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
**Берник В. И.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
**Бухштабер В. М.** Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.  
**Вабищевич П. Н.** Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук, Москва, Россия.  
**Волков В. М.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
**Гладков А. Л.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
**Го В.** Китайский университет науки и технологий, Хэфэй, провинция Аньхой, Китай.  
**Гогинава У.** Тбилисский государственный университет им. Иванэ Джавахишвили, Тбилиси, Грузия.  
**Головко В. А.** Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь.  
**Гороховик В. В.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
**Громак В. И.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
**Демидо Г.** Институт математики и информатики Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва.  
**Донской В. И.** Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия.  
**Егоров А. Д.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
**Еремеев В. А.** Гданьский политехнический университет, Гданьск, Польша.  
**Жоландек Х.** Институт математики Варшавского университета, Варшава, Польша.  
**Журавков М. А.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
**Залесский П. А.** Бразильский университет, Бразилиа, Бразилия.  
**Зубков А. М.** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.  
**Каплунов Ю. Д.** Университет Кииле, Кииле, Великобритания.  
**Кашин Б. С.** Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.  
**Келлерер Х.** Грацский университет им. Карла и Франца, Грац, Австрия.

- Княжице Л. Б.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Кожанов А. И.** Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.
- Котов В. М.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Краснопрошин В. В.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Лауринчикас А. П.** Вильнюсский университет, Вильнюс, Литва.
- Мадани К.** Университет Париж-Эст Марн-ла-Валле, Марн-ла-Валле, Франция.
- Макаров Е. К.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Матус П. П.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Медведев Д. Г.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Михасев Г. И.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Нестеренко Ю. В.** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
- Никоиоров Ю. Г.** Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук, Владикавказ, Россия.
- Освальд П.** Боннский университет, Бонн, Германия.
- Романовский В. Г.** Мариборский университет, Марибор, Словения.
- Рязанов В. В.** Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук, Москва, Россия.
- Сафонов В. Г.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Скиба А. Н.** Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель, Беларусь.
- Сотсков Ю. Н.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Трофимов В. А.** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
- Тузиков А. В.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Фильцмозер П.** Венский технический университет, Вена, Австрия.
- Черноусов В. И.** Альбертский университет, Эдмонтон, Канада.
- Чижик С. А.** Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Шешок Д.** Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса, Вильнюс, Литва.
- Шубэ А. С.** Институт математики и информатики Академии наук Республики Молдова, Кишинев, Молдова.
- Янчевский В. И.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

## EDITORIAL BOARD

- Editor-in-chief** **KHARIN Y. S.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor, corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus; director of the Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
E-mail: kharin@bsu.by
- Deputy editors-in-chief** **KROTOV V. G.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
E-mail: krotov@bsu.by
- DUDIN A. N.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the laboratory of applied probabilistic analysis, faculty of applied mathematics and computer science, Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
E-mail: dudin@bsu.by
- Executive secretary** **MATEIKO O. M.**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of general mathematics and computer science, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
E-mail: matseika@bsu.by
- Ablameyko S. V.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Altenbach H.** Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany.  
**Antonevich A. B.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Bauer S. M.** Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia.  
**Beniash-Kryvets V. V.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Bernik V. I.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
**Buchstaber V. M.** Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.  
**Vabishchevich P. N.** Institute for the Safe Development of Atomic Energy of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.  
**Volkov V. M.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Gladkov A. L.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Guo W.** University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, China.  
**Goginava U.** Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia.  
**Golovko V. A.** Brest State Technical University, Brest, Belarus.  
**Gorokhovich V. V.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
**Gromak V. I.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Dzemyda G.** Institute of Mathematics and Informatics of the Vilnius University, Vilnius, Lithuania.  
**Donskoy V. I.** V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia.  
**Egorov A. D.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
**Eremeyev V. A.** Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland.  
**Zoladek H.** Mathematics Institute of the University of Warsaw, Warsaw, Poland.  
**Zhuravkov M. A.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Zalesskii P. A.** University of Brazilia, Brazilia, Brazil.  
**Zubkov A. M.** Lomonosov Moscow State University, Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.  
**Kaplunov J. D.** Keele University, Keele, United Kingdom.  
**Kashin B. S.** Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.  
**Kellerer H.** University of Graz, Graz, Austria.  
**Knyazhishche L. B.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
**Kozhanov A. I.** Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia.  
**Kotov V. M.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.

- Krasnoproshin V. V.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Laurinchikas A. P.** Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
- Madani K.** Université Paris-Est, Marne-la-Vallée, France.
- Makarov E. K.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Matus P. P.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Medvedev D. G.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Mikhasev G. I.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Nesterenko Y. V.** Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
- Nikonorov Y. G.** Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia.
- Oswald P.** University of Bonn, Bonn, Germany.
- Romanovskij V. G.** University of Maribor, Maribor, Slovenia.
- Ryazanov V. V.** Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
- Safonov V. G.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Skiba A. N.** Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus.
- Sotskov Y. N.** United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Trofimov V. A.** Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
- Tuzikov A. V.** Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Filzmoser P.** Vienna University of Technology, Vienna, Austria.
- Chernousov V. I.** University of Alberta, Edmonton, Canada.
- Chizhik S. A.** National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Šešok D.** Vilnius Gediminas Technical University, Vilnius, Lithuania.
- Suba A. S.** Institute of Mathematics and Computer Science of the Academy of Sciences of Moldova, Kishinev, Moldova.
- Yanchevskii V. I.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.

---

---

# ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

---

## REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

---

---

УДК 513.5

### ОБ ОДНОМ РАЦИОНАЛЬНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ ТИПА ФУРЬЕ – ЧЕБЫШЁВА И АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ МАРКОВА

П. Г. ПОЦЕЙКО<sup>1)</sup>, Е. А. РОВБА<sup>1)</sup>, К. А. СМОТРИЦКИЙ<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Гродненский государственный университет им. Янки Купалы,  
ул. Э. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Беларусь

Авторами статьи ставится цель построить рациональный интегральный оператор типа Фурье на основании системы рациональных функций Чебышёва – Маркова и исследовать его аппроксимационные свойства на классах функций Маркова. Вводится интегральный оператор типа Фурье – Чебышёва на основании рациональных функций Чебышёва – Маркова, представляющий собой рациональную функцию порядка не выше  $n$ , и изучаются приближения

---

#### Образец цитирования:

Поцейко ПГ, Ровба ЕА, Смотрицкий КА. Об одном рациональном интегральном операторе типа Фурье – Чебышёва и аппроксимации функций Маркова. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2020;2:6–27 (на англ.).  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-6-27>

#### For citation:

Patseika PG, Rouba YA, Smatrytski KA. On one rational integral operator of Fourier – Chebyshev type and approximation of Markov functions. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2020;2:6–27.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-6-27>

---

#### Авторы:

**Павел Геннадьевич Поцейко** – аспирант кафедры фундаментальной и прикладной математики факультета математики и информатики. Научный руководитель – Е. А. Ровба.  
**Евгений Алексеевич Ровба** – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной математики факультета математики и информатики.  
**Константин Анатольевич Смотрицкий** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики факультета математики и информатики.

#### Authors:

**Pavel G. Patseika**, postgraduate student at the department of fundamental and applied mathematics, faculty of mathematics and informatics.  
[pahamatby@gmail.com](mailto:pahamatby@gmail.com)  
<https://orcid.org/0000-0001-7835-0500>  
**Yauheni A. Rouba**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of fundamental and applied mathematics, faculty of mathematics and informatics.  
[rovba.ea@gmail.com](mailto:rovba.ea@gmail.com)  
<https://orcid.org/0000-0002-1265-1965>  
**Konstantin A. Smatrytski**, PhD (physics and mathematics), doцент; associate professor at the department of fundamental and applied mathematics, faculty of mathematics and informatics.  
[k\\_smotritski@mail.ru](mailto:k_smotritski@mail.ru)  
<https://orcid.org/0000-0001-9054-8691>

функций Маркова. Получены интегральное представление и равномерная оценка приближений. В случае когда мера  $\mu$  удовлетворяет следующим условиям:  $\text{supp}\mu = [1, a]$ ,  $a > 1$ ,  $d\mu(t) = \varphi(t)dt$  и  $\varphi(t) \asymp (t-1)^\alpha$  на  $[1, a]$ , установлены оценки поточечных и равномерных приближений и асимптотическое выражение при  $n \rightarrow \infty$  мажоранты равномерных приближений. При фиксированном количестве геометрически различных полюсов в расширенной комплексной плоскости найдены оптимальные значения параметров, обеспечивающие наибольшую скорость убывания этой мажоранты, а также асимптотически точные оценки наилучших равномерных приближений этим методом при четном количестве геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции. Приведены асимптотические оценки приближений некоторых элементарных функций, представимых функциями Маркова.

**Ключевые слова:** функция Маркова; рациональный интегральный оператор типа Фурье; рациональная функция Чебышёва – Маркова; мажоранта равномерных приближений; асимптотическая оценка; наилучшее приближение; точная константа.

## ON ONE RATIONAL INTEGRAL OPERATOR OF FOURIER – CHEBYSHEV TYPE AND APPROXIMATION OF MARKOV FUNCTIONS

P. G. PATSEIKA<sup>a</sup>, Y. A. ROUBA<sup>a</sup>, K. A. SMATRYTSKI<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Yanka Kupala State University of Grodno, 22 Ažėška Street, Hrodna 230023, Belarus*  
 Corresponding author: K. A. Smatrytski (*k\_smotritski@mail.ru*)

The purpose of this paper is to construct an integral rational Fourier operator based on the system of Chebyshev – Markov rational functions and to study its approximation properties on classes of Markov functions. In the introduction the main results of well-known works on approximations of Markov functions are present. Rational approximation of such functions is a well-known classical problem. It was studied by A. A. Gonchar, T. Ganelius, J.-E. Andersson, A. A. Pekarskii, G. Stahl and other authors. In the main part an integral operator of the Fourier – Chebyshev type with respect to the rational Chebyshev – Markov functions, which is a rational function of order no higher than  $n$  is introduced, and approximation of Markov functions is studied. If the measure satisfies the following conditions:  $\text{supp}\mu = [1, a]$ ,  $a > 1$ ,  $d\mu(t) = \varphi(t)dt$  and  $\varphi(t) \asymp (t-1)^\alpha$  on  $[1, a]$ , the estimates of pointwise and uniform approximation and the asymptotic expression of the majorant of uniform approximation are established. In the case of a fixed number of geometrically distinct poles in the extended complex plane, values of optimal parameters that provide the highest rate of decreasing of this majorant are found, as well as asymptotically accurate estimates of the best uniform approximation by this method in the case of an even number of geometrically distinct poles of the approximating function. In the final part we present asymptotic estimates of approximation of some elementary functions, which can be presented by Markov functions.

**Keywords:** Markov function; integral rational operator of Fourier type; Chebyshev – Markov rational function; majorant of uniform approximation; asymptotic estimate; best approximation; exact constant.

### Introduction

Let  $\mu$  be positive Borel measure with a compact support  $F = \text{supp}\mu \subset \mathbb{R}$ . Cauchy transform of the measure  $\mu$

$$\hat{\mu}(z) = \int_F \frac{d\mu(t)}{t-z}, \quad z \in \mathbb{C},$$

is called a Markov function. Approximation of Markov functions is well-known classical problem in the theory of rational approximation of analytic functions. One of the first works, devoted to the study of rational approximation of Markov functions, is an article by A. A. Gonchar [1]. T. Ganelius [2] applied some well-known results from the theory of orthogonal polynomials and interpolation theory to the problems of rational approximation of Markov functions. Subsequently, quite important results related to the rational approximation of Markov functions belong to J.-E. Andersson [3], A. A. Pekarskii [4], D. Braess [5]. This issue was further developed by many authors (see, for example, [6–8]).

To date, methods based on Fourier series with respect to orthogonal systems of rational functions are widely used. These methods were also applied in studies devoted to rational approximation of Markov functions. A. A. Pekarskii and Y. A. Rouba [9] investigated rational approximation of Markov functions by partial sums

of Fourier series with respect to the systems of functions in the unit circle, introduced by S. Takenaka [10] and F. Malmquist [11], and systems of functions on the segment  $[-1, 1]$ , introduced by M. M. Dzhrbashyan and A. A. Kitbalyan [12].

K. N. Lungu [13; 14] studied approximation of continuous functions on a segment by rational functions of degree no higher than  $n$  and with no more than  $q$  ( $0 \leq q < n$ ) geometrically distinct poles in a finite (extended) complex plane and obtained a number of results in this direction. Based on the integral representation of deviation of partial sums of Fourier series from Markov function obtained in [9], Y. A. Rouba and Y. G. Mikulich [15] found asymptotic estimates of uniform approximation, when approximating function has fixed number of geometrically distinct poles. In other words, they solved the problem of K. N. Lungu, extended to the class of Markov functions and the partial sums of rational Fourier series were used as a method of approximation.

The main purpose of this work is to study the approximation of Markov functions by an integral operator of the Fourier type based on the system of Chebyshev – Markov rational functions. The integral representation of deviation of this operator from Markov function is established. In the case when the measure  $\mu$  satisfies the conditions:  $\text{supp}\mu = [1, a]$ ,  $a > 1$ ,  $d\mu(t) = \varphi(t)dt$  and  $\varphi(t) \asymp (t-1)^\alpha$  on  $[1, a]$ , estimates of pointwise and uniform approximations are found. These estimates are exact when multiplicity of poles of the approximating function is even. In this case an asymptotic expression for the majorant of uniform approximations when  $n \rightarrow \infty$  is also established.

Further in the paper we consider approximation of the classes of Markov functions by means of rational functions with a fixed number of geometrically distinct poles of even multiplicity. In this case, using the Laplace method [16; 17], we establish the asymptotic behaviour of the majorant and prove the order of uniform approximation. It should be noted that similar results for the approximation of the function  $|x|^s$  by integral operator of Fejer type were obtained in [18].

Also the examples of approximation of some elementary functions, which can be represented as Markov functions, are considered.

### System of Chebyshev – Markov rational fractions

Let the numbers  $\{a_k\}_{k=1}^n$  be real and  $|a_k| < 1$  or be paired by complex conjugation. Consider the Chebyshev – Markov rational fraction

$$M_n(x) = \cos \sum_{k=1}^n \arccos \frac{x + a_k}{1 + a_k x}, \quad x \in [-1, 1]. \quad (1)$$

Note, that if all the numbers  $a_k = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , then the functions  $M_n(x)$  degenerate to the classical Chebyshev polynomials of the first kind.

Now we consider some properties of functions (1).

**Lemma 1.** *The Chebyshev – Markov rational fraction (1) is as follows*

$$M_n(x) = \frac{p_n(x)}{\prod_{k=1}^n (1 + a_k x)},$$

where  $p_n(x)$  is an algebraic polynomial of degree  $n$  with coefficients depending on  $a_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

*Proof.* Using the method, applied in [19], we immediately obtain that

$$M_n(x) = \frac{1}{2} \left[ \prod_{k=1}^n \frac{x + a_k + i\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-a_k^2}}{1 + a_k x} + \prod_{k=1}^n \frac{x + a_k - i\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-a_k^2}}{1 + a_k x} \right]. \quad (2)$$

The result of lemma 1 follows from equality (2) and the conditions imposed on the parameters  $\{a_k\}_{k=1}^n$ .

**Lemma 2.** *The following representation holds*

$$M_n(x) = \frac{1}{2} \left[ \prod_{k=1}^n \frac{\xi + \alpha_k}{1 + \alpha_k \xi} + \prod_{k=1}^n \frac{1 + \alpha_k \xi}{\xi + \alpha_k} \right], \quad (3)$$

where  $\xi = e^{iu}$ ,  $x = \cos u$ ,  $\alpha_k = \frac{a_k}{1 + \sqrt{1-a_k^2}}$ ,  $|\alpha_k| < 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .



Proof. Let  $x = \cos u$  in (2). Then

$$M_n(x) = \frac{1}{2} \left[ \prod_{k=1}^n \frac{\cos u + a_k + i \sin u \sqrt{1 - a_k^2}}{1 + a_k \cos u} + \prod_{k=1}^n \frac{\cos u + a_k - i \sin u \sqrt{1 - a_k^2}}{1 + a_k \cos u} \right].$$

Substituting  $\xi = e^{iu}$  and using Euler's formula after some necessary transformations we get the representation (3). Lemma 2 is proved.

### Rational integral operator of Fourier – Chebyshev type and its Dirichlet kernel

Let  $f$  be an absolutely integrable function with respect to the weight  $(1 - x^2)^{-1/2}$  on the segment  $[-1, 1]$ . Consider an integral operator  $s_n : f \rightarrow s_n(f, x)$ , which is defined by the formula

$$s_n(f, x) = \frac{1}{2\pi\gamma_n} \int_{-1}^{+1} f(t) \frac{M_{n+1}(t)M_n(x) - M_{n+1}(x)M_n(t)}{t - x} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

where  $M_n(x)$  is a Chebyshev – Markov rational fraction (1). Require this operator to be exact for the constants, it means  $s_n(1, x) \equiv 1$ . We find  $\gamma_n$  accordingly.

**Lemma 3.** *The following equality holds*

$$\gamma_n = \frac{1 - \alpha_{n+1}^2}{2(1 + 2\alpha_{n+1} \cos u + \alpha_{n+1}^2)}, \quad x = \cos u, \quad |\alpha_{n+1}| < 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Proof. It is clear, that

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{M_{n+1}(t)M_n(x) - M_{n+1}(x)M_n(t)}{t - x} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Let  $x = \cos u$ . In the last integral we substitute  $t = \cos v$ . Then

$$\gamma_n = \frac{1}{8\pi} \int_0^\pi \frac{(\omega_{n+1}(\zeta) + \overline{\omega_{n+1}(\zeta)})(\omega_n(\xi) + \overline{\omega_n(\xi)}) - (\omega_{n+1}(\xi) + \overline{\omega_{n+1}(\xi)})(\omega_n(\zeta) + \overline{\omega_n(\zeta)})}{\cos v - \cos u} dv,$$

where

$$\omega_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z + \alpha_k}{1 + \alpha_k z}, \quad \zeta = e^{iv}, \quad \xi = e^{iu}. \quad (6)$$

After some transformations, we obtain

$$\gamma_n = \frac{1 - \alpha_{n+1}^2}{8\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[ \frac{\xi\zeta - 1}{(1 + \alpha_{n+1}\zeta)(\xi + \alpha_{n+1})} \frac{\omega_n(\zeta)}{\omega_n(\xi)} - \frac{\xi\zeta - 1}{(1 + \alpha_{n+1}\xi)(\zeta + \alpha_{n+1})} \frac{\omega_n(\xi)}{\omega_n(\zeta)} \right] \frac{dv}{\cos v - \cos u}. \quad (7)$$

Note that in this integral (7) the point  $\zeta = \xi$  is not singular, since it is also zero of the numerator of the integrand. Assume here  $\xi = \rho e^{iu}$ ,  $\rho < 1$ , and again we apply substitution  $\zeta = e^{iv}$ . Then

$$\gamma_n = \frac{(1 - \alpha_{n+1}^2)\xi}{4\pi i} \left[ \frac{1}{\omega_n(\xi)(\xi + \alpha_{n+1})} \oint_{|\zeta|=1} \frac{\omega_n(\zeta) d\zeta}{(1 + \alpha_{n+1}\zeta)(\zeta - \xi)} - \frac{\omega_n(\xi)}{(1 + \alpha_{n+1}\xi)} \oint_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\omega_n(\zeta)(\zeta + \alpha_{n+1})(\zeta - \xi)} \right].$$

The integrand of the second integral in the square brackets has no isolated singular points outside the unit disk and has infinity as zero of the second order at least. Therefore, this integral is equal to zero.

The integrand of the first integral has the only singular point inside the unit disk  $\zeta = \xi$  as a simple pole. Applying the Cauchy residue theorem and passing to the limit as  $\rho \rightarrow 1$ , we obtain the equality (5). This concludes the proof of lemma 3.

*Remark 1.* If in (4)  $\alpha_k = 0, k = 1, 2, \dots, n$ , then the operator  $s_n(\cdot, x)$  degenerates to the partial sum of Fourier series with respect to the Chebyshev polynomials of the first kind [20].

**Corollary 1.** For the integral operator (4) the following representation holds

$$s_n(f, x) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\cos v) \mathfrak{D}_n(u, v) dv, \quad (8)$$

where

$$\mathfrak{D}_n(u, v) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1 + \alpha_{n+1} \xi \omega_n(\zeta)}{1 + \alpha_{n+1} \zeta \omega_n(\xi)} - \frac{\xi + \alpha_{n+1} \omega_n(\xi)}{\zeta + \alpha_{n+1} \omega_n(\zeta)} \right] \frac{\zeta}{\zeta - \xi}, \quad \zeta = e^{iv}, \xi = e^{iu}, x = \cos u, \quad (9)$$

$\omega_n(z)$  is defined by (6).

*Proof.* From lemma 3 and formula (4) we get

$$s_n(f, x) = \frac{1 + 2\alpha_{n+1} \cos u + \alpha_{n+1}^2}{\pi(1 - \alpha_{n+1}^2)} \int_{-1}^{+1} f(t) \frac{M_{n+1}(t)M_n(x) - M_{n+1}(x)M_n(t)}{t - x} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}},$$

where  $M_n(x)$  is a Chebyshev – Markov rational fraction (1). Again we apply substitution  $t = \cos v$ , assuming  $x = \cos u$ . Then

$$s_n(f, x) = \frac{1 + 2\alpha_{n+1} \cos u + \alpha_{n+1}^2}{\pi(1 - \alpha_{n+1}^2)} \int_0^\pi f(\cos v) \frac{M_{n+1}(\cos v)M_n(\cos u) - M_{n+1}(\cos u)M_n(\cos v)}{\cos v - \cos u} dv.$$

Using representation 3 and arguments of lemma 3, we get formula (8). Corollary 1 is proved.

**Theorem 1.** For the integral operator (4) the following representation holds

$$s_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\cos v) \sqrt{\frac{1 + 2\alpha_{n+1} \cos u + \alpha_{n+1}^2}{1 + 2\alpha_{n+1} \cos v + \alpha_{n+1}^2}} \frac{\sin \lambda_n(v, u)}{\sin \frac{v - u}{2}} dv, \quad x = \cos u, \quad (10)$$

where

$$\lambda_n(v, u) = \int_u^v \lambda_n(y) dy, \quad \lambda_n(y) = \frac{1 - \alpha_{n+1}^2}{2(1 + 2\alpha_{n+1} \cos y + \alpha_{n+1}^2)} + \sum_{k=1}^n \frac{1 - \alpha_k^2}{1 + 2\alpha_k \cos y + \alpha_k^2}, \quad |\alpha_k| < 1.$$

*Proof.* Let us consider the kernel (9). We have

$$\mathfrak{D}_n(u, v) = \frac{1}{4\pi i} \left[ \sqrt{\frac{\zeta}{\xi}} \frac{1 + \alpha_{n+1} \xi \omega_n(\zeta)}{1 + \alpha_{n+1} \zeta \omega_n(\xi)} - \sqrt{\frac{\zeta}{\xi}} \frac{\xi + \alpha_{n+1} \omega_n(\xi)}{\zeta + \alpha_{n+1} \omega_n(\zeta)} \right] \left( \sin \frac{v - u}{2} \right)^{-1}, \quad (11)$$

where  $\zeta = e^{iv}, \xi = e^{iu}$ . The expression in square brackets is a difference of two complex conjugate terms. Let us transform it. Applying the same considerations as in [21], we get

$$\frac{\omega_n(\zeta)}{\omega_n(\xi)} = \exp \left[ i \int_u^v \sum_{k=1}^n \frac{1 - \alpha_k^2}{1 + 2\alpha_k \cos y + \alpha_k^2} dy \right], \quad |\alpha_k| < 1, \quad k = 1, \dots, n.$$

Similarly,

$$\frac{1 + \alpha_{n+1} \xi}{1 + \alpha_{n+1} \zeta} = \sqrt{\frac{1 + 2\alpha_{n+1} \cos u + \alpha_{n+1}^2}{1 + 2\alpha_{n+1} \cos v + \alpha_{n+1}^2}} \exp \left[ -i \int_u^v \frac{\alpha_{n+1} \cos y + \alpha_{n+1}^2}{1 + 2\alpha_{n+1} \cos y + \alpha_{n+1}^2} dy \right].$$

Plugging the last expression in (11) and noticing, that  $\sqrt{\frac{\zeta}{\xi}} = \exp \left[ \frac{i(v - u)}{2} \right]$ , we obtain formula (10). Theorem 1 is proved.

*Remark 2.* If  $\alpha_{n+1} = 0$ , then the expression (10) defines an integral operator based on Chebyshev – Markov rational functions, studied in [22].

*Remark 3.* If in (10) all the parameters  $\alpha_k = 0, k = 1, 2, \dots, n + 1$ , then

$$s_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\cos v) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(v - u)}{\sin \frac{v - u}{2}} dv.$$

In other words, in this case  $s_n(f, x)$  is a partial sum of polynomial Fourier – Chebyshev series of the function  $f$ .

### Approximation of Markov functions

Now we will investigate approximation of Markov functions  $\hat{\mu}(x)$  by rational integral operator (4) in uniform metric on the segment  $[-1, 1]$ .

Let

$$\varepsilon_n(x, A) = \hat{\mu}(x) - s_n(\hat{\mu}(x), x), \quad x \in [-1, 1], \quad \varepsilon_n(A) = \left\| \hat{\mu}(x) - s_n(\hat{\mu}(x), x) \right\|_{C[-1, 1]}, \quad n \in \mathbb{N},$$

where  $A = \left\{ \alpha : \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}), |\alpha_k| < 1 \right\}$  is a set of  $(n + 1)$ -dimensional vectors. Also we assume, that  $\text{supp} \mu \subset [1, +\infty)$  and

$$\int \frac{d\mu(t)}{t-1} < \infty. \quad (12)$$

**Theorem 2.** Let measure  $\mu$  satisfy the condition (12) and measure  $\nu$  is defined by formula

$$d\nu(y) = \frac{4y^2}{1-y^2} d\mu(\varphi(y)), \quad y \in (0, 1], \quad (13)$$

where

$$\varphi(y) = \frac{1}{2} \left( y + \frac{1}{y} \right).$$

Then for the approximation the following equality holds for  $x \in [-1, 1]$

$$\varepsilon_n(x, A) = \int \sqrt{\frac{1 + 2\alpha_{n+1}\cos u + \alpha_{n+1}^2}{1 - 2y\cos u + y^2}} \cos \psi_n(u, y) \frac{\omega_n(y)}{1 + \alpha_{n+1}y} d\nu(y), \quad x = \cos u, \quad (14)$$

where

$$\psi_n(u, y) = \arg \frac{(1 - \xi y)(1 + \alpha_{n+1}\xi)}{\xi \omega_n(\xi)}, \quad \omega_n(\xi) = \prod_{k=1}^n \frac{\xi + \alpha_k}{1 + \alpha_k \xi}, \quad \xi = e^{iu}. \quad (15)$$

*Proof.* Since the operator  $s_n(\cdot, x)$  is exact for constant, using representation (8) for the approximation  $\varepsilon_n(x, A)$  we find, that

$$\varepsilon_n(x, A) = \int \frac{1}{t - \cos u} I_n(u, t) d\mu(t), \quad x = \cos u, \quad (16)$$

where

$$I_n(u, t) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos u - \cos v}{t - \cos v} \mathcal{D}_n(u, v) dv,$$

and  $\mathcal{D}_n(u, v)$  is defined by (9). Assuming  $\xi = e^{iu}$ , in the last integral we substitute  $\zeta = e^{iv}$ . Then

$$I_n(u, t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{\xi \zeta - 1}{(\zeta - y) \left( \zeta - \frac{1}{y} \right)} \left[ \frac{1 + \alpha_{n+1} \xi \omega_n(\zeta)}{1 + \alpha_{n+1} \zeta \omega_n(\xi)} - \frac{\xi + \alpha_{n+1} \omega_n(\xi)}{\zeta + \alpha_{n+1} \omega_n(\zeta)} \right] d\zeta,$$

where  $y = y(t) = t - \sqrt{t^2 - 1}$ ,  $y \in (0, 1]$ . Splitting this integral into two ones, we get

$$I_n(u, t) = \frac{1}{2\pi i \xi} \left[ (1 + \alpha_{n+1} \xi) \overline{\omega_n(\xi)} I_1(u, t) - (\xi + \alpha_{n+1}) \omega_n(\xi) I_2(u, t) \right], \quad (17)$$

where

$$I_1(u, t) = \oint_{|\zeta|=1} \frac{\xi \zeta - 1}{(\zeta - y) \left( \zeta - \frac{1}{y} \right)} \frac{\omega_n(\zeta)}{1 + \alpha_{n+1} \zeta} d\zeta, \quad I_2(u, t) = \oint_{|\zeta|=1} \frac{\xi \zeta - 1}{(\zeta - y) \left( \zeta - \frac{1}{y} \right)} \frac{d\zeta}{\omega_n(\zeta) (\zeta + \alpha_{n+1})}.$$

Consider each of these integrals separately. Inside the unit circle the integrand of  $I_1(u, t)$  has the only singular point  $\zeta = y$  as a simple pole. Applying the Cauchy residue theorem, we obtain

$$I_1(u, t) = 2\pi i \frac{\xi y - 1}{y - \frac{1}{y}} \frac{\omega_n(y)}{1 + \alpha_{n+1} y}, \quad \xi = e^{iu}, \quad y \in (0, 1]. \quad (18)$$

Outside the unit circle the integrand of  $I_2(u, t)$  has the  $\zeta = \frac{1}{y}$  as a simple pole and infinity as zero of the second order at least. Therefore,

$$I_2(u, t) = -2\pi i \frac{\xi - y}{\frac{1}{y} - y} \frac{\omega_n(y)}{1 + \alpha_{n+1} y}, \quad \xi = e^{iu}, \quad y \in (0, 1]. \quad (19)$$

Plugging (18) and (19) into (17), we get

$$I_n(u, t) = \left[ \frac{1 - \xi y}{\xi} (1 + \alpha_{n+1} \xi) \overline{\omega_n(\xi)} + \frac{\xi - y}{\xi} (\xi + \alpha_{n+1}) \omega_n(\xi) \right] \frac{\omega_n(y)}{\left( \frac{1}{y} - y \right) (1 + \alpha_{n+1} y)}.$$

Note, that since the terms in square brackets are complex conjugate, their sum is real. Besides  $1 - \xi y = \sqrt{1 - 2y \cos u + y^2} e^{i \arg(1 - \xi y)}$ , and  $1 + \alpha_{n+1} \xi = \sqrt{1 + 2\alpha_{n+1} \cos u + \alpha_{n+1}^2} e^{i \arg(1 + \alpha_{n+1} \xi)}$ . So, we have

$$I_n(u, t) = \frac{2\sqrt{1 - 2y \cos u + y^2} \sqrt{1 + 2\alpha_{n+1} \cos u + \alpha_{n+1}^2} \cos \psi_n^*(u, t) \omega_n(y)}{\left( \frac{1}{y} - y \right) (1 + \alpha_{n+1} y)}, \quad (20)$$

where

$$\psi_n^*(u, t) = \arg \frac{(1 - \xi y)(1 + \alpha_{n+1} \xi)}{\xi \omega_n(\xi)}, \quad \xi = e^{iu}, \quad y = t - \sqrt{t^2 - 1}.$$

Plugging (20) into (16), we obtain

$$\varepsilon_n(x, A) = 2 \int \frac{\sqrt{1 - 2y \cos u + y^2} \sqrt{1 + 2\alpha_{n+1} \cos u + \alpha_{n+1}^2} \cos \psi_n^*(u, t) \omega_n(y)}{(t - \cos u) \left( \frac{1}{y} - y \right) (1 + \alpha_{n+1} y)} d\mu(t), \quad x = \cos u.$$

In the last integral we do substitution  $y = t - \sqrt{t^2 - 1}$ . Then

$$\varepsilon_n(x, A) = \int \sqrt{\frac{1 + 2\alpha_{n+1} \cos u + \alpha_{n+1}^2}{1 - 2y \cos u + y^2}} \cos \psi_n(u, y) \frac{\omega_n(y)}{1 + \alpha_{n+1} y} \frac{4y^2}{1 - y^2} d\mu(\varphi(y)), \quad x = \cos u,$$

where  $\varphi(y)$  is Zhukovsky function, which is defined in (13),  $\psi_n(u, y) = \psi_n^*(u, \varphi(y))$ . Finally, to get the representation (14), we need to use the formula (13). Theorem 2 is proved.

**Corollary 2.** Under the conditions of theorem 2 uniformly for  $x \in [-1, 1]$ ,  $x = \cos u$ , the following inequality holds

$$|\varepsilon_n(x, A)| \leq \varepsilon_n(A) \leq \left\| \int_{\text{supp } \nu} \sqrt{\frac{1 + 2\alpha_{n+1} \cos u + \alpha_{n+1}^2}{1 - 2y \cos u + y^2}} |\omega_n(y)| \frac{d\nu(y)}{1 + \alpha_{n+1}y} \right\|_{C[-1,1]},$$

where  $\varepsilon_n(A)$  is a uniform approximation of Markov functions by the integral operator (4).

### Estimates of pointwise and uniform approximation of Markov functions

In this section we are going to study the case, when the derivative of a measure  $\mu(t)$  is weakly equivalent to some power function. Some previous results in this direction can be found, for example in [2; 3].

**Theorem 3.** Let  $\text{supp } \nu \in [d, 1]$ ,  $0 \leq d < 1$ ,  $d\mu(t) = \varphi(t)dt$ , and  $\varphi(t) \asymp (t-1)^\gamma$ . Provided the conditions of theorem 2 are satisfied for the approximation of the function  $\hat{\mu}(x)$  on the segment  $[-1, 1]$  the following inequalities hold:

1) for the pointwise approximation

$$|\varepsilon_n(x, A)| \leq \frac{1}{2^{\gamma-1}} \int_d^1 \sqrt{\frac{1 - 2\alpha_{n+1} \cos u + \alpha_{n+1}^2}{1 - 2y \cos u + y^2}} \frac{(1-y)^{2\gamma}}{y^\gamma} \frac{|\chi_n(y)|}{1 - \alpha_{n+1}y} dy, \quad x = \cos u; \quad (21)$$

2) for the uniform approximation

$$\varepsilon_n(A) \leq \varepsilon_n^*(A), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (22)$$

where

$$\varepsilon_n^*(A) = \frac{1}{2^{\gamma-1}} [I_1(A, n) + I_2(A, n)], \quad (23)$$

$$I_1(A, n) = (1 - \alpha_{n+1}) \int_{\alpha_{n+1}}^1 \frac{(1-y)^{2\gamma-1}}{y^\gamma} \frac{\chi_n(y) dy}{1 - \alpha_{n+1}y},$$

$$I_2(A, n) = \sqrt{1 + \alpha_{n+1}^2} \int_d^{\alpha_{n+1}} \frac{(1-y)^{2\gamma}}{y^\gamma \sqrt{1+y^2}} \frac{|\chi_n(y)| dy}{1 - \alpha_{n+1}y},$$

$$\chi_n(y) = \prod_{k=1}^n \frac{y - \alpha_k}{1 - \alpha_k y}, \quad \alpha_k \in [0, 1), \quad k = 1, 2, \dots, n+1. \quad (24)$$

The inequality (21) is exact in the sense that if all the poles of approximating function have even multiplicity then this inequality becomes equality for  $x = \pm 1$ .

*Proof.* Assume, that parameters  $\alpha_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n+1$ , are ordered as follows

$$0 \leq d < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n+1} < 1.$$

From (13) and (14) it follows, that when  $d\mu(t) = \varphi(t)dt$ ,  $\varphi(t) \asymp (t-1)^\gamma$ , it is natural to consider approximation  $\varepsilon_n(x, A)$  as

$$\varepsilon_n(x, A) = -\frac{1}{2^{\gamma-1}} \int_d^1 \sqrt{\frac{1 - 2\alpha_{n+1} \cos u + \alpha_{n+1}^2}{1 - 2y \cos u + y^2}} \frac{(1-y)^{2\gamma}}{y^\gamma} \cos \psi_n(u, y) \frac{\chi_n(y) dy}{1 - \alpha_{n+1}y}, \quad (25)$$

where  $\chi_n(y)$  is defined by (24),  $x = \cos u$ ,  $\alpha_k \in [0, 1)$ ,  $\psi_n(u, y)$  is defined by (15). Since  $|\cos \psi_n(u, y)| \leq 1$ , we immediately get estimate (21). Now we prove its exactness. For this purpose we study the right-hand side of (25) when  $x = 1$  or  $u = 0$ . Taking into account, that in this case  $\xi = 1$ , from (15) we get  $\psi(0, y) = 0$ . Therefore,

$$|\varepsilon_n(1, A)| = \frac{1 - \alpha_{n+1}}{2^{\gamma-1}} \int_d^1 \frac{(1-y)^{2\gamma-1}}{y^\gamma} \frac{\chi_n(y) dy}{1 - \alpha_{n+1}y}. \quad (26)$$

It is not difficult to check, that the right-hand-sides of the last expression and inequality (21) for  $x = 1$  coincide. Similarly, we can prove exactness of the estimate (21) for  $x = -1$ .

Then we are going to check the estimate (22). Keeping in mind, that  $x = \cos u$ , from (21) we obtain

$$|\varepsilon_n(x, A)| \leq \frac{1 - \alpha_{n+1}}{2^{\gamma-1}} \int_d^1 v(x) \frac{(1-y)^{2\gamma-1}}{y^\gamma} \frac{|\chi_n(y)| dy}{1 - \alpha_{n+1}y}, \quad v(x) = \sqrt{\frac{1 + A_1(1-x)}{1 + Y(1-x)}}, \quad (27)$$

where  $A_1 = \frac{2\alpha_{n+1}}{1 - \alpha_{n+1}^2}$ ,  $Y = \frac{2y}{1 - y^2}$ . Now we will study the function  $v(x)$ . Since

$$v'_x(x) = \frac{Y - A_1}{\sqrt{(1 + A_1(1-x))(1 + Y(1-x))^3}}$$

the function  $v(x)$  decreases for  $d < y < \alpha_{n+1}$  and reaches its maximum value for  $x = 0$  or  $u = \frac{\pi}{2}$ . At the same time the function  $v(x)$  increases for  $\alpha_{n+1} < y < 1$  and reaches its maximum value for  $x = 1$  or  $u = 0$ . Then, splitting the integral in the right-hand side of (27) into two integral over the intervals  $[d, \alpha_{n+1}]$  and  $[\alpha_{n+1}, 1]$ , applying above said arguments, we obtain inequality (22). Theorem 3 is proved.

**Some corollaries of theorem 3.** Let us consider the polynomial case. Assume in (21) and (22)  $\alpha_k = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n + 1$ , and  $\varepsilon_n(x, O) = \varepsilon_n(x)$ ,  $\varepsilon_n(O) = \varepsilon_n$ ,  $O = (0, 0, \dots, 0)$  are pointwise and uniform approximations of Markov function  $\hat{\mu}(x)$  by partial sums of Fourier series with respect to the Chebyshev polynomials of the first kind, provided measure  $\mu(t)$  satisfies conditions of theorem 3. Then

$$|\varepsilon_n(x)| \leq \frac{1}{2^{\gamma-1}} \int_d^1 \frac{(1-y)^{2\gamma}}{\sqrt{1 - 2y \cos u + y^2}} y^{n-\gamma} dy, \quad x = \cos u, \quad x \in [-1, 1],$$

$$\varepsilon_{2n} = \frac{1}{2^{\gamma-1}} \int_d^1 (1-y)^{2\gamma-1} y^{n-\gamma} dy, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (28)$$

Note that, having allowed the parameter to take a zero value, the integrals in the last relations exist when the condition  $n > \gamma + 1$  is satisfied.

It is interesting to study asymptotic behaviour of the integral (28) for  $\gamma \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ , when  $n \rightarrow \infty$ . We use the Laplace's method [16; 17]. Let us write the last integral as

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2^{\gamma-1}} \int_d^1 \frac{(1-y)^{2\gamma-1}}{y^\gamma} e^{n \ln y} dy.$$

The function  $\ln y$  increases when  $y \in (d, 1)$  and reaches its maximum value for  $y = 1$ . Since  $\ln y = y - 1 + o(y - 1)$ ,  $y \rightarrow 1$ , and taking into account that

$$\frac{(1-y)^{2\gamma-1}}{y^\gamma} = (1-y)^{2\gamma-1} + o((1-y)^{2\gamma-1}), \quad y \rightarrow 1,$$

for small enough  $\varepsilon > 0$  and  $n \rightarrow \infty$  we obtain

$$\varepsilon_n \sim \frac{1}{2^{\gamma-1}} \int_{1-\varepsilon}^1 (1-y)^{2\gamma-1} e^{(y-1)n} dy.$$

Applying substitution  $(1-y)n = t$ , finally we get

$$\varepsilon_n \sim \frac{1}{2^{\gamma-1} n^{2\gamma}} \int_0^{n\varepsilon} t^{2\gamma-1} e^{-t} dt \sim \frac{\Gamma(2\gamma)}{2^{\gamma-1} n^{2\gamma}}, \quad \gamma > 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (29)$$

where  $\Gamma$  is the gamma function.

The last relationship is an asymptotic estimate of the uniform approximation of Markov function by partial sums of Fourier series with respect to the Chebyshev polynomials of the first kind provided the measure  $\mu(t)$  satisfies the condition of theorem 3. It should be noted, that in this estimate we have exact constants.

**Asymptotics of the majorant of uniform approximations  
of function  $\hat{\mu}(x)$  in case of a fixed number  
of poles of the approximating function**

Above we have found the estimates of pointwise and uniform approximations of Markov functions by rational integral operator (4) when measure  $\mu(t)$ ,  $t \in \text{supp}\mu$ , satisfies some conditions. It is interesting to find asymptotic expression for the quantity (23) when  $n \rightarrow \infty$ .

To solve this problem, we do substitution  $y = \frac{1-u}{1+u}$ ,  $dy = \frac{-2du}{(1+u)^2}$  in the integrals  $I_1(A, n)$  and  $I_2(A, n)$ . Then

$$I_1(A, n) = 2^{2\gamma} \beta_{n+1} \int_0^{\beta_{n+1}} \frac{u^{2\gamma-1}}{(1-u^2)^\gamma} \prod_{k=1}^n \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \frac{du}{\beta_{n+1} + u},$$

$$I_2(A, n) = 2^{2\gamma-1} \int_{\beta_{n+1}}^D \frac{\sqrt{1+\beta_{n+1}^2} u^{2\gamma}}{(1-u^2)^\gamma \sqrt{1+u^2}} \left| \prod_{k=1}^n \frac{u-\beta_k}{u+\beta_k} \right| \frac{du}{\beta_{n+1}+u},$$

where

$$D = \frac{1-d}{1+d}, \quad D \in (0, 1], \quad \beta_k = \frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k}, \quad \beta_k \in (0, 1], \quad k = 1, 2, \dots, n+1. \quad (30)$$

Note that, if  $D = 1$  and  $\beta_k \neq 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , then  $\gamma \in (0, 1)$ . Otherwise, the integral  $I_2(A, n)$  obviously diverges.

Let  $q$  be a natural number,  $0 < q < n$ , and  $A_{n,q}$  be a set of parameters  $\alpha \in A$  such, that there are exactly  $q$  distinct numbers among  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  and multiplicity of each parameter is equal to  $m = \frac{n}{q}$ ,  $n = mq$ .

It should be noted, that we choose appropriate set  $A_{n,q}$  of parameters  $\alpha_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$ , for each particular value of  $n$ . In other words  $\alpha_k = \alpha_k(m)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . In this case we assume, that parameters  $\alpha_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$ , satisfy the condition

$$m \sum_{k=1}^q (1 - \alpha_k) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty.$$

**Theorem 4.** For any natural numbers  $n$  and  $q$  ( $q$  is fixed and  $0 < q < n$ ) the following asymptotic equality holds

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^*(A_{n,q}) &\sim \frac{2^{1-\gamma} \Gamma(2\gamma)}{\left(m \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}} + \frac{\beta_{n+1}^{2\gamma-1}}{2^{2-\gamma} m (1-\beta_{n+1}^2)^\gamma \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{\beta_k^2 - \beta_{n+1}^2}} \left(\prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - \beta_{n+1}}{\beta_k + \beta_{n+1}}\right)^m + \\ &+ 2^{\gamma-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi(1+\beta_{n+1}^2)}{m}} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{b_j^{2\gamma-\frac{1}{2}}}{(1-b_j^2)^\gamma \sqrt{1+b_j^2} (\beta_{n+1} + b_j)} \left(\prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - b_j}{\beta_k + b_j} \prod_{k=j+1}^q \frac{b_j - \beta_k}{b_j + \beta_k}\right)^m \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^j \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2} + \sum_{k=j+1}^q \frac{\beta_k}{(b_j^2 - \beta_k^2)^2}}} + \Phi(A_{n,q}, n), \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (31)$$

where

$$\Phi(A_{n,q}, n) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + \beta_{n+1}^2} \Gamma(1 - \gamma)}{\sqrt{2}(1 + \beta_{n+1}) \left( 2m \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{1 - \beta_k^2} \right)^{1-\gamma} \left( \prod_{k=1}^q \frac{1 - \beta_k}{1 + \beta_k} \right)^m}, & D = 1, \\ \frac{\sqrt{1 + \beta_{n+1}^2} D^{2\gamma} (1 - D^2)^{1-2\gamma}}{2^{1-\gamma} m \sqrt{1 - D^4} (\beta_{n+1} + D) \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{D^2 - \beta_k^2}} \left( \prod_{k=1}^q \frac{D - \beta_k}{D + \beta_k} \right)^m, & D \neq 1, \end{cases} \quad (32)$$

$b_j \in (\beta_{j+1}, \beta_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, q - 1$ , is the only root of the equation

$$-\sum_{k=1}^j \frac{\beta_k}{\beta_k^2 - u^2} + \sum_{k=j+1}^q \frac{\beta_k}{u^2 - \beta_k^2} = 0, \quad (33)$$

$\Gamma$  is the gamma function.

**Proof.** In order to obtain formula (32) we need to consider each of the integrals  $I_1(A_{n,q}, n)$  and  $I_2(A_{n,q}, n)$  from (23) separately. We are going to study their asymptotic behaviour when  $m \rightarrow \infty$ ,  $n = mq$ . For this purpose, we need two lemmas.

**Lemma 4.** The following asymptotic equality holds

$$I_1(A_{n,q}, n) \sim \frac{\Gamma(2\gamma)}{\left( m \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right)^{2\gamma}}, \quad m \rightarrow \infty, \quad (34)$$

where  $\Gamma$  is the gamma function.

**Proof.** It is clear, that under the conditions of theorem 4, the integral can be written as follows

$$I_1(A_{n,q}, n) = 2^{2\gamma} \beta_{n+1} \int_0^{\beta_{n+1}} \frac{u^{2\gamma-1}}{(1-u^2)^\gamma} \left( \prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \right)^m \frac{du}{\beta_{n+1} + u}.$$

To study its asymptotic behaviour, we use Laplace's method [16; 17]. Transform this integral to the form, at which the indicated method can be implemented. We have

$$I_1(A_{n,q}, n) = 2^{2\gamma} \beta_{n+1} \int_0^{\beta_{n+1}} \frac{u^{2\gamma-1}}{(1-u^2)^\gamma} e^{mS(u)} \frac{du}{\beta_{n+1} + u}, \quad S(u) = \sum_{k=1}^q \ln \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}.$$

Since  $S'(u) = -2 \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{\beta_k^2 - u^2} < 0$ , the function  $S(u)$  decreases on the interval  $[0, \beta_{n+1}]$  and reaches its maximum value at  $u = 0$ . Hence, for  $m \rightarrow \infty$  the value of the initial integral is approximately equal to the value of this integral over the small interval  $[0, \varepsilon]$ . On this interval we can replace functions by linear ones

$$S(u) \approx -2u \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}, \quad f(u) = \frac{u^{2\gamma-1}}{(1-u^2)^\gamma} \frac{1}{\beta_{n+1} + u} \approx \frac{1}{\beta_{n+1}} u^{2\gamma-1}.$$

Then

$$I_1(A_{n,q}, n) \sim 2^{2\gamma} \int_0^\varepsilon u^{2\gamma-1} \exp \left[ -2mu \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right] du, \quad m \rightarrow \infty.$$

In the last integral we do substitution  $2mu \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} = t$ . Therefore,



$$I_1(A_{n,q}, n) \sim 2^{2\gamma} \frac{1}{2^{2\gamma} \left( \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right)^{2\gamma} m^{2\gamma}} \int_0^{\varphi(m, \varepsilon)} t^{2\gamma-1} e^{-t} dt, \quad m \rightarrow \infty,$$

where  $\varphi(m, \varepsilon) = \varepsilon m \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \rightarrow \infty$ , when  $m \rightarrow \infty$ . The last asymptotic equality immediately leads to (34). Lemma 4 is proved.

**Lemma 5.** *The following asymptotic equality holds*

$$\begin{aligned} I_2(A_{n,q}, n) \sim & \frac{2^{2\gamma-3} \beta_{n+1}^{2\gamma-1}}{m(1-\beta_{n+1}^2)^\gamma \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{\beta_k^2 - \beta_{n+1}^2}} \left( \prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - \beta_{n+1}}{\beta_k + \beta_{n+1}} \right)^m + \\ & + 2^{2\gamma-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\pi(1+\beta_{n+1}^2)}{m}} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{b_j^{2\gamma-\frac{1}{2}}}{(1-b_j^2)^\gamma \sqrt{1+b_j^2} (\beta_{n+1} + b_j)} \left( \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - b_j}{\beta_k + b_j} \prod_{k=j+1}^q \frac{b_j - \beta_k}{b_j + \beta_k} \right)^m \times \\ & \times \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^j \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2} + \sum_{k=j+1}^q \frac{\beta_k}{(b_j^2 - \beta_k^2)^2}}} + \frac{1}{2^{1-\gamma}} \Phi(A_{n,q}, n), \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (35)$$

where  $\Phi(A_{n,q}, n)$  is defined in (32).

*Proof.* Under the conditions of theorem 4, the integral can be written as follows

$$I_2(A_{n,q}, n) = 2^{2\gamma-1} \sqrt{1+\beta_{n+1}^2} \int_{\beta_{n+1}}^D \frac{u^{2\gamma}}{(1-u^2)^\gamma \sqrt{1+u^2}} \left| \prod_{k=1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \right|^m \frac{du}{\beta_{n+1} + u},$$

where  $D$  is defined in (30). Denote

$$\begin{aligned} I_3(A_{n,q}, n) &= \int_{\beta_{n+1}}^{\beta_q} \frac{u^{2\gamma}}{(1-u^2)^\gamma \sqrt{1+u^2}} \left( \prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \right)^m \frac{du}{\beta_{n+1} + u}, \\ I_4(A_{n,q}, n) &= \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{u^{2\gamma}}{(1-u^2)^\gamma \sqrt{1+u^2}} \left( \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \right)^m \frac{du}{\beta_{n+1} + u}, \\ I_5(A_{n,q}, n) &= \int_{\beta_1}^D \frac{u^{2\gamma}}{(1-u^2)^\gamma \sqrt{1+u^2}} \left( \prod_{k=1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \right)^m \frac{du}{\beta_{n+1} + u}. \end{aligned}$$

Thus,

$$I_2(A_{n,q}, n) = 2^{2\gamma-1} \sqrt{1+\beta_{n+1}^2} [I_3(A_{n,q}, n) + I_4(A_{n,q}, n) + I_5(A_{n,q}, n)]. \quad (36)$$

To study asymptotic behaviour of these integrals, we use Laplace's method again. So, for the integral  $I_3(A_{n,q}, n)$  we have

$$I_3(A_{n,q}, n) = \int_{\beta_{n+1}}^{\beta_q} f(u) e^{mS(u)} du, \quad f(u) = \frac{u^{2\gamma}}{(1-u^2)^\gamma \sqrt{1+u^2} (\beta_{n+1} + u)}, \quad S(u) = \sum_{k=1}^q \ln \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}.$$

The function the function  $S(u)$  decreases on the interval  $[\beta_{n+1}, \beta_q]$ , and reaches its maximum value at  $u = \beta_{n+1}$ . Expanding this function into Taylor series at the point  $u = \beta_{n+1}$ , and using decomposition

$$f(u) = \frac{\beta_{n+1}^{2\gamma-1}}{2(1-\beta_{n+1}^2)^\gamma \sqrt{1+\beta_{n+1}^2}}, \quad u \rightarrow \beta_{n+1},$$

for small enough  $\varepsilon > 0$  and  $m \rightarrow \infty$  we find

$$I_3(A_{n,q}, n) \sim \frac{\beta_{n+1}^{2\gamma-1}}{2(1-\beta_{n+1}^2)^\gamma \sqrt{1+\beta_{n+1}^2}} \left( \prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - \beta_{n+1}}{\beta_k + \beta_{n+1}} \right)^m \int_{\beta_{n+1}}^{\beta_{n+1}+\varepsilon} \exp \left[ -2m \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{\beta_k^2 - \beta_{n+1}^2} (u - \beta_{n+1}) \right] du.$$

From here we get

$$I_3(A_{n,q}, n) \sim \frac{\beta_{n+1}^{2\gamma-1}}{4m(1-\beta_{n+1}^2)^\gamma \sqrt{1+\beta_{n+1}^2} \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{\beta_k^2 - \beta_{n+1}^2}} \left( \prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - \beta_{n+1}}{\beta_k + \beta_{n+1}} \right)^m, \quad m \rightarrow \infty. \quad (37)$$

Consider the integral  $I_4(A_{n,q}, n)$ . We have

$$I_4(A_{n,q}, n) = \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} f(u) e^{mS(u)} du,$$

$$f(u) = \frac{u^{2\gamma}}{(1-u^2)^\gamma \sqrt{1+u^2} (\beta_{n+1} + u)}, \quad S(u) = \sum_{k=1}^j \ln \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} + \sum_{k=j+1}^q \ln \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}.$$

Since

$$S'(u) = \sum_{k=1}^j \frac{-2\beta_k}{\beta_k^2 - u^2} + \sum_{k=j+1}^q \frac{2\beta_k}{u^2 - \beta_k^2}, \quad S''(u) = \sum_{k=1}^j \frac{-4\beta_k u}{(\beta_k^2 - u^2)^2} + \sum_{k=j+1}^q \frac{-4\beta_k u}{(u^2 - \beta_k^2)^2} < 0,$$

there exist an inner point  $b_j \in (\beta_{j+1}, \beta_j)$  such that the function  $S(u)$  reaches its maximum value at this point.

Besides  $S'(b_j) = 0$ . Using decompositions

$$S(u) = \sum_{k=1}^j \ln \frac{\beta_k - b_j}{\beta_k + b_j} + \sum_{k=j+1}^q \ln \frac{b_j - \beta_k}{b_j + \beta_k} - \left[ \sum_{k=1}^j \frac{2b_j \beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2} + \sum_{k=j+1}^q \frac{2b_j \beta_k}{(b_j^2 - \beta_k^2)^2} \right] (u - b_j)^2 + o((u - b_j)^2),$$

$$f(u) = \frac{b_j^{2\gamma}}{(1-b_j^2)^\gamma \sqrt{1+b_j^2} (\beta_{n+1} + b_j)},$$

when  $u \rightarrow b_j$ , for small enough  $\varepsilon > 0$  and  $m \rightarrow \infty$  we find

$$I_4(A_{n,q}, n) \sim \sum_{j=1}^{q-1} \frac{b_j^{2\gamma}}{(1-b_j^2)^\gamma \sqrt{1+b_j^2} (\beta_{n+1} + b_j)} \left( \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - b_j}{\beta_k + b_j} \prod_{k=j+1}^q \frac{b_j - \beta_k}{b_j + \beta_k} \right)^m \times$$

$$\times \int_{- \varepsilon}^{\varepsilon} \exp \left[ -2b_j m \left( \sum_{k=1}^j \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2} + \sum_{k=j+1}^q \frac{\beta_k}{(b_j^2 - \beta_k^2)^2} \right) u^2 \right] du.$$

Taking into account, that

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

from the last asymptotic equality for  $m \rightarrow \infty$  we obtain

$$I_4(A_{n,q}, n) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{b_j^{2\gamma - \frac{1}{2}} \left( \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - b_j}{\beta_k + b_j} \prod_{k=j+1}^q \frac{b_j - \beta_k}{b_j + \beta_k} \right)^m}{(1 - b_j^2)^\gamma \sqrt{1 + b_j^2} (\beta_{n+1} + b_j) \sqrt{\sum_{k=1}^j \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2} + \sum_{k=j+1}^q \frac{\beta_k}{(b_j^2 - \beta_k^2)^2}}}. \quad (38)$$

Consider the integral  $I_5(A_{n,q}, n)$ . Let  $D \neq 1$  (see (30)). Change variables  $u = \cos \theta$ . Then

$$I_5(A_{n,q}, n) = \int_{\arccos D}^{\arccos \beta_1} f(\theta) e^{mS(\theta)} d\theta, \quad f(\theta) = \frac{\cos^{2\gamma} \theta \sin^{1-2\gamma} \theta}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta} (\beta_{n+1} + \cos \theta)}, \quad S(\theta) = \sum_{k=1}^q \ln \frac{\cos \theta - \beta_k}{\cos \theta + \beta_k}.$$

Since

$$S'(\theta) = \sum_{k=1}^q \frac{-2\beta_k \sin \theta}{\cos^2 \theta - \beta_k^2} < 0,$$

the function decreases for  $\theta \in (\arccos D, \arccos \beta_1)$  and reaches its maximum value at the point  $\theta = \arccos D$ .

Applying decompositions when  $\theta \rightarrow \arccos D$

$$S(\theta) = \sum_{k=1}^q \ln \frac{D - \beta_k}{D + \beta_k} - 2\sqrt{1 - D^2} \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{D^2 - \beta_k^2} (\theta - \arccos D), \quad f(\theta) = \frac{D^{2\gamma} (1 - D^2)^{1-2\gamma}}{\sqrt{1 + D^2} (\beta_{n+1} + D)},$$

for small enough  $\varepsilon > 0$  and  $m \rightarrow \infty$  we find

$$I_5(A_{n,q}, n) \sim \frac{D^{2\gamma} (1 - D^2)^{1-2\gamma}}{\sqrt{1 + D^2} (\beta_{n+1} + D)} \left( \prod_{k=1}^q \frac{D - \beta_k}{D + \beta_k} \right)^m \int_0^\varepsilon \exp \left[ -2\sqrt{1 - D^2} m \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{D^2 - \beta_k^2} \theta \right] d\theta.$$

This formula leads to the main term of the asymptotics

$$I_5(A_{n,q}, n) \sim \frac{D^{2\gamma} (1 - D^2)^{1-2\gamma}}{2m\sqrt{1 - D^4} (\beta_{n+1} + D) \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{D^2 - \beta_k^2}} \left( \prod_{k=1}^q \frac{D - \beta_k}{D + \beta_k} \right)^m, \quad m \rightarrow \infty. \quad (39)$$

If  $D = 1$ , then in a similar way we obtain asymptotic equality

$$I_5(A_{n,q}, n) \sim \frac{1}{\sqrt{2} (1 + \beta_{n+1}) \left( m \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{1 - \beta_k^2} \right)^{1-\gamma}} \left( \prod_{k=1}^q \frac{1 - \beta_k}{1 + \beta_k} \right)^m \int_0^{\varphi(\varepsilon, m)} \theta^{1-2\gamma} e^{-\theta^2} d\theta, \quad m \rightarrow \infty,$$

where  $\varphi(\varepsilon, m) = \varepsilon \sqrt{m \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{1 - \beta_k^2}} \rightarrow \infty$  for  $m \rightarrow \infty$ . Taking into account that

$$\int_0^{+\infty} \theta^{1-2\gamma} e^{-\theta^2} d\theta = \frac{1}{2} \Gamma(1 - \gamma), \quad \gamma \in [0, 1),$$

we finally have

$$I_5(A_{n,q}, n) \sim \frac{\Gamma(1-\gamma)}{2\sqrt{2}(1+\beta_{n+1}) \left(m \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{1-\beta_k^2}\right)^{1-\gamma} \left(\prod_{k=1}^q \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right)^m}, \quad m \rightarrow \infty. \quad (40)$$

Plugging asymptotic equalities (37)–(40) into (36), we get (35). Lemma 5 is proved.

Now we return to the proof of theorem 4. Using (34), (35) and (23) we immediately obtain (31). This concludes the proof of theorem 4.

### Order estimate of the uniform approximation of function $\hat{\mu}(x)$ in case of fixed number of poles of approximating function

In this section we consider the problem of minimizing the right-hand side of (31) choosing an optimal set of parameters  $A_{n,q}^* = \{\alpha^* : \alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_q^*)\}$ . In other words, we will find an estimate of the best uniform approximation of the Markov function by the rational integral operator (4), when measure  $\mu(t)$  satisfies conditions of theorem 3. Let

$$\varepsilon_{n,q} = \inf_{\alpha \in [0,1]} \varepsilon_n(A_{n,q}), \quad \varepsilon_{n,q}^* = \inf_{\alpha \in [0,1]} \varepsilon_n^*(A_{n,q}),$$

where  $\varepsilon_n(A_{n,q})$  is uniform approximation of Markov function by the rational integral operator (4) in case of  $q$  geometrically distinct poles of approximation function. Obviously, from (22) it follows, that

$$\varepsilon_{n,q} \leq \varepsilon_{n,q}^*, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Theorem 5.** *Let measure  $\mu(t)$  satisfy conditions of theorem 3. Then for any natural numbers  $n$  and  $q$  ( $q$  is fixed and  $0 < q < n$ ) the following asymptotic equalities hold:*

$$1) \varepsilon_{n,q}^* \sim 2^{1+\gamma} (q^{2q+1} D \gamma^{2q-1})^{2\gamma} \Gamma(2\gamma) \left(\prod_{k=1}^{q-1} (q-k)^2\right)^{2\gamma} \left(\frac{\ln^{2q-1} n}{n^{2q}}\right)^{2\gamma}, \quad D \in (0, 1], \quad n \rightarrow \infty;$$

$$2) \text{ if } n \text{ is even, then } \varepsilon_{n,q} \sim \varepsilon_{n,q}^*, \quad n \rightarrow \infty,$$

where  $\Gamma$  is the gamma function.

*Proof.* Let the set of parameters  $A_{n,q} = \{\alpha : \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)\}$  be defined as follows

$$\alpha_k = \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}, \quad \beta_k = c_k \left(\frac{\ln m}{m}\right)^{2k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, q.$$

Also assume, that  $\beta_{n+1} = \beta_q$ . We are going to study the right-hand side of the asymptotic equality (31) in this case. So, for the first term we find, that

$$S_1(A_{n,q}) = \frac{2^{1-\gamma} \Gamma(2\gamma)}{\left(m \sum_{k=1}^q \frac{1}{c_k} \left(\frac{m}{\ln m}\right)^{2k-1}\right)^{2\gamma}} \sim \frac{2^{1-\gamma} \Gamma(2\gamma) c_q^{2\gamma} \ln^{4q\gamma-2\gamma} m}{m^{4q\gamma}}, \quad m \rightarrow \infty. \quad (41)$$

Since  $\beta_{n+1} = \beta_q$ , it is no difficult to show, that the second term in the right-hand side of (31) equals to zero.

Let us study asymptotics of the third term when  $m \rightarrow \infty$ . We have

$$S_3(A_{n,q}) = 2^{\gamma-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi(1+\beta_{n+1}^2)}{m}} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{b_j^{2\gamma-\frac{3}{2}}}{(1-b_j^2)^\gamma \left(1+\frac{\beta_{n+1}}{b_j}\right)} \left(\prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - b_j}{\beta_k + b_j} \prod_{k=j+1}^q \frac{b_j - \beta_k}{b_j + \beta_k}\right)^m \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{(1+b_j^2) \left(\sum_{k=1}^j \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2} + \sum_{k=j+1}^q \frac{\beta_k}{(b_j^2 - \beta_k^2)^2}\right)}}. \quad (42)$$

For the further proof we need to figure out properties of the parameters  $b_j, b_j \in (\beta_{j+1}, \beta_j), j = 1, 2, \dots, q-1$ , which are the roots of the equation (33). For this purpose, we prove the auxiliary statement.

**Lemma 6.** *If parameters  $\beta_k, k = 1, 2, \dots, q$ , satisfy the condition*

$$\beta_k = c_k \left( \frac{\ln m}{m} \right)^{2k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, q,$$

then for the roots of the equation (33) the following asymptotic equality holds

$$b_j \sim \sqrt{c_j c_{j+1}} \left( \frac{\ln m}{m} \right)^{2j}, \quad j = 1, 2, \dots, q-1, \quad m \rightarrow \infty.$$

*Proof.* It is clear, that in this case the equation (33) can be written as follows

$$\sum_{k=1}^j \frac{1}{\beta_k \left( 1 - \frac{u}{\beta_k} \right)^2} = \frac{1}{u^2} \sum_{k=j+1}^q \frac{\beta_k}{1 - \left( \frac{\beta_k}{u} \right)^2}, \quad j = 1, 2, \dots, q-1. \quad (43)$$

For each fixed  $j = 1, 2, \dots, q-1$  the root  $b_j$  satisfies the double inequality

$$c_{j+1} \left( \frac{\ln m}{m} \right)^{2j+1} < b_j < c_j \left( \frac{\ln m}{m} \right)^{2j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, q-1.$$

Hence, for given values of the parameters  $\beta_k, k = 1, 2, \dots, q$ , and  $m \rightarrow \infty$  we find that

$$\sum_{k=1}^j \frac{1}{\beta_k \left( 1 - \frac{b_j}{\beta_k} \right)^2} \sim \sum_{k=1}^j \frac{1}{\beta_k} \sim \frac{1}{c_j} \left( \frac{m}{\ln m} \right)^{2j-1}.$$

In a similar way,

$$\frac{1}{b_j^2} \sum_{k=j+1}^q \frac{\beta_k}{1 - \left( \frac{b_j}{\beta_k} \right)^2} \sim \frac{1}{b_j^2} \sum_{k=j+1}^q \beta_k \sim \frac{c_{j+1}}{b_j^2} \left( \frac{\ln m}{m} \right)^{2j+1}.$$

Plugging last two asymptotic equalities into (43), we obtain

$$\frac{1}{c_j} \left( \frac{m}{\ln m} \right)^{2j-1} \sim \frac{c_{j+1}}{b_j^2} \left( \frac{\ln m}{m} \right)^{2j+1}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Statement of lemma 6 immediately follows from the last formula.

Now we continue to study asymptotic behaviour of the sum  $S_3(A_{n,q})$  (see (42)). Taking into account the result of lemma 6, we have

$$\left( \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - b_j}{\beta_k + b_j} \prod_{k=j+1}^q \frac{b_j - \beta_k}{b_j + \beta_k} \right)^m \sim \exp \left[ -2m \left( \sum_{k=1}^j \frac{b_j}{\beta_k} + \sum_{k=j+1}^q \frac{\beta_k}{b_j} \right) \right] \sim \frac{1}{m^4 \sqrt{\frac{c_{j+1}}{c_j}}}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Also

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^j \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2} + \sum_{k=j+1}^q \frac{\beta_k}{(b_j^2 - \beta_k^2)^2}}} \sim \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^j \frac{1}{\beta_k^3} + \sum_{k=j+1}^q \frac{\beta_k}{b_j^4}}} \sim \frac{c_j \sqrt{c_{j+1}} \ln^{3j - \frac{1}{2}} m}{m^{3j - \frac{1}{2}}}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Therefore,

$$\begin{aligned}
 S_3(A_{n,q}) &\sim 2^{\gamma-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{m}} \sum_{j=1}^{q-1} (\sqrt{c_j c_{j+1}})^{2\gamma-\frac{3}{2}} \left(\frac{\ln m}{m}\right)^{4j\gamma-3j} \frac{c_j \sqrt{c_{j+1}} \ln^{3j-\frac{1}{2}} m}{m \sqrt[4]{\frac{c_{j+1}}{c_j} + 3j-\frac{1}{2}}} = \\
 &= 2^{\gamma-\frac{1}{2}} \sqrt{\pi} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{c_j^{\gamma+\frac{1}{4}} c_{j+1}^{\gamma-\frac{1}{4}} \ln^{4j\gamma-\frac{1}{2}} m}{m^{4j\gamma+4} \sqrt[4]{\frac{c_{j+1}}{c_j}}}, \quad m \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{44}$$

Similarly, using (32) we see, that

$$\Phi(A_{n,q}, n) \sim \begin{cases} \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\sqrt{2} (2c_1 \ln m)^{1-\gamma} m^{2c_1}}, & D=1, \\ \frac{D^{2\gamma-1} (1-D^2)^{1-2\gamma}}{2^{1-\gamma} \sqrt{1-D^4} c_1 m^{\frac{2c_1}{D}} \ln m}, & D \neq 1, m \rightarrow \infty. \end{cases} \tag{45}$$

Plugging (41), (44) and (45) into (31), we obtain for  $m \rightarrow \infty$

$$\varepsilon_n^*(A_{n,q}) \sim \frac{2^{1-\gamma} \Gamma(2\gamma) c_q^{2\gamma} \ln^{4q\gamma-2\gamma} m}{m^{4q\gamma}} + 2^{\gamma-\frac{1}{2}} \sqrt{\pi} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{c_j^{\gamma+\frac{1}{4}} c_{j+1}^{\gamma-\frac{1}{4}} \ln^{4j\gamma-\frac{1}{2}} m}{m^{4j\gamma+4} \sqrt[4]{\frac{c_{j+1}}{c_j}}} + \Phi(A_{n,q}, n).$$

If the parameters  $c_k, k = 1, 2, \dots, q$ , satisfy the condition

$$\begin{cases} 4q\gamma = 4j\gamma + \sqrt{\frac{c_{j+1}}{c_j}}, & j=1, 2, \dots, q-1, \\ 4q\gamma = 2c_1, & D=1, \\ 4q\gamma = \frac{2c_1}{D}, & D \neq 1, \end{cases} \tag{46}$$

then it is not difficult to get

$$c_q = 2qD\gamma^{2q-1} \prod_{k=1}^{q-1} (q-k)^2.$$

Besides, in the last asymptotic equality we have

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_n^*(A_{n,q}) &= 2^{1+\gamma} (q^{2q+1} D\gamma^{2q-1})^{2\gamma} \Gamma(2\gamma) \left( \prod_{k=1}^{q-1} (q-k)^2 \right)^{2\gamma} \times \\
 &\times \left( \frac{\ln^{2q-1} n}{n^{2q}} \right)^{2\gamma} + o\left( \frac{\ln^{4q\gamma-2\gamma} n}{n^{4q\gamma}} \right), \quad n \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{47}$$

Using the considerations proposed in [23; 24], it is easy to show that it is precisely with the found  $c_k, k = 1, 2, \dots, q$ , the set of parameters  $\beta_k, k = 1, 2, \dots, q$ , is optimal in the sense that the quantity  $\varepsilon_n^*(A_{n,q})$  has an asymptotically minimal value. This proves the first relation in theorem 6.

To check the second statement of theorem 6 we use the fact, that the estimate (21) is exact at the points  $x = \pm 1$  for even  $n, n = mq$ . In this case from (26) we find

$$|\varepsilon_n(1, A_{n,q})| = \frac{1 - \alpha_q}{2^{\gamma-1}} \int_d^1 \frac{(1-y)^{2\gamma-1}}{y^\gamma} \left( \prod_{k=1}^q \frac{y - \alpha_k}{1 - \alpha_k y} \right)^m \frac{dy}{1 - \alpha_q y}.$$

Changing variables  $y = \frac{1-u}{1+u}$ ,  $dy = \frac{-2du}{(1+u)^2}$ , in the right-hand side of this relationship, we obtain

$$|\varepsilon_n(\pm 1, A_{n,q})| = 2^{\gamma+1} \beta_q \int_0^D \frac{u^{2\gamma-1}}{(1-u^2)^\gamma} \left( \prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \right)^m \frac{du}{\beta_q + u}, \quad D = \frac{1-d^2}{1+d^2}.$$

Applying the well-known techniques for studying asymptotic behaviour to the last integral, we obtain

$$\begin{aligned} |\varepsilon_n(\pm 1, A_{n,q})| &\sim \frac{2^{1-\gamma} \Gamma(2\gamma)}{\left( m \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right)^{2\gamma}} + \frac{\beta_q \beta_{n+1}^{2\gamma-1}}{2^{2-\gamma} m (1 - \beta_{n+1}^2)^\gamma \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{\beta_k^2 - \beta_{n+1}^2}} \left( \prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - \beta_{n+1}}{\beta_k + \beta_{n+1}} \right)^m + \\ &+ 2^{\gamma-\frac{1}{2}} \beta_q \sqrt{\frac{\pi(1 + \beta_{n+1}^2)}{m}} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{b_j^{2\gamma-\frac{1}{2}}}{(1-b_j^2)^\gamma \sqrt{1+b_j^2} (\beta_{n+1} + b_j)} \left( \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - b_j}{\beta_k + b_j} \prod_{k=j+1}^q \frac{b_j - \beta_k}{b_j + \beta_k} \right)^m \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^j \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2} + \sum_{k=j+1}^q \frac{\beta_k}{(b_j^2 - \beta_k^2)^2}}} + \beta_q \Phi(A_{n,q}, n), \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

where  $\Phi(A_{n,q}, n)$  is defined in (32). We note that the right-hand side of the last asymptotic equality differs from (31) in that the second, third, and fourth terms are multiplied by  $\beta_q$ . Therefore, if the parameters  $\beta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$ , in its right-hand side are optimal with coefficients calculated by formulas (46), then it is easy to obtain

$$|\varepsilon_n(\pm 1, A_{n,q}^*)| \sim \varepsilon_{n,q}^*, \quad n \rightarrow \infty,$$

where is defined by the first statement of theorem 5. Hence, we conclude that for even  $n$  the estimate of uniform approximations (47) is asymptotically attainable at the points  $x = \pm 1$ . Therefore, under the conditions of theorem 3, it is the norm of approximation of Markov functions by rational integral operator (4). Theorem 5 is proved.

*Remark 4.* From theorem 5 it follows, that for uniform approximation of Markov function provided  $d\mu(t) = \varphi(t)dt$  and  $\varphi(t) \asymp (t-1)^\gamma$  by rational integral operator (4) in case of  $q$  geometrically distinct poles of approximating function, the following asymptotic expression holds

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^{2q}}{\ln^{2q-1} n} \right)^{2\gamma} \varepsilon_{n,q} = 2^{1+\gamma} (q^{2q+1} D \gamma^{2q-1})^{2\gamma} \Gamma(2\gamma) \left( \prod_{k=1}^{q-1} (q-k)^2 \right)^{2\gamma}.$$

Similar by order estimate was obtained in [15] for of approximation by partial sums of Fourier series with respect to the system of rational functions, introduced by M. M. Dzhrbashyan and A. A. Kitbalyan [12] with  $q$  geometrically distinct poles of approximating function.

**Corollary 3** (case of one fixed pole). *Under conditions of theorem 3 in case of one fixed pole of approximating function the following relations hold:*

$$1) \quad \varepsilon_{n,1}^* = 2^{1+\gamma} \Gamma(2\gamma) (D\gamma)^{2\gamma} \left( \frac{\ln n}{n^2} \right)^{2\gamma} + o\left( \left( \frac{\ln n}{n^2} \right)^{2\gamma} \right), \quad n \rightarrow \infty;$$

$$2) \quad \text{if } n \text{ is even, then } \varepsilon_{n,1} \sim \varepsilon_{n,1}^*, \quad n \rightarrow \infty.$$

Besides, for the majorant of uniform approximation the following asymptotic equality holds

$$\varepsilon_n^*(A_{n,1}) \sim \frac{2^{1-\gamma} \Gamma(2\gamma) \beta^{2\gamma}}{n^{2\gamma}} + \Phi(A_{n,1}, n), \quad \beta \in (0, 1], \quad n \rightarrow \infty,$$

where

$$\Phi(A_{n,1}, n) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+\beta^2} \Gamma(1-\gamma) (1-\beta^2)^{1-\gamma}}{\sqrt{2} (1+\beta) (2n\beta)^{1-\gamma}} \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n, & D=1, \\ \frac{\sqrt{1+\beta^2} D^{2\gamma} (1-D^2)^{1-2\gamma} (D^2-\beta^2)}{2^{1-\gamma} \sqrt{1-D^4} (\beta+D) n \beta} \left(\frac{D-\beta}{D+\beta}\right)^n, & D \neq 1. \end{cases}$$

*Remark 5.* It is interesting to compare the asymptotic estimate of uniform approximation found in corollary 3 with the corresponding estimate in the polynomial case (29). We see that even in case of one fixed pole of the approximating function, the rate of uniform rational approximation has a much larger order of smallness, which reflects the peculiarities of rational approximation.

### Approximation of some elementary functions

Many elementary functions can be represented as combinations of Markov functions. In this section, we consider an example of such a function and, as a consequence of theorem 6, we find the exact constant and the order of its approximations by the rational integral operator (4).

Consider the function  $f(z) = (z-1)^\gamma$ ,  $\gamma \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ . It is holomorphic in the region  $\mathbb{C} \setminus (1, +\infty)$ . The application of the Cauchy integral formula leads to the relation

$$(z-1)^\gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{(\xi-1)^\gamma}{\xi-z} d\xi, \quad z \in D,$$

where  $D$  is a circle of radius  $a > 1$  centered at the origin and cut along a segment  $[1, a]$ . From the last formula it is easy to obtain (see [3; 4]), that the following equality holds for  $|z| < a$ ,  $z \in \bar{D}(1, a)$ ,

$$(1-x)^\gamma = \hat{\mu}_1(x) + g(z), \tag{48}$$

where

$$\hat{\mu}_1(x) = -\frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_1^a \frac{(t-1)^\gamma}{t-x} dt, \quad g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=a} \frac{(1-\xi)^\gamma}{\xi-z} d\xi.$$

The function  $\hat{\mu}_1(x)$ ,  $x \in [0, 1]$ , satisfies the conditions of theorem 3. Therefore,

$$\varepsilon_{n,q}(\hat{\mu}_1(x)) \sim \frac{2^{1+\gamma}}{\pi} |\sin \pi \gamma| \Gamma(2\gamma) (q^{2q+1} D \gamma^{2q-1})^{2\gamma} \left( \prod_{k=1}^{q-1} (q-k)^2 \right)^{2\gamma} \left( \frac{\ln^{2q-1} n}{n^{2q}} \right)^{2\gamma}, \quad n \rightarrow \infty.$$

The function  $g(z)$  is holomorphic in the region  $D$ . According to the well-known result of S. N. Bernstein [25], the order of its polynomial approximation is exponential, that is, there are constants  $M > 0$ ,  $0 < C < 1$ , such that  $\varepsilon_{n,q}(g(z), D) \leq MC^n$ . Thus, the function  $g(z)$ ,  $z \in D$ , does not affect the order of approximations of the function  $(1-x)^\gamma$ ,  $x \in [0, 1]$ . In other words,

$$\varepsilon_{n,q}((1-x)^\gamma) = \varepsilon_{n,q}(\hat{\mu}_1(x)) + o(\varepsilon_{n,q}(\hat{\mu}_1(x))), \quad n \rightarrow \infty.$$

From representation (48) and the last asymptotic equality, we obtain the following result.

**Corollary 4** (approximation of the function  $(1-x)^\gamma$ ,  $\gamma > 0$ ). *For any fixed  $q$  and even  $n$  the relation holds*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^{2q}}{\ln^{2q-1} n} \right)^{2\gamma} \varepsilon_{n,q}((1-x)^\gamma, [0, 1]) =$$



$$= \frac{2^{1+\gamma}}{\pi} |\sin \pi\gamma| \Gamma(2\gamma) (q^{2q+1} D\gamma^{2q-1})^{2\gamma} \left( \prod_{k=1}^{q-1} (q-k)^2 \right)^{2\gamma}. \quad (49)$$

Besides,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2\gamma} \varepsilon_{n,0} \left( (1-x)^\gamma, [0, 1] \right) = \frac{1}{\pi 2^{\gamma-1}} |\sin \pi\gamma| \Gamma(2\gamma), \quad \gamma > 0.$$

It is known [26, p. 96] that the best uniform polynomial approximation of the considered function possesses the following property:

$$E_{2n} \left( |x|^{2\gamma}; [-1, 1] \right) = \frac{1}{2^\gamma} E_n \left( (1-x)^\gamma; [0, 1] \right).$$

Using similar reasoning, after the necessary transformations from (49) we find that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^{2q}}{\ln^{2q-1} n} \right)^s \varepsilon_{2n, 2q} \left( |x|^s, [-1, 1] \right) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \Gamma(s) \left( q^{2q+1} D \left( \frac{s}{2} \right)^{2q-1} \right)^s \left( \prod_{k=1}^{q-1} (q-k)^2 \right)^s. \quad (50)$$

Let  $q = 1$  in the last relation. Then

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2}{\ln n} \right)^s \varepsilon_{2n, 2} \left( |x|^s, [-1, 1] \right) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \Gamma(s) \left( \frac{s}{2} \right)^s.$$

This result is contained in [27] in case of approximation by partial sums of Fourier series with respect to the system of Chebyshev – Markov of algebraic fractions. In particular, when  $s = 1$  we obtain known equality, proved in [28],

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\ln n} \varepsilon_{2n, 2} \left( |x|, [-1, 1] \right) = \frac{1}{\pi}.$$

Now we consider one more result, that follows from the formula (50). Substitution  $x = \sin u$  leads to the asymptotic estimate

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^{2q}}{\ln^{2q-1} n} \right)^s \varepsilon_{2n, 2q} \left( |\sin u|^s, [0, \pi] \right) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \Gamma(s) \left( q^{2q+1} D \left( \frac{s}{2} \right)^{2q-1} \right)^s ((q-1)!)^{2s}.$$

In this relation we put  $s = 1$ . Then we obtain known equality from [24]

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2q}}{\ln^{2q-1} n} \varepsilon_{2n, 2q} \left( |\sin u|, [0, \pi] \right) = \frac{q^{2q+1}}{2^{2q-2} \pi} ((q-1)!)^2.$$

In particular, for  $q = 1$  from the last formula we find

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\ln n} \varepsilon_{2n, 2} \left( |\sin u|, [0, \pi] \right) = \frac{1}{\pi}.$$

This asymptotic estimate coincides in order with the two-sided estimate contained in [29], obtained in case of approximation by partial sums of Fourier series with respect to the system of rational functions introduced independently by S. Takenaka [10] and F. Malmquist [11]. It should be noted, that, in comparison with work [29], here we found the exact constant.

### Библиографические ссылки

1. Гончар АА. О скорости рациональной аппроксимации некоторых аналитических функций. *Математический сборник*. 1978;105(2):147–163.
2. Ganelius T. Orthogonal polynomials and rational approximation of holomorphic functions. In: Erdős P, Alpár L, Halász G, Sárközy A, editors. *Studies in Pure Mathematics*. Basel: Birkhäuser; 1978. p. 237–243. DOI: 10.1007/978-3-0348-5438-2\_22.
3. Andersson JE. Best rational approximation to Markov functions. *Journal of Approximation Theory*. 1994;76(2):219–232. DOI: 10.1006/jath.1994.1015.

4. Пекарский АА. Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова. *Алгебра и анализ*. 1995;7(2):121–132.
5. Braess D. Rational approximation of Stieltjes functions by the Caratheodory – Fejer method. *Constructive Approximation*. 1987;3(1):43–50. DOI: 10.1007/BF01890552.
6. Baratchart L, Stahl H, Wielonsky F. Asymptotic error estimates for  $L_2$  best rational approximants to Markov functions. *Journal of Approximation Theory*. 2001;108(1):53–96. DOI: 10.1006/jath.2000.3515.
7. Prokhorov VA. On rational approximation of Markov functions on finite sets. *Journal of Approximation Theory*. 2015;191 Special number:94–117. DOI: 10.1016/j.jat.2014.10.006.
8. Vyacheslavov NS, Mochalina EP. Rational approximations of functions of Markov – Stieltjes type in Hardy spaces  $H^p$ ,  $0 < p \leq \infty$ . *Moscow University Mathematics Bulletin*. 2008;63(4):125–134. DOI: 10.3103/S0027132208040013.
9. Пекарский АА, Ровба ЕА. Равномерные приближения функций Стильтьеса посредством ортопроекции на множество рациональных функций. *Математические заметки*. 1999;65(3):362–368. DOI: 10.1007/BF02675071.
10. Takenaka S. On the orthogonal functions and a new formula of interpolations. *Japanese Journal of Mathematics*. 1925;2:129–145. DOI: 10.4099/jjm1924.2.0\_129.
11. Malmquist F. Sur la détermination d’une classe de fonctions analytiques par leurs valeurs dans un ensemble donné de points. In: *Comptes Rendus du Sixième Congrès des mathématiciens scandinaves*. Copenhagen: [publisher unknown]; 1926. p. 253–259.
12. Джрбашян ММ, Китбальян АА. Об одном обобщении полиномов Чебышёва. *Доклады Академии наук Армянской ССР*. 1964;38(5):263–270.
13. Лунгу КН. О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов. *Математический сборник*. 1971;86(2):314–324.
14. Лунгу КН. О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов. *Сибирский математический журнал*. 1984;25(2):151–160.
15. Rovba EA, Mikulich EG. Constants in rational approximation of Markov – Stieltjes functions with fixed number of poles. *Вестник Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне*. 2013;1:12–20 (на англ.).
16. Евграфов МА. *Асимптотические оценки и целые функции*. Москва: Наука; 1979. 320 с.
17. Федорюк МВ. *Асимптотика: интегралы и ряды*. Москва: Наука; 1987. 544 с.
18. Поцейко ПГ, Ровба ЕА. Суммы Фейера рационального ряда Фурье – Чебышёва и аппроксимации функции  $|x|^s$ . *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2019;3:18–34. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-3-18-34.
19. Марков АА. *Избранные труды*. Москва: Гостехиздат; 1948. 412 с.
20. Суетин ПК. *Классические ортогональные многочлены*. Москва: Физматлит; 2005. 480 с.
21. Джрбашян ММ. К теории рядов Фурье по рациональным функциям. *Известия АН АССР. Серия физико-математических наук*. 1956;9(7):3–28.
22. Ровба ЕА. Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации. *Доклады АН БССР*. 1979;23(11):968–971.
23. Ровба ЕА, Микулич ЕГ. Константы в приближении  $|x|$  рациональными интерполяционными процессами. *Доклады Национальной академии наук Беларуси*. 2009;53(6):11–15.
24. Микулич ЕГ. Точные оценки равномерных приближений функции  $|\sin x|$  частными суммами рядов Фурье по рациональным функциям. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика*. 2011;1:84–90.
25. Bernstein SN. Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation des fonctions analytiques, admettant des singularités données. *Bulletin de l’Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*. 1913;2:76–90.
26. Бернштейн СН. *Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. Часть 1*. Москва: Главная редакция общетехнической литературы; 1937. 200 с.
27. Ровба ЕА, Поцейко ПГ. Аппроксимация функции  $|x|^s$  на отрезке  $[-1, 1]$  частными суммами рационального ряда Фурье – Чебышёва. *Вестник Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне*. 2019;9(3):16–28.
28. Rouba Y, Patseika P, Smatrytski K. On a system of rational Chebyshev – Markov fractions. *Analysis Mathematica*. 2018;44(1):115–140. DOI: 10.1007/s10476-018-0110-7.
29. Ровба ЕА. О приближении функции  $|\sin x|$  рациональными рядами Фурье. *Математические заметки*. 1989;46(2):52–59. DOI: 10.1007/BF01158146.

## References

1. Gonchar AA. On the speed of rational approximation of some analytic functions. *Matematicheskii sbornik*. 1978;105(2):147–163. Russian.
2. Ganelius T. Orthogonal polynomials and rational approximation of holomorphic functions. In: Erdős P, Alpár L, Halász G, Sárközy A, editors. *Studies in Pure Mathematics*. Basel: Birkhäuser; 1978. p. 237–243. DOI: 10.1007/978-3-0348-5438-2\_22.
3. Andersson JE. Best rational approximation to Markov functions. *Journal of Approximation Theory*. 1994;76(2):219–232. DOI: 10.1006/jath.1994.1015.
4. Pekarskii AA. Best uniform rational approximations to Markov functions. *Algebra i analiz*. 1995;7(2):121–132. Russian.
5. Braess D. Rational approximation of Stieltjes functions by the Caratheodory – Fejer method. *Constructive Approximation*. 1987;3(1):43–50. DOI: 10.1007/BF01890552.
6. Baratchart L, Stahl H, Wielonsky F. Asymptotic error estimates for  $L_2$  best rational approximants to Markov functions. *Journal of Approximation Theory*. 2001;108(1):53–96. DOI: 10.1006/jath.2000.3515.
7. Prokhorov VA. On rational approximation of Markov functions on finite sets. *Journal of Approximation Theory*. 2015;191 Special number:94–117. DOI: 10.1016/j.jat.2014.10.006.
8. Vyacheslavov NS, Mochalina EP. Rational approximations of functions of Markov – Stieltjes type in Hardy spaces  $H^p$ ,  $0 < p \leq \infty$ . *Moscow University Mathematics Bulletin*. 2008;63(4):125–134. DOI: 10.3103/S0027132208040013.

9. Pekarskii AA, Rovba EA. Uniform approximations of Stieltjes functions by orthogonal projection on the set of rational functions. *Matematicheskie zametki*. 1999;65(3):362–368. Russian. DOI: 10.1007/BF02675071.
10. Takenaka S. On the orthogonal functions and a new formula of interpolations. *Japanese Journal of Mathematics*. 1925;2:129–145. DOI: 10.4099/jjm1924.2.0\_129.
11. Malmquist F. Sur la détermination d'une classe de fonctions analytiques par leurs valeurs dans un ensemble donné de points. In: *Comptes Rendus du Sixième Congrès des mathématiciens scandinaves*. Copenhagen: [publisher unknown]; 1926. p. 253–259.
12. Dzhrbashyan MM, Kitbalyan AA. On a generalization of Chebyshev polynomials. *Doklady Akademii nauk Armyanskoi SSR*. 1964;38(5):263–270. Russian.
13. Lungu KN. On best approximations by rational functions with a fixed number of poles. *Matematicheskii sbornik*. 1971;86(2):314–324. Russian.
14. Lungu KN. On the best approximations by rational functions with a fixed number of poles. *Sibirskii matematicheskii zhurnal*. 1984;25(2):151–160. Russian.
15. Rovba EA, Mikulich EG. Constants in rational approximation of Markov – Stieltjes functions with fixed number of poles. *Vesnik Grodzenskaga dzjarzhavnaga vniversitjeta imja Janki Kupaly. Seryja 2. Matjematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naja tjechnika i kiravanne*. 2013;1:12–20.
16. Evgrafov MA. *Asimptoticheskie otsenki i tselye funktsii* [Asymptotic estimates and entire functions]. Moscow: Nauka; 1979. 320 p.
17. Fedoryuk MV. *Asimptotika: integraly i ryady* [Asymptotics: integrals and series]. Moscow: Nauka; 1987. 544 p. Russian.
18. Patseika PG, Rouba YA. Fejer means of rational Fourier – Chebyshev series and approximation of function  $|x|^5$ . *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;3:18–34. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-3-18-34.
19. Markov AA. *Izbrannye trudy* [Selected papers]. Moscow: Gostekhizdat; 1948. 412 p. Russian.
20. Suetin PK. *Klassicheskie ortogonal'nye mnogočleny* [Classical orthogonal polynomials]. Moscow: Fizmatlit; 2005. 480 p. Russian.
21. Dzhrbashyan MM. [On the theory of Fourier series in terms of rational functions]. *Izvestiya AN ASSR. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk*. 1956;9(7):3–28. Russian.
22. Rovba EA. [On a direct method in a rational approximation]. *Doklady AN BSSR*. 1979;23(11):968–971. Russian.
23. Rovba EA, Mikulich EG. Constants in the approximation of  $|x|$  using the rational interpolation processes. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 2009;53(6):11–15. Russian.
24. Mikulich EG. [Exact estimates of uniform approximations of function  $|\sin x|$  by partial sums of Fourier series by rational functions]. *Vestnik BGU. Seriya I. Fizika. Matematika. Informatika*. 2011;1:84–90. Russian.
25. Bernstein SN. Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation des fonctions analytiques, admettant des singularités données. *Bulletin de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*. 1913;2:76–90.
26. Bernshtein SN. *Ekstremal'nye svoistva polinomov i nailuchshee priblizhenie nepreryvnykh funktsii odnoi veshchestvennoi pere-mennoi. Chast' I* [Extremal properties of polynomials and the best approximation of continuous functions of one real variable. Part I]. Moscow: Glavnaya redaktsiya obshchetekhnicheskoi literatury; 1937. 200 p. Russian.
27. Rovba EA, Potseiko PG. [Approximation of a function  $|x|^5$  on a segment  $[-1, 1]$  by partial sums of the rational Fourier – Chebyshev series]. *Vesnik Grodzenskaga dzjarzhavnaga vniversitjeta imja Janki Kupaly. Seryja 2. Matjematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naja tjechnika i kiravanne*. 2019;9(3):16–28. Russian.
28. Rouba Y, Patseika P, Smatrytski K. On a system of rational Chebyshev – Markov fractions. *Analysis Mathematica*. 2018;44(1):115–140. DOI: 10.1007/s10476-018-0110-7.
29. Rovba EA. An approximation of  $|\sin x|$  by rational Fourier series. *Matematicheskie zametki*. 1989;46(2):52–59. Russian. DOI: 10.1007/BF01158146.

Received by editorial board 08.06.2020.

УДК 517.983.3:517.983.34

## ОПЕРАТОРЫ ХАУСДОРФА НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ГРУПП

А. Р. МИРОТИН<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины,  
ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель, Беларусь

Операторы Хаусдорфа на вещественной прямой и многомерном евклидовом пространстве произошли из классических методов суммирования. Сейчас эта тема активно изучается. Операторы Хаусдорфа на общих группах были определены автором в 2019 г. В настоящей работе исследуются операторы Хаусдорфа на пространствах Лебега и вещественных пространствах Харди над однородными пространствами локально компактных групп. В частности, вводится атомарное пространство Харди над однородными пространствами локально компактных групп и определяются условия ограниченности операторов Хаусдорфа на таких пространствах. Рассмотрено несколько следствий, и сформулированы нерешенные проблемы.

**Ключевые слова:** оператор Хаусдорфа; локально компактная группа; однородное пространство; атомарное пространство Харди; пространство Лебега; ограниченный оператор.

## HAUSDORFF OPERATORS ON HOMOGENEOUS SPACES OF LOCALLY COMPACT GROUPS

A. R. MIROTIN<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Francisk Skorina Gomel State University, 104 Savieckaja Street, Homiel 246019, Belarus

Hausdorff operators on the real line and multidimensional Euclidean spaces originated from some classical summation methods. Now it is an active research area. Hausdorff operators on general groups were defined and studied by the author since 2019. The purpose of this paper is to define and study Hausdorff operators on Lebesgue and real Hardy spaces over homogeneous spaces of locally compact groups. We introduce in particular an atomic Hardy space over homogeneous spaces of locally compact groups and obtain conditions for boundedness of Hausdorff operators on such spaces. Several corollaries are considered and unsolved problems are formulated.

**Keywords:** Hausdorff operator; locally compact group; homogeneous space; atomic Hardy space; Lebesgue space; bounded operator.

### Introduction and preliminaries

Hausdorff operators were introduced by G. Hardy [1, chapter XI] on the segment, and by C. Georgakis [2] and independently by E. Liflyand and F. Moricz [3] on the whole real line. Their multidimensional generalizations were considered later by G. Brown and F. Moricz [4], and E. Liflyand and A. Lerner [5]. Now it is an active research area. It is enough to note that the Google search by request «Hausdorff operator» gives more than 1 200 000 results. See also survey articles [6; 7] for historical remarks and the state of the art up to 2013.

#### Образец цитирования:

Миротин АР. Операторы Хаусдорфа на однородных пространствах локально компактных групп. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;2:28–35 (на англ.).  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-28-35>

#### For citation:

Mirotin AR. Hausdorff operators on homogeneous spaces of locally compact groups. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;2:28–35.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-28-35>

#### Автор:

**Адольф Рувимович Миротин** – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений факультета математики и технологий программирования.

#### Author:

**Adolf R. Mirotin**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of mathematical analysis and differential equations, faculty of mathematics and technologies of programming.  
[amirotin@yandex.ru](mailto:amirotin@yandex.ru)

Hausdorff operators on general groups were defined and studied by the author in [8] and [9]. The purpose of this paper is to define and study Hausdorff operators on Lebesgue and real Hardy spaces over homogeneous spaces of locally compact groups. In what follows  $G$  stands for a locally compact group with left Haar measure  $\nu$ . We denote by  $\text{Aut}(G)$  the space of all topological automorphisms of  $G$  endowed with its natural topology (see, e. g., [10, chapter 6, section 26]),  $\mathcal{L}(Y)$  denotes the space of linear bounded operators on a normed space  $Y$ .

In [8] the next definition was proposed.

**Definition 1** [8]. Let  $(T, m)$  be a measure space,  $G$  be a topological group,  $A : T \rightarrow \text{Aut}(G)$  be a measurable map, and  $\Psi$  be a locally integrable function on  $\Omega$ . We define the *Hausdorff operator* with the kernel  $\Psi$  over the group  $G$  by the formula

$$\mathcal{H}f(x) = \int_T \Psi(t) f(A(t)(x)) dm(t).$$

By [8, lemma 1] for locally compact  $G$  this operator is bounded in  $L^p(G)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) provided  $\Psi(t)(\text{mod} A(t))^{-1/p} \in L^1(T, m)$  and

$$\|\mathcal{H}\|_{\mathcal{L}(L^p(G))} \leq \int_T |\Psi(t)| (\text{mod} A(t))^{-1/p} dm(t)$$

(for a definition of  $\text{mod} A(u)$  see, e. g., [11, chapter VII, section 1]).

Moreover, in [8] and [9] conditions for boundedness of Hausdorff operators on the real Hardy space  $H^1(G)$  over metrizable locally compact group  $G$  with doubling condition were obtained. In this work, we define Hausdorff operators on homogeneous spaces of locally compact groups and prove analogs of aforementioned results for this situation.

Let  $K$  be a compact subgroup of  $G$  with normalized Haar measure  $\beta$ . Consider the quotient space  $G/K$  of left cosets  $\dot{x} := xK = \pi_K(x)$  ( $x \in G$ ) where  $\pi_K : G \rightarrow G/K$  stands for a natural projection. We shall assume that the measure  $\nu$  is normalized in such a way that (generalized) Weil's formula

$$\int_G g(x) dx = \int_{G/K} \left( \int_K g(xk) dk \right) d\lambda(\dot{x}) \tag{1}$$

holds for all  $g \in L^1(G)$ , where  $\lambda$  denotes some left  $G$ -invariant measure on  $G/K$  (see, e. g., [11, chapter VII, § 2, No. 5, theorem 2] and especially remark c) after this theorem (left  $G$ -invariance of  $\lambda$  means that  $\lambda(xE) = \lambda(E)$  for every Borel subset  $E$  of  $G/K$  and for every  $x \in G$ ; this measure is unique up to constant multiplier)). Here and below we write  $dx$  instead of  $d\nu(x)$  and  $dk$  instead of  $d\beta(k)$ . We shall write also  $d\dot{x}$  instead of  $d\lambda(\dot{x})$ .

The function  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$  is called *right  $K$ -invariant* if  $g(xk) = g(x)$  for all  $x \in G, k \in K$ . For such a function we put  $\dot{g}(\dot{x}) := g(x)$ . This definition is correct and for  $g \in L^1(G)$  formula (1) implies that

$$\int_G g(x) dx = \int_{G/K} \dot{g}(\dot{x}) d\dot{x} \tag{2}$$

(recall that  $\int_K dk = 1$ ). The map  $g \mapsto \dot{g}$  is a bijection between the set of all right  $K$ -invariant functions on  $G$  (all right  $K$ -invariant functions from  $L^1(G)$ ) and the set of all functions on  $G/K$  (respectively functions from  $L^1(G/K, \lambda)$ ).

Let an automorphism  $A \in \text{Aut}(G)$  maps  $K$  onto itself. Since

$$A(\dot{x}) := A(xK) = \{A(x)A(k) : k \in K\} = A(x)K = \pi_K(A(x))$$

we get a homeomorphism  $\dot{A} : G/K \rightarrow G/K, \dot{A}(\dot{x}) := \pi_K(A(x))$ . Then for every right  $K$ -invariant function  $g$  on  $G$  we have  $\dot{g}(\dot{A}(\dot{x})) = g(A(x))$ . From now on we put

$$\text{Aut}_K(G) := \{\dot{A} : A \in \text{Aut}(G), A(K) = K\}.$$

**Definition 2.** Let  $(\Omega, \mu)$  be a measure space,  $(\dot{A}(u))_{u \in \Omega} \subset \text{Aut}_K(G)$  be a family of homeomorphisms of  $G/K$ , and  $\Phi \in L^1_{loc}(\Omega, \mu)$ . For a function  $f$  on  $G/K$  we define a Hausdorff operator on  $G/K$  as follows

$$(\mathcal{H}_{\Phi, \dot{A}}f)(\dot{x}) := \int_{\Omega} \Phi(u) f(\dot{A}(u)(\dot{x})) d\mu(u).$$

As was mentioned by G. Hardy in the case  $\Omega = [0, 1]$  [1, theorem 217] his Hausdorff operators possess some regularity property. A Hausdorff operator in the sense of definition 2 also enjoys this property as the next proposition shows.

**Proposition 1.** Suppose that the conditions of definition 2 are fulfilled and the group  $G$  is  $\sigma$ -compact. In order that the transformation  $\mathcal{H}_{\Phi, \dot{A}}$  should be regular, i. e. that  $f \in C(G/K)$ ,  $f(\dot{x}) \rightarrow l$  when  $\dot{x} \rightarrow \infty$  should imply  $\mathcal{H}_{\Phi, \dot{A}}f(\dot{x}) \rightarrow l$ , it is necessary and sufficient that  $\int_{\Omega} \Phi(u) d\mu(u) = 1$ .

**Proof.** If  $f(x) = 1$  then  $\mathcal{H}_{\Phi, \dot{A}}f(\dot{x}) = \int_{\Omega} \Phi(u) d\mu(u)$ . Thus,  $\int_{\Omega} \Phi(u) d\mu(u) = 1$  is a necessary condition.

To prove the sufficiency, first note that since  $\dot{A}(u)$  has continuous inverse,  $f(\dot{x}) \rightarrow l$  when  $\dot{x} \rightarrow \infty$  implies  $f(\dot{A}(u)\dot{x}) \rightarrow l$  when  $\dot{x} \rightarrow \infty$ . Indeed,  $f(\dot{x}) \rightarrow l$  when  $\dot{x} \rightarrow \infty$  means that for every  $\varepsilon > 0$  there is a compact  $C_\varepsilon \subset G/K$  such that  $|f(\dot{x}) - l| < \varepsilon$  for  $x \in G \setminus C_\varepsilon$ . Now if  $\dot{x} \in (G/K) \setminus \dot{A}(u)^{-1}(C_\varepsilon)$  we get  $\dot{A}(u)\dot{x} \in (G/K) \setminus C_\varepsilon$  and therefore  $|f(\dot{A}(u)\dot{x}) - l| < \varepsilon$ .

But if, in addition,  $f \in C(G/K)$  the function  $f$  is bounded on  $G/K$  and therefore  $\mathcal{H}_{\Phi, \dot{A}}f(\dot{x}) \rightarrow l$  by the Lebesgue theorem (one can apply the Lebesgue theorem, since  $G/K$  is  $\sigma$ -compact).

Thus, proposition 1 shows that Hausdorff operators in a sense of definition 1 gives us a family (for various  $\Phi$ ,  $A(u)$ , and  $\Omega$ ) of generalized limits at infinity for functions on  $G/K$ .

### Hausdorff operators on $L^p(G/K)$

In the following we put  $L^p(G/K) := L^p(G/K, \lambda)$  ( $p \in [1, \infty]$ ). Formula (2) implies that  $\|g\|_{L^p(G)} = \|\dot{g}\|_{L^p(G/K)}$  for every right  $K$ -invariant function  $g \in L^p(G)$ .

In this section we give conditions of boundedness of Hausdorff operators on  $L^p(G/K)$ . Let  $(\Omega, \mu)$  and  $(\dot{A}(u))_{u \in \Omega}$  be as in definition 2. For a function  $\Phi$  on  $\Omega$  let

$$\|\Phi\|_{p, A} := \int_{\Omega} |\Phi(u)| (\text{mod } A(u))^{-1/p} d\mu(u).$$

**Theorem 1.** Suppose that the conditions of definition 2 are fulfilled,  $p \in [1, \infty]$ , and  $\|\Phi\|_{p, A} < \infty$ . Then  $\mathcal{H}_{\Phi, \dot{A}}$  is bounded in  $L^p(G/K)$  and

$$\|\mathcal{H}_{\Phi, \dot{A}}\|_{\mathcal{L}(L^p(G/K))} \leq \|\Phi\|_{p, A}.$$

**Proof.** Let  $1 < p < \infty$ . Every function  $f \in L^p(G/K)$  has the form  $f = \dot{g}$  for a unique right  $K$ -invariant function  $g \in L^p(G)$ . Using Minkowski's integral inequality, we have that

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}_{\Phi, \dot{A}}f\|_{L^p(G/K)} &= \left( \int_{G/K} \left| \int_{\Omega} \Phi(u) f(\dot{A}(u)(\dot{x})) d\mu(u) \right|^p d\dot{x} \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \int_{\Omega} |\Phi(u)| \left( \int_{G/K} |f(\dot{A}(u)(\dot{x}))|^p d\dot{x} \right)^{1/p} d\mu(u). \end{aligned}$$

Since the function  $x \mapsto g(A(u)(x))$  is right  $K$ -invariant, as well, formula (2) yields

$$\int_{G/K} |f(\dot{A}(u)(\dot{x}))|^p d\dot{x} = \int_G |g(A(u)(x))|^p dx.$$

On the other hand, by [11, chapter VII, subsection 1.4, formula (31)] we have

$$\int_G |g(A(u)(x))|^p dx = (\text{mod } A(u))^{-1} \int_G |g(x)|^p dx.$$

Thus,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}_{\Phi, \dot{A}} f\|_{L^p(G/K)} &\leq \int_{\Omega} |\Phi(u)| (\text{mod } A(u))^{-1/p} d\mu(u) \left( \int_G |g(x)|^p dx \right)^{1/p} = \\ &= \|\Phi\|_{p, A} \left( \int_{G/K} |f(\dot{x})|^p d\dot{x} \right)^{1/p} = \|\Phi\|_{p, A} \|f\|_{L^p(G/K)}. \end{aligned}$$

For  $p = 1$  the statement of theorem 1 follows from Fubini's theorem and for  $p = \infty$  it is obvious.

The following simple example is intended to illustrate preceding constructions.

**Example.** Let  $G$  be the multiplicative group  $\mathbb{C}^\times$  of the complex field  $\mathbb{C}$  and  $K := \{z \in \mathbb{C}^\times : |z| = 1\}$  the circle group. Then  $G/K$  can be identified with  $(0, \infty)$  via the map  $zK = \dot{z} \mapsto r$ , where  $r = |z|$ . In other words, we use  $(0, \infty)$  as a model of  $G/K$ , the positive number  $r$  representing the circle of radius  $r$ . Automorphisms of  $G$  have the form  $A(re^{i\alpha}) = r^u e^{i\alpha}$  or  $A(re^{i\alpha}) = r^u e^{-i\alpha}$  ( $u \in \mathbb{R}$ ). Thus  $\text{Aut}_K(G) = \text{Aut}(G)$ . It follows that  $\dot{A}(\dot{z}) = r^u$  ( $u \in \mathbb{R}$ ). So the general form of a Hausdorff operator on  $(0, \infty)$  looks as follows ( $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $r > 0$ )

$$\mathcal{H}_{\Phi, \dot{A}} f(r) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(u) f(r^u) d\mu(u)$$

(we take  $\Omega = \mathbb{R}$ , and  $\mu$  is any positive measure on  $\mathbb{R}$ ). Since  $G$  is commutative,  $\text{mod } A = 1$  for all  $A \in \text{Aut}(G)$ .

So theorem 1 implies that  $\mathcal{H}_{\Phi, \dot{A}}$  is bounded on  $L^p(0, \infty)$  if  $\Phi \in L^1(\mu)$  and in this case  $\|\mathcal{H}_{\Phi, \dot{A}}\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq \|\Phi\|_{L^1(\mu)}$ .

If we take in theorem 1 the space  $\mathbb{Z}_+$  (endowed with counting measure) as  $\Omega$ , we arrive at the following.

**Corollary 1.** Let  $\Phi(j)$  be a sequence of complex numbers. Consider a discrete Hausdorff operator over  $G/K$

$$\mathcal{H}_{\Phi, \dot{A}} f(\dot{x}) := \sum_{j=0}^{\infty} \Phi(j) f(\dot{A}(j)(\dot{x}))$$

(discrete Hausdorff operators were introduced in [12; 13]).

Then

$$\|\mathcal{H}_{\Phi, \dot{A}}\|_{\mathcal{L}(L^p(G/K))} \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Phi(j)| (\text{mod } A(j))^{-1/p}.$$

Putting

$$\Phi(u) = \frac{\chi_{\{\text{mod } A(u) \geq 1\}}(u)}{\text{mod } A(u)}$$

in definition 2 ( $\chi_E$  denotes the indicator function of the set  $E$ ), we get a Cesaro operator over  $G/K$  (cf. [8])

$$\mathcal{C}_{A, \mu} f(\dot{x}) := \int_{\{\text{mod } A(u) \geq 1\}} \frac{f(\dot{A}(u)(\dot{x}))}{\text{mod } A(u)} d\mu(u).$$

**Corollary 2.** For a Cesaro operator over  $G/K$  the following estimate holds

$$\|\mathcal{C}_{A, \mu}\|_{\mathcal{L}(L^p(G/K))} \leq \int_{\{\text{mod } A(u) \geq 1\}} \frac{d\mu(u)}{(\text{mod } A(u))^{1+(1/p)}}.$$

### Hausdorff operators on atomic Hardy space $H^1(G/K)$

The goal of this section is to introduce the atomic Hardy space  $H^1(G/K)$  and to obtain conditions for boundedness of Hausdorff operators on this space.

In the rest of the paper as in [9] we assume in addition that  $G$  is metrizable via a left invariant metric  $\rho$  and the following *doubling condition* in a sense of [14] holds.

There exists a constant  $C$  such that

$$v(B(x, 2r)) \leq C v(B(x, r))$$

for each  $x \in G$  and  $r > 0$ . Here  $B(x, r)$  denotes the ball of radius  $r$  around  $x$ . The *doubling constant* is the smallest constant  $C \geq 1$  for which the last inequality holds. We denote this constant by  $C_v$ . Then for each  $x \in G$ ,  $k \geq 1$  and  $r > 0$

$$v(B(x, kr)) \leq C_v k^s v(B(x, r)), \tag{3}$$

where  $s = \log_2 C_v$  (see, e. g., [15, p. 76]). The number  $s$  takes the role of a «dimension» for a doubling metric measure space  $G$ .

To introduce the space  $H^1(G/K)$  first recall that a function  $a$  on  $G$  is an *atom* if it satisfies the following conditions (see [14, p. 591]):

(i) the support of  $a$  is contained in a ball  $B(x, r)$ ;

(ii)  $\|a\|_\infty \leq \frac{1}{v(B(x, r))}$ ;

(iii)  $\int_G a(x) dx = 0$ .

In case  $v(G) < \infty$  we shall assume  $v(G) = 1$ . Then the constant function having value 1 is also considered to be an atom.

So by atom we mean an  $(1, \infty)$ -atom.

**Definition 3.** We define the *Hardy space*  $H^1(G/K)$  as a space of such functions  $f = \dot{g}$  on  $G/K$  that  $g$  admits an atomic decomposition of the form

$$g = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j a_j, \tag{4}$$

where  $a_j$  are right  $K$ -invariant atoms and  $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| < \infty$ . In this case,

$$\|f\|_{H^1(G/K)} := \inf \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|,$$

infimum is taken over all decompositions above of  $g$ .

Thus, a function  $f = \dot{g}$  from  $H^1(G/K)$  admits an atomic decomposition  $f = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \dot{a}_j$  such that  $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| < \infty$ , and  $\|f\|_{H^1(G/K)} = \|g\|_{H^1(G)}$ .

*Remark.* Real Hardy spaces over compact connected (not necessary quasi-metric) Abelian groups were defined in [16]. The case of semisimple Lie groups was considered earlier in [17].

**Proposition 2.** The space  $H^1(G/K)$  is Banach. If, in addition, for some  $h$  from  $H^1(G)$  the function  $x \mapsto \int_K h(xk) dk$  is not identically zero, the space  $H^1(G/K)$  is non-trivial.

**Proof.** First, we shall show that  $H^1(G/K)$  is complete. Note that since  $\|a\|_{L^1(G)} \leq 1$  for each atom  $a$ , we have  $\|g\|_{L^1(G)} \leq \|\dot{g}\|_{H^1(G/K)}$  for each right  $K$ -invariant function  $g \in H^1(G)$ . Then for a function  $f = \dot{g}$  we have  $\|f\|_{L^1(G/K)} \leq \|f\|_{H^1(G/K)}$ . Let a sequence  $f_j \in H^1(G/K)$  be such that  $\sum_j \|f_j\|_{H^1(G/K)} < \infty$ . It is enough to prove that the series  $\sum_j f_j$  converges in  $H^1(G/K)$ . The sequence  $S_n$  of partial sums of this series is a Cauchy sequence in  $L^1(G/K)$  because for  $m < n$



$$\|S_n - S_m\|_{L^1(G/K)} \leq \sum_{j=m+1}^n \|f_j\|_{L^1(G/K)} \leq \sum_{j=m+1}^n \|f_j\|_{H^1(G/K)}.$$

So the series  $\sum_j f_j$  converges in  $L^1(G/K)$  to some function  $f$ . On the other hand, each  $f_j$  has an atomic decomposition  $f_j = \sum_i \alpha_{ij} \dot{a}_{ij}$  such that  $\sum_i |\alpha_{ij}| < 2\|f_j\|_{H^1(G/K)}$ . Then  $f$  has an atomic decomposition

$$f = \sum_j \sum_i \alpha_{ij} \dot{a}_{ij},$$

and

$$\sum_j \sum_i |\alpha_{ij}| < 2 \sum_j \|f_j\|_{H^1(G/K)} < \infty.$$

Thus,  $f \in H^1(G/K)$ . Moreover,

$$\left\| f - \sum_{j=1}^n f_j \right\|_{H^1(G/K)} \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \|f_j\|_{H^1(G/K)} \rightarrow \text{as } n \rightarrow \infty.$$

Finally, we shall show that the space  $H^1(G/K)$  is non-trivial. It is enough to prove that non-trivial right  $K$ -invariant atoms exist. To this end, for an atom  $a$  on  $G$  let's consider the function

$$a'(x) := c \int_K a(xk) dk.$$

Then  $a'$  is right  $K$ -invariant and satisfies (i) for every constant  $c > 0$ . Indeed, if  $a$  is supported in a ball  $B = B(e, r_B)$ , then  $a'(x) = 0$  for  $x \notin BK$ . Since

$$\rho(e, xk) \leq \rho(e, x) + \rho(x, xk) = \rho(e, x) + \rho(e, k) < r_B + \text{dist}(e, K) =: r'_B$$

for  $x \in B$ , the set  $BK$  is contained in a ball  $B' = B(e, r'_B)$ . Thus,  $a'$  is supported in  $B'$ . From now on we assume that  $c = \nu(B)/\nu(B')$ . Then (ii) holds for  $a'$  because  $\|a'\|_{\infty} \leq c\|a\|_{\infty} \leq c/\nu(B) = 1/\nu(B')$  for such  $c$ . The property (iii) for  $a'$  follows from the equality ( $\Delta_G$  denotes the modular function)

$$\int_G a'(x) dx = c \int_G \int_{G/K} a(xk) dk dx = c \int_K \Delta_G(k) \int_G a(x) dx dk = 0.$$

So,  $a'$  is a right  $K$ -invariant atom. On the other hand, since  $h \in H^1(G)$ , we have an atomic decomposition  $h = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j a_j$ . Since, by assumption, the function

$$x \mapsto \int_K h(xk) dk = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \int_K a_j(xk) dk$$

is non-trivial, the right  $K$ -invariant atom  $(a_j)'$  is non-trivial for some  $j$ , as well. This completes the proof.

In the proof of theorem 2 the next lemmas play an important role.

**Lemma 1** [8]. *Let  $(\Omega, q, \mu)$  be  $\sigma$ -compact quasi-metric space with quasi-metric  $q$  and positive Radon measure  $\mu$ ,  $(X, m)$  be a measure space and  $\mathcal{F}(X)$  be some Banach space of  $m$ -measurable functions on  $X$ . Assume that the convergence of a sequence strongly in  $\mathcal{F}(X)$  yields the convergence of some subsequence to the same function for  $m$  a. e.  $x \in X$ . Let  $F(u, x)$  be a function such that  $F(u, \cdot) \in \mathcal{F}(X)$  for  $\mu$  a. e.  $u \in \Omega$  and the map  $u \mapsto F(u, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(X)$  is Bochner integrable with respect to  $\mu$ . Then for  $m$  a. e.  $x \in X$  we have (below (B) means a Bochner integral)*

$$\left( (B) \int_{\Omega} F(u, \cdot) d\mu(u) \right) (x) = \int_{\Omega} F(u, x) d\mu(u).$$

**Lemma 2** [9]. *Every automorphism  $A \in \text{Aut}(G)$  is Lipschitz. Moreover, one can choose the Lipschitz constant to be*

$$L_A = \kappa_\rho \bmod A,$$

where the constant  $\kappa_\rho$  depends on the metric  $\rho$  only.

Now we are in position to prove the following.

**Theorem 2.** *Under the assumptions of definition 2 let  $(\Omega, q, \mu)$  be  $\sigma$ -compact quasi-metric space with positive Radon measure  $\mu$  and  $\Phi \in L^1(k^s \mu)$  where  $k(u) := \kappa_\rho / \bmod A(u)$ . Then the operator  $\mathcal{H}_{\Phi, \dot{A}}$  is bounded on the space  $H^1(G/K)$  and*

$$\|\mathcal{H}_{\Phi, \dot{A}}\|_{\mathcal{L}(H^1(G/K))} \leq C_v \|\Phi\|_{L^1(k^s \mu)}.$$

**Proof.** We proceed as in the proof of the main theorem in [8; 9]. If we set  $X = G/K$  and  $m = \lambda$  the pair  $(X, m)$  satisfies the conditions of lemma 1 with  $H^1(G/K)$  in place of  $\mathcal{F}(X)$ . Indeed, let  $f_n = \dot{g}_n \in H^1(G/K)$ ,  $f = \dot{g} \in H^1(G/K)$ , and  $\|f_n - f\|_{H^1(G/K)} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Since

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{L^1(G/K)} &= \int_{G/K} |\pi_K(g_n - g)| d\lambda = \\ &= \int_G |g_n(x) - g(x)| dx \leq \|g_n - g\|_{H^1(G)} = \|f_n - f\|_{H^1(G/K)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

there is a subsequence of  $f_n$  that converges to  $f$   $\lambda$  a. e. Then definition 3 and lemma 1 imply for  $f \in H^1(G/K)$  that

$$\mathcal{H}_{\Phi, \dot{A}} f = \int_{\Omega} \Phi(u) f \circ \dot{A}(u) d\mu(u)$$

(the Bochner integral;  $\circ$  stands for a composition sign). Therefore (below  $f = \dot{g}$ )

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}_{\Phi, \dot{A}} f\|_{H^1(G/K)} &\leq \int_{\Omega} |\Phi(u)| \|f \circ \dot{A}(u)\|_{H^1(G/K)} d\mu(u) = \\ &= \int_{\Omega} |\Phi(u)| \|g \circ A(u)\|_{H^1(G)} d\mu(u). \end{aligned} \tag{5}$$

If  $g$  has representation (4) then

$$g \circ A(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j a_j \circ A(u). \tag{6}$$

We claim that  $b_{j,u} := C_v^{-1} k(u)^{-s} a_j \circ A(u)$  is an atom, too. Indeed, lemma 2 implies that

$$A(u)^{-1}(B(x, r)) \subseteq B(x', k(u)r),$$

where  $x' = A(u)^{-1}(x)$ . If  $a_j$  is supported in  $B(x_j, r_j)$  then  $b_{j,u}$  is supported in  $B(x_{j'}, k(u)r_j)$ . So the condition (i) holds for  $b_{j,u}$ . Next, by (3) we have

$$v(B(x_{j'}, k(u)r_j)) \leq C_v k(u)^s v(B(x_j, r_j)).$$

This implies that

$$\|a_j \circ A(u)\|_{\infty} = \|a_j\|_{\infty} \leq \frac{1}{v(B(x_j, r_j))} \leq C_v k(u)^s \frac{1}{v(B(x_{j'}, k(u)r_j))}.$$

So, the condition (ii) is also fulfilled for  $b_{j,u}$ . The validity of (iii) follows from [11, chapter VII, subsection 1.4, formula (31)].

Finally, since formula (6) can be rewritten as

$$g \circ A(u) = \sum_{j=1}^{\infty} (C_v k(u)^s \alpha_j) b_{ju},$$

we get

$$\|g \circ A(u)\|_{H^1(G)} \leq C_v k(u)^s \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|,$$

which in turn implies that

$$\|g \circ A(u)\|_{H^1(G)} \leq C_v k(u)^s \|g\|_{H^1(G)} = C_v k(u)^s \|f\|_{H^1(G/K)}.$$

Thus, the statement of the theorem follows from formula (5).

**Corollary 3.** *Let the assumptions of theorem 2 holds. Then we have for a discrete Hausdorff operator over  $G/K$  (see corollary 1)*

$$\|\mathcal{H}_{\Phi, A}\|_{\mathcal{L}(H^1(G/K))} \leq C_v \kappa_p^s \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\Phi(j)|}{(\text{mod } A(j))^s}.$$

**Corollary 4.** *Let the assumptions of theorem 2 holds. Then we have for a Cesaro operator over  $G/K$*

$$\|\mathcal{C}_{A, \mu}\|_{\mathcal{L}(H^1(G/K))} \leq C_v \kappa_p^s \int_{\{\text{mod } A(u) \geq 1\}} \frac{d\mu(u)}{(\text{mod } A(u))^{1+s}}.$$

(Recall, that for this operator  $\Phi = \chi_{\{\text{mod } A(u) \geq 1\}} / \text{mod } A$ , see corollary 2.)

### Concluding remarks

It would be of interest to apply theorems 1 and 2 to classical homogeneous spaces such as Euclidean plane  $\mathbb{R}^2 = M(2)/O(2)$ , sphere  $S^2 = O(3)/O(2)$ , non-Euclidean plane  $\mathbb{H} = SU(1, 1)/SO(2)$  [18, section 4], to other Riemannian symmetric spaces etc. Would also be of interest to generalize theorems 1 and 2 to the case when the group  $K$  is non-compact.

### References

1. Hardy GH. *Divergent Series*. Oxford: Clarendon Press; 1949. 396 p.
2. Georgakis C. The Hausdorff mean of a Fourier – Stieltjes transform. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1992; 116:465–471. DOI: 10.1090/S0002-9939-1992-1096210-9.
3. Liflyand E, Moricz F. The Hausdorff operator is bounded on the real Hardy space  $H^1(\mathbb{R})$ . *Proceedings of the American Mathematical Society*. 2000;128:1391–1396. DOI: 10.1090/S0002-9939-99-05159-X.
4. Brown G, Moricz F. Multivariate Hausdorff operators on the spaces  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2002;271(2):443–454. DOI: 10.1016/S0022-247X(02)00128-2.
5. Lerner A, Liflyand E. Multidimensional Hausdorff operators on the real Hardy space. *Journal of the Australian Mathematical Society*. 2007;83(1):79–86. DOI: 10.1017/S1446788700036399.
6. Liflyand E. Hausdorff operators on Hardy spaces. *Eurasian Mathematical Journal*. 2013;4(4):101–141.
7. Chen J, Fan D, Wang S. Hausdorff operators on Euclidean space. *Applied Mathematics. A Journal of Chinese Universities. Series B*. 2013;28(4):548–564. DOI: 10.1007/s11766-013-3228-1.
8. Mirotin AR. Boundedness of Hausdorff operators on Hardy spaces  $H^1$  over locally compact groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2019;473(1):519–533. DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.12.065.
9. Mirotin AR. Addendum to «Boundedness of Hausdorff operators on real Hardy spaces  $H^1$  over locally compact groups» [J. Math. Anal. Appl. 473(2019)519–533]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2019;479(1):872–874. DOI: 10.1016/j.jmaa.2019.06.055.
10. Hewitt E, Ross K. *Abstract Harmonic Analysis. Volume I*. Berlin: Springer Verlag; 1963. 519 p. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; volume 115). DOI: 10.1017/S0013091500025761.
11. Bourbaki N. *Elements de mathematique. Integration. Chapitres 7 et 8. Volume 29*. Paris: Hermann; 1963. 222 p.
12. Mirotin AR. The structure of normal Hausdorff operators on Lebesgue spaces. *Forum Mathematicum*. 2020;32(1):111–119. DOI: 10.1515/forum-2019-0097.
13. Mirotin AR. On the structure of normal Hausdorff operators on Lebesgue spaces. *Functional Analysis and Its Applications*. 2019;53(4):261–269. DOI: 10.1134/S0016266319040038.
14. Coifman RR, Weiss G. Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1977;83(4):569–645. DOI: 10.1090/S0002-9904-1977-14325-5.
15. Heinonen J, Koskela P, Shanmugalingam N, Tyson JT. *Sobolev Spaces on Metric Measure Spaces. An Approach Based on Upper Gradients*. Cambridge: Cambridge University Press; 2015. 434 p. DOI: 10.1017/CBO9781316135914.
16. Mirotin AR. On the general form of linear functionals on the Hardy spaces  $H^1$  over compact Abelian groups and some of its applications. *Indagationes Mathematicae*. 2017;28(2):451–462. DOI: 10.1016/j.indag.2016.11.023.
17. Kawazoe T. Atomic Hardy spaces on semisimple Lie groups. *Japanese Journal of Mathematics*. 1985;11(2):293–343. DOI: 10.4099/math1924.11.293.
18. Helgason S. *Topics in harmonic analysis on homogeneous spaces*. Boston: Birkhauser; 1981. 142 p. (Progress in Mathematics; book 13). DOI: 10.1002/zamm.19820620921.

Received by editorial board 11.06.2020.

---

---

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

---

## MATHEMATICAL LOGIC, ALGEBRA AND NUMBER THEORY

---

---

УДК 519.725

### ОБОБЩЕННЫЕ БЧХ-КОДЫ. ПОЛИНОМИАЛЬНО-НОРМЕННОЕ ДЕКОДИРОВАНИЕ ОШИБОК

А. В. КУШНЕРОВ<sup>1)</sup>, В. А. ЛИПНИЦКИЙ<sup>1), 2)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

<sup>2)</sup>Военная академия Республики Беларусь, пр. Независимости, 220, 220057, г. Минск, Беларусь

Классические коды Боуза – Чоудхури – Хоквингема (БЧХ-коды) и их изучение составляют обширную область теории кодов, исправляющих ошибки. Обобщение БЧХ-кодов позволяет расширить спектр деятельности в практической коррекции ошибок. Среди обобщенных БЧХ-кодов были найдены коды, превосходящие по числу исправляемых ошибок классический БЧХ-код. Вопрос методики коррекции ошибок потребовал глубокой теоретической проработки и компьютерного эксперимента на ее основе. Итогом этого стал полиномиально-норменный метод декодирования, который показал себя значительно более эффективным, чем классический синдромный метод декодирования. В некоторых случаях полиномиально-норменный метод является единственным возможным. Результатом исследования выступает модель полиномиально-норменного декодера для обобщенного БЧХ-кода длиной 65.

**Ключевые слова:** помехоустойчивые коды; коды Боуза – Чоудхури – Хоквингема; автоморфизмы кодов; норменный метод декодирования; полиномиально-норменный метод декодирования.

---

#### Образец цитирования:

Кушнеров АВ, Липницкий ВА. Обобщенные БЧХ-коды. Полиномиально-норменное декодирование ошибок. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;2:36–48.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-36-48>

#### For citation:

Kushnerov AV, Lipnitski VA. Generic BCH codes. Polynomial-norm error decoding. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;2:36–48. Russian.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-36-48>

---

#### Авторы:

**Александр Викторович Кушнеров** – старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета.  
**Валерий Антонович Липницкий** – доктор технических наук, профессор; заведующий кафедрой высшей математики<sup>2)</sup>, профессор кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета<sup>1)</sup>.

#### Authors:

**Alexander V. Kushnerov**, senior lecturer at the department of differential equations and system analysis, faculty of mechanics and mathematics.  
[a.v.kushnerov@gmail.com](mailto:a.v.kushnerov@gmail.com)  
**Valery A. Lipnitski**, doctor of science (engineering), full professor; head of the department of higher mathematics<sup>b</sup> and professor at the department of differential equations and system analysis, faculty of mechanics and mathematics<sup>a</sup>.  
[valipnitski@yandex.by](mailto:valipnitski@yandex.by)

## GENERIC BCH CODES. POLYNOMIAL-NORM ERROR DECODING

A. V. KUSHNEROV<sup>a</sup>, V. A. LIPNITSKI<sup>a, b</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

<sup>b</sup>Military Academy of the Republic of Belarus, 220 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220057, Belarus

Corresponding author: A. V. Kushnerov (al.v.kushnerov@gmail.com)

The classic Bose – Chaudhuri – Hocquenghem (BCH) codes is famous and well-studied part in the theory of error-correcting codes. Generalization of BCH codes allows us to expand the range of activities in the practical correction of errors. Some generic BCH codes are able to correct more errors than classic BCH code in one message block. So it is important to provide appropriate method of error correction. After our investigation it was found that polynomial-norm method is most convenient and effective for that task. The result of the study was a model of a polynomial-norm decoder for a generic BCH code at length 65.

**Keywords:** error correcting codes; Bose – Chaudhuri – Hocquenghem codes; automorphisms of codes; norm decoding method; polynomial-norm decoding method.

### Введение

Конструирование и эксплуатация современных цифровых инфокоммуникационных систем (ИКС) отягощены проблемой быстрой передачи больших объемов информации. Это сопровождается необходимостью синхронной коррекции многократных ошибок, неизбежно возникающих в процессе передачи информации в каналах с шумами и помехами. Наиболее популярными в высокоскоростных ИКС оказались линейные циклические коды, особенно из семейства кодов Боуза – Чоудхури – Хоквингема (БЧХ-кодов) [1–4], для которых, помимо классических синдромных, разработаны эффективные норменные [5–7] и полиномиально-норменные методы коррекции ошибок [8–10]. Соответствующие алгоритмы базируются на многогранной связи БЧХ-кодов с полями Галуа [1; 11; 12], наличии группы автоморфизмов в этих кодах [6; 7; 13], а также на обнаруженных синдромных, норменных и полиномиально-норменных инвариантах автоморфизмов реверсивных кодов и БЧХ-кодов. На сегодняшний день эти алгоритмы являются единственными возможными для коррекции ошибок, кратность которых превышает конструктивные возможности БЧХ-кодов, что наиболее ярко видно на классе непримитивных БЧХ-кодов (см., например, [14; 15]).

В статьях [16; 17] расширяется класс БЧХ-кодов в целях применения к ним полиномиально-норменных методов и алгоритмов коррекции ошибок. Раскрытию предполагаемых возможностей обобщенных БЧХ-кодов (ОБЧХ-кодов) и посвящена данная работа.

### ОБЧХ-коды. Основные определения и свойства

ОБЧХ-коды, как и классические БЧХ-коды, имеют нечетную длину  $n > 7$  и поле определения  $GF(2^m)$ , которое характеризуется минимальным значением  $m$  с условием  $2^m - 1$  делится на  $n$ . Для целочисленной функции Эйлера  $\varphi(n)$  (согласно теореме Эйлера [18; 19]) величина  $2^{\varphi(n)} - 1$  всегда делится на  $n$ . Поэтому иногда  $\varphi(n)$  совпадает с  $m$ . Из теории конечных полей [12; 18] следует, что  $m$  должно быть делителем  $\varphi(n)$ . Пусть целое  $t > 1$  таково, что  $t \cdot m < n$ , а  $\beta$  – примитивный элемент степени  $n$  в поле  $GF(2^m)$ . Например, если  $2^m - 1 = v \cdot n$  и  $\alpha$  – примитивный элемент поля  $GF(2^m)$ , то в качестве  $\beta$  можно взять элемент  $\alpha^v$ .

При введенных условиях над полем  $GF(2^m)$  существует классический двоичный циклический код длиной  $n$  с проверочной матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-1} \\ 1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \dots & \alpha^{3(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha^{2t-1} & \alpha^{2(2t-1)} & \dots & \alpha^{(2t-1)(n-1)} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Пусть  $k_1, k_2, \dots, k_t$  – целые числа с условиями:

1)  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_t \leq 2^m - 2$ ;

2) они принадлежат попарно различным циклотомическим классам по модулю  $n$  или, что эквивалентно, среди элементов поля Галуа  $\beta^{k_1}, \beta^{k_2}, \dots, \beta^{k_t}$  не имеется ни одной пары сопряженных, т. е. принадлежащих множеству корней одного неприводимого над  $GF(2) = Z/2Z$  полинома.

Второе условие без явных оговорок считается автоматически выполняющимся и для кодов с проверочной матрицей (1). В противном случае ранг матрицы (1) будет меньше  $m \cdot t$  (см. теорему 6.3 [6]) и она теряет статус проверочной матрицы. В силу этой же причины и включено в определение 1 второе условие.

**Определение 1.** ОБЧХ-кодом длиной  $n$  над полем  $GF(2^m)$  с конструктивным расстоянием  $\delta = 2t + 1$  называется помехоустойчивый линейный код  $C = C_{\text{ОБЧХ}}^{\delta, n} = C(k_1, k_2, \dots, k_t)$  с проверочной матрицей

$$H_{\text{ОБЧХ}}^{\delta} = (\beta^{k_1 i}, \beta^{k_2 i}, \dots, \beta^{k_t i})^T. \quad (2)$$

Очевидно, что такой код является циклическим. Определим на множестве двоичных векторов с  $n$  координатами циклическую подстановку  $\sigma$  по правилу: для некоторого вектора  $\bar{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n) \in V_n$   $\sigma(\bar{e}) = (e_n, e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ . Далее рассмотрим циклотомическую подстановку  $\phi$  на координатах вектора  $\bar{e}$ . Для некоторого вектора  $\bar{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n) \in V_n$   $\phi(\bar{e}) = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  согласно следующему правилу:

$$e'_i = \begin{cases} e_{2i-1}, & 2i-1 \leq n, \\ e_{2i-1-n}, & 2i-1 > n. \end{cases}$$

Циклическая подстановка  $\sigma$  и циклотомическая подстановка  $\phi$  являются автоморфизмами ОБЧХ-кода [6; 7]. Следовательно, в группе  $\text{Aut}(C_{\text{ОБЧХ}}^{\delta, n})$  содержатся группы  $\Gamma$  и  $G$ , порожденные подстановкой  $\sigma$  и подстановками  $\sigma$  и  $\phi$  соответственно [6; 7].

Исходя из условий определения 1, класс БЧХ-кодов с проверочной матрицей (1) является частным случаем ОБЧХ-кода. С другой стороны, для всех ОБЧХ-кодов, представляющих практический интерес, можно считать  $k_1 = 1$ . В самом деле, если  $k_1 > 1$  и среди  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq t$ , имеется хотя бы одно значение  $k_j$  с условием  $\text{НОД}(k_j, n) = 1$ , то  $\beta^{k_j} = \gamma$  останется элементом порядка  $n$  в поле  $GF(2^m)$ . Заменяя в определении 1 элемент  $\beta$  на  $\gamma$ , мы получим ОБЧХ-код, у которого  $k_1 = 1$ .

Если же окажется, что  $\text{НОД}(k_1, k_2, \dots, k_t, n) = \mu > 1$ , то минимальное расстояние кода  $C_{\text{ОБЧХ}}^{2t+1, n}$  равно 2, поскольку матрица (2) при таких условиях содержит одинаковые столбцы. Как показывают многочисленные вычисления и примеры, ОБЧХ-коды с условиями  $\text{НОД}(k_1, k_2, \dots, k_t, n) = 1$ , но  $\text{НОД}(k_i, n) > 1$  для всех  $i$ ,  $1 \leq i \leq t$ , имеют минимальное расстояние, не превосходящее величину  $\delta = 2t + 1$ .

Классическая теория и практика БЧХ-кодов имеет дело с примитивными кодами (когда  $n = 2^m - 1$  и  $\beta = \alpha$  – примитивный элемент поля  $GF(2^m)$ ); тогда, как правило,  $d = \delta$  и корректируются ошибки, кратность которых не выходит за рамки конструктивных возможностей.

Исследуя ОБЧХ-коды, мы получаем возможность отыскать коды, которые имеют корректирующие возможности, превосходящие конструктивные, а также декодирующие возможности стандартных БЧХ-кодов и реверсивных кодов той же длины.

**Пример 1.** Пусть  $n = 65$ , тогда  $m = 12$ . Множество  $T = \{1, 2, \dots, 64\}$  разбивается на шесть циклотомических классов по модулю 65:

$$C_1 = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 33, 49, 57, 61, 63, 64\}, C_3 = \{3, 6, 12, 17, 24, 31, 34, 41, 48, 53, 59, 62\},$$

$$C_5 = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60\}, C_7 = \{7, 9, 14, 18, 28, 29, 36, 37, 47, 51, 56, 58\} = C_9,$$

$$C_{11} = \{11, 19, 21, 22, 23, 27, 38, 42, 43, 44, 46, 54\}, C_{13} = \{13, 26, 39, 52\}.$$

Из определения 1 следует, что существует  $C_6^2 = 15$  различных ОБЧХ-кодов  $C(k_1, k_2)$  длиной 65 с  $\delta = 5$ :  $C(1, 3)$ ,  $C(1, 5)$ ,  $C(1, 7)$ ,  $C(1, 11)$ ,  $C(1, 13)$ ,  $C(3, 5)$ ,  $C(3, 7)$ ,  $C(3, 11)$ ,  $C(3, 13)$ ,  $C(5, 7)$ ,  $C(5, 11)$ ,  $C(5, 13)$ ,  $C(7, 11)$ ,  $C(7, 13)$ ,  $C(11, 13)$ .



первое уравнение становится линейным:  $x_1 + x_2 + \dots + x_t = s_1$ . И в данном уравнении, и в системе (3) неизвестные  $x_1, x_2, \dots, x_t$  – элементы первой из  $t$  строк матрицы (2'), соответствующие неизвестным ненулевым координатам вектора  $\bar{e}$ . Решив систему (3), мы определим значения  $x_1, x_2, \dots, x_t$  и тем самым однозначно найдем вектор  $\bar{e}$ .

Решение системы (3) в общем виде возможно только методом перебора, что требует большого объема вычислений (на практике это практически не осуществимо). Возможно решение этой системы для малых значений  $t$  при конкретном задании параметров  $k_1, k_2, \dots, k_t$ . Так, при  $t = 2$  для кода  $C_n(1, 5)$  система (3) имеет вид

$$\begin{cases} x + y = s_1, \\ x^5 + y^5 = s_2. \end{cases} \quad (4)$$

После замены  $y = x + s_1$  второе уравнение системы (4) превращается в уравнение  $x^5 + (x + s_1)^5 = s_2$  или, после возведения в степень и приведения подобных, в уравнение  $x^4 + s_1^3 x + b = 0$  для  $b = s_1^4 + \frac{s_2}{s_1}$ . Полученное уравнение вполне можно решать методом Чэня, т. е. переборным методом.

Для кода  $C_n(1, 7)$  аналогом системы (4) будет система

$$\begin{cases} x + y = s_1, \\ x^7 + y^7 = s_2. \end{cases} \quad (5)$$

Та же замена, что и в системе (4), приводит второе уравнение системы (5) к виду  $s_1 x^6 + s_1^2 x^5 + s_1^3 x^4 + s_1^4 x^3 + s_1^5 x^2 + s_1^6 x + s_1^7 = s_2$ . Разделим полученное уравнение на  $s_1^7$  и выполним замену  $z = \frac{x}{s_1}$ .

Имеем уравнение  $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{s_2}{s_1^7}$ . Умножив обе части последнего уравнения на  $z + 1$ ,

получим окончательно уравнение  $z^7 + cz + d = 0$ , где  $c = \frac{s_2}{s_1^7}$ ,  $d = c + 1$ . Данное уравнение также можно

решать методом Чэня, как это делается в декодерах для классического БЧХ-кода  $C_n(1, 3)$ .

**Пример 2.** В коде  $C_{65}(1, 13)$  из примера 1, определенном над полем  $GF(2^{12})$  с примитивным полиномом  $p(x) = x^{12} + x^{10} + x^2 + x + 1$  и имеющем минимальное расстояние 5, согласно табл. 1 найдем ошибку  $\bar{e}$  в принятом сообщении  $\bar{z}$  с синдромом  $S(\bar{z}) = S(\bar{e}) = (\alpha^{2469}, \alpha^{3822})$ .

В данном случае аналог системы (4) имеет вид  $x + y = s_1, x^{13} + y^{13} = s_2$ . Выражение  $y$  из первого уравнения подставим во второе. После приведения подобных членов и деления на  $s_1$  получим равенство  $x^{12} + x^9 s_1^3 + x^8 s_1^4 + x^5 s_1^7 + x^4 s_1^8 + x s_1^{11} + c = 0$  для  $c = s_1^{12} + \frac{s_2}{s_1}$ .

Для заданного сообщения  $\bar{z}$  полученное уравнение имеет вид  $x^{12} + x^9 \alpha^{3312} + x^8 \alpha^{1686} + x^5 \alpha^{903} + x^4 \alpha^{3372} + x \alpha^{2589} + \alpha^{1028} = 0$ . Как показывают вычисления, уравнение можно представить следующим образом:  $(x + \alpha^{378})(x + \alpha^{3780})(x^{10} + x^9 \alpha^{2469} + x^8 \alpha^{193} + x^6 \alpha^{3506} + x^5 \alpha^{1880} + x^4 \alpha^{3699} + x^3 \alpha^{3568} + x^2 \alpha^{2917} + x \alpha^{706} + \alpha^{965}) = 0$ . Значит, оно имеет лишь два корня в поле  $GF(2^{12})$ :  $x_1 = \alpha^{378} = \beta^6$  и  $x_2 = \alpha^{3780} = \beta^{60}$ . Следовательно, в сообщении  $\bar{z}$  содержится вектор-ошибка весом 2 с единицами на позициях 7 и 61.

Таким образом, прямой синдромный метод в ОБЧХ-кодах вновь актуализирует проблематику решения алгебраических уравнений и систем над полями Галуа. Отметим, что уже для кода  $C_n(3, 5)$  сложности решения аналога системы (4) удваиваются. Главные недостатки метода уравнений: 1) не ясно, что делать при наличии более двух корней в методе Чэня; 2) подобный подход не дает возможности находить координаты ошибок, кратность которых выходит за конструктивные рамки (наиболее интересный случай).

Для решения последней проблемы мы видим единственный путь – переходить к нормальным методам.

### Г-орбиты ошибок и их нормы в ОБЧХ-кодах

Для начала рассмотрим следующую теорему.

**Теорема 1** (теорема 2.1 [6]). Пусть  $\sigma$  – оператор циклического сдвига вправо на единицу координат векторов двоичного пространства  $V_n$ . Тогда для всякого вектора  $\bar{e} \in V_n$  Г-орбита  $J = \langle \bar{e} \rangle = \langle \bar{e} \rangle_\Gamma$ , им порожденная, состоит из  $\nu$  элементов, где  $\nu = n$  или  $\nu$  делит  $n$ , и имеет следующую структуру:



$$\langle \bar{e} \rangle = \{ \bar{e}, \sigma(\bar{e}), \dots, \sigma^{v-1}(\bar{e}) \}, \quad (6)$$

при этом  $v$  – наименьшее натуральное число с условием  $\sigma^v(\bar{e}) = \bar{e}$ .

Группы  $\Gamma$  и  $G$  содержатся в группе автоморфизмов семейства всех двоичных циклических БЧХ-кодов нечетной длины, строение и количество  $\Gamma$ -орбит и  $G$ -орбит ошибок зависят только от значений длины  $n$ . Выбор кода данной длины сказывается лишь на синдромах ошибок и, следовательно, на конкретных значениях синдромных инвариантов орбит этих ошибок.

Пусть  $\phi$  – циклотомическая подстановка на пространстве двоичных векторов нечетной размерности  $V_n$ ,  $n = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N} [1; 5; 6]$ . Действие  $\sigma$  и  $\phi$  на векторы-ошибки отражается на синдромах векторов-ошибок следующим образом.

**Теорема 2.** Пусть  $S = S(\bar{e}) = (s_1, s_2, \dots, s_t)$  – синдром вектора-ошибки  $\bar{e}$  в ОБЧХ-коде  $C$  с проверочной матрицей (2). Тогда  $S(\sigma(\bar{e})) = (\beta^{k_1} s_1, \beta^{k_2} s_2, \dots, \beta^{k_t} s_t)$ ,  $S(\phi(\bar{e})) = (s_1^2, s_2^2, \dots, s_t^2)$ .

Доказательство практически дословно повторяет обоснование предложений 3.9 и 3.17 [6].

В подавляющем большинстве случаев  $\Gamma$ -орбиты векторов-ошибок являются полными, т. е. содержат максимально возможное количество векторов, по мощности совпадают с мощностью группы  $\Gamma$  и длиной  $n$  кода  $C$ .

**Определение 2.** Спектром синдромов  $S(J)$   $\Gamma$ -орбиты  $J$  называется множество синдромов всех векторов этой  $\Gamma$ -орбиты. Спектр синдромов называется полным, если его мощность совпадает с мощностью самой  $\Gamma$ -орбиты:  $|S(J)| = |J|$ .

Из теорем 1, 2 непосредственно вытекает следствие 1.

**Следствие 1.** Пусть  $\Gamma$ -орбита  $\langle \bar{e} \rangle$  состоит из  $v$  векторов. Тогда спектр синдромов этой  $\Gamma$ -орбиты имеет следующую структуру:

$$S(\langle \bar{e} \rangle) = \left\{ (\beta^{ik_1} s_1, \beta^{ik_2} s_2, \dots, \beta^{ik_t} s_t), 0 \leq i \leq v-1 \right\}. \quad (7)$$

Формулы (6) и (7) демонстрируют синхронную циклическую структуру  $\Gamma$ -орбит и их синдромных спектров, причем значения спектра взаимно однозначно представляют всю  $\Gamma$ -орбиту:  $i$ -кратное действие оператора  $\sigma$  на вектор  $\bar{e}$  синхронно отражается в спектре  $S(\langle \bar{e} \rangle)$   $i$ -кратным умножением компонент  $s_j$  синдрома  $S(\bar{e})$  на соответствующие коэффициенты  $\beta^{k_j}$ ,  $1 \leq j \leq t$ .

Из формулы (7) непосредственно следует, что мощность  $|S(J)| \leq |J|$ , и если окажется, что  $|S(J)| = n$ , то  $\Gamma$ -орбита  $J$  обязательно должна быть полной. На этом наблюдении базируется следствие 2.

**Следствие 2** (синдромные признаки полноты  $\Gamma$ -орбиты ошибок). Пусть в ОБЧХ-коде  $C$  у вектора-ошибки  $\bar{e}$  для целого  $i$ ,  $1 \leq i \leq t$ , компонента синдрома  $s_i \neq 0$  и  $\text{НОД}(k_i, n) = 1$ . Тогда  $\Gamma$ -орбита  $\langle \bar{e} \rangle$  является полной. В частности, утверждение выполняется при  $i = 1$  и  $k_1 = 1$ .

Доказательство полностью повторяет доказательство предложения 3.10 [6].

**Следствие 3.** Пусть в условиях следствия 2 ОБЧХ-код  $C$  является примитивным, т. е.  $n = 2^m - 1$ . Тогда в спектре синдромов  $S(\langle \bar{e} \rangle)$   $i$ -я компонента принимает ненулевые значения поля Галуа  $GF(2^m)$ .

**Определение 3.** Нормой синдрома  $S(\bar{e}) = H \cdot \bar{e}^T = (s_1, s_2, \dots, s_t)^T$  вектора ошибок  $\bar{e}$  в ОБЧХ-коде с проверочной матрицей (2) называется вектор  $N(S(\bar{e})) = (N_{12}, N_{13}, \dots, N_{1t}, N_{23}, \dots, N_{(t-1)t})$  с  $C_t^2$  координатами  $N_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq t$ , которые вычисляются по формулам

$$N_{ij} = \infty, \text{ если } s_j \neq 0, s_i = 0; N_{ij} \text{ не определена, если } s_i = s_j = 0; \\ N_{ij} = \frac{s_j^{k_i/d_{ij}}}{s_i^{k_j/d_{ij}}} \text{ для } d_{ij} = \text{НОД}(k_i, k_j), \text{ если } s_i \neq 0. \quad (8)$$

Приведенное определение полностью согласовано с определением нормы синдрома БЧХ-кода в работах [5; 6] и построено таким образом, чтобы выполнялось следующее утверждение.

**Теорема 3.** Пусть  $\bar{e}$  – произвольный вектор-ошибка в ОБЧХ-коде  $C$  с проверочной матрицей (2),  $S = S(\bar{e}) = (s_1, s_2, \dots, s_t)$  – синдром данной ошибки,  $\sigma$  – оператор циклического сдвига координат векторов вправо на одну координату,  $N(S(\bar{e})) = (N_{12}, N_{13}, \dots, N_{1t}, N_{23}, \dots, N_{(t-1)t})$ . Тогда  $N(S(\sigma(\bar{e}))) = N(S(\bar{e}))$ .

Доказательство вытекает из определения 3 и теоремы 2.

Из теоремы 3 получаем следствие 3.

**Следствие 3.** В ОБЧХ-коде  $C$  нормы синдромов всех векторов-ошибок каждой отдельно взятой  $\Gamma$ -орбиты  $J = \langle \bar{e} \rangle$  совпадают друг с другом.

**Определение 4.** Норма синдрома  $N(S(\bar{e}))$  любого вектора-ошибки  $\bar{e}$   $\Gamma$ -орбиты  $J$  называется нормой этой  $\Gamma$ -орбиты и обозначается одним из символов:  $N(J)$ ,  $N(\langle \bar{e} \rangle)$  или  $N_J$ .

Методом от противного доказывается следующая теорема.

**Теорема 4.** Если нормы  $\Gamma$ -орбит  $J_1$  и  $J_2$  различны, то и синдромы векторов-ошибок этих орбит попарно различны.

**Теорема 5.** Пусть в примитивном ОБЧХ-коде  $C$  векторы  $\bar{e}$  и  $\bar{f}$  имеют одинаковую компоненту  $i$ , удовлетворяющую условиям следствия 2, а  $N(S(\bar{e})) = N(S(\bar{f}))$ . Тогда спектры синдромов  $S(\langle \bar{e} \rangle)$  и  $S(\langle \bar{f} \rangle)$  совпадают.

Доказательство вытекает из следствия 3.

*Замечание.* Пусть ОБЧХ-код  $C$  не является примитивным, его длина  $n = \frac{2^m - 1}{\tau}$  для некоторого целого  $\tau > 1$ . Тогда в этом коде может найтись до  $\tau$  полных  $\Gamma$ -орбит с одинаковыми нормами, но с попарно различными спектрами синдромов. Действительно, если синдром  $S = (s_1, s_2, \dots, s_t)$  имеет норму  $N$ , то эту же норму имеют и синдромы  $S_i = (\alpha^{ik_1} s_1, \alpha^{ik_2} s_2, \dots, \alpha^{ik_t} s_t)$  для примитивного элемента  $\alpha \in GF(2^m)$  и всех целых  $i$ ,  $0 \leq i \leq 2^m - 2$ . Количество различных таких синдромов вполне может достигать величины  $2^m - 1$ . Тогда их полное количество может распределиться как минимум по  $\frac{2^m - 1}{n} = \tau$  полным  $\Gamma$ -спектрам синдромов полных  $\Gamma$ -орбит.

**Пример 3.** Согласно данным табл. 1 ОБЧХ-код  $C_{65}(1, 5)$  имеет минимальное расстояние 8 и, следовательно, способен корректировать все ошибки весом 1–3. Одиночные ошибки составляют одну  $\Gamma$ -орбиту с нормой 1, двойные делятся на 32 полные  $\Gamma$ -орбиты. Для двойных ошибок каждое значение нормы соответствует в точности двум  $\Gamma$ -орбитам, что подтверждает табл. 2, содержащая образующие  $\bar{e} = (i, j)$  с единичными координатами на позициях  $i$  и  $j$  (остальные 63 – нулевые), компоненты  $s_1$  и  $s_2$  синдромов образующих  $S(\bar{e}) = (s_1, s_2)$ , а также норм синдромов образующих  $N = N(S(\bar{e}))$ .

Таблица 2

**$\Gamma$ -орбиты двойных ошибок**

Table 2

**$\Gamma$ -orbits of double errors**

Образующие $\Gamma$ -орбит $\bar{e} = (i, j)$	Синдромы образующих $S(\bar{e})$	Норма синдрома $N(S(\bar{e}))$
(1, 14), (1, 27)	$(\alpha^{3822}, 0), (\alpha^{3549}, 0)$	0
(1, 17), (1, 26)	$(\alpha^{764}, \alpha^{4015}), (\alpha^{1535}, \alpha^{3775})$	$\alpha^{195}$
(1, 16), (1, 33)	$(\alpha^{4015}, \alpha^{4085}), (\alpha^{1528}, \alpha^{3935})$	$\alpha^{390}$
(1, 15), (1, 20)	$(\alpha^{1546}, \alpha^{4090}), (\alpha^{696}, \alpha^{3935})$	$\alpha^{455}$
(1, 2), (1, 31)	$(\alpha^{3119}, \alpha^{4090}), (\alpha^{3935}, \alpha^{4075})$	$\alpha^{780}$
(1, 28), (1, 29)	$(\alpha^{3093}, \alpha^{4090}), (\alpha^{3092}, \alpha^{4085})$	$\alpha^{910}$
(1, 3), (1, 6)	$(\alpha^{2143}, \alpha^{4085}), (\alpha^{4090}, \alpha^{1535})$	$\alpha^{1560}$
(1, 13), (1, 32)	$(\alpha^{1223}, \alpha^{3775}), (\alpha^{1594}, \alpha^{1535})$	$\alpha^{1755}$

Окончание табл. 2  
Ending table 2

Образующие $\Gamma$ -орбит $\bar{e} = (i, j)$	Синдромы образующих $S(\bar{e})$	Норма синдрома $N(S(\bar{e}))$
(1, 10), (1, 12)	$(\alpha^{2656}, \alpha^{2815}), (\alpha^{2784}, \alpha^{3455})$	$\alpha^{1820}$
(1, 9), (1, 21)	$(\alpha^{382}, \alpha^{4055}), (\alpha^{4075}, \alpha^{2045})$	$\alpha^{2145}$
(1, 8), (1, 24)	$(\alpha^{773}, \alpha^{2045}), (\alpha^{1797}, \alpha^{3070})$	$\alpha^{2275}$
(1, 7), (1, 18)	$(\alpha^{2659}, \alpha^{3935}), (\alpha^{1868}, \alpha^{4075})$	$\alpha^{2925}$
(1, 5), (1, 11)	$(\alpha^{191}, \alpha^{4075}), (\alpha^{4085}, \alpha^{3070})$	$\alpha^{3120}$
(1, 22), (1, 30)	$(\alpha^{174}, \alpha^{4055}), (\alpha^{166}, \alpha^{4015})$	$\alpha^{3185}$
(1, 4), (1, 25)	$(\alpha^{3377}, \alpha^{4015}), (\alpha^{2446}, \alpha^{3455})$	$\alpha^{3510}$
(1, 19), (1, 23)	$(\alpha^{1217}, \alpha^{1535}), (\alpha^{1473}, \alpha^{2815})$	$\alpha^{3640}$

Данные вычислены для кода  $C_{65}(1, 5)$ , определенного над полем  $GF(2^{12})$  с примитивным полиномом  $p(x) = x^{12} + x^{10} + x^2 + x + 1$ . Значения табл. 2 полностью противоречат сложившейся уверенности, что в классических БЧХ-кодах (как в примитивных, так и в непримитивных) нормы  $\Gamma$ -орбит одиночных и двойных ошибок в обязательном порядке попарно различны (см. теорему 4.2 [6]).

Тройные ошибки в ОБЧХ-коде  $C_{65}(1, 5)$  делятся на  $\frac{1}{65}C_{65}^3 = \frac{65 \cdot 64 \cdot 63}{65 \cdot 2 \cdot 3} = 32 \cdot 21 = 672$  полные  $\Gamma$ -орбиты. Вычисления показывают, что 586 из них имеют уникальные нормы, 78 – по две одинаковые нормы, а 8 – по четыре одинаковые нормы. Последний случай детализирован в табл. 3.

Таблица 3

Некоторые  $\Gamma$ -орбиты тройных ошибок

Table 3

Some  $\Gamma$ -orbits of triple errors

Образующая $\Gamma$ -орбиты $\bar{e} = (i, j)$	Синдром образующей $S(\bar{e})$	Норма синдрома $N(S(\bar{e}))$
(1, 2, 34)	$(\alpha^{129}, \alpha^{2010})$	$\alpha^{1365}$
(1, 3, 5)	$(\alpha^{516}, \alpha^{3945})$	$\alpha^{1365}$
(1, 9, 17)	$(\alpha^{2064}, \alpha^{3495})$	$\alpha^{1365}$
(1, 14, 27)	$(\alpha^{2184}, 1)$	$\alpha^{1365}$
(1, 2, 3)	$(\alpha^{258}, \alpha^{4020})$	$\alpha^{2730}$
(1, 5, 9)	$(\alpha^{1032}, \alpha^{3795})$	$\alpha^{2730}$
(1, 14, 40)	$(\alpha^{1092}, 1)$	$\alpha^{2730}$
(1, 17, 33)	$(\alpha^{33}, \alpha^{2895})$	$\alpha^{2730}$

### Норменный метод коррекции ошибок в ОБЧХ-кодах

Метод алгебраических уравнений коррекции ошибок линейными кодами сводит поиск координат ошибок до нахождения корней этих уравнений в полях Галуа – полях определения кода  $C$ . Норменный метод еще более сокращает поисковые процедуры. Он требует рассортировки векторов-ошибок декодируемой совокупности  $K$  по  $\Gamma$ -орбитам. Чтобы зафиксировать это разбиение, следует составить список  $K_\Gamma$  образующих  $\Gamma$ -орбит ошибок корректируемой совокупности  $K$ , список  $S(K_\Gamma)$  синдромов образующих и список  $N_K = N(S(K_\Gamma))$  норм синдромов образующих. Инфокоммуникационная система, функционирующая на основе ОБЧХ-кода  $C$ , приняв очередное сообщение  $\bar{x}$ , вычисляет синдром его ошибок  $S(\bar{x}) = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_t^*)$ , а затем и норму  $N_{\text{выч}} = N(S(\bar{x}))$ .

Вычисленную норму сравниваем с данными списка  $N_K$ . Если  $N_{\text{выч}} = N_i \in N_K$ , то в списке  $S(K_\Gamma)$  находим все синдромы  $S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{ij}$  с нормой  $N_i = N_{\text{выч}}$ . Искомый вектор-ошибка  $\bar{e}$  в сообщении  $\bar{x}$  принадлежит единственной  $\Gamma$ -орбите из множества  $\langle \bar{e}_{it} \rangle$ ,  $1 \leq t \leq j$ , с синдромами образующих  $S(\bar{e}_{it}) = S_{it}$ . Если  $s_1^* \neq 0$ , то вычисляем частные  $\frac{s_1^*}{s_1^{ik}}$  для всех первых компонент  $s_1^{ik}$  синдромов  $S_{ik}$ ,  $1 \leq k \leq j$ . Из структуры спектра синдромов  $\Gamma$ -орбит ошибок (формула (6)) и из принадлежности  $S(\bar{x}) = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_t^*)$  какому-то конкретному из спектров  $S(\langle \bar{e}_{it} \rangle)$ ,  $1 \leq t \leq j$ , следует, что существует единственное значение  $k = q$ , для которого вычисленное частное  $\frac{s_1^*}{s_1^{iq}} = k_1 l$  для некоторого целого  $l$ . Если и  $s_2^* \neq 0$ , то для убедительности можно проверить, что и  $\frac{s_2^*}{s_2^{iq}} = k_2 l$ . Следовательно,  $S(\bar{x})$  принадлежит спектру синдромов  $S(\langle \bar{e}_{iq} \rangle)$  и получается  $i$ -кратным умножением компонент  $S(\bar{e}_{iq})$  на коэффициенты из формулы (7). В силу формул (6) и (7) можно с уверенностью утверждать, что искомая ошибка  $\bar{e} \in \langle \bar{e}_{iq} \rangle$  и, более того, что  $\bar{e} = \sigma^l(\bar{e}_{iq})$ . На выход декодера подается истинное сообщение  $\bar{c} = \bar{x} + \bar{e}$ .

Конечно, с ростом длин ОБЧХ-кодов, а также кратности исправляемых ошибок соответственно растут и названные списки образующих  $\Gamma$ -орбит. Этот фактор в конце концов скажется на скорости работы норменного декодера. Применение  $G$ -орбит и их инвариантов позволит существенно сократить поисковые процедуры норменного метода.

### $G$ -орбиты ошибок и их инварианты в ОБЧХ-кодах

Циклотомическая подстановка  $\phi$  задана на двоичном пространстве возможных ошибок  $E_n$ , которое, в общем, совпадает с пространством  $V_n$ , таким образом, чтобы ее действие отражалось на синдромах векторов-ошибок как действие автоморфизма Фробениуса в поле Галуа  $GF(2^m)$  (см. теорему 2). Более того, имеет место следующая теорема.

**Теорема 6.** В ОБЧХ-коде  $C$  для всякой  $\Gamma$ -орбиты векторов-ошибок  $J \subset E_n$   $\phi(J) = J'$  – новая  $\Gamma$ -орбита. Если норма  $N_J = (N_{12}, N_{13}, \dots, N_{(t-1)t})$  с компонентами  $N_{ij} \in GF(2^m)$ , то  $N_{\phi(J)} = (N_{12}^2, N_{13}^2, \dots, N_{(t-1)t}^2)$ .

Из первой части теоремы 6 следует наглядное строение  $G$ -орбит.

**Теорема 7.** Для всякого вектора-ошибки  $\bar{e}$  в ОБЧХ-коде  $C$   $G$ -орбита  $\langle \bar{e} \rangle_G$  имеет следующую структуру:  $\langle \bar{e} \rangle_G = \{ \langle \bar{e} \rangle_\Gamma, \langle \phi(\bar{e}) \rangle_\Gamma, \dots, \langle \phi^{\mu-1}(\bar{e}) \rangle_\Gamma \}$  для наименьшего целого  $\mu \geq 1$  такого, что  $\langle \phi^\mu(\bar{e}) \rangle_\Gamma = \langle \bar{e} \rangle_G$ . При этом  $\mu = t$  или же является делителем  $t$ .

**Определение 5.** В условиях теоремы 7 совокупность  $N_{J_G} = \{ N(J_\Gamma), N(\phi(J_\Gamma)), \dots, N(\phi^{\mu-1}(J_\Gamma)) \}$  всех попарно различных норм  $\Gamma$ -орбит, составляющих  $G$ -орбиту  $J_G$ , называется норменным спектром этой  $G$ -орбиты.  $G$ -орбита  $J_G$  называется полной, если  $|J_G| = mn$ . Норменный спектр  $G$ -орбиты  $J_G$  называется полным, если  $|N_{J_G}| = m$ .

**Теорема 8** (о полноте норменного спектра  $G$ -орбиты). Пусть в ОБЧХ-коде  $C$  с  $t = 2$  (с конструктивным расстоянием  $d = 2t + 1 = 5$ ) норма  $N(J)$   $\Gamma$ -орбиты  $J$  принадлежит полю  $GF(2^m)$ , но не принад-

лежит ни одному из собственных подполей этого поля. Тогда норменный спектр  $N_{J_G}$  является полным и сама  $G$ -орбита  $J_G$  также является полной.

Доказательство. Пусть в условиях теоремы норма некоторой  $\Gamma$ -орбиты  $N(J) = N_0 \in GF(2^m)$  и не принадлежит ни одному из подполей данного поля. Так как всякий элемент поля  $GF(2^m)$  является алгебраическим над  $Z/2Z$ ,  $N_0$  – это корень единственного неприводимого над  $Z/2Z$  полинома степени  $m$ . Следовательно,  $N_0$  имеет  $m - 1$  сопряженных в поле  $GF(2^m)$  элементов:  $\{N_0, N_0^2, N_0^4, \dots, N_0^{2^{m-1}}\}$ . Очевидно, что они различны и, как следует из теоремы 6, составляют спектр норм  $G$ -орбиты  $J_G$ , состоящей из уникальных  $m$  элементов. Теорема доказана.

Пусть  $\bar{e}$  – произвольный вектор-ошибка с синдромом  $S(\bar{e})$  и нормой  $N = N(S(\bar{e}))$  в ОБЧХ-коде  $C$  с  $t = 2$ , причем  $N \in GF(2^m)$ . Тогда в силу теорем 6 и 7 норменный спектр  $G$ -орбиты  $J_G$  есть множество  $T = \{N, N^2, \dots, N^{2^{\mu-1}}\}$  для целого  $\mu = m$  или же делящего  $m$ . Как всякий элемент поля  $GF(2^m)$ ,  $N$  является алгебраическим над  $Z/2Z$ , т. е. выступает корнем некоторого полинома с коэффициентами из  $Z/2Z$ . Следовательно, в кольце полиномов  $Z/2Z[x]$  существует единственный неприводимый многочлен с корнем  $N$ , обозначаемый, как правило, через  $\text{Irr}(N, x)$ . Согласно теории полей Галуа множество  $T$  представляет все множество корней полинома  $\text{Irr}(N, x)$ . В силу теоремы Безу

$$\text{Irr}(N, x) = x^\mu + p_{\mu-1}x^{\mu-1} + \dots + p_0 = (x - N) \cdot (x - N^2) \cdot \dots \cdot (x - N^{2^{\mu-1}}). \quad (9)$$

**Теорема 9.** В ОБЧХ-коде  $C$  при  $t = 2$  (с конструктивным расстоянием  $\delta = 2t + 1 = 5$ ) для всякой  $G$ -орбиты  $J_G$  с нормой  $N \in GF(2^m)$  множество  $T$  и полином (9) являются инвариантами этой  $G$ -орбиты, т. е. не зависят от выбора представителя  $\bar{e} \in J_G$ .

**Определение 6.** В условиях теоремы 9 полином (9) называется полиномиальным инвариантом  $G$ -орбиты  $J_G$ .

**Теорема 10.** Пусть  $\langle \bar{e}_1 \rangle_G$  и  $\langle \bar{e}_2 \rangle_G$  – две  $G$ -орбиты векторов-ошибок из декодируемой ОБЧХ-кодом  $C$  с  $t = 2$  совокупности  $K$ , имеющие различные полиномиальные инварианты  $p_1(x)$  и  $p_2(x)$ . Тогда множества  $T_1$  и  $T_2$  норменных спектров данных  $G$ -орбит не пересекаются.

Доказательство следует из того факта, что различные неприводимые полиномы не могут иметь общих корней.

**Пример 4.** В продолжение примера 3 заметим, что в коде  $C_{65}(1, 5)$  множество  $\Gamma$ -орбит векторов-ошибок весом 1–3 разбивается на 67  $G$ -орбит. Одна  $G$ -орбита совпадает с  $\Gamma$ -орбитой одиночных ошибок, их синдромы имеют единичную норму. Двойные ошибки укладываются в шесть  $G$ -орбит, две из них имеют уникальные инварианты, что подробно показано в табл. 4.

Таблица 4

Полиномиальные инварианты  $G$ -орбит  
двойных ошибок для кода  $C(1, 5)$  длиной 65

Table 4

Polynomial invariants of double error  
 $G$ -orbits for code  $C(1, 5)$  at length 65

$G$ -орбита	Количество $\Gamma$ -орбит	Полиномиальный инвариант
(1, 2)	6	$1 + x + x^2 + x^4 + x^6$
(1, 4)	6	$1 + x + x^3$
(1, 6)	6	$1 + x + x^2 + x^4 + x^6$
(1, 8)	6	$1 + x^3 + x^6$
(1, 12)	6	$1 + x^3 + x^6$
(1, 14)	2	$x$





12. Лидл Р, Нидеррайтер Г. *Конечные поля*. Жуков АЕ, Петров ВИ, переводчики; Нечаев ВИ, редактор. Москва: Мир; 1988. 2 тома.
13. Lu C-C, Welch LR. On automorphism groups of binary primitive BCH codes. In: *Proceedings of 1994 IEEE International symposium on information theory; 1994 June 27 – July 1; Trondheim, Norway*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 1994. p. 51. DOI: 10.1109/ISIT.1994.394919.
14. Липницкий ВА, Олексюк АО. Теория норм синдромов и плюс-декодирование. *Доклады БГУИР*. 2014;8:72–78.
15. Липницкий ВА, Олексюк АО. Перестановочный декодер для коррекции многократных ошибок непримитивными БЧХ-кодами. *Доклады БГУИР*. 2015;3:117–123.
16. Кушнеров АВ, Липницкий ВА, Королева МН. Обобщенные коды Боуза – Чоудхури – Хоквингема и их параметры. *Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С: Фундаментальные науки*. 2018;4:28–33.
17. Кушнеров АВ, Липницкий ВА, Королева МН. Свойства и параметры обобщенных кодов Боуза – Чоудхури – Хоквингема. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізика-матэматычных навук*. 2020;56(2):157–165. DOI: 10.29235/1561-2430-2020-56-2-157-165.
18. Липницкий ВА. *Современная прикладная алгебра. Математические основы защиты информации от помех и несанкционированного доступа*. Минск: БГУИР; 2005. 88 с.
19. Виноградов ИМ. *Основы теории чисел*. 8-е издание, исправленное. Москва: Наука; 1972. 167 с.

## References

1. MacWilliams FJ, Sloane NJA. *The theory of error-correcting codes*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company; 1977. XX, 762 p. (North-Holland mathematical library; volume 16).  
Russian edition: MacWilliams FJ, Sloane NJA. *Теория кодов, исправляющих ошибки*. Grushko II, Zinov'eva VA, translators; Bassalygo LA, editor. Moscow: Svyaz'; 1979. 744 p.
2. Morelos-Zaragoza RH. *The art of error correcting coding*. Chichester: Jon Wiley & Sons; 2002. 238 p.  
Russian edition: Morelos-Zaragoza R. *Искусство помехоустойчивого кодирования. Методы, алгоритмы, применение*. Afanas'ev VB, translator. Moscow: Tekhnosfera; 2005. 320 p.
3. Kudryashov BD. *Osnovy teorii kodirovaniya* [Fundamentals of coding theory]. Saint Petersburg: BHV-Petersburg; 2016. 400 p. Russian.
4. Konopel'ko VK, Lipnitski VA, Dvornikov VD, Bobov MN, Korolev AI, Boriskevich AA, et al. *Teoriya prikladnogo kodirovaniya* [Theory of applied coding]. Konopel'ko VK, editor. Minsk: Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics; 2004. 2 volumes. Russian.
5. Konopel'ko VK, Lipnitski VA. *Teoriya norm sindromov i perestanovochnoe dekodirovanie pomekhoustoichivykh kodov* [Syndrome norm theory and permutation decoding of error-correcting codes]. Minsk: Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics; 2000. 241 p. Russian.
6. Lipnitski VA, Konopel'ko VK. *Normennoe dekodirovanie pomekhoustoichivykh kodov i algebraicheskie uravneniya* [Norm decoding of error-correcting codes and algebraic equations]. Minsk: Publishing Center of Belarusian State University; 2007. 239 p. Russian.
7. Lipnitski VA. *Teoriya norm sindromov* [Theory of syndrome norms]. Minsk: Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics; 2011. 96 p. Russian.
8. Lipnitski VA, Sereda EV. Polynomial invariants of  $G$ -orbits of errors in non-primitive BCH codes with designed distance of 5. *Vestnik Grodzenskaga dzjarzhavnaga wniversitjeta imja Janki Kupaly. Seriya 2. Matjematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naja tjechnika i kiravanne*. 2019;9(1):118–127. Russian.
9. Lipnitski VA, Serada AU. Properties of triple error orbits  $G$  and their invariants in Bose – Chaudhuri – Hocquenghem codes  $C_7$ . *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*. 2019;64(1):110–117. Russian. DOI: 10.29235/1561-8358-2019-64-1-110-117.
10. Kushnerov AV, Lipnitski VA. Properties and applications of  $G$ -orbits polynomial invariants of errors in reverse codes. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2018;3:21–28. Russian.
11. Blahut RE. *Theory and practice of error control codes*. Reading: Addison-Wesley Publishing Company; 1984. 452 p.  
Russian edition: Blahut R. *Теория и практика кодов, контролируемых ошибок*. Grushko II, Blinovskii VM, translators; Zigangirov KSh, editor. Moscow: Mir; 1986. 576 p.
12. Lidl R, Niederreiter H. *Introduction to finite fields and their applications*. Cambridge: Cambridge University Press; 1986. VIII, 407 p.  
Russian edition: Lidl R, Niederreiter H. *Конечные поля*. Zhukov AE, Petrov VI, translators; Nechaev VI, editor. Moscow: Mir; 1988. 2 volumes.
13. Lu C-C, Welch LR. On automorphism groups of binary primitive BCH codes. In: *Proceedings of 1994 IEEE International symposium on information theory; 1994 June 27 – July 1; Trondheim, Norway*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 1994. p. 51. DOI: 10.1109/ISIT.1994.394919.
14. Lipnitski VA, Aliaksiuk AO. Theory of normal syndrome and plus-decoding. *Doklady BGUIR*. 2014;8:72–78. Russian.
15. Lipnitski VA, Aliaksiuk AO. Correction commute decoder for multiple errors with not primitive BCH-codes. *Doklady BGUIR*. 2015;3:117–123. Russian.
16. Kushnerov AV, Lipnitski VA, Koroliova MN. Properties and options of the generic BCH-codes. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya S: Fundamental'nye nauki*. 2018;4:28–33. Russian.
17. Kushnerov AV, Lipnitski VA, Koroliova MN. The properties and parameters of generic Bose – Chaudhuri – Hocquenghem codes. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and mathematics series*. 2020;56(2):157–165. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2020-56-2-157-165.
18. Lipnitski VA. *Sovremennaya prikladnaya algebra. Matematicheskie osnovy zashchity informatsii ot pomekh i nesantsionirovannogo dostupa* [Modern applied algebra. The mathematical principles of protecting information from interference and unauthorized access]. Minsk: Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics; 2005. 88 p. Russian.
19. Vinogradov IM. *Osnovy teorii chisel* [Fundamentals of number theory]. 8<sup>th</sup> edition, revised. Moscow: Nauka; 1972. 167 p. Russian.



---

---

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

---

## DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

---

---

УДК 517.925

### УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ И ПРОБЛЕМА АЙЗЕРМАНА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Б. С. КАЛИТИН<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Исследуется устойчивость равновесия обыкновенных дифференциальных уравнений методом знакопостоянных функций Ляпунова. Выделены типы нелинейных скалярных дифференциальных уравнений шестого порядка, для которых используются знакопостоянные вспомогательные функции. Получены достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения и установлено, что проблема Айзермана имеет положительное решение относительно корней соответствующего линейного дифференциального уравнения. Проведенные исследования подчеркивают преимущества использования знакоположительных функций по сравнению с классическим методом применения определенно-положительных функций Ляпунова.

**Ключевые слова:** скалярное дифференциальное уравнение; равновесие; устойчивость; знакопостоянная функция Ляпунова.

---

#### Образец цитирования:

Калитин БС. Устойчивость решений и проблема Айзермана для дифференциальных уравнений шестого порядка. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;2:49–58.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-49-58>

#### For citation:

Kalitine BS. Stability of solutions and the problem of Aizerman for sixth-order differential equations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;2:49–58. Russian.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-49-58>

---

#### Автор:

**Борис Сергеевич Калитин** – кандидат физико-математических наук, доцент; профессор кафедры аналитической экономики и эконометрики экономического факультета.

#### Author:

**Boris S. Kalitine**, PhD (physics and mathematics), docent; professor at the department of analytical economics and econometrics, faculty of economy.  
[kalitine@yandex.by](mailto:kalitine@yandex.by)



## STABILITY OF SOLUTIONS AND THE PROBLEM OF AIZERMAN FOR SIXTH-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

B. S. KALITINE<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

This article is devoted to the investigation of stability of equilibrium of ordinary differential equations using the method of semi-definite Lyapunov's functions. Types of scalar nonlinear sixth-order differential equations for which regular constant auxiliary functions are used are emphasized. Sufficient conditions of global asymptotic stability and instability of the zero solution have been obtained and it has been established that the Aizerman problem has a positive solution concerning the roots of the corresponding linear differential equation. Studies highlight the advantages of using semi-definite functions compared to definitely positive Lyapunov's functions.

**Keywords:** scalar differential equation; equilibrium; stability; semi-definite Lyapunov's function.

### Введение

Устойчивость решений нелинейных скалярных дифференциальных уравнений третьего, четвертого, пятого и шестого порядков рассматривалась в работах А. И. Огурцова [1–4]. Подробное изложение и анализ этих результатов содержатся в монографии [5]. Во всех упомянутых публикациях представлено решение задачи об устойчивости равновесия в целом (глобальная асимптотическая устойчивость) с использованием метода функций Ляпунова [6; 7], подразумевающего построение определенно-положительной функции  $V$  с неположительной производной по времени  $\dot{V}$ , вычисленной в силу динамической системы. Критерием качества полученных достаточных условий устойчивости в целом (оценка близости достаточных условий к необходимым) служит тот факт, что в соответствующем линейном случае такие условия являются необходимыми и достаточными для асимптотической устойчивости.

В работах [8, гл. 2; 9–13] решается задача об устойчивости равновесия скалярных дифференциальных уравнений второго, третьего, четвертого и пятого порядков на основании метода знакопостоянных функций Ляпунова.

Напомним, что проблема Айзермана сформулирована в работе [14] для систем из  $n$  линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sum_{k=1}^n a_{1k} x_k + b x_1, \\ \dot{x}_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k, \quad i = \overline{2, n}. \end{cases} \quad (1)$$

Наряду с этим рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sum_{k=1}^n a_{1k} x_k + f(x_1), \\ \dot{x}_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k, \quad i = \overline{2, n}, \quad f(0) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Предположим, что согласно условиям Рауса – Гурвица [5] решение  $x_i = 0, i = \overline{1, n}$ , линейной системы (1) асимптотически устойчиво для коэффициента  $b$ , удовлетворяющего при некоторых постоянных  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  условию

$$\alpha < b < \beta.$$

Проблема Айзермана состоит в следующем вопросе: будет ли решение  $x_i = 0, i = \overline{1, n}$ , нелинейной системы (2) устойчивым в целом, если выполнено обобщенное условие Рауса – Гурвица

$$\alpha < f(x_1) < \beta, \quad x_1 \in \mathbb{R}?$$

Предлагаемая статья является продолжением исследований [8–13]. Здесь множество всех линейных скалярных дифференциальных уравнений шестого порядка с постоянными коэффициентами условно разделены на две группы в зависимости от того, существует или не существует действительный корень

характеристического уравнения. В соответствии с этим рассмотрены два типа дифференциальных уравнений. Для каждого из них доказано, что относительно параметра корня (действительного или его действительной части) проблема Айзермана [14] имеет положительное решение. То есть при замене такого параметра произвольной непрерывной функцией, удовлетворяющей условиям, аналогичным линейному случаю, свойство глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения сохраняется.

Пусть  $\mathbb{R}^n$  – вещественное  $n$ -мерное евклидово пространство со скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  и нормой  $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ . Положим  $B_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \alpha\}$  для  $\alpha > 0$ .

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f(0) = 0, \quad (3)$$

где  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  – непрерывная функция, удовлетворяющая условиям, обеспечивающим единственность решений в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Решение (3), проходящее через точку  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  в момент времени  $t = 0$ , будем обозначать  $x(x_0, t)$ , т. е.  $x(x_0, 0) = x_0$ . Система (3) обладает тривиальным решением  $x = 0$ .

Напомним следующие понятия и определения теории устойчивости [5; 6; 8]. Множество  $Y \subset \mathbb{R}^n$  называется положительно инвариантным, если для каждого состояния  $x_0 \in Y$  решение  $x(x_0, t) \in Y$  для всех  $t > 0$ . Множество  $\gamma^-(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^n : y = x(x_0, t), t \leq 0\}$  решения  $x(x_0, t)$  системы (3) называется отрицательной полутраекторией, проходящей через точку  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Решение  $x = 0$  системы (3) является:

- устойчивым, если  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x_0 \in B_\delta) \Rightarrow \|x(x_0, t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$ ;
- притягивающим, если  $(\exists \sigma > 0)(\forall \alpha > 0)(\exists T > 0)(\forall x_0 \in B_\sigma) \Rightarrow \|x(x_0, t)\| < \alpha \quad \forall t \geq T$ ;
- асимптотически устойчивым, если оно устойчивое и притягивающее;
- устойчивым в целом, если оно асимптотически устойчивое и для всех  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  норма решения  $\|x(x_0, t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ ;
- неустойчивым, если  $(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x_0 \in B_\delta)(\exists t^* > 0) \Rightarrow \|x(x_0, t^*)\| \geq \varepsilon$ .

Пусть  $\mathbb{R}^+$  – множество неотрицательных действительных чисел,  $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$  – множество непрерывно дифференцируемых функций из  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^+$ . Если  $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ , то через

$$\dot{V}(x_0) = \frac{dV(x_0)}{dt} = \left\langle \frac{\partial V(x_0)}{\partial x}, f(x_0) \right\rangle$$

обозначают производную по времени функции  $V$  в силу системы (3) в точке  $x_0$ .

На основании теорем 3.3.2 и 3.3.3 [13, с. 151–152] о глобальной асимптотической устойчивости компактного положительно инвариантного множества динамической системы сформулируем утверждение относительно свойств устойчивости нулевого решения автономной системы дифференциальных уравнений (3).

**Теорема 1.** *Предположим, что для системы (3) существует функция  $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$  такая, что выполняются условия:*

1)  $V(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad V(0) = 0$ ;

2)  $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ ;

3) множество  $Y_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$  не содержит ограниченных отрицательных полутраекторий, кроме нулевой;

4) все решения системы (3) ограничены при  $t \geq 0$ .

Тогда решение  $x = 0$  системы (3) устойчиво в целом.

В работе [11] доказана следующая лемма.

**Лемма.** *Пусть задана система дифференциальных уравнений  $\dot{x} = Ax + f(t)$ , где  $A$  – постоянная  $n \times n$ -матрица,  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  – непрерывная функция. Предположим:*

1) все характеристические корни  $\lambda_j(A)$  матрицы  $A$  имеют отрицательные действительные части  $\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0, j = 1, n$ ;

2) функция  $f(t)$  ограничена при  $t \geq 0$ .

Тогда все решения системы  $\dot{x} = Ax + f(t)$  ограничены при  $t \geq 0$ .

Теорема 1 и лемма будут использованы для решения проблемы Айзермана.

Пусть  $x(t) (x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R})$  – скалярная  $k$  раз непрерывно дифференцируемая функция. Для краткости положим

$$x^{(1)} = \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad x^{(2)} = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \dots, \quad x^{(k)} = \frac{d^kx}{dt^k} \quad (x^{(0)} = x)$$

для производных по времени высших порядков функции  $x(t)$ .

### Уравнения шестого порядка

**1. Случай комплексных корней.** Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$x^{(6)} + a_1x^{(5)} + a_2x^{(4)} + a_3\ddot{x} + a_4\dot{x} + a_5x = 0 \quad (4)$$

с постоянными вещественными коэффициентами  $a_j, j = \overline{1, 6}$ . Предположим, что его характеристическое уравнение

$$\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 = 0 \quad (5)$$

имеет два комплексно-сопряженных корня. Тогда уравнение (5) всегда можно записать в виде

$$(\lambda^2 + p\lambda + q)(\lambda^4 + \alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta) = 0 \quad (6)$$

с постоянными вещественными коэффициентами  $p, q, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Здесь  $p$  соответствует вещественной части пары комплексно-сопряженных корней квадратного уравнения  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ . Перемножив скобки в левой части (6), приходим к выводу, что коэффициенты  $a_j, j = \overline{1, 6}$ , уравнения (5) и коэффициенты  $p, q, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  уравнения (6) связаны соотношениями

$$\begin{aligned} a_1 &= p + \alpha, \quad a_2 = q + \alpha p + \beta, \quad a_3 = \alpha q + \beta p + \gamma, \\ a_4 &= \beta q + \gamma p + \delta, \quad a_5 = \gamma q + \delta p, \quad a_6 = \delta q. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} x^{(6)} + (p + \alpha)x^{(5)} + (q + \alpha p + \beta)x^{(4)} + (\alpha q + \beta p + \gamma)\ddot{x} + \\ + (\beta q + \gamma p + \delta)\dot{x} + (\gamma q + \delta p)x + \delta q x = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, q$  – те же постоянные, что и в (6), а  $p = p(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(5)})$  – непрерывная функция, обеспечивающая единственность решений уравнения (8) для всех  $x \in \mathbb{R}$ .

Очевидно, что в линейном случае этому дифференциальному уравнению соответствует характеристическое уравнение (5) с коэффициентами (7). Поэтому условие глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения  $x = \dot{x} = \ddot{x} = \ddot{\ddot{x}} = x^{(4)} = x^{(5)} = 0$  линейного дифференциального уравнения (8) относительно коэффициента  $p$  состоит в требовании  $p > 0$ .

Покажем, что при замене коэффициента  $p$  в линейном уравнении (8) на нелинейную функцию  $p(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(5)})$  с условием

$$p(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(5)}) > 0 \quad \forall (x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(5)}) \in \mathbb{R}^6 \quad (9)$$

свойство глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения (для нелинейного дифференциального уравнения (8)) сохраняется. Тем самым будет показано, что проблема Айзермана [14] относительно коэффициента  $p$  имеет положительное решение.

Перейдем от уравнения (8) к соответствующей системе дифференциальных уравнений с использованием следующей замены переменных:

$$\begin{aligned} y &= \dot{x}, \quad z = \dot{y}, \quad u = \dot{z}, \\ v &= x^{(4)} + \alpha\ddot{x} + \beta\ddot{\ddot{x}} + \gamma\dot{x} + \delta x, \\ w &= x^{(5)} + \alpha x^{(4)} + \beta\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \delta\dot{x}. \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда получаем равенства  $\ddot{x} = z, \ddot{\ddot{x}} = u$ . Поэтому согласно (8) имеем представление  $\dot{w} + pw + qv = 0$ , что дает дифференциальное уравнение относительно переменной  $w$ , а именно  $\dot{w} = -qv - pw$ . Из предыдущего следуют также равенства

$$x^{(4)} = \dot{u}, \quad \dot{v} = w, \quad (11)$$

из которых с учетом (10) последовательно выводим дифференциальное уравнение относительно переменной  $u$ :

$$\begin{aligned} v &= \dot{u} + \alpha\ddot{x} + \beta\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \delta x \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{u} &= v - \alpha\ddot{x} - \beta\ddot{x} - \gamma\dot{x} - \delta x = v - \alpha u - \beta z - \gamma y - \delta x. \end{aligned}$$

Кроме того, на основании (10) можем записать представления для производных четвертого и пятого порядков:

$$\begin{aligned} x^{(4)} &= v - \alpha\ddot{x} - \beta\ddot{x} - \gamma\dot{x} - \delta x = -\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u + v, \\ x^{(5)} &= w - \alpha x^{(4)} - \beta\ddot{x} - \gamma\dot{x} - \delta\dot{x} = \\ &= w - \alpha(-\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u + v) - \beta u - \gamma z - \delta y = \\ &= \alpha\delta x + (\alpha\gamma - \delta)y + (\alpha\beta - \gamma)z + (\alpha^2 - \beta)u + w. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, в результате замены переменных (10) приходим к системе из шести дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u + v, \\ \dot{v} = w, \\ \dot{w} = -qv - \varphi(x, y, z, u, v, w)w, \end{cases} \quad (13)$$

где в соответствии с формулами (11) и (12) положено

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, u, v, w) &= p(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, x^{(4)}, x^{(5)}) = \\ &= p(x, y, z, u, -\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u + v, \alpha\delta x + (\alpha\gamma - \delta)y + (\alpha\beta - \gamma)z + (\alpha^2 - \beta)u + w). \end{aligned} \quad (14)$$

Нетрудно убедиться в том, что из устойчивости в целом или неустойчивости нулевого решения  $x = y = z = u = v = w = 0$  системы уравнений (13) следует устойчивость в целом или соответственно неустойчивость нулевого решения  $x = \dot{x} = \ddot{x} = \ddot{x} = x^{(4)} = x^{(5)} = 0$  дифференциального уравнения (8).

Для исследования устойчивости нулевого решения системы (13) рассмотрим знакопостоянную функцию Ляпунова

$$V(x, y, z, u, v, w) = \frac{1}{2}qv^2 + \frac{1}{2}w^2. \quad (15)$$

Ее производная по времени в силу системы (8) равна

$$\dot{V}(x, y, z, u, v, w) = -\varphi(x, y, z, u, v, w)w^2.$$

Можно легко проверить, что при условии, когда функция  $p(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(5)})$  постоянная, равная  $p$ , характеристическое уравнение линейного дифференциального уравнения (8) имеет вид (6).

Потребуем, чтобы для (6) корни  $\lambda_j, j = \overline{1, 4}$ , уравнения

$$\lambda^4 + \alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta = 0 \quad (16)$$

имели отрицательные вещественные части, т. е.  $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$ . Кроме того, пусть выполняются неравенства

$$q > 0; \quad \varphi(x, y, z, u, v, w) > 0 \quad \forall (x, y, z, u, v, w) \in \mathbb{R}^6. \quad (17)$$

Далее согласно условию 3 теоремы 1 укажем условия, при которых множество  $Y_\infty \setminus \{(0, 0, 0, 0, 0, 0)\}$ , где производная  $\dot{V}(x, y, z, u, v, w) = 0$ , не содержит ограниченных отрицательных полутраекторий. Действительно, если бы такая полутраектория  $\gamma^- = \gamma^-(x, y, z, u, v, w) \neq \{(0, 0, 0, 0, 0, 0)\}$  существовала,

то вдоль нее компонента  $w(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$ , а значит, и ее производная по времени  $\dot{w}(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$ . Вдоль указанной полутраектории  $\gamma^-$  система (13) последовательно трансформируется следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u + v, \\ \dot{v} = w, \\ \dot{w} = -qv - \varphi(x, y, z, u, v, w)w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u + v, \\ \dot{v} = 0, \\ 0 = -qv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u + v, \\ v = 0. \end{cases}$$

То есть вдоль  $\gamma^-$  система (13) сводится к упрощенной линейной системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u. \end{cases} \quad (18)$$

Согласно критерию Гурвица (см. [5]) асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (18) вытекает из того, что корни уравнения (16) имеют отрицательные вещественные части. На основании свойств структуры общего решения таких линейных систем дифференциальных уравнений можем заключить, что существование отличных от нулевой ограниченных отрицательных полутраекторий невозможно, и мы приходим к противоречию с предположением о наличии  $\gamma^-$ .

Таким образом, если корни уравнения (16) имеют отрицательные действительные части, то функция (15) удовлетворяет условию 3 теоремы 1.

Покажем теперь, что всякое решение  $(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t))$  системы (13) ограничено при  $t > 0$ . Действительно, так как  $q > 0$ , то наличие знакоположительной функции (15) со знакоотрицательной производной по времени означает, что решение  $(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t))$  системы (13) ограничено по координатам  $(v(t), w(t))$ . Покажем ограниченность и по остальным координатам.

Рассмотрим первые четыре уравнения системы (13), предполагая, что  $v(t)$  – компонента решения  $(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t))$ . Имеем подсистему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u + v(t). \end{cases} \quad (19)$$

С учетом предположения относительно корней уравнения (16) матрица соответствующей однородной системы для системы (19) обладает лишь характеристическими корнями с отрицательными действительными частями. Кроме того, мы показали ограниченность функции  $v(t)$ . Следовательно, для системы дифференциальных уравнений (19) выполнены все условия леммы, которая дает ограниченность по координатам  $(x(t), y(t), z(t), u(t))$ .

Таким образом, выполнены все требования теоремы 1, определяющей устойчивость в целом нулевого решения системы (13).

Поскольку очевидно, что множество точек  $(x, y, z, u, 0, 0) \in \mathbb{R}^6$  системы (13) положительно инвариантно, то неустойчивость решения  $x = y = z = u = 0$  системы (18) влечет неустойчивость решения  $x = y = z = u = v = w = 0$  исходной системы (13).

В результате приходим к справедливости следующей теоремы.

**Теорема 2.** *Предположим, что линейное скалярное дифференциальное уравнение (4) с постоянными коэффициентами имеет характеристическое уравнение в виде (6), где уравнение  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ ,  $p > 0$ , обладает комплексно-сопряженными корнями. Тогда нулевое решение  $x = \dot{x} = \ddot{x} = \ddot{\ddot{x}} = x^{(4)} = x^{(5)} = 0$  скалярного дифференциального уравнения (8) с постоянными величинами  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, q$  и функцией*

$p = p(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(5)})$  устойчиво в целом, если все корни уравнения (16) имеют отрицательные действительные части и выполнено условие (17), где функция  $\varphi: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$  определена соотношениями (14).

Если среди корней уравнения (16) есть хотя бы один корень с положительной действительной частью, то нулевое решение уравнения (8) неустойчиво.

*Замечание 1.* Из условий устойчивости в целом в теореме 2, в частности, следует условие выполнения неравенства (9) для функции  $p(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(5)})$ . Другими словами, для линейного дифференциального уравнения (8) проблема Айзермана [14] имеет положительное решение относительно коэффициента  $p$ .

**2. Случай вещественного корня.** Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение (4) и предположим, что его характеристическое уравнение (5) имеет вещественный корень  $\lambda = -s < 0$ . Тогда уравнение (5) может быть записано в виде

$$(\lambda + s)(\lambda^5 + \alpha\lambda^4 + \beta\lambda^3 + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda + \mu) = 0, \quad (20)$$

причем нетрудно установить, что между коэффициентами  $a_j, j = \overline{1, 6}$ , уравнения (5) и коэффициентами  $s, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$  уравнения (20) имеет место связь в виде равенств

$$a_1 = \alpha + s, \quad a_2 = \beta + \alpha s, \quad a_3 = \gamma + \beta s, \quad a_4 = \delta + \gamma s, \quad a_5 = \mu + \delta s, \quad a_6 = \mu s. \quad (21)$$

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$x^{(6)} + (\alpha + s)x^{(5)} + (\beta + \alpha s)x^{(4)} + (\gamma + \beta s)\ddot{x} + (\delta + \gamma s)\dot{x} + (\mu + \delta s)x + \mu s x = 0, \quad (22)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$  – постоянные, а  $s = s(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(5)})$  – непрерывная функция, обеспечивающая единственность решений для всех  $x \in \mathbb{R}$ .

Очевидно, что в линейном случае это уравнение соответствует характеристическому уравнению (20) с коэффициентами (21). Поэтому условие глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения  $x = \dot{x} = \ddot{x} = \ddot{\ddot{x}} = x^{(4)} = x^{(5)} = 0$  линейного уравнения относительно коэффициента  $s$  состоит в требовании  $s > 0$ . Покажем, что при замене коэффициента  $s$  в линейном уравнении (22) на нелинейную функцию  $s(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(5)})$  с условием

$$s(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(5)}) > 0 \quad \forall (x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(5)}) \in \mathbb{R}^6 \quad (23)$$

свойство глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения (для нелинейного дифференциального уравнения (22)) сохраняется. Тем самым будет показано, что проблема Айзермана относительно корня характеристического уравнения  $s$  имеет положительное решение.

Перейдем от уравнения (22) к соответствующей системе дифференциальных уравнений с помощью замены переменных

$$y = \dot{x}, \quad z = \dot{y}, \quad u = \dot{z}, \quad v = \dot{u}, \quad w = x^{(5)} + \alpha x^{(4)} + \beta \ddot{x} + \gamma \dot{x} + \delta x + \mu x. \quad (24)$$

Тогда с учетом представления (24) относительно переменной  $w$  получаем дифференциальное уравнение  $\dot{w} = -sw$ .

Выведем дифференциальное уравнение относительно переменной  $v$ . Из (24) имеем

$$\dot{v} = \ddot{u} = \ddot{\ddot{z}} = y^{(4)} = x^{(5)} = w - \alpha x^{(4)} - \beta \ddot{x} - \gamma \dot{x} - \delta x - \mu x = w - \mu x - \delta y - \gamma z - \beta u - \alpha v.$$

Из предыдущего также следует, что  $\dot{x} = y = z$ . Таким образом, в результате использования новых переменных (24) приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -\mu x - \delta y - \gamma z - \beta u - \alpha v + w, \\ \dot{w} = -\varphi(x, y, z, u, v, w)w, \end{cases} \quad (25)$$

где положено

$$\varphi(x, y, z, u, v, w) = s(x, y, z, u, v, -\mu x - \delta y - \gamma z - \beta u - \alpha v + w). \quad (26)$$

Для этой системы рассмотрим знакопостоянную функцию с соответствующей производной по времени в силу системы (25):

$$V(x, y, z, u, v, w) = \frac{1}{2} w^2, \quad \dot{V}(x, y, z, u, v, w) = -\varphi(x, y, z, u, v, w) w^2. \quad (27)$$

Легко проверить, что при условии, когда функция  $s(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(5)})$  постоянная, равная  $s$ , характеристическое уравнение линейного дифференциального уравнения (22) имеет вид (20).

Потребуем для уравнения (20), чтобы

$$\lambda^5 + \alpha\lambda^4 + \beta\lambda^3 + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda + \mu = 0, \quad \operatorname{Re}(\lambda_j) < 0, \quad j = \overline{1, 5}, \quad (28)$$

т. е. корни уравнения (28) имели отрицательные вещественные части. Кроме того, пусть выполняется неравенство

$$\varphi(x, y, z, u, v, w) > 0 \quad \forall (x, y, z, u, v, w) \in \mathbb{R}^6. \quad (29)$$

Тогда производная  $\dot{V}$  будет неположительной.

Согласно условию 3 теоремы 1 потребуем, чтобы множество  $Y_\infty \setminus \{(0, 0, 0, 0, 0, 0)\}$ , где производная  $\dot{V}(x, y, z, u, v, w) = 0$ , не содержало ограниченных отрицательных полутраекторий. Действительно, если бы такая полутраектория  $\gamma^- = \gamma^-(x, y, z, u, v, w) \neq \{(0, 0, 0, 0, 0, 0)\}$  существовала, то вдоль нее компонента  $w(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$ , а значит, и ее производная по времени  $\dot{w}(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$ . Вдоль этой полутраектории система (25) преобразуется в систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -\mu x - \delta y - \gamma z - \beta u - \alpha v. \end{cases} \quad (30)$$

На основании критерия Гурвица нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда корни уравнения (28) будут иметь отрицательные вещественные части. Следовательно, линейная система (30) не может содержать отличных от нулевой ограниченных отрицательных полутраекторий, что приводит к противоречию с существованием  $\gamma^-$ . Таким образом, функция (28) удовлетворяет условию 3 теоремы 1.

Покажем теперь выполнение условия 4 теоремы 1, т. е. что все решения системы (24) ограничены. Действительно, наличие знакоположительной функции (27) со знакоотрицательной производной означает, что всякое решение  $(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t))$  системы (25) ограничено по координате  $w(t)$ .

Покажем ограниченность и по остальным координатам. Для этого рассмотрим первые пять уравнений системы дифференциальных уравнений (26):

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -\mu x - \delta y - \gamma z - \beta u - \alpha v + w(t), \end{cases}$$

где  $w(t)$  – компонента решения  $(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t))$ . С учетом предположения относительно корней уравнения (28) матрица соответствующей ей однородной системы имеет лишь характеристические корни с отрицательными действительными частями. Кроме того, мы показали ограниченность функции  $w(t)$ . Следовательно, выполнены все условия леммы, из которой получаем ограниченность решений системы (25) и по координатам  $(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t))$ .

Таким образом, выполнены все требования теоремы 1, и мы приходим к следующей теореме.

**Теорема 3.** Нулевое решение  $x = \dot{x} = \ddot{x} = \ddot{\ddot{x}} = x^{(4)} = x^{(5)} = 0$  скалярного дифференциального уравнения (22) с постоянными величинами  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$  и функцией  $s = s(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(5)})$  устойчиво в целом,



если выполнено условие (29), где функция  $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  определена соотношением (26), а корни уравнения (28) имеют отрицательные вещественные части.

Если же среди корней уравнения (28) есть хотя бы один корень с положительной действительной частью, то нулевое решение уравнения (22) неустойчиво.

Здесь утверждение о неустойчивости следует из того факта, что множество точек  $(x, y, z, u, v, 0) \in \mathbb{R}^6$  системы (25) положительно инвариантно.

*Замечание 2.* Из условий устойчивости в целом в теореме 3, в частности, следует условие выполнения неравенства (23) для функции  $s = s(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(5)})$ . Иначе говоря, для линейного дифференциального уравнения (22) проблема Айзермана [14] имеет положительное решение относительно  $s$  (вещественного корня характеристического уравнения).

### Заключение

Укажем на следующие важные обстоятельства, которые вытекают из проведенных исследований устойчивости равновесия:

- достаточные условия устойчивости в целом, полученные в теореме 2 относительно коэффициента  $p$  и в теореме 3 относительно коэффициента  $s$ , совпадают с необходимыми и достаточными условиями асимптотической устойчивости в соответствующем линейном случае скалярных дифференциальных уравнений (8) и (22). Это указывает на общепринятую качественную оценку полученных условий устойчивости в целом;
- для каждой пары исследованных скалярных дифференциальных уравнений шестого порядка задача Айзермана имеет следующее более сильное решение. В отличие от традиционной постановки проблемы Айзермана [5; 14] постоянный коэффициент в линейном случае можно заменить функцией, зависящей от всех фазовых переменных соответствующей системы дифференциальных уравнений, и при этом сохраняется свойство устойчивости в целом.

### Библиографические ссылки

1. Огурцов АИ. Об устойчивости в целом решений нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. *Известия высших учебных заведений. Математика.* 1958;1:124–129.
2. Огурцов АИ. Об устойчивости решений двух нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. *Прикладная математика и механика.* 1959;23(1):179–181.
3. Огурцов АИ. Об устойчивости решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. *Известия высших учебных заведений. Математика.* 1959;3:200–209.
4. Огурцов АИ. Об устойчивости решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений пятого и шестого порядков. *Математические записки.* 1962;3(2):78–93.
5. Барбашин ЕА. *Функции Ляпунова.* Москва: Наука; 1970. 240 с.
6. Ляпунов АМ. *Общая задача об устойчивости движения.* Москва: Гостехиздат; 1950. 472 с.
7. Калитин БС. *Устойчивость дифференциальных уравнений (Метод знакопостоянных функций Ляпунова).* Саарбрюккен: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2012. 223 с.
8. Калитин БС. Об устойчивости уравнения Лъенара. *Известия высших учебных заведений. Математика.* 2018;10:17–28.
9. Калитин БС. Об устойчивости дифференциальных уравнений третьего порядка. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;2:25–33.
10. Калитин БС. Устойчивость некоторых дифференциальных уравнений четвертого и пятого порядков. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;1:18–27.
11. Калитин БС. О проблеме Айзермана для систем двух дифференциальных уравнений. *Математические заметки.* 2019;105(2):240–250.
12. Калитин БС. *Устойчивость динамических систем второго порядка.* Саарбрюккен: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2019. 138 с.
13. Калитин БС. *Устойчивость динамических систем (Метод знакопостоянных функций Ляпунова).* Саарбрюккен: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2013. 259 с.
14. Айзерман МА. Об одной проблеме, касающейся устойчивости «в большом» динамических систем. *Успехи математических наук.* 1949;4(4):187–188.

### References

1. Ogurtsov AI. [On the stability in general of solutions of third-order and fourth-order nonlinear differential equations]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika.* 1958;1:124–129. Russian.
2. Ogurtsov AI. [On the stability of solutions of two nonlinear differential equations of the third and fourth order]. *Prikladnaya matematika i mekhanika.* 1959;23(1):179–181. Russian.
3. Ogurtsov AI. [On the stability of solutions of certain third-order and fourth-order nonlinear differential equations]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika.* 1959;3:200–209. Russian.

4. Ogurtsov AI. [On the stability of solutions of certain nonlinear differential equations of the fifth and sixth orders]. *Matematicheskie zapiski*. 1962;3(2):78–93. Russian.
5. Barbashin EA. *Funktsii Lyapunova* [Lyapunov's functions]. Moscow: Nauka; 1970. 240 p. Russian.
6. Lyapunov AM. *Obshchaya zadacha ob ustoichivosti dvizheniya* [The general problem of the stability of motion]. Moscow: Gostekhizdat; 1950. 472 p. Russian.
7. Kalitine BS. *Ustoichivost' differentsial'nykh uravnenii (Metod znakopostoyannykh funktsii Lyapunova)* [Stability of differential equations (Lyapunov's method of semi-definite functions)]. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2012. 223 p. Russian.
8. Kalitine BS. Stability of Liénard equation. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika*. 2018;10:17–28. Russian.
9. Kalitine BS. On the stability of third order differential equations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2018;2:25–33. Russian.
10. Kalitine BS. Stability of some differential equations of the fourth-order and fifth-order. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;1:18–27. Russian.
11. Kalitine BS. [On the Aizerman problem for systems of two differential equations]. *Matematicheskie zametki*. 2019;105(2):240–250. Russian.
12. Kalitine BS. *Ustoichivost' dinamicheskikh sistem vtorogo poryadka* [Stability of second-order dynamical systems]. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2019. 138 p. Russian.
13. Kalitine BS. *Ustoichivost' dinamicheskikh sistem (Metod znakopostoyannykh funktsii Lyapunova)* [Stability of dynamical systems (Lyapunov's method of semi-definite functions)]. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2013. 259 p. Russian.
14. Aizerman MA. [On one problem concerning stability «in large» dynamical systems]. *Uspekhi matematicheskikh nauk*. 1949;4(4):187–188. Russian.

Статья поступила в редколлегию 09.06.2020.  
Received by editorial board 09.06.2020.

---

---

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

---

## PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

---

---

УДК 519.4

### **D-ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ С НЕРАВНОТОЧНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ**

**В. П. КИРЛИЦА<sup>1)</sup>**

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Исследуется проблема построения непрерывных (число наблюдений не фиксируется) и точных (с фиксированным числом наблюдений)  $D$ -оптимальных планов экспериментов для линейной множественной регрессии в случае, когда дисперсия ошибок зависит от точки, в которой проводится наблюдение. Определен класс функций, описывающих изменение дисперсии неравноточных наблюдений, для которых можно построить непрерывные и точные  $D$ -оптимальные планы экспериментов. Для линейной множественной регрессии с тремя факторами построены непрерывные  $D$ -оптимальные планы экспериментов с четырьмя различными типами неравноточных наблюдений. Для каждого из этих типов выделен свой собственный класс функций, описывающих изменение дисперсии наблюдений.

**Ключевые слова:**  $D$ -оптимальные планы экспериментов; линейная множественная регрессия; неравноточные наблюдения.

---

#### **Образец цитирования:**

Кирлица В.П.  $D$ -оптимальные планы экспериментов для линейной множественной регрессии с неравноточными наблюдениями. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;2:59–67. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-59-67>

#### **For citation:**

Kirlitsa VP.  $D$ -optimal experimental designs for linear multiple regression under heteroscedastic observations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;2:59–67. Russian. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-59-67>

---

#### **Автор:**

**Валерий Петрович Кирлица** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики.

#### **Author:**

**Valery P. Kirlitsa**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of mathematical modeling and data analysis, faculty of applied mathematics and computer science. [kirlitsa@bsu.by](mailto:kirlitsa@bsu.by)



## ***D*-OPTIMAL EXPERIMENTAL DESIGNS FOR LINEAR MULTIPLE REGRESSION UNDER HETEROSCEDASTIC OBSERVATIONS**

*V. P. KIRLITSA*<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

The problem of construction of «continuous» (number of observations is not fixed) and «exact» (number of observations is fixed) *D*-optimal experimental designs for linear multiple regression in the case when variance of errors of observations depends on regressor value is studied in this paper. Families of functions that determine heteroscedastic observations are found for which it is possible to construct «continuous» and «exact» *D*-optimal experimental designs. «Continuous» *D*-optimal experimental designs under four different types of heteroscedasticity are constructed for linear multiple regression with three regressors.

**Keywords:** *D*-optimal experimental designs; linear multiple regression; heteroscedastic observations.

Рассмотрим линейную модель множественной регрессии

$$y_j = \theta_1 x_{j1} + \dots + \theta_m x_{jm} + \varepsilon(x^{(j)}), \quad j = \overline{1, n}, \quad n \geq m, \quad (1)$$

где  $y_j$  – наблюдаемые переменные;  $x^{(j)} = (x_{j1}, \dots, x_{jm})$  –  $m$ -векторы контролируемых переменных, компоненты которых принадлежат единичному  $m$ -мерному кубу ( $|x_i| \leq 1, i = \overline{1, m}$ );  $\theta_1, \dots, \theta_m$  – неизвестные параметры;  $\varepsilon(x^{(j)})$  – некоррелированные случайные ошибки наблюдений с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями, зависящими от точки наблюдения  $x^{(j)}$ :

$$D\{\varepsilon(x^{(j)})\} = d(x^{(j)}) > 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где  $d(x_1, \dots, x_m)$  – некоторая непрерывная функция. Далее в статье на функцию  $d(x)$  будут наложены определенные ограничения снизу, позволяющие строить *D*-оптимальные планы экспериментов для модели наблюдений (1), (2).

Для равнооточных наблюдений ( $d(x) = d = \text{const}$ ) проблема построения точных *D*-оптимальных планов экспериментов для модели наблюдений (1) довольно полно исследована [1]. В статье [2] построены точные *D*-оптимальные планы экспериментов для линейной модели парной регрессии с неравнооточными наблюдениями. В работе [3] исследовалась проблема построения точных *D*-оптимальных планов экспериментов для модели наблюдений (1) при линейном изменении дисперсии наблюдений. В статье автора [4] результаты построения точных *D*-оптимальных планов экспериментов для модели наблюдений (1), полученные в работе [3], были обобщены на более широкий класс дисперсий неравнооточных наблюдений:

$$D\{\varepsilon(x^{(j)})\} = d(x^{(j)}) \geq a_0 + a_1 x_{j1} + \dots + a_m x_{jm} > 0, \quad a_0 > 0, \quad |a_1| + \dots + |a_m| < a_0, \quad (3)$$

для каждой точки наблюдения  $x^{(j)}$ . Функция  $d(x_1, \dots, x_m)$  в (3) должна быть такой, чтобы в вершинах единичного  $m$ -мерного куба ( $|x_j| \leq 1, j = \overline{1, m}$ ) неравенство (3) обращалось в равенство. Как отмечалось в статье [4], класс функций  $d(x_1, \dots, x_m)$ , описываемых неравенством (3), обширен. К нему принадлежат постоянные функции (равнооточные наблюдения)  $d(x_1, \dots, x_m) = a_0 > 0, a_1 = 0, \dots, a_m = 0$ , с линейным изменением  $d(x_1, \dots, x_m) = a_0 + a_1 x_{j1} + \dots + a_m x_{jm} > 0, a_0 > 0, |a_1| + \dots + |a_m| < a_0$ , вогнутые функ-

ции  $d(x_1, \dots, x_m) = -\sum_{j=1}^m k_j \left(x_j - \frac{a_j}{2k_j}\right)^2 + \sum_{j=1}^m \frac{a_j^2 + 4k_j^2}{4k_j} + a_0, \quad k_j > 0, \quad j = \overline{1, m}$ .

В статье [4] процесс построения точных *D*-оптимальных планов экспериментов для модели наблюдений (1) основывался на следующих теоремах.

**Теорема 1.** *Существует точный *D*-оптимальный план экспериментов  $\varepsilon^0$  для модели наблюдений (1), (3), все точки спектра которого лежат в вершинах единичного  $m$ -мерного куба.*

Как следствие, из теоремы 1 вытекает теорема 2.

**Теорема 2.** Для модели (1) с некоррелированными ошибками наблюдений, имеющими средние значения 0 и дисперсии

$$D\{\varepsilon(x^{(j)})\} = d(x^{(j)}) \geq a_0, \quad a_0 > 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (4)$$

для функций  $d(x_1, \dots, x_m)$  таких, что неравенство (4) обращается в равенство в вершинах единичного  $m$ -мерного куба, точные  $D$ -оптимальные планы экспериментов остаются такими же, как и для равноточных наблюдений.

Примерами функций, удовлетворяющих (4), могут служить функции  $d(x) = a_0$ ;  $d(x) = -kx_1^2 - \dots - kx_m^2 + a_0 + mk, k > 0$ ;  $d(x) = a_0 + m - |x_1| - \dots - |x_m|, a_0 > 0$ , и ряд других.

Теорема 1 позволяет эффективно строить оптимальные планы экспериментов, используя ЭВМ. Например, для частного случая модели наблюдений (1)

$$y_j = \theta_0 + \theta_1 x_{j1} + \theta_2 x_{j2} + \varepsilon(x^{(j)}), \quad j = \overline{1, n}, \quad n \geq 3, \quad (5)$$

с дисперсиями наблюдений  $d(x_1, x_2)$ , удовлетворяющими неравенству

$$d(x_1, x_2) \geq 8 + 4x_1 - 3x_2, \quad (6)$$

построим точные  $D$ -оптимальные планы экспериментов. Функции  $d(x_1, x_2)$ , удовлетворяющие (6), должны быть такими, чтобы в вершинах единичного квадрата  $x^{(1)} = (1, 1)$ ,  $x^{(2)} = (-1, 1)$ ,  $x^{(3)} = (-1, -1)$ ,  $x^{(4)} = (1, -1)$  неравенство (6) обращалось в равенство. Дисперсии наблюдений в этих вершинах должны быть равны  $d_1 = d(1, 1) = 9$ ,  $d_2 = d(-1, 1) = 1$ ,  $d_3 = d(-1, -1) = 7$ ,  $d_4 = d(1, -1) = 15$ . Такими функциями могут быть, например,  $d(x_1, x_2) = 8 + 4x_1 - 3x_2$ ;  $d(x_1, x_2) = -(x_1 - 2)^2 - \left(x_2 + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{65}{4}$ ;  $d(x_1, x_2) = -3\left(x_1 - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(x_2 + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{187}{12}$  и ряд других. Точный  $D$ -оптимальный план экспериментов для модели (5), (6) с  $n$  наблюдениями согласно теореме 1 имеет следующую структуру:

$$\varepsilon_n^0 = \begin{Bmatrix} x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(3)}, & x^{(4)} \\ m_1, & m_2, & m_3, & m_4 \end{Bmatrix},$$

где  $0 \leq m_j \leq n - 1, j = 1, 2, 3, 4, m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = n$ . Информационная матрица плана экспериментов  $\varepsilon_n^0$  равна

$$M(\varepsilon_n^0) = \frac{m_1}{d_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, 1, 1) + \frac{m_2}{d_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, 1) + \frac{m_3}{d_3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} (1, -1, -1) + \frac{m_4}{d_4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1, 1, -1) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & e \\ c & e & a \end{pmatrix},$$

где

$$a = \frac{m_1}{d_1} + \frac{m_2}{d_2} + \frac{m_3}{d_3} + \frac{m_4}{d_4}, \quad b = \frac{m_1}{d_1} - \frac{m_2}{d_2} - \frac{m_3}{d_3} + \frac{m_4}{d_4},$$

$$c = \frac{m_1}{d_1} + \frac{m_2}{d_2} - \frac{m_3}{d_3} - \frac{m_4}{d_4}, \quad e = \frac{m_1}{d_1} - \frac{m_2}{d_2} + \frac{m_3}{d_3} - \frac{m_4}{d_4}.$$

Определитель информационной матрицы равен

$$|M(\varepsilon_n^0)| = f(m_1, m_2, m_3) = a^3 + 2bce - a(b^2 + c^2 + e^2),$$

где  $0 \leq m_j \leq n - 1, j = 1, 2, 3, 1 \leq m_1 + m_2 + m_3 \leq n$ . Вычисляя функцию  $f(m_1, m_2, m_3)$  и фиксируя  $m_1, m_2, m_3$ , при которых эта функция принимает наибольшее значение, строим точные  $D$ -оптимальные планы экспериментов. Для  $n = 5, 6$  оптимальные планы таковы:

$$\varepsilon_5^0 = \left\{ \begin{matrix} x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(3)}, & x^{(4)} \\ 1, & 2, & 1, & 1 \end{matrix} \right\}, \quad |M(\varepsilon_5^0)| = 1,066\ 667;$$

$$\varepsilon_6^0 = \left\{ \begin{matrix} x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(3)}, & x^{(4)} \\ 1, & 2, & 2, & 1 \end{matrix} \right\}, \quad |M(\varepsilon_6^0)| = 1,896\ 296.$$

Для модели (1) с неравноточными наблюдениями можно построить непрерывные  $D$ -оптимальные планы экспериментов в случае, когда дисперсия ошибок наблюдений  $d(x_1, \dots, x_m)$  удовлетворяет неравенству

$$d(x_1, \dots, x_m) \geq \frac{\sigma^2}{m}(x_1^2 + \dots + x_m^2), \quad \sigma \neq 0, \quad |x_1| + \dots + |x_m| \neq 0. \quad (7)$$

В вершинах единичного  $m$ -мерного куба неравенство (7) должно обращаться в равенство. Неравенству (7) удовлетворяют, например, функции  $d(x_1, \dots, x_m) = \frac{\sigma^2}{m}(x_1^2 + \dots + x_m^2)$ ;  $d(x_1, \dots, x_m) = \frac{\sigma^2}{m}(2m - x_1^2 - \dots - x_m^2)$ ;  $d(x_1, \dots, x_m) = \frac{\sigma^2}{m}(2m - |x_1| - \dots - |x_m|)$ ;  $d(x_1, \dots, x_m) = \sigma^2$  (равноточные наблюдения) и ряд других.

Обозначим через  $X = (x_{i,j})$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $n \geq m$ , матрицу плана экспериментов для модели наблюдений (1), в которой  $i$ -я строка – координаты  $i$ -й точки  $x^{(i)}$ , предназначенной для проведения наблюдения. В статье [4] доказана следующая теорема.

**Теорема 3.** Для модели наблюдений (1), (7) матрица плана экспериментов  $X$  со взаимно ортогональными столбцами и элементами, равными  $\pm 1$ , определяет непрерывный  $D$ -оптимальный план экспериментов

$$\varepsilon^0 = \left\{ x^{(i)}, p_i = \frac{1}{n}, i = \overline{1, n} \right\}, \quad (8)$$

где  $p_i$  – веса наблюдений в точках  $x^{(i)}$ .

Примером непрерывных  $D$ -оптимальных планов (8) для модели наблюдений (1), (7), как известно, являются планы полных факторных экспериментов, в которых точки спектра сосредоточены во всех  $2^m$  вершинах единичного  $m$ -мерного куба с равными весами  $\frac{1}{2^m}$ . При больших значениях  $m$  они содержат чрезмерно много точек. Процесс подбора матрицы  $X$  плана эксперимента, удовлетворяющей теореме 3, но с меньшим, чем  $2^m$ , числом точек, связан с построением матриц Адамара. Так, например, для модели наблюдений (1), (7) с четырьмя факторами  $D$ -оптимальный план может содержать четыре точки:  $x^{(1)} = (1, 1, 1, 1)$ ,  $x^{(2)} = (1, -1, 1, -1)$ ,  $x^{(3)} = (1, 1, -1, -1)$ ,  $x^{(4)} = (1, -1, -1, 1)$ , а не 16 точек, как в полных факторных экспериментах.

Результаты теоремы 3 можно использовать для построения точных  $D$ -оптимальных планов экспериментов с числом наблюдений  $N$ , кратным  $n$ , т. е.  $N = ns$ ,  $s \geq 1$ . Для модели наблюдений (1), (7) с четырьмя факторами точки спектра  $x^{(1)} = (1, 1, 1, 1)$ ,  $x^{(2)} = (1, -1, 1, -1)$ ,  $x^{(3)} = (1, 1, -1, -1)$ ,  $x^{(4)} = (1, -1, -1, 1)$  точного  $D$ -оптимального плана экспериментов будут такими же, как и для непрерывного плана, но в каждой точке спектра надо проводить по  $s$  наблюдений. Определитель информационной матрицы такого плана равен  $(4s)^4$ .

Для частного случая модели наблюдений (1), (2)

$$y_i = \theta_1 x_{i1} + \theta_2 x_{i2} + \theta_3 x_{i3} + \varepsilon(x^{(i)}), \quad i = \overline{1, n}, \quad n \geq 3, \quad (9)$$

можно получить некоторые новые результаты относительно построения  $D$ -оптимальных планов экспериментов с неравноточными наблюдениями по сравнению с публикациями [4; 5].

Для модели (9) с неравноточными наблюдениями можно сконструировать четыре типа непрерывных  $D$ -оптимальных планов экспериментов. Конкретный тип планов экспериментов, как будет показано далее, определяется видом функции, описывающей изменение дисперсии наблюдений.

Введем следующие обозначения. Пронумеруем вершины единичного куба  $|x_j| \leq 1$ ,  $j = \overline{1, 3}$ :

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (1, 1, 1), \quad x^{(2)} = (1, -1, 1), \quad x^{(3)} = (1, -1, -1), \quad x^{(4)} = (1, 1, -1), \\ x^{(5)} &= (-1, 1, 1), \quad x^{(6)} = (-1, -1, 1), \quad x^{(7)} = (-1, -1, -1), \quad x^{(8)} = (-1, 1, -1). \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть  $d_j = d(x^{(j)})$ ,  $j \geq 1$ , – дисперсии наблюдений в вершинах единичного куба, и эти значения положительны.

В процессе построения непрерывных  $D$ -оптимальных планов для модели (9) с неравноточными наблюдениями покажем, что для любого из четырех типов планов экспериментов на каждой из шести граней единичного куба можно надлежащим образом выбрать три различные вершины куба, определяющие точки спектра оптимальных планов. Определители информационных матриц оптимальных планов принимают значения  $\frac{16}{27d_i d_j d_k}$ , где  $i, j, k$  – номера таких вершин. Эти определители должны быть равны между собой. Следовательно, произведение дисперсий  $d_i d_j d_k$  должно быть неизменным, т. е.  $d_i d_j d_k = F$ , где  $F$  – фиксированное значение. Таким образом, для каждого из четырех типов непрерывных  $D$ -оптимальных планов экспериментов для модели (9) с неравноточными наблюдениями можно построить шесть планов, определители информационных матриц которых равны  $\frac{16}{27F}$ , где  $F$  может быть выбрано произвольным положительным числом.

**Теорема 4.** Для модели (9) с некоррелированными ошибками наблюдений, имеющими средние значения 0 и дисперсии  $d(x_1, x_2, x_3)$ , можно построить шесть непрерывных  $D$ -оптимальных планов экспериментов для каждого из четырех различных типов дисперсий наблюдений  $d(x_1, x_2, x_3)$  с заданным значением определителей информационных матриц, равным  $\frac{16}{27F}$ .

Для дисперсий наблюдений  $d(x_1, x_2, x_3)$  первого типа, удовлетворяющих неравенству

$$d(x_1, x_2, x_3) \geq \frac{1}{4}((d_1 + d_3)x_1^2 + (d_1 + d_2)x_2^2 + (d_2 + d_3)x_3^2 + 2d_1x_1x_2 - 2d_3x_1x_3 - 2d_2x_2x_3), \quad (11)$$

в котором равенство выполняется в точках  $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$  и  $|x_1| + |x_2| + |x_3| \neq 0$ , произведение  $d_1 d_2 d_3 = F$ , оптимальные планы имеют вид

$$\begin{aligned} \epsilon_1^0 &= \begin{Bmatrix} x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(3)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}, \quad \epsilon_2^0 = \begin{Bmatrix} x^{(5)}, & x^{(7)}, & x^{(8)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}, \quad \epsilon_3^0 = \begin{Bmatrix} x^{(1)}, & x^{(5)}, & x^{(8)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}, \\ \epsilon_4^0 &= \begin{Bmatrix} x^{(2)}, & x^{(3)}, & x^{(7)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}, \quad \epsilon_5^0 = \begin{Bmatrix} x^{(3)}, & x^{(7)}, & x^{(8)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}, \quad \epsilon_6^0 = \begin{Bmatrix} x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(5)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для дисперсий наблюдений  $d(x_1, x_2, x_3)$  второго типа, удовлетворяющих неравенству

$$d(x_1, x_2, x_3) \geq \frac{1}{4}((d_2 + d_4)x_1^2 + (d_3 + d_4)x_2^2 + (d_2 + d_3)x_3^2 + 2d_4x_1x_2 + 2d_2x_1x_3 + 2d_3x_2x_3), \quad (13)$$

в котором равенство выполняется в точках  $x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}$  и  $|x_1| + |x_2| + |x_3| \neq 0$ , произведение  $d_2 d_3 d_4 = F$ , оптимальные планы имеют вид

$$\begin{aligned} \epsilon_7^0 &= \begin{Bmatrix} x^{(2)}, & x^{(3)}, & x^{(4)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}, \quad \epsilon_8^0 = \begin{Bmatrix} x^{(5)}, & x^{(6)}, & x^{(8)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}, \quad \epsilon_9^0 = \begin{Bmatrix} x^{(4)}, & x^{(5)}, & x^{(8)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}, \\ \epsilon_{10}^0 &= \begin{Bmatrix} x^{(2)}, & x^{(3)}, & x^{(6)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}, \quad \epsilon_{11}^0 = \begin{Bmatrix} x^{(3)}, & x^{(4)}, & x^{(8)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}, \quad \epsilon_{12}^0 = \begin{Bmatrix} x^{(2)}, & x^{(5)}, & x^{(6)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

Для дисперсий наблюдений  $d(x_1, x_2, x_3)$  третьего типа, удовлетворяющих неравенству

$$d(x_1, x_2, x_3) \geq \frac{1}{4}((d_1 + d_3)x_1^2 + (d_3 + d_4)x_2^2 + (d_1 + d_4)x_3^2 - 2d_3x_1x_2 + 2d_1x_1x_3 - 2d_4x_2x_3), \quad (15)$$

в котором равенство выполняется в точках  $x^{(1)}, x^{(3)}, x^{(4)}$  и  $|x_1| + |x_2| + |x_3| \neq 0$ , произведение  $d_1d_3d_4 = F$ , оптимальные планы имеют вид

$$\begin{aligned} \epsilon_{13}^0 &= \begin{Bmatrix} x^{(1)}, & x^{(3)}, & x^{(4)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}, \quad \epsilon_{14}^0 = \begin{Bmatrix} x^{(5)}, & x^{(6)}, & x^{(7)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}, \quad \epsilon_{15}^0 = \begin{Bmatrix} x^{(1)}, & x^{(4)}, & x^{(5)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}, \\ \epsilon_{16}^0 &= \begin{Bmatrix} x^{(3)}, & x^{(6)}, & x^{(7)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}, \quad \epsilon_{17}^0 = \begin{Bmatrix} x^{(3)}, & x^{(4)}, & x^{(7)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}, \quad \epsilon_{18}^0 = \begin{Bmatrix} x^{(1)}, & x^{(5)}, & x^{(6)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для дисперсий наблюдений  $d(x_1, x_2, x_3)$  четвертого типа, удовлетворяющих неравенству

$$d(x_1, x_2, x_3) \geq \frac{1}{4}((d_2 + d_4)x_1^2 + (d_1 + d_2)x_2^2 + (d_1 + d_4)x_3^2 - 2d_2x_1x_2 - 2d_4x_1x_3 + 2d_1x_2x_3), \quad (17)$$

в котором равенство выполняется в точках  $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(4)}$  и  $|x_1| + |x_2| + |x_3| \neq 0$ , произведение  $d_1d_2d_4 = F$ , оптимальные планы имеют вид

$$\begin{aligned} \epsilon_{19}^0 &= \begin{Bmatrix} x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(4)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}, \quad \epsilon_{20}^0 = \begin{Bmatrix} x^{(6)}, & x^{(7)}, & x^{(8)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}, \quad \epsilon_{21}^0 = \begin{Bmatrix} x^{(1)}, & x^{(4)}, & x^{(8)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}, \\ \epsilon_{22}^0 &= \begin{Bmatrix} x^{(2)}, & x^{(6)}, & x^{(7)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}, \quad \epsilon_{23}^0 = \begin{Bmatrix} x^{(4)}, & x^{(7)}, & x^{(8)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}, \quad \epsilon_{24}^0 = \begin{Bmatrix} x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(6)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

В планах экспериментов (12), (14), (16), (18) точки спектров – это точки (10).

Доказательство. Опишем вначале процесс построения непрерывных  $D$ -оптимальных планов, соответствующих дисперсиям наблюдений  $d(x_1, x_2, x_3)$  первого типа. Для  $D$ -оптимального плана  $\epsilon_1^0$  по теореме эквивалентности Кифера – Вольфовица [6] должно выполняться неравенство

$$\frac{1}{d(x_1, x_2, x_3)}(x_1, x_2, x_3)M^{-1}(\epsilon_1^0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq 3, \quad |x_1| \leq 1, \quad |x_2| \leq 1, \quad |x_3| \leq 1, \quad (19)$$

где  $M(\epsilon_1^0)$  – информационная матрица плана экспериментов. В точках спектра плана  $\epsilon_1^0$  неравенство (19) должно обращаться в равенство (как необходимое условие). Исходя из условий теоремы Кифера – Вольфовица, построим класс функций  $d(x_1, x_2, x_3)$ , определяющих поведение дисперсии ошибок наблюдений для плана  $\epsilon_1^0$ . Информационная матрица плана  $\epsilon_1^0$  равна

$$M(\epsilon_1^0) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{d_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, 1, 1) + \frac{1}{d_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, 1) + \frac{1}{d_3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} (1, -1, -1) \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & e \\ c & e & a \end{pmatrix},$$

где

$$a = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3}, \quad b = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_3}, \quad c = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_3}, \quad e = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3}. \quad (20)$$



Определитель матрицы  $M(\varepsilon_1^0)$  равен  $\frac{a^3 + 2bce - a(b^2 + c^2 + e^2)}{27}$ . Матрица, обратная к матрице  $M(\varepsilon_1^0)$ , имеет вид

$$M^{-1}(\varepsilon_1^0) = \frac{3}{a^3 + 2bce - a(b^2 + c^2 + e^2)} \begin{pmatrix} a^2 - e^2, & ce - ab, & be - ac \\ ce - ab, & a^2 - c^2, & bc - ae \\ be - ac, & bc - ae, & a^2 - b^2 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Разрешая неравенство (19) относительно  $d(x_1, x_2, x_3)$  с учетом (21), получим класс функций  $d(x_1, x_2, x_3)$ , определяющих изменение дисперсии наблюдений для плана  $\varepsilon_1^0$ :

$$d(x_1, x_2, x_3) \geq f(x_1, x_2, x_3), \quad (22)$$

где

$$f(x) = \frac{(a^2 - e^2)x_1^2 + (a^2 - c^2)x_2^2 + (a^2 - b^2)x_3^2 + 2(ce - ab)x_1x_2 + 2(be - ac)x_1x_3 + 2(bc - ae)x_2x_3}{a^3 + 2bce - a(b^2 + c^2 + e^2)}.$$

Если теперь в функции  $f(x_1, x_2, x_3)$  вернуться к исходным обозначениям (20), то неравенство (22) обратится в неравенство (11). Необходимое условие оптимальности плана  $\varepsilon_1^0$  также выполняется, так как в точках  $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$  спектра плана неравенство (11) обращается в равенство. Точки спектра плана  $\varepsilon_1^0$  лежат на грани  $x_1 = 1$  единичного куба. Неравенству (11) удовлетворяет множество функций  $d(x_1, x_2, x_3)$ , поскольку значения  $d_1, d_2, d_3$  различные, но такие, что  $d_1d_2d_3 = F$ . Определитель информационной матрицы плана  $\varepsilon_1^0$  равен  $\frac{16}{27d_1d_2d_3}$ . Оптимальность плана  $\varepsilon_1^0$  доказана.

Оптимальность остальных планов экспериментов  $\varepsilon_2^0 - \varepsilon_6^0$ , соответствующих дисперсиям (11), докажем следующим образом. В вершинах единичного куба, принадлежащих грани  $x_1 = -1$ , значения дисперсий наблюдений, соответствующих (11), удовлетворяют соотношениям

$$d_5 = d(x^{(5)}) \geq d_3, \quad d_6 = d(x^{(6)}) \geq d_1 + d_2 + d_3, \quad d_7 = d(x^{(7)}) \geq d_1, \quad d_8 = d(x^{(8)}) \geq d_2. \quad (23)$$

Согласно (23) минимальное значение произведения трех различных дисперсий таково:  $d_5d_7d_8 \geq F = d_3d_1d_2$ . Следовательно, на грани  $x_1 = -1$  можно построить непрерывный  $D$ -оптимальный план только в том случае, если  $d_5 = d_3, d_7 = d_1, d_8 = d_2$ . Тогда  $d_5d_7d_8 = F$ . Это достигается, если в точках  $x^{(5)}, x^{(7)}, x^{(8)}$  плана  $\varepsilon_2^0$  в (11) выполняется равенство. Но есть ли такие функции  $d(x_1, x_2, x_3)$ , удовлетворяющие (11), для которых в точках спектров планов  $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0$  неравенство (11) обращается в равенство? Ответ утвердительный. Примерами таких функций являются следующие:

$$d(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4} \left( (d_1 + d_3)x_1^2 + (d_1 + d_2)x_2^2 + (d_2 + d_3)x_3^2 + 2d_1x_1x_2 - 2d_3x_1x_3 - 2d_2x_2x_3 \right);$$

$$d(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4} \left( \left( d_1 + d_3 - \frac{k}{3} \right) x_1^2 + \left( d_1 + d_2 - \frac{k}{3} \right) x_2^2 + \left( d_2 + d_3 - \frac{k}{3} \right) x_3^2 + B \right),$$

$$B = 2d_1x_1x_2 - 2d_3x_1x_3 - 2d_2x_2x_3 + k, \quad k > 3 \max \{ d_1 + d_3, d_1 + d_2, d_2 + d_3 \}.$$

Можно построить и ряд других подобных функций. Итак, дисперсиям вида (11) на грани  $x_1 = -1$  единичного куба соответствует оптимальный план  $\varepsilon_2^0$ .

Аналогичным образом можно показать оптимальность планов  $\varepsilon_3^0 - \varepsilon_6^0$ , соответствующих дисперсиям наблюдений первого типа, а также оптимальность остальных планов, соответствующих дисперсиям наблюдений второго, третьего и четвертого типов. Теорема 4 доказана.

Непрерывные  $D$ -оптимальные планы, построенные по теореме 4, можно использовать для построения точных  $D$ -оптимальных планов экспериментов с числом наблюдений  $n$ , кратным 3, т. е.  $n = 3s, s \geq 1$ . Так, для модели (9) неравноточных наблюдений с дисперсиями  $d(x_1, x_2, x_3) = 0,25(-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 9)$   $D$ -оптимальный план с шестью наблюдениями равен

$$\varepsilon^0(6) = \left\{ \begin{matrix} x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(3)} \\ 2, & 2, & 2 \end{matrix} \right\}, \quad |M(\varepsilon^0(6))| = 128.$$

Для модели (9) равноточных наблюдений с дисперсиями  $\sigma^2 = 1$   $D$ -оптимальный план с шестью наблюдениями (согласно работе [1]) имеет вид

$$\varepsilon^0(6) = \left\{ \begin{matrix} x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(3)}, & x^{(4)} \\ 2, & 2, & 1, & 1 \end{matrix} \right\}, \quad |M(\varepsilon^0(6))| = 192.$$

В точках  $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}$  единичного куба дисперсии наблюдений для обоих планов равны 1, однако определители информационных матриц этих планов разные. Это вызвано тем, что дисперсии равноточных наблюдений не принадлежат классам функций, удовлетворяющих неравенствам (11), (13), (15), (17).

Для модели (9) неравноточных наблюдений, имеющих дисперсии

$$d(x_1, x_2, x_3) \geq \frac{\sigma^2}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \quad \sigma^2 \neq 0, \quad |x_1| + |x_2| + |x_3| \neq 0, \quad (24)$$

как частный случай теоремы 3 получаем следующую теорему.

**Теорема 5.** Для модели (9) с некоррелированными ошибками наблюдений, имеющими средние значения 0 и дисперсии (24), можно построить шесть непрерывных  $D$ -оптимальных планов экспериментов:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 = \left\{ \begin{matrix} x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(3)}, & x^{(4)} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \end{matrix} \right\}, \quad \varepsilon^0 = \left\{ \begin{matrix} x^{(5)}, & x^{(6)}, & x^{(7)}, & x^{(8)} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \end{matrix} \right\}, \quad \varepsilon^0 = \left\{ \begin{matrix} x^{(1)}, & x^{(4)}, & x^{(5)}, & x^{(8)} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \end{matrix} \right\}, \\ \varepsilon^0 = \left\{ \begin{matrix} x^{(2)}, & x^{(3)}, & x^{(6)}, & x^{(7)} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \end{matrix} \right\}, \quad \varepsilon^0 = \left\{ \begin{matrix} x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(5)}, & x^{(6)} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \end{matrix} \right\}, \quad \varepsilon^0 = \left\{ \begin{matrix} x^{(3)}, & x^{(4)}, & x^{(7)}, & x^{(8)} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Точки спектров каждого из этих планов лежат на одной и той же грани единичного куба.

Теорему 5 можно применять для построения точных  $D$ -оптимальных планов экспериментов с числом наблюдений  $n$ , кратным 4, т. е.  $n = 4s$ ,  $s \geq 1$ . Точки спектров таких планов такие же, как и для непрерывных планов, но в каждой точке надо проводить по  $s$  наблюдений.

В теореме 5 во всех вершинах единичного куба дисперсии наблюдений принимают одно и то же значение.

Покажем, что в принципе нельзя обобщить теорему 5 на случай разных значений дисперсий наблюдений в вершинах единичного куба. Проиллюстрируем это, например, для плана  $\varepsilon$  с точками спектра  $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}$  и дисперсиями в этих точках  $d_1 = 2, d_2 = d_3 = d_4 = 1$ . Информационная матрица плана

$$\varepsilon = \left\{ \begin{matrix} x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(3)}, & x^{(4)} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \end{matrix} \right\} \quad (25)$$

равна

$$M(\varepsilon) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3,5 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 3,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 3,5 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица

$$M^{-1}(\varepsilon) = 4 \begin{pmatrix} 0,3 & 0,05 & 0,05 \\ 0,05 & 0,3 & 0,05 \\ 0,05 & 0,05 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Если план  $\varepsilon$  претендует на  $D$ -оптимальность, то согласно критерию оптимальности Кифера – Вольфовица [6] должно выполняться неравенство

$$\frac{1}{d(x_1, x_2, x_3)}(x_1, x_2, x_3)M^{-1}(\epsilon) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq 3. \quad (26)$$

В (26) в точках спектра плана (25) должно выполняться равенство. Однако в точке  $x^{(1)}$ , в которой дисперсия равна 2,0, неравенство (26) не обращается в равенство, так как левая часть (26) в этой точке равна 2,4.

### Библиографические ссылки

1. Moysiadiis C, Kounias S. Exact  $D$ -optimal  $N$  observations  $2^k$  designs of resolution III, when  $N \cong 1$  or  $2 \pmod{4}$ . *Series Statistics*. 1983;14(3):367–379. DOI: 10.1080/02331888308801711.
2. Кирлица ВП. Точные  $D$ -оптимальные планы экспериментов для линейной модели парной регрессии. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика*. 2016;2:116–122.
3. Kirlitsa VP. Exact  $D$ -optimal designs of experiments for linear multiple model with linear variance of observations. In: *Computer data analysis and modeling. Robustness and computer intensive methods. Proceedings of the Seventh International conference; 2004 September 6–10; Minsk, Belarus. Volume 1*. Minsk: Belarusian State University; 2004. p. 165–167.
4. Кирлица ВП. Точные  $D$ -оптимальные планы экспериментов для линейной множественной регрессии с неравноточными наблюдениями. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2017;3:53–59.
5. Кирлица ВП. Построение  $D$ -оптимальных планов экспериментов для линейной множественной регрессии с неравноточными наблюдениями. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2019;2:27–33.
6. Ермаков СМ, Жиглявский АА. *Математическая теория оптимального эксперимента*. Москва: Наука; 1987. 320 с.

### References

1. Moysiadiis C, Kounias S. Exact  $D$ -optimal  $N$  observations  $2^k$  designs of resolution III, when  $N \cong 1$  or  $2 \pmod{4}$ . *Series Statistics*. 1983;14(3):367–379. DOI: 10.1080/02331888308801711.
2. Kirlitsa VP. Exact  $D$ -optimal designs of experiments for linear model of pair regression. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika*. 2016;2:116–122. Russian.
3. Kirlitsa VP. Exact  $D$ -optimal designs of experiments for linear multiple model with linear variance of observations. In: *Computer data analysis and modeling. Robustness and computer intensive methods. Proceedings of the Seventh International conference; 2004 September 6–10; Minsk, Belarus. Volume 1*. Minsk: Belarusian State University; 2004. p. 165–167.
4. Kirlitsa VP. Exact  $D$ -optimal designs of experiments for linear multiple regression with heteroscedastic observations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2017;3:53–59. Russian.
5. Kirlitsa VP. Construction  $D$ -optimal designs of experiments for linear multiple regression with heteroscedastic observations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;2:27–33. Russian.
6. Ermakov SM, Zhiglyavskii AA. *Matematicheskaya teoriya optimal'nogo eksperimenta* [The mathematical theory of optimal design]. Moscow: Nauka; 1987. 320 p. Russian.

Статья поступила в редколлегию 12.02.2020.  
Received by editorial board 12.02.2020.

## ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ LETTER TO THE EDITORS

В статью В. П. Кирлицы «Построение  $D$ -оптимальных планов экспериментов для линейной множественной регрессии с неравноточными наблюдениями», опубликованную в издании «Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика» (2019, № 2), необходимо внести исправления, не влияющие на приведенные в ней результаты. На с. 28 по вине автора допущена некорректная фраза после неравенства (2): «Функция  $d(x^{(j)})$  в (2) должна быть такой, чтобы в вершинах единичного  $m$ -мерного куба неравенство (2) обращалось в равенство». Эту фразу следует исключить из текста статьи.

Автор приносит извинения читателям журнала.

*В. П. Кирлица*<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Валерий Петрович Кирлица – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики БГУ.

*Valery P. Kirlitsa*, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of mathematical modeling and data analysis, faculty of applied mathematics and computer science, Belarusian State University.

E-mail: [kirlitsa@bsu.by](mailto:kirlitsa@bsu.by)

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА М-ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ GARCH(1, 1)

В. С. ТЕРЕХ<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Модель GARCH(1, 1) используется для анализа и прогнозирования финансовых и экономических временных рядов. В классическом варианте для оценки параметров модели применяется метод максимального правдоподобия, однако он неудобен при анализе моделей, остатки которых имеют распределения, отличные от нормального. Рассматривается метод М-оценки параметров модели GARCH(1, 1), представляющий собой обобщение метода максимального правдоподобия. Описан алгоритм построения М-оценок, исследованы их асимптотические свойства. Сформулирован ряд условий, при выполнении которых оценка является строго состоятельной и имеет асимптотически нормальное распределение. С помощью такого метода можно анализировать модели с различными распределениями остатков. В частности, модели с устойчивыми и умеренно устойчивыми распределениями, позволяющие учесть особенности реальных финансовых данных: кластеризацию волатильности, тяжелые хвосты, несимметричность.

**Ключевые слова:** модель GARCH; оценка параметров; М-оценка; состоятельность; асимптотическое распределение.

## ASYMPTOTIC PROPERTIES OF M-ESTIMATOR FOR GARCH(1, 1) MODEL PARAMETERS

U. S. TSERAKH<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

GARCH(1, 1) model is used for analysis and forecasting of financial and economic time series. In the classical version, the maximum likelihood method is used to estimate the model parameters. However, this method is not convenient for analysis of models with residuals distribution different from normal. In this paper, we consider M-estimator for the GARCH(1, 1) model parameters, which is a generalization of the maximum likelihood method. An algorithm for constructing an M-estimator is described and its asymptotic properties are studied. A set of conditions is formulated under which the estimator is strictly consistent and has an asymptotically normal distribution. This method allows to analyze models with different residuals distributions; in particular, models with stable and tempered stable distributions that allow to take into account the features of real financial data: volatility clustering, heavy tails, asymmetry.

**Keywords:** GARCH model; parameter estimation; M-estimator; consistency; asymptotic distribution.

### Образец цитирования:

Терех В.С. Асимптотические свойства М-оценки параметров модели GARCH(1, 1). *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020; 2:69–78.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-69-78>

### For citation:

Tserakh U.S. Asymptotic properties of M-estimator for GARCH(1, 1) model parameters. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;2:69–78. Russian.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-69-78>

### Автор:

**Владимир Сергеевич Терех** – аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Н. Н. Труш.

### Author:

**Uladzimir S. Tserakh**, postgraduate student at the department of probability theory and mathematical statistics, faculty of applied mathematics and computer science.  
[vladimir.terekh@gmail.com](mailto:vladimir.terekh@gmail.com)  
<https://orcid.org/0000-0003-0034-7672>



## Введение

Исследования многих ученых показали, что финансовые временные ряды обладают специфическими особенностями, учесть которые способны лишь определенные эконометрические модели. В работе [1] была предложена модель авторегрессионной условной гетероскедастичности ARCH( $q$ ) (autoregressive conditionally heteroscedastic model), которая стала первой из большого семейства моделей гетероскедастичности. На практике модель ARCH( $q$ ) используется редко, так как для достаточно точного описания временных рядов требуется большое количество параметров. В статье [2] предложена обобщенная модель GARCH( $p, q$ ) (generalized ARCH), более удобная для практических исследований. Особенно популярна модель GARCH(1, 1). Оценка параметров модели может осуществляться несколькими методами. Одним из наиболее часто применяемых и простых в реализации является метод квазиправдоподобия (МКМП). Для модели GARCH(1, 1) состоятельность и асимптотическая нормальность оценки по МКМП впервые были доказаны в работе [3]. В некоторых случаях МКМП дает неудовлетворительные результаты (например, когда распределение остатков имеет тяжелые хвосты), поэтому актуальной является задача исследования других методов оценки.

## Модель GARCH(1, 1)

Процесс  $X_t, t \in \mathbb{Z}$ , удовлетворяет модели GARCH(1, 1), если

$$\begin{cases} X_t = \sigma_t Z_t, \\ \sigma_t^2 = \omega_0 + \omega_1 X_{t-1}^2 + \omega_2 \sigma_{t-1}^2, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$  – независимые, одинаково распределенные случайные величины, а  $\omega_0 > 0, \omega_1 > 0, \omega_2 > 0$  – параметры модели;  $\sigma_t$  является  $\mathcal{F}_{t-1}$ -измеримой, здесь  $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots)$  – сигма-алгебра. Временной ряд, описываемый соотношением (1), не всегда стационарен в узком смысле. Поэтому необходимо наложить дополнительные ограничения на параметры модели. Будем использовать следующее условие стационарности [4]:

$$\omega_1 + \omega_2 < 1. \quad (2)$$

Пусть  $\theta = (\omega_0, \omega_1, \omega_2)^T$ , а  $\theta_0 = (w_0, w_1, w_2)^T$  – истинный вектор параметров модели (1). Введем вспомогательные переменные  $\underline{\theta} \in (0, 1), \bar{\theta} \in (0, 1)$  и определим допустимое множество параметров следующим образом:

$$\Theta = \{\theta : \omega_1 + \omega_2 < 1; 0 < \underline{\theta} \leq \min\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\} \leq \max\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\} \leq \bar{\theta} < 1\}.$$

Построим оценку  $\sigma_t^2$ :

$$\hat{y}_t(\theta) = \begin{cases} \varepsilon, & t = 0, \\ \omega_0 + \omega_1 X_{t-1}^2 + \omega_2 \hat{y}_{t-1}(\theta), & t \geq 1, \end{cases}$$

где  $\varepsilon \in [0, \infty)$  – произвольное начальное значение.

Для последующего анализа нам потребуется стационарная эргодическая аппроксимация  $\hat{y}_t(\theta)$ . Для этого рассмотрим решение рекуррентного стохастического уравнения

$$s_t(\theta) = \omega_0 + \omega_1 X_{t-1}^2 + \omega_2 s_{t-1}(\theta), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Исходя из утверждения 5.2.12 в [5], последнее уравнение имеет единственное стационарное эргодическое решение  $y_t$ . При этом  $y_t(\theta_0) = \sigma_t^2$  п. н. для любого  $t \in \mathbb{Z}$  и  $\|\hat{y}_t - y_t\|_{\Theta} \rightarrow 0$  п. н.,  $t \rightarrow \infty$ , где  $\|y\|_{\Theta} = \sup_{p \in \Theta} |y(p)|$ .

Согласно утверждению 5.2.6 в [5], если выполняется условие стационарности (2), то, используя рекуррентные подстановки, можем получить представление для  $\hat{y}_t(\theta)$  и  $y_t(\theta)$  в явном виде:

$$\hat{y}_t(\theta) = \frac{\omega_0}{1 - \omega_2} + \omega_1 \sum_{k=0}^{t-1} \omega_2^k X_{t-k-1}^2 + \omega_2^t \varepsilon, \quad (3)$$

$$y_t(\theta) = \frac{\omega_0}{1 - \omega_2} + \omega_1 \sum_{k=0}^{\infty} \omega_2^k X_{t-k}^2. \quad (4)$$

Введем также обозначения  $\hat{h}_t(\theta) = \hat{y}_t^{1/2}(\theta)$  и  $h_t(\theta) = y_t^{1/2}(\theta)$ .

### М-оценка

М-оценка была введена П. Хьюбером [6] и представляет собой обобщение оценки по методу максимального правдоподобия. Пусть  $f(x)$  – положительная непрерывная функция. Введем обобщенную функцию правдоподобия

$$\hat{L}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln \left[ \frac{1}{\hat{h}_t(\theta)} f \left( \frac{X_t}{\hat{h}_t(\theta)} \right) \right], \quad \theta \in \Theta. \quad (5)$$

Тогда М-оценка  $\hat{\theta}_n$  вектора параметров  $\theta_0$  модели (1) на компакте  $\Theta$  определяется следующим образом:

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in \Theta} \hat{L}_n(\theta). \quad (6)$$

Отметим, что в случае выбора в качестве  $f(x)$  функции плотности распределения оценка (6) совпадает с оценкой максимального правдоподобия.

Введем также следующие обозначения:

$$\varphi(x, y) = \ln \{ y f(xy) \}, \quad (7)$$

$$\varphi_k(x, y) = \frac{\partial^k}{\partial y^k} \varphi(x, y), \quad k = 1, 2, \dots, y \in (0, \infty), x \in \mathbb{R}.$$

Найдем  $\varphi_1(x, y)$  и  $\varphi_2(x, y)$  в явном виде:

$$\varphi_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y) = \frac{1}{y f(xy)} (f(xy) + y f'(xy) x) = \frac{1}{y} + \frac{f'(xy) x}{f(xy)}.$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi(x, y) = -\frac{1}{y^2} + \frac{(f''(xy) f(xy) - f'(xy) f'(xy)) x^2}{f^2(xy)}.$$

Положив в (7)  $x = Z_t$  и  $y = \frac{\sigma_t}{\hat{h}_t(\theta)}$  и учитывая, что  $X_t = \sigma_t Z_t$ , функцию (5) можно записать в следующем виде:

$$\hat{L}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left( \varphi \left( Z_t, \frac{\sigma_t}{\hat{h}_t(\theta)} \right) - \ln \sigma_t \right).$$

Определим еще несколько функций:

$$l_t(\theta) = \ln \left[ \frac{1}{\hat{h}_t(\theta)} f \left( \frac{X_t}{\hat{h}_t(\theta)} \right) \right] = \varphi \left( Z_t, \frac{\sigma_t}{\hat{h}_t(\theta)} \right) - \ln \sigma_t,$$

$$L_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n l_t(\theta),$$

$$L(\theta) = E \{ l_0(\theta) \}, \quad \theta \in \Theta,$$

а также оценку

$$\tilde{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in \Theta} L_n(\theta). \quad (8)$$

Асимптотические свойства оценки (6) были сформулированы в работе [7]. Далее приводятся доказательства этих результатов.

### Состоятельность

**Лемма 1.** Если распределение  $Z_t$  не сконцентрировано в двух точках,  $y_0(\theta) = y_0(\theta_0)$  и  $\theta \in \Theta$ , то  $\theta = \theta_0$ .  
 Доказательство. Согласно (4)

$$y_0(\theta) - y_0(\theta_0) = \left( \frac{\omega_0}{1 - \omega_2} - \frac{w_0}{1 - w_2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} (\omega_1 \omega_2^{k-1} - w_1 w_2^{k-1}) X_{-k}^2 = 0. \quad (9)$$

Покажем сначала, что  $\omega_1 \omega_2^k = w_1 w_2^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Пусть  $l = \min \{k : k \in \mathbb{N}, \omega_1 \omega_2^{k-1} \neq w_1 w_2^{k-1}\}$ ,  $D = w_1 w_2^{l-1} - \omega_1 \omega_2^{l-1}$ . Тогда

$$\left( \frac{\omega_0}{1 - \omega_2} - \frac{w_0}{1 - w_2} \right) + (\omega_1 \omega_2^{l-1} - w_1 w_2^{l-1}) X_{-l}^2 + \sum_{k=l+1}^{\infty} (\omega_1 \omega_2^{k-1} - w_1 w_2^{k-1}) X_{-k}^2 = 0.$$

$$DZ_{-l}^2 \sigma_{-l}^2 = \left( \frac{\omega_0}{1 - \omega_2} - \frac{w_0}{1 - w_2} \right) + \sum_{k=l+1}^{\infty} (\omega_1 \omega_2^{k-1} - w_1 w_2^{k-1}) X_{-k}^2.$$

$$Z_{-l}^2 = \frac{\left[ \left( \frac{\omega_0}{1 - \omega_2} - \frac{w_0}{1 - w_2} \right) + \sum_{k=l+1}^{\infty} (\omega_1 \omega_2^{k-1} - w_1 w_2^{k-1}) X_{-k}^2 \right]}{D \sigma_{-l}^2}.$$

Правая часть равенства представляет собой  $\mathcal{F}_{-l-1}$ -измеримую величину, а левая часть независима от  $\mathcal{F}_{-l-1}$ . Тогда равенство возможно только в случае вырожденности  $Z_{-l}^2$ . Но по условию леммы распределение  $Z_t$  не сконцентрировано в двух точках. Таким образом, приходим к противоречию, и  $\omega_1 \omega_2^k = w_1 w_2^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . В частности, при  $k = 0$  имеем  $\omega_1 = w_1$ , а при  $k = 1$  получаем  $\omega_2 = w_2$ . Из (9) следует, что  $\omega_0 = w_0$ . Лемма доказана.

**Теорема 1.** Если распределение  $Z_t$  не сконцентрировано в двух точках, существует стационарный эргодический процесс  $(X_t)$ , удовлетворяющий модели (1) при  $\theta = \theta_0$ , и  $E \{ \log^+ |\varphi_1(Z_0, y)| \} < \infty$ , где

$$\log^+ y = \begin{cases} \ln y, & y > 1, \\ 0, & y \leq 1, \end{cases}$$

$E \{ \varphi(Z_0, y) \} < E \{ \varphi(Z_0, 1) \}$ ,  $\forall y > 0$ , то  $M$ -оценка (6) вектора параметров модели (1) является строго состоятельной.

Доказательство. Так как  $E \{ \varphi(Z_0, y) \} < E \{ \varphi(Z_0, 1) \}$ ,  $\forall y > 0$ , то  $El_0(\theta) = L(\theta) < \infty$  при любом  $\theta \in \Theta$ .

Известно (см. утверждение 5.2.12 в [5]), что  $h_t$  можно представить в виде  $h_t = u(X_t, X_{t-1}, \dots)$ , где  $u(\cdot)$  – измеримая функция. Тогда  $l_t = v(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$ , где  $v(\cdot)$  – также измеримая функция. Так как  $(X_t)$  – стационарный эргодический процесс, то  $l_t$  – также стационарный эргодический процесс. Тогда согласно эргодической теореме А.2 в [8]

$$L_n(\theta) \rightarrow L(\theta) \text{ п. н., } n \rightarrow \infty, \theta \in \Theta. \quad (10)$$

Докажем теперь, что  $\|\hat{L}_n - L_n\|_{\Theta} \rightarrow 0$  п. н.

Используя теорему Лагранжа о среднем значении, получим

$$\begin{aligned} \|\hat{L}_n - L_n\|_{\Theta} &= \left\| \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left[ \varphi \left( Z_t, \frac{\sigma_t}{\hat{h}_t(\theta)} \right) - \varphi \left( Z_t, \frac{\sigma_t}{h_t(\theta)} \right) \right] \right\|_{\Theta} \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left\| \varphi \left( Z_t, \frac{\sigma_t}{\hat{h}_t(\theta)} \right) - \varphi \left( Z_t, \frac{\sigma_t}{h_t(\theta)} \right) \right\|_{\Theta} \leq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sigma_t \|\varphi_1(Z_t, \eta)\|_{\Theta} \left\| \frac{1}{\hat{h}_t} - \frac{1}{h_t} \right\|_{\Theta}. \end{aligned}$$



Для всякого вектора параметров  $\theta \in \Theta$  и любых  $x \in \mathbb{R}$ ,  $s \in [0, \infty)$  выполняется соотношение

$$(\omega_0 + \omega_1 x^2 + \omega_2 s)^{1/2} \geq \omega_0^{1/2} \geq \underline{\theta}^{1/2}.$$

Отсюда следует, что  $\hat{h}_t, h_t \geq \underline{\theta}^{1/2} > 0$ . Тогда

$$\|\hat{L}_n - L_n\|_{\Theta} \leq \frac{1}{n} \frac{1}{\underline{\theta}} \sum_{t=1}^n \sigma_t \|\varphi_1(Z_t, \eta)\|_{\Theta} \|\hat{h}_t - h_t\|_{\Theta}.$$

Так как  $E\{\log^+ |\varphi_1(Z_0, y)|\} < \infty$ , то по лемме 2.1 в [9] получаем, что

$$\|\hat{L}_n - L_n\|_{\Theta} \rightarrow 0 \text{ п. н., } n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует, что

$$\hat{L}_n \rightarrow L \text{ п. н., } n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Пусть  $\theta_0$  – истинный параметр модели. Тогда

$$\begin{aligned} L(\theta_0) - L(\theta) &= E\left\{\varphi\left(Z_0, \frac{\sigma_0}{h_0(\theta_0)}\right) - \varphi\left(Z_0, \frac{\sigma_0}{h_0(\theta)}\right)\right\} = [\sigma_0 = h_0(\theta_0)] = \\ &= E\left\{\varphi(Z_0, 1) - \varphi\left(Z_0, \frac{\sigma_0}{h_0(\theta)}\right)\right\} \geq 0. \end{aligned}$$

Причем равенство достигается только в случае  $\sigma_0 \equiv h_0(\theta)$  п. н. Но согласно лемме 1 из этого вытекает, что  $\theta = \theta_0$ . Значит, функция  $L(\theta)$ ,  $\theta \in \Theta$ , имеет единственный максимум в точке  $\theta_0$ . Отсюда с учетом (12) следует строгая состоятельность (см. теорему 5.3.1 в [5]). Теорема доказана.

### Асимптотическое распределение

Определим функцию  $h'_t(\theta)$ :

$$h'_t(\theta) = \left( (h_t(\theta))'_{\omega_0}, (h_t(\theta))'_{\omega_1}, (h_t(\theta))'_{\omega_2} \right),$$

где компоненты вектора вычисляются с учетом представления (4):

$$\begin{aligned} (h_t(\theta))'_{\omega_0} &= \left( \left[ \frac{\omega_0}{1 - \omega_2} + \omega_1 \sum_{k=0}^{\infty} \omega_2^k X_{t-k-1}^2 \right]^{1/2} \right)'_{\omega_0} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\omega_0}{1 - \omega_2} + \omega_1 \sum_{k=0}^{\infty} \omega_2^k X_{t-k-1}^2 \right]^{-1/2} \frac{1}{1 - \omega_2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \omega_2} [h_t(\theta)]^{-1}, \\ (h_t(\theta))'_{\omega_1} &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \omega_2^k X_{t-k-1}^2 \right] [h_t(\theta)]^{-1}, \\ (h_t(\theta))'_{\omega_2} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\omega}{(1 - \omega_2)^2} + \omega_1 \sum_{k=0}^{\infty} k \omega_2^{k-1} X_{t-k-1}^2 \right] [h_t(\theta)]^{-1}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом определяется функция  $h''_t(\theta)$ , а  $\hat{h}'_t(\theta)$  и  $\hat{h}''_t(\theta)$  вычисляются с учетом (3). Также определим

$$L'_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n l'_t(\theta), \quad L''_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n l''_t(\theta),$$

$$L'(\theta) = E \{l'_i(\theta)\}, \quad L''(\theta) = E \{l''_i(\theta)\},$$

$$l'_i(\theta) = -\frac{\sigma_i}{h_i(\theta)} \frac{h'_i(\theta)}{h_i(\theta)} \Phi_1 \left( Z_i, \frac{\sigma_i}{h_i(\theta)} \right),$$

$$l''_i(\theta) = \frac{\sigma_i}{h_i(\theta)} \left[ \left( \frac{h'_i(\theta)}{h_i(\theta)} \right)^T \left( \frac{h'_i(\theta)}{h_i(\theta)} \right) \left\{ \frac{\sigma_i}{h_i(\theta)} \Phi_2 \left( Z_i, \frac{\sigma_i}{h_i(\theta)} \right) + 2\Phi_1 \left( Z_i, \frac{\sigma_i}{h_i(\theta)} \right) \right\} - \frac{h''_i(\theta)}{h_i(\theta)} \right].$$

Обозначим  $g_\theta(X_0, \sigma_0^2) = \omega_0 + \omega_1 X_0^2 + \omega_2 \sigma_0^2$ .

**Лемма 2.** Пусть выполнены следующие условия:

а) выполняются условия теоремы 1;

б)  $E \{ \Phi_2(Z_0, y) \} < \infty, \forall y > 0$ ;

в)  $E \|l''_i\|_\Theta < \infty, E \{ \Phi_1^2(Z_0, 1) \} < \infty$ .

Тогда матрица

$$A = E \left\{ \frac{1}{\sigma_0^2} [h'_0(\theta_0)]^T [h'_0(\theta_0)] \right\}$$

обратима.

Доказательство. Пусть  $\exists x \in \mathbb{R}^d, x^T A x = 0$ .

$$x^T E \left\{ \frac{1}{\sigma_0^2} [h'_0(\theta_0)]^T [h'_0(\theta_0)] \right\} x = 0.$$

$$E \left\{ \frac{1}{\sigma_0^2} |h'_0(\theta_0) x|^2 \right\} = 0.$$

$$h'_0(\theta_0) x = 0 \text{ п. н.}$$

Так как  $(h_t)$  – стационарный процесс, то  $h'_0(\theta_0) x = 0$  п. н. для любого  $t \in \mathbb{Z}$ . Продифференцировав выражение  $h_t(\theta) = g_\theta(X_0, h_0(\theta))$  в точке  $\theta = \theta_0$ , получим

$$h'_t(\theta_0) = \frac{\partial g_\theta(X_0, \sigma_0^2)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} + \frac{\partial g_\theta(X_0, \sigma_0^2)}{\partial s} \Big|_{\theta=\theta_0} h'_0(\theta_0).$$

Умножив справа на  $x$ , имеем

$$\frac{\partial g_\theta(X_0, \sigma_0^2)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0 \text{ п. н.}$$

Согласно лемме 5.7.3 в [5] компоненты вектора  $\frac{\partial g_\theta(X_0, \sigma_0^2)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0}$  линейно независимы, из этого

следует, что  $x = 0$ . Значит,  $A$  – невырожденная матрица и  $\exists A^{-1}$ . Лемма доказана.

**Лемма 3.** Пусть выполняются условия теоремы 1 и  $E \{ \Phi_2(Z_0, y) \} < \infty, \forall y > 0$ . Тогда

$$\sqrt{n} \|\hat{L}'_n - L'_n\|_\Theta \rightarrow 0 \text{ п. н., } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство.

$$\sqrt{n} \|\hat{L}'_n - L'_n\|_\Theta = \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\sigma_i}{\hat{h}_i} \frac{\hat{h}'_i}{\hat{h}_i} \Phi_1 \left( Z_i, \frac{\sigma_i}{\hat{h}_i} \right) - \frac{\sigma_i}{h_i} \frac{h'_i}{h_i} \Phi_1 \left( Z_i, \frac{\sigma_i}{h_i} \right) \right] \right\|_\Theta \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \sum_{t=1}^n \sigma_t \left( \frac{\hat{h}'_t}{(\hat{h}_t)^2} \varphi_1 \left( Z_t, \frac{\sigma_t}{\hat{h}_t} \right) - \frac{h'_t}{(h_t)^2} \varphi_1 \left( Z_t, \frac{\sigma_t}{h_t} \right) \right) \right\|_{\Theta} \leq \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \sum_{t=1}^n \sigma_t \left( \frac{\hat{h}'_t}{(\hat{h}_t)^2} \varphi_1 \left( Z_t, \frac{\sigma_t}{\hat{h}_t} \right) - \frac{\hat{h}'_t}{(\hat{h}_t)^2} \varphi_1 \left( Z_t, \frac{\sigma_t}{h_t} \right) + \frac{\hat{h}'_t}{(\hat{h}_t)^2} \varphi_1 \left( Z_t, \frac{\sigma_t}{h_t} \right) - \frac{h'_t}{(h_t)^2} \varphi_1 \left( Z_t, \frac{\sigma_t}{h_t} \right) \right) \right\|_{\Theta} \leq \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \left\{ \left\| \sigma_t \left( \frac{\hat{h}'_t}{(\hat{h}_t)^2} \left[ \varphi_1 \left( Z_t, \frac{\sigma_t}{\hat{h}_t} \right) - \varphi_1 \left( Z_t, \frac{\sigma_t}{h_t} \right) \right] \right) \right\|_{\Theta} + \left\| \sigma_t \varphi_1 \left( Z_t, \frac{\sigma_t}{h_t} \right) \left[ \frac{\hat{h}'_t}{(\hat{h}_t)^2} - \frac{h'_t}{(h_t)^2} \right] \right\|_{\Theta} \right\} \leq \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \left\{ \left\| \frac{\hat{h}'_t}{(\hat{h}_t)^2} \right\|_{\Theta} \left\| \varphi_2(Z_t, \eta) \right\|_{\Theta} \left\| \sigma_t^2 \right\|_{\Theta} \left\| \frac{1}{\hat{h}_t} - \frac{1}{h_t} \right\|_{\Theta} + \left\| \sigma_t \right\|_{\Theta} \left\| \varphi_1 \left( Z_t, \frac{\sigma_t}{h_t} \right) \right\|_{\Theta} \left\| \frac{\hat{h}'_t}{(\hat{h}_t)^2} - \frac{h'_t}{(h_t)^2} \right\|_{\Theta} \right\} \leq \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \left\{ \frac{1}{\underline{\theta}^2} \left\| \hat{h}'_t \right\|_{\Theta} \left\| \varphi_2(Z_t, \eta) \right\|_{\Theta} \left\| \sigma_t^2 \right\|_{\Theta} \left\| \hat{h}_t - h_t \right\|_{\Theta} + \left\| \sigma_t \right\|_{\Theta} \left\| \varphi_1 \left( Z_t, \frac{\sigma_t}{h_t} \right) \right\|_{\Theta} \left\| \frac{\hat{h}'_t - h'_t}{(\hat{h}_t)^2} + h'_t \left( \frac{1}{(h_t)^2} - \frac{1}{(\hat{h}_t)^2} \right) \right\|_{\Theta} \right\} \leq \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \left\{ \frac{\sigma_t^2}{\underline{\theta}^2} \left\| \hat{h}'_t \right\|_{\Theta} \left\| \varphi_2(Z_t, \eta) \right\|_{\Theta} \left\| \hat{h}_t - h_t \right\|_{\Theta} + \frac{\sigma_t}{\underline{\theta}} \left\| \varphi_1 \left( Z_t, \frac{\sigma_t}{h_t} \right) \right\|_{\Theta} \left\| \hat{h}'_t - h'_t \right\|_{\Theta} + \frac{2}{\underline{\theta}^{3/2}} \left\| h'_t \right\|_{\Theta} \left\| \hat{h}_t - h_t \right\|_{\Theta} \right\}.
\end{aligned}$$

Легко проверить, что для модели (1) и функций  $h_t(\theta)$ ,  $\hat{h}_t(\theta)$  при  $\theta \in \Theta$  выполняются условия утверждений 6.1 и 6.2 в [9]. Тогда  $E \{\log^+ h'_{0\Theta}\} < \infty$ , а  $\|\hat{h}_t - h_t\|_{\Theta} \rightarrow 0$  п. н. и  $\|\hat{h}'_t - h'_t\|_{\Theta} \rightarrow 0$  п. н. Так как  $E \{\log^+ \sigma_0\} < \infty$ ,  $E \{\log^+ \sigma_0^2\} \leq 2E \{\log^+ \sigma_0\} < \infty$ ,  $E \{\log^+ |\varphi_1(Z_0, y)|\} < \infty$ ,  $\forall y > 0$ ,  $E \{\log^+ |\varphi_2(Z_0, y)|\} < \infty$ ,  $\forall y > 0$ , то по лемме 2.1 в [9] получаем, что выражение под суммой равномерно ограничено на  $\Theta$ , а следовательно,  $\|\hat{L}'_n - L'_n\|_{\Theta} \rightarrow 0$  п. н.,  $n \rightarrow \infty$ . Лемма доказана.

**Теорема 2.** Пусть выполнены следующие условия:

а) выполняются условия теоремы 1;

б)  $E \{\varphi_2(Z_0, y)\} < \infty$ ,  $\forall y > 0$ ;

в)  $E \|\ell''_t\|_{\Theta} < \infty$ ,  $E \{\varphi_1^2(Z_0, 1)\} < \infty$ .

Тогда  $M$ -оценка (6) имеет асимптотически нормальное распределение:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V),$$

$$V = \frac{E \{\varphi_1^2(Z_0, 1)\}}{(E \{\varphi_2(Z_0, 1)\})^2} A^{-1}, \quad A = E \left\{ \frac{1}{\sigma_0^2} [h'_0(\theta_0)]^T [h'_0(\theta_0)] \right\}.$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 следует, что условие а обеспечивает  $\tilde{\theta}_n \rightarrow \theta_0$  п. н., где  $\tilde{\theta}_n$  определяется (8). Согласно теореме Лагранжа о среднем значении для достаточно больших значений  $n$  справедливо равенство

$$L'_n(\tilde{\theta}_n) = L'_n(\theta_0) + L''_n(\varepsilon_n)(\tilde{\theta}_n - \theta_0), \quad (13)$$

где  $|\varepsilon_n - \theta_0| < |\tilde{\theta}_n - \theta_0|$ . Из определения  $\tilde{\theta}_n$  следует, что  $L'_n(\tilde{\theta}_n) = 0$ . Тогда (13) можно записать как

$$L''_n(\varepsilon_n)(\tilde{\theta}_n - \theta_0) = -L'_n(\theta_0). \quad (14)$$

Заметим, что  $L'_t(\theta)$  можно представить в виде измеримой функции от стационарного эргодического процесса (см. доказательство теоремы 1). Кроме того,  $E\|L''_t\|_{\Theta} < \infty$ . Отсюда в силу эргодической теоремы А.2 в [8] следует, что

$$L''_n(\theta) \rightarrow L''(\theta) \text{ п. н., } n \rightarrow \infty, \theta \in \Theta.$$

Так как  $\varepsilon_n \rightarrow \theta_0$  п. н.,  $n \rightarrow \infty$ , то

$$L''_n(\varepsilon_n) \rightarrow L''(\theta_0) = F. \quad (15)$$

Найдем теперь матрицу  $F$ .

При доказательстве теоремы 1 было показано, что  $L(\theta)$  имеет единственный максимум в точке  $\theta = \theta_0$ . Значит,  $L'(\theta_0) = 0$ . Так как  $Z_0$  и  $\frac{h'_0(\theta_0)}{h_0(\theta_0)}$  независимы и  $h_0(\theta_0) = \sigma_0$ , то

$$L'(\theta_0) = -E\{\varphi_1(Z_0, 1)\} E\left\{\frac{h'_0(\theta_0)}{h_0(\theta_0)}\right\} = 0. \quad (16)$$

Заметим, что по крайней мере одна из компонент вектора  $h'(\theta_0)$  строго положительна. Например,

$$\begin{aligned} (h_0(\theta_0))'_{\omega_0} &= \left( \left[ \frac{w_0}{1-w_2} + w_1 \sum_{k=0}^{\infty} w_2^k X_{-k-1}^2 \right]^{1/2} \right)'_{\omega_0} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{w_0}{1-w_2} + w_1 \sum_{k=0}^{\infty} w_2^k X_{-k-1}^2 \right]^{-1/2} \frac{1}{1-w_2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-w_2} [h_0(\theta_0)]^{-1} > 0. \end{aligned}$$

Значит,  $E\left\{\frac{h'_0(\theta_0)}{\sigma_0}\right\} \neq 0$ , и из (16) следует, что  $E\{\varphi_1(Z_0, 1)\} = 0$ .

Тогда

$$F = E\{\varphi_2(Z_0, 1)\} A.$$

По лемме 2 матрица  $A$  невырожденная, а значит, и матрица  $F$  невырожденная.

Тогда из (15) получаем, что для достаточно больших значений  $n$   $\exists(L''_n)^{-1} = F^{-1}(1 + o(1))$ , и (14) принимает вид

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta_0) = -\sqrt{n}L'_n(\theta_0)F^{-1}(1 + o(1)).$$

Заметим, что  $L'_t(\theta_0) = -\varphi_1(Z_t, 1)\frac{h'_t(\theta_0)}{\sigma_t}$  – стационарный эргодический разностный мартингал-процесс

относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ . Тогда, используя теорему Крамера – Вольда и теорему 23.1 в [10], заключаем, что

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V). \quad (17)$$

По теореме Лагранжа о среднем значении имеем

$$L'_n(\tilde{\theta}_n) - L'_n(\hat{\theta}_n) = L''_n(\tilde{\varepsilon}_n)(\tilde{\theta}_n - \hat{\theta}_n), \quad (18)$$

где  $|\tilde{\varepsilon}_n - \hat{\theta}_n| < |\tilde{\theta}_n - \hat{\theta}_n|$ .

Так как  $\tilde{\epsilon}_n \rightarrow \tilde{\theta}_n$  п. н., а  $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta_0$  п. н., то по аналогии с (15) получаем

$$L_n''(\tilde{\epsilon}_n) \rightarrow L''(\theta_0) = F.$$

Кроме того,  $L_n'(\tilde{\theta}_n) = 0 = \hat{L}_n'(\hat{\theta}_n)$ . Исходя из этого, (18) можно переписать как

$$\sqrt{n}|\tilde{\theta}_n - \hat{\theta}_n| = \sqrt{n}(\hat{L}_n'(\hat{\theta}_n) - L_n'(\hat{\theta}_n))F^{-1}(1 + o(1)).$$

Тогда из леммы 3 следует, что

$$\sqrt{n}|\tilde{\theta}_n - \hat{\theta}_n| \rightarrow 0 \text{ п. н.} \quad (19)$$

Таким образом, из (17) и (19) вытекает, что  $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V)$ . Теорема доказана.

### Заключение

При выполнении определенных условий М-оценка параметров модели GARCH(1, 1) является строго состоятельной и имеет асимптотически нормальное распределение. С помощью метода М-оценки можно исследовать модели с различными распределениями остатков. В частности, при анализе финансовых и экономических временных рядов используются устойчивые и умеренно устойчивые (tempered stable [11]) распределения. Такие модели позволяют учитывать особенности, характерные для реальных данных: кластеризацию волатильности (чередование периодов высокой и низкой волатильности), тяжелые хвосты и асимметричность остатков.

### Библиографические ссылки

1. Engle RF. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*. 1982;50(4):987–1007. DOI: 10.2307/1912773.
2. Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*. 1986;31(3):307–327. DOI: 10.1016/0304-4076(86)90063-1.
3. Lee S-W, Hansen BE. Asymptotic theory for the GARCH(1, 1) quasi-maximum likelihood estimator. *Econometric Theory*. 1994;10(1):29–52. DOI: 10.1017/S0266466600008215.
4. Терех ВС. О стационарности процесса APGARЧ(p, q). В: *Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения. Материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора, доктора физико-математических наук Г. А. Медведева; 23–26 февраля 2015 г.; Минск, Беларусь*. Минск: РИВШ; 2015. с. 326–328.
5. Straumann D. *Estimation in conditionally heteroscedastic time series models*. Berlin: Springer; 2005. 238 p. (Lecture notes in statistics; 181).
6. Huber PJ. *Robust statistics*. New York: Wiley; 1981. 320 p.
7. Терех ВС. Построение и исследование свойств М-оценки параметров модели GARCH(1, 1). В: *Сборник работ 72-й научной конференции студентов и аспирантов Белорусского государственного университета; 11–22 мая 2015 г.; Минск, Беларусь. Часть 1*. Минск: БГУ; 2015. с. 112–115.
8. Francq C, Zakoian J-M. *GARCH models: structure, statistical inference and financial applications*. Chichester: John Wiley & Sons; 2010. 504 p.
9. Straumann D, Mikosch T. Quasi-maximum-likelihood estimation in conditionally heteroscedastic time series: a stochastic recurrence equations approach. *Annals of Statistics*. 2006;34(5):2449–2495. DOI: 10.1214/009053606000000803.
10. Billingsley P. *Convergence of probability measures*. 2<sup>nd</sup> edition. New York: John Wiley & Sons; 1968. 253 p.
11. Rosinski J. Tempering stable processes. *Stochastic Processes and their Applications*. 2007;117(6):677–707. DOI: 10.1016/j.spa.2006.10.003.

### References

1. Engle RF. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*. 1982;50(4):987–1007. DOI: 10.2307/1912773.
2. Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*. 1986;31(3):307–327. DOI: 10.1016/0304-4076(86)90063-1.
3. Lee S-W, Hansen BE. Asymptotic theory for the GARCH(1, 1) quasi-maximum likelihood estimator. *Econometric Theory*. 1994;10(1):29–52. DOI: 10.1017/S0266466600008215.
4. Tserakh US. [About APGARЧ(p, q) model stationarity]. In: *Teoriya veroyatnostei, sluchainye protsessy, matematicheskaya statistika i prilozheniya. Materialy Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii, posvyashchennoi 80-letiyu professora, doktora fiziko-matematicheskikh nauk G. A. Medvedeva; 23–26 fevralya 2015 g.; Minsk, Belarus'* [Probability theory, random processes, mathematical statistics, and applications. Proceedings of the International scientific conference dedicated to the 80<sup>th</sup> anniversary of professor, doctor of physical and mathematical sciences G. A. Medvedev; 2015 February 23–26; Minsk, Belarus]. Minsk: National Institute for Higher Education; 2015. p. 326–328. Russian.

5. Straumann D. *Estimation in conditionally heteroscedastic time series models*. Berlin: Springer; 2005. 238 p. (Lecture notes in statistics; 181).
6. Huber PJ. *Robust statistics*. New York: Wiley; 1981. 320 p.
7. Tserakh US. [M-estimate of GARCH(1, 1) model parameters computation and exploration]. In: *Sbornik rabot 72-i nauchnoi konferentsii studentov i aspirantov Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta; 11–22 maya 2015 g.; Minsk, Belarus'. Chast' 1* [Collection of works of the 72<sup>nd</sup> scientific conference of students and postgraduates of the Belarusian State University; 2015 May 11–22; Minsk, Belarus. Part 1]. Minsk: Belarusian State University; 2015. p. 112–115. Russian.
8. Francq C, Zakoian J-M. *GARCH models: structure, statistical inference and financial applications*. Chichester: John Wiley & Sons; 2010. 504 p.
9. Straumann D, Mikosch T. Quasi-maximum-likelihood estimation in conditionally heteroscedastic time series: a stochastic recurrence equations approach. *Annals of Statistics*. 2006;34(5):2449–2495. DOI: 10.1214/009053606000000803.
10. Billingsley P. *Convergence of probability measures*. 2<sup>nd</sup> edition. New York: John Wiley & Sons; 1968. 253 p.
11. Rosinski J. Tempering stable processes. *Stochastic Processes and their Applications*. 2007;117(6):677–707. DOI: 10.1016/j.spa.2006.10.003.

Статья поступила в редакцию 14.04.2020.  
Received by editorial board 14.04.2020.

---

---

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

---

## THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

---

---

УДК 616.728:51

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК БИОКОМПОЗИТА КОСТЬ – ТИТАН НА ОСНОВАНИИ ДАННЫХ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ И КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

А. В. НИКИТИН<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Целью исследований является изучение эффекта врастания костной ткани в свободные поры имплантата и определение механических свойств образованного биокompозита. Описывается построение конечно-элементной модели на основании данных компьютерной томографии, что дает возможность изучить взаимодействие металлической структуры и кости под влиянием сжимающей нагрузки. Результаты моделирования сравниваются с итогами натурного эксперимента по сжатию образцов пористого титана. Метод конечно-элементного моделирования, основанный на данных компьютерной томографии, позволил получить кривую зависимости деформации от напряжения для биокompозита кость – титан. Доказано, что модуль упругости металлического образца увеличивается на 29 % после заполнения свободных пор костной тканью, а условный предел текучести биокompозита кость – титан возрастает в 2 раза.

**Ключевые слова:** конечно-элементный анализ; остеointegrация; компьютерная томография; пористая структура.

---

#### Образец цитирования:

Никитин АВ. Определение механических характеристик биокompозита кость – титан на основании данных компьютерной томографии и конечно-элементного моделирования. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;2:79–85.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-79-85>

#### For citation:

Nikitsin AV. Estimation of the mechanical properties for bone – titanium biocomposite based on computed tomography data and finite element modeling. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;2:79–85. Russian.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-79-85>

---

#### Автор:

**Андрей Викторович Никитин** – старший преподаватель кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета.

#### Author:

**Andrei V. Nikitsin**, senior lecturer at the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.  
[andy.nik@tut.by](mailto:andy.nik@tut.by)



## ESTIMATION OF THE MECHANICAL PROPERTIES FOR BONE – TITANIUM BIOCOMPOSITE BASED ON COMPUTED TOMOGRAPHY DATA AND FINITE ELEMENT MODELING

A. V. NIKITSIN<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

The goal of this work is to study the effect of bone ingrowth into open pores of the implant and estimate of the mechanical characteristics for obtained biocomposite. Reconstruction of the isotropic model based on data acquired from computed tomography allows us to study the metallic and bone components integration under compressive load. Results are compared to performed mechanical tests of the porous specimen. The finite element modeling allows obtaining a stress-strain curve for the bone – titanium biocomposite. Young's modulus of the metallic specimen is increased by 29 % after pores is filled with bone tissues. The conditional yield strength of the bone – titanium biocomposite is 2 times higher than that of porous open-pore titanium.

**Keywords:** finite element analysis; osteointegration; computed tomography; porous structure.

### Введение

Трехмерные структуры на основе титана со взаимосвязанными порами являются наиболее распространенными элементами, используемыми в ортопедии для частичного замещения схожей по архитектуре и механическим свойствам губчатой кости [1]. Их применение в эндопротезах бесцементной фиксации позволяет достичь стабильного контакта между костной тканью и имплантатом, обеспечивая биосовместимость и высокий процент выживаемости протеза [2; 3]. Твердость таких структур прямо пропорциональна их плотности, что делает возможным изменение прочностных характеристик и модуля упругости в соответствии с физическими свойствами кости за счет изменения пористости материала [4]. Равномерное распределение нагрузки, передаваемой от остеоинтегрированного имплантата к костной ткани по всей области врастания, позволяет снизить отрицательное воздействие на кость эффекта экранирования напряжений – одной из главных причин асептического расшатывания и потери эндопротеза [5; 6]. Прорастанию костной ткани в толщу металлической структуры способствует высокая пористость материала [7; 8].

Наиболее часто используемые подходы, встречающиеся в научной литературе, можно разделить на три основные группы: 1) рассмотрение пористой структуры как единого объема, обладающего особыми характеристиками композитного материала; 2) описание ячеек пористой структуры с помощью теории балок, имеющих определенную толщину стенок; 3) прямое моделирование внутренней архитектуры методом конечных элементов с использованием данных компьютерной томографии (КТ). Последняя модель является более информативной относительно первых двух идеализированных моделей, поскольку в большей степени соответствует микроструктуре исследуемого материала, выделяя области концентрации напряжений [9–11]. Однако для непосредственного применения к структурам большого объема такой подход слишком трудоемок и поэтому требует комбинирования с другими методами. Цель данных исследований – изучение механизма деформации пористого титана на примере отдельного сегмента вставки эндопротеза бесцементной фиксации, а также определение механических характеристик образованного биокompозита кость – титан как изотропного материала.

### Методика исследования

В описанных исследованиях использовали ножку эндопротеза бесцементной фиксации со вставками из пористого титана производства ЗАО «Алтимед» (Минск, Беларусь). Вставки имеют трапециевидную форму и общие размеры 35 × 20 мм при толщине около 4 мм. Их вырезали из эндопротеза после завершения процесса остеогенеза, в результате которого поры были заполнены костной тканью. Перед проведением механических испытаний образцы подвергали дополнительной обработке для придания им правильной формы и выравнивания поверхностей, перпендикулярных направлению сжимающей нагрузки. В итоге образцы для механических испытаний на сжатие представляли собой параллелепипед размерами 33,5 × 14,0 × 4,0 мм. Тестирование производили на машине Instron 5567 (Институт механики металлополимерных систем имени В. А. Белого Национальной академии наук Беларуси, Гомель, Беларусь) со скоростью 10 мм/мин при комнатной температуре, считая первоначальной высоту образца 14 мм.



В результате механических испытаний была получена типичная диаграмма сжатия образца пористого материала в координатах нагрузка – смещение [2]. На графике наблюдался прямолинейный участок, соответствующий упругой деформации, после которого следовала слабоизогнутая кривая с меньшим углом наклона, отображающая пластическую деформацию и описывающая спрессовывание образцов за счет внутреннего схлопывания пор. Испытания заканчивали, когда величина деформации превышала 1/3 от первоначальной высоты образца.

Для создания трехмерной модели пористой структуры использовался аппарат КТ Siemens Somatom Sensation 64 (Siemens, Эрланген, Германия). Помещенный в рабочую область томографа титановый образец подвергался рентгеновскому излучению вращающегося на 360° эмиттера с поступательным шагом 0,4 мм. Полученные таким образом рентгенограммы были обработаны с помощью специального программного обеспечения, которое в результате сгенерировало серию аксиальных срезов исследуемой пористой структуры. В дальнейшем эти данные использовались для построения конечно-элементной модели, геометрия которой соответствует морфологии пористой структуры исследуемой титановой вставки [2].

Следующим шагом в моделировании остеоинтегрированного пористого титана являлось создание сетки конечных элементов в объеме отдельного сегмента размерами 3,0 × 3,0 × 4,5 мм. Биоккомпозит был разделен на 284 955 и 179 098 десятиузловых тетраэдров (C3D10) для металлической и костной составляющих соответственно. Для данных исследований созданы две конечно-элементные модели: первая описывает реакцию на сжатие титанового образца с открытыми порами, а вторая дополнительно включает в себя материал, имитирующий костную ткань и заполняющий все поры. Граничные условия, примененные к этим двум моделям, были идентичны. Узлы модели пористого титана, принадлежащие нижней плоскости, жестко фиксировались (*encastre*), в то время как узлы противоположной грани одноосно смещались относительно оси *x* на 0,27 мм (6 % от общей высоты образца) с постоянным шагом 0,025 мм, создавая усилие сжатия (рис. 1).

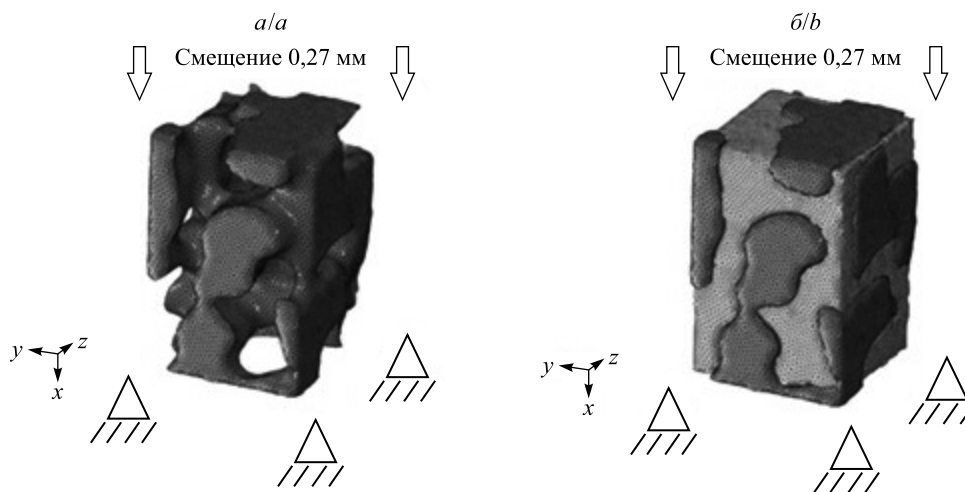


Рис. 1. Схема конечно-элементного моделирования механических испытаний на сжатие исследуемых образцов:  
а – пористый титан; б – биоккомпозит кость – титан

Fig. 1. Load and boundary condition finite element (FE) simulation of mechanical compressive test of investigated specimens:  
а – porous titanium; б – bone – titanium biocomposite

История нагружения была разбита на 20 отдельных шагов с помощью максимального временного приращения 0,05 (*time increment*). Это позволило для 20 точек произвести расчет, в котором начальными условиями для каждого шага являлось состояние модели в конце предыдущего шага. Контакт между титаном и костной тканью моделировался как связанное ограничение (*tie constraint*), исключающее смещение узлов взаимодействующих сеток. Для моделирования упругопластических характеристик титана в качестве входных данных использовались значение модуля упругости (112 ГПа) и коэффициент Пуассона (0,34), а также кривая зависимости деформации от напряжения [2]. Значение модуля упругости костной ткани составило 17 ГПа с коэффициентом Пуассона 0,3 [3]. Расчеты двух моделей методом конечных элементов проводились с помощью пакета для моделирования *Abaqus 6.12 Student Edition*.

## Результаты исследований

Выходные данные конечно-элементного анализа использовались для построения кривой зависимости смещения от нагрузки, аналогичной диаграмме, которая была получена в результате механических испытаний на сжатие образцов пористого титана. Программное обеспечение для конечно-элементного моделирования позволяет считывать силу реакции всех фиксированных узлов нижней грани модели, а также пошаговое перемещение узлов верхней грани. Величина нагрузки определялась как суммарное значение для всех узлов, принадлежащих плоскости основания. Совмещение данных двух изменяющихся величин в единой системе координат используется для создания зависимости смещения от нагрузки (рис. 2).

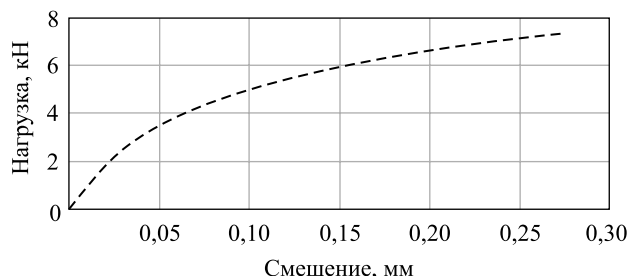


Рис. 2. Кривая зависимости смещения биокompозита от нагрузки при конечно-элементном моделировании испытаний на сжатие

Fig. 2. Stress-displacement curves in FEA

Для определения предела текучести двух исследуемых материалов на основании расчетов методом конечных элементов были построены диаграммы напряжений. Координатные оси графиков представлены относительной деформацией образца высотой 4,5 мм и напряжением, равным отношению силы сжатия к площади зафиксированных узлов нижней грани 4,7 мм<sup>2</sup>. Поскольку на диаграммах сложно выделить площадку текучести материала, был найден условный предел текучести. Этот параметр отображает величину напряжений, при которых относительные остаточные деформации равны 0,2 % [12]. Для пористого титана условный предел текучести составил около 387 МПа. Заполнение свободных пор костной тканью в результате завершённого процесса остеогенеза позволило увеличить значение данного параметра до 732 МПа.

Для приближённого определения модуля упругости двух материалов по диаграммам напряжений были использованы последние точки начальных прямолинейных участков диаграмм. Для кривой пористого титана это была вторая точка с координатами (0,56; 288,29), а для биокompозита – третья с координатами (1,11; 746,97). Модули упругости, рассчитанные как отношение напряжений и относительных деформаций, составили 0,51 и 0,67 ГПа соответственно. Значения характеристик отличаются на 31 %, что сопоставимо с данными механических испытаний на сжатие, когда различие между двумя материалами составляло 25 % (пористый титан – 1,06 ГПа, биокompозит – 1,33 ГПа). Несмотря на то что модули упругости, рассчитанные математически, меньше экспериментальных значений характеристик, сравнительный анализ подтверждает приемлемость конечно-элементного моделирования. Вертикальное расположение перемычек способствовало возникновению напряжений сжатия, в то время как горизонтальные перемычки в большей степени испытывали напряжения растяжения.

## Сходимость результатов

Для оценки сходимости результатов, полученных при конечно-элементном моделировании механических испытаний на сжатие биокompозита пористый титан – костная ткань, были построены два дополнительных биокompозитных образца высотой 4,0 и 3,5 мм (рис. 3). Первая конечно-элементная модель состояла из 452 565 элементов, относящихся к пористому титану, и 223 909 элементов, относящихся к костной ткани. Второй образец высотой 3,5 мм имел сетки конечных элементов с 226 479 и 198 106 тетраэдрами для металлической и костной составляющих соответственно. Несмотря на усечение трехмерных моделей, пористость, определяемая как отношение массы титана к общему объему, оставалась практически одинаковой. Геометрические характеристики титановой составляющей для каждой модели представлены в таблице.

Аналогично первоначальной модели граничные условия для двух дополнительных моделей были определены через фиксацию узлов сетки опорной грани пористого титана по всем степеням свободы. Условия нагруженности задавались как смещение узлов верхней грани на расстояние, равное 6 % от высоты образцов. Для моделей высотой 4,0 мм величина смещения составила 0,24 мм, а для моделей высотой 3,5 мм достигала 0,21 мм.

Физико-геометрические характеристики титановой составляющей  
конечно-элементных моделей биокompозита кость – титан  
Physical and geometric characteristics of the titanium component  
of FE-models of the bone – titanium biocomposite

Высота, мм	Объем, мм <sup>3</sup>	Масса, г	Пористость, %
4,5	24,10	0,109	40
4,0	21,44	0,097	40
3,5	19,14	0,087	39

В результате математических расчетов были получены данные для построения трех диаграмм зависимости относительной деформации от напряжений, возникающих в узлах нижней грани модели пористого титана под воздействием силы сжатия (рис. 4). Три кривые, принадлежащие образцам различной высоты, имеют схожую форму и практически совпадают на начальном и конечном прямолинейных участках.

Если для усеченных образцов высотой 3,5 и 4,0 мм диаграммы сжатия практически совпадали с небольшим отклонением друг от друга в области фазы уплотнения материала, то кривая зависимости деформации от напряжения для первоначального образца высотой 4,5 мм имела заметное отклонение на участке пластических деформаций. Несмотря на практически одинаковую пористость титана для трех моделей, условный предел текучести, рассчитанный для модели большей высоты, равнялся 720 МПа, а для двух других образцов составил 878 МПа. Поскольку пористость исследуемых образцов была почти одинаковой, то можно предположить, что различие прочностных свойств в рассчитанных моделях является следствием геометрической особенности распределения узлов верхних граней, к которым были применены условия нагруженности (рис. 5).

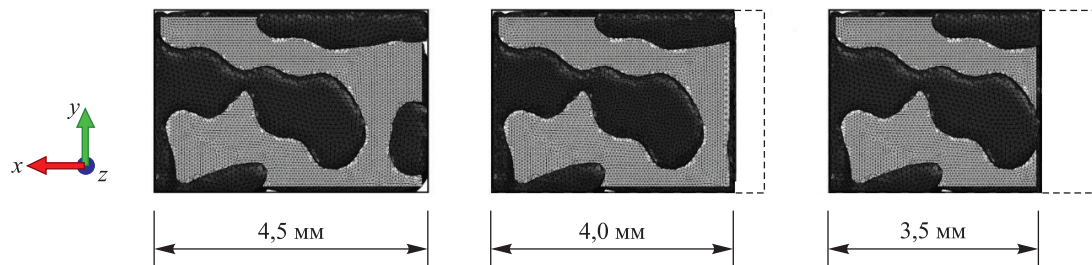


Рис. 3. Конечно-элементные модели биокompозита кость – титан различной высоты.  
Черный цвет – пористый титан, белый цвет – кость

Fig. 3. FE-models of the bone – titanium biocomposite of different heights.  
Black color – porous titanium, white color – bone

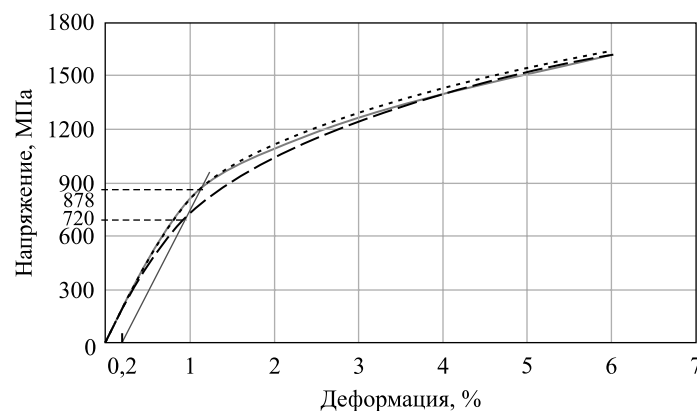


Рис. 4. Кривые зависимости деформации от напряжения для трех образцов биокompозита различной высоты:  
пунктирная линия – 4,5 мм; сплошная линия – 4,0 мм; точечная линия – 3,5 мм

Fig. 4. Stress-strain curves for three specimens of different heights:  
dash line – 4.5 mm; continuous line – 4.0 mm; points – 3.5 mm

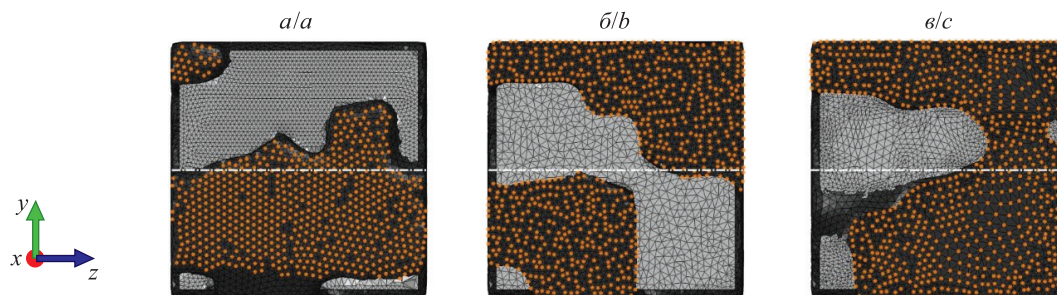


Рис. 5. Смещенные узлы сетки конечных элементов металлической составляющей трех образцов биокомпозита кость – титан различной высоты (вид сверху): *a* – 4,5 мм; *b* – 4,0 мм; *c* – 3,5 мм

Fig. 5. Nodal displacement of the titanium porous structure of three specimens of different heights (top view): *a* – 4.5 mm; *b* – 4.0 mm; *c* – 3.5 mm

К образцу высотой 4,5 мм усилие сжатия прилагалось с одной стороны в большей степени, чем с другой, относительно центральной горизонтальной плоскости (обозначена на рис. 5 белой пунктирной линией). В процентном соотношении нагрузка на верхнюю плоскость распределялась как 22 и 78 % от общего числа смещенных узлов. В двух других случаях усилие сжатия было практически равномерным с обеих сторон с небольшим отклонением: 55 и 45 % – для образца высотой 4,0 мм, 52 и 48 % – для образца высотой 3,5 мм. Такое улучшение условий нагруженности при определении входных данных для конечно-элементного моделирования механических испытаний на сжатие образцов биокомпозита кость – титан, возможно, является причиной увеличения значений условного предела текучести с 720 до 878 МПа. Поскольку неравномерность распределения смещенных узлов наблюдается в модели только относительно горизонтальной плоскости (относительно вертикальной плоскости узлы расположены более равномерно), то для дальнейших расчетов было использовано среднее арифметическое значение данного параметра (825 МПа).

## Выводы

В описанных выше исследованиях была продемонстрирована методика построения изотропной микроКТ-модели в целях изучения эффекта вставания костной ткани в свободные поры материала имплантата и его влияния на механические свойства пористого титана, применяемого в бесцементном эндопротезировании. Поверхностное взаимодействие металлической структуры и кости в условиях сжимающей нагрузки изучалось посредством механических испытаний и конечно-элементного моделирования. Предложенная методика конечно-элементного моделирования, основанная на данных КТ, позволила получить кривую зависимости деформации от напряжения биокомпозита кость – титан. Описание титанового материала как упругопластического делает расчеты напряженно-деформированного состояния наиболее точными, так как учитывает пластические деформации на микроуровне.

Диаграммы напряжений, построенные на основании данных математических расчетов, доказали улучшение прочностных свойств пористого титана за счет материала, имитирующего костную ткань. Модуль упругости металлического образца увеличился на 29 % после заполнения свободных пор костью и составил 67,3 ГПа при начальном значении 51,9 ГПа. Анализ кривых зависимости деформации от напряжения показал увеличение условного предела текучести биокомпозита в 2 раза – с 387 до 825 МПа. За счет разбиения истории нагружения на 20 шагов получены значения 20 точек кривой зависимости деформации от напряжения, описывающие пластические свойства биокомпозита пористый титан – костная ткань.

В заключение отметим, что в работе [13] были выполнены механические испытания тонкой пористой титановой пластинки с проросшей костной тканью. Однако значительные различия в форме, размерах и пористости образцов, подвергнутых эксперименту и конечно-элементному моделированию, не позволяют количественно сравнить эффективные модули упругости и предел текучести исследованных образцов.

Дальнейшие исследования будут направлены на изучение напряжений, возникающих в бедренной кости при имплантации бесцементного эндопротеза, и механизма передачи усилий от имплантата к костной ткани посредством сформировавшегося биокомпозита.

## Библиографические ссылки

1. Tozzi G, Zhang Q-H, Lupton C, Tong J, Guillen T, Ohrndorf A, et al. Characterisation of a metallic foam – cement composite under selected loading conditions. *Journal of Materials Science. Materials in Medicine*. 2013;24(11):2509–2518. DOI: 10.1007/s10856-013-5000-8.

2. Никитин АВ. Конечно-элементный анализ эффекта врастания костных тканей в процессе остеоинтеграции бесцементного эндопротеза. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика.* 2013;13(4-1):90–96.
3. Никитин АВ, Михасев ГИ, Маслов АП. Конечно-элементный анализ влияния области врастания на стабильность эндопротеза тазобедренного сустава. *Механика машин, механизмов и материалов.* 2012;1:86–89.
4. Li H, Oppenheimer SM, Stupp SI, Dunand DC, Brinson LC. Effects of pore morphology and bone ingrowth on mechanical properties of microporous titanium as an orthopaedic implant material. *Materials Transactions.* 2004;45(4):1124–1131. DOI: 10.2320/matertrans.45.1124.
5. Маслов АП, Рущкий АВ, Никитин АВ. Переломы бедренного компонента эндопротезов тазобедренного сустава системы SLPS. *Медицина.* 2013;1:7–13.
6. Esen Z, Tarhan Bor E, Bor S. Characterization of loose powder sintered porous titanium and Ti6Al4V alloy. *Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences.* 2009;33(3):207–219. DOI: 10.3906/muh-0906-41.
7. Thelen S, Barthelat F, Brinson LC. Mechanics considerations for microporous titanium as an orthopedic implant material. *Journal of Biomedical Materials Research. Part A.* 2004;69A(4):601–610. DOI: 10.1002/jbm.a.20100.
8. de Vasconcellos L-M-R, Leite D-de O, Nascimento F-O, de Vasconcellos L-G-O, Graça M-L-de A, Carvalho Y-R, et al. Porous titanium for biomedical applications: an experimental study on rabbits. *Medicina Oral, Patologia Oral y Cirugía Bucal.* 2010;15(2):407–412.
9. Singh R, Lee PD, Lindley TC, Kohlhauser C, Hellmich C, Bram M, et al. Characterization of the deformation behavior of intermediate porosity interconnected Ti foams using micro-computed tomography and direct finite element modeling. *Acta Biomaterialia.* 2010;6(6):2342–2351. DOI: 10.1016/j.actbio.2009.11.032.
10. Michailidis N, Stergioudi F, Omar H, Papadopoulos D, Tsipas DN. Experimental and FEM analysis of the material response of porous metals imposed to mechanical loading. *Colloids and Surfaces A. Physicochemical and Engineering Aspects.* 2011;382(1–3):124–131. DOI: 10.1016/j.colsurfa.2010.12.017.
11. Michailidis N, Stergioudi F, Omar H, Tsipas DN. Investigation of the mechanical behavior of open-cell Ni foams by experimental and FEM procedures. *Advanced Engineering Materials.* 2008;10(12):1122–1126. DOI: 10.1002/adem.200800152.
12. Жуковец ИИ. *Механические испытания металлов.* 2-е издание, переработанное и дополненное. Москва: Высшая школа; 1986. 199 с. (Профтехобразование).
13. Никитин АВ, Шилько СВ. Оценка влияния остеогенеза на механические свойства пористого титана при сжатии. В: *Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28.* Минск: БНТУ; 2013. с. 127–129.

## References

1. Tozzi G, Zhang Q-H, Lupton C, Tong J, Guillen T, Ohrndorf A, et al. Characterisation of a metallic foam – cement composite under selected loading conditions. *Journal of Materials Science. Materials in Medicine.* 2013;24(11):2509–2518. DOI: 10.1007/s10856-013-5000-8.
2. Nikitsin AV. Biomechanical assessment of the bone ingrowth effect during cementless endoprosthesis osteointegration. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics.* 2013;13(4-1):90–96. Russian.
3. Nikitsin AV, Mikhasev GI, Maslov AP. Finite element analysis of the porous coating in hip-joint prosthesis. *Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials.* 2012;1:86–89. Russian.
4. Li H, Oppenheimer SM, Stupp SI, Dunand DC, Brinson LC. Effects of pore morphology and bone ingrowth on mechanical properties of microporous titanium as an orthopaedic implant material. *Materials Transactions.* 2004;45(4):1124–1131. DOI: 10.2320/matertrans.45.1124.
5. Maslov AP, Rutsikii AV, Nikitin AV. [Periprosthetic fracture of the stem in cementless hip-joint replacement system SLPS]. *Meditsina.* 2013;1:7–13. Russian.
6. Esen Z, Tarhan Bor E, Bor S. Characterization of loose powder sintered porous titanium and Ti6Al4V alloy. *Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences.* 2009;33(3):207–219. DOI: 10.3906/muh-0906-41.
7. Thelen S, Barthelat F, Brinson LC. Mechanics considerations for microporous titanium as an orthopedic implant material. *Journal of Biomedical Materials Research. Part A.* 2004;69A(4):601–610. DOI: 10.1002/jbm.a.20100.
8. de Vasconcellos L-M-R, Leite D-de O, Nascimento F-O, de Vasconcellos L-G-O, Graça M-L-de A, Carvalho Y-R, et al. Porous titanium for biomedical applications: an experimental study on rabbits. *Medicina Oral, Patologia Oral y Cirugía Bucal.* 2010;15(2):407–412.
9. Singh R, Lee PD, Lindley TC, Kohlhauser C, Hellmich C, Bram M, et al. Characterization of the deformation behavior of intermediate porosity interconnected Ti foams using micro-computed tomography and direct finite element modeling. *Acta Biomaterialia.* 2010;6(6):2342–2351. DOI: 10.1016/j.actbio.2009.11.032.
10. Michailidis N, Stergioudi F, Omar H, Papadopoulos D, Tsipas DN. Experimental and FEM analysis of the material response of porous metals imposed to mechanical loading. *Colloids and Surfaces A. Physicochemical and Engineering Aspects.* 2011;382(1–3):124–131. DOI: 10.1016/j.colsurfa.2010.12.017.
11. Michailidis N, Stergioudi F, Omar H, Tsipas DN. Investigation of the mechanical behavior of open-cell Ni foams by experimental and FEM procedures. *Advanced Engineering Materials.* 2008;10(12):1122–1126. DOI: 10.1002/adem.200800152.
12. Zhukovets II. *Mekhanicheskie ispytaniya metallov* [Mechanical testing of metals]. 2<sup>nd</sup> edition, revised and expanded. Moscow: Vysshaya shkola; 1986. 199 p. (Proftekhobrazovanie). Russian.
13. Nikitin AV, Shilko SV. Improvement of functional characteristics of endoprostheses. In: *Theoretical and applied mechanics. Issue 28.* Minsk: Belarusian National Technical University; 2013. p. 127–129. Russian.

УДК 517.968.73

## ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Г. А. РАСОЛЬКО<sup>1)</sup>, С. М. ШЕШКО<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Построены две вычислительные схемы решения граничной задачи для сингулярного интегро-дифференциального уравнения, которое описывает рассеяние  $H$ -поляризованных электромагнитных волн экраном с криволинейной границей. Данное уравнение включает три вида интегралов: сингулярный интеграл с ядром Коши, интегралы с логарифмической особенностью и с ядром из класса Гельдера. Подынтегральные выражения наряду с искомой функцией содержат ее первую производную. Предлагаемые схемы приближенного решения задачи основаны на представлении искомой функции в виде линейной комбинации ортогональных многочленов Чебышева и спектральных соотношениях, позволяющих получить простые аналитические выражения для сингулярной составляющей уравнения. Коэффициенты разложения решения по базису полиномов Чебышева вычисляются как решение системы линейных алгебраических уравнений. Результаты численных экспериментов показывают, что на сетке из 20–30 узлов погрешность приближенного решения достигает минимального предела, обусловленного погрешностью представления действительных чисел с плавающей запятой.

**Ключевые слова:** интегро-дифференциальное уравнение; спектральные соотношения; метод ортогональных многочленов.

---

### Образец цитирования:

Расолько ГА, Шешко СМ. Приближенное решение одного сингулярного интегро-дифференциального уравнения методом ортогональных многочленов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;2:86–96.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-86-96>

### For citation:

Rasolko GA, Sheshko SM. An approximate solution of one singular integro-differential equation using the method of orthogonal polynomials. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;2:86–96. Russian.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-86-96>

---

### Авторы:

**Галина Алексеевна Расолько** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.

**Сергей Михайлович Шешко** – старший преподаватель кафедры цифровой экономики экономического факультета.

### Authors:

**Galina A. Rasolko**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of web technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics.  
[rasolka@bsu.by](mailto:rasolka@bsu.by)  
<https://orcid.org/0000-0002-4055-7343>

**Sergei M. Sheshko**, senior lecturer at the department of digital economy, faculty of economics.  
[sheshkasm@bsu.by](mailto:sheshkasm@bsu.by)  
<https://orcid.org/0000-0001-6366-4961>

## AN APPROXIMATE SOLUTION OF ONE SINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION USING THE METHOD OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS

G. A. RASOLKO<sup>a</sup>, S. M. SHESHKO<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus  
Corresponding author: S. M. Sheshko (sheshkasm@bsu.by)

Two computational schemes for solving boundary value problems for a singular integro-differential equation, which describes the scattering of  $H$ -polarized electromagnetic waves by a screen with a curved boundary, are constructed. This equation contains three types of integrals: a singular integral with the Cauchy kernel, integrals with a logarithmic singularity and with the Helder type kernel. The integrands, along with the solution function, contain its first derivative. The proposed schemes for an approximate solution of the problem are based on the representation of the solution function in the form of a linear combination of the Chebyshev orthogonal polynomials and spectral relations that allows to obtain simple analytical expressions for the singular component of the equation. The expansion coefficients of the solution in terms of the Chebyshev polynomial basis are calculated by solving a system of linear algebraic equations. The results of numerical experiments show that on a grid of 20–30 points, the error of the approximate solution reaches the minimum limit due to the error in representing real floating-point numbers.

**Keywords:** integro-differential equation; spectral relations; method of orthogonal polynomials.

### Введение

Аппарат сингулярных интегральных уравнений широко используется в задачах аэродинамики, дифракции и других областях естествознания [1]. Точность приближенного численного решения интегральных уравнений во многом определяется способом их дискретизации, т. е. выбором квадратурных формул, базисных функций и узлов аппроксимации, позволяющих свести исходную задачу к системе линейных алгебраических уравнений приемлемой размерности и обусловленности. При наличии особенностей в подынтегральных функциях, что характерно для сингулярных интегральных уравнений, требуется максимально учитывать специфику задачи.

В работе [1, с. 69] при решении задачи рассеяния волн криволинейным экраном в случае  $H$ -поляризации рассматривается метод приближенного решения интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi'(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) \ln|t-x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) K(x,t) dt = f(x), \quad -1 < x < 1. \quad (1)$$

Здесь  $K(x, t)$  и  $f(x)$  – известные функции из класса Гёльдера  $H$ ;  $\varphi(x)$  – искомая функция. Там же показано, что решение данного уравнения в классе  $H$  существует и единственно при выполнении условий

$$\varphi(\pm 1) = 0 \quad (2)$$

и искомая функция представима в виде

$$\varphi(x) = \sqrt{1-x^2} v(x), \quad (3)$$

где  $v(x)$  – ограниченная функция при  $x \in [-1, 1]$ .

Вычислительная схема, предложенная в работе [1], основана на интерполировании искомого решения многочленом по узлам Чебышева  $\tau_m = \cos \theta_m$ ,  $\theta_m = \frac{m\pi}{n+1}$ ,  $m = \overline{1, n}$ , и привлечении известных спектральных соотношений для интеграла:

$$M_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln|t-x| dt = \begin{cases} -\ln 2, & k = 0, \\ -\frac{1}{k} T_k(x), & k > 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x).$$

Однако, как справедливо подчеркнуто в работе [2, с. 187], такой подход не всегда оправдан. Если требуется получить решение с высокой точностью, то целесообразно использовать его представление в виде линейной комбинации ортогональных многочленов (например, многочленов Чебышева).

В данной работе предлагается алгоритм численного решения уравнения (1) с неизвестной функцией  $\varphi(x)$  методом ортогональных многочленов, основной идеей которого является применение спектральных или квазиспектральных соотношений для входящих в уравнение интегралов.

### Предварительные сведения

Наряду с (4) будем использовать известные спектральные соотношения [3]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} = U_{n-1}(x), \quad -1 < x < 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_{n-1}(t) \frac{dt}{t-x} = -T_n(x), \quad -1 < x < 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (6)$$

где  $T_n(x)$ ,  $U_{n-1}(x)$  – многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно. Кроме того, получим некоторые дополнительные тождества, необходимые для построения эффективных алгоритмов численного решения поставленной задачи.

**Утверждение 1.** Для  $|x| < 1$  имеет место равенство

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) \ln|t-x| dt = \begin{cases} -\left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{8}\right) U_0(x) + \frac{1}{8} U_2(x), & k=0, \\ \frac{1}{12} U_3(x) - \frac{1}{3} U_1(x), & k=1, \\ \frac{U_{k-2}(x)}{4k} - \frac{k+1}{2k(k+2)} U_k(x) + \frac{1}{4(k+2)} U_{k+2}(x), & k \geq 2. \end{cases} \quad (7)$$

**Доказательство.** С учетом соотношения  $2(1-x^2)U_k(x) = T_k(x) - T_{k+2}(x)$  [4] подынтегральная функция в (7) сводится к виду (4), откуда следует истинность утверждения.

При построении вычислительной схемы используем интерполяционный многочлен для функции  $f(x)$  по узлам Чебышева первого рода [4]:

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j T_j(x), \quad (8)$$

где  $c_j = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ ,  $x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Здесь и далее  $\sum_{j=0}^n a_j = \frac{1}{2} a_0 + a_1 + \dots + a_n$ .

Чтобы получить разложение функции  $f(x)$  по многочленам Чебышева второго рода, применим в (8) тождества [4, с. 23]

$$T_0(x) = U_0(x), \quad 2T_1(x) = U_1(x), \quad 2T_j(x) = U_j(x) - U_{j-2}(x), \quad j \geq 2,$$

и получим следующее равенство:

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j U_j(x), \quad (9)$$

где

$$f_j = G_j - G_{j+2}, \quad j = 0, 1, \dots, n-2, \quad f_{n-1} = G_{n-1}, \quad f_n = G_n,$$



$$G_j = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Для получения интерполяционного многочлена  $K_{n,n}(x, t)$  функции двух переменных  $K(x, t)$  в виде разложения по многочленам Чебышева второго рода используем аналогичный подход, в результате чего будем иметь

$$K_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j}^* U_j(t),$$

$$k_{m,j}^* = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n (T_m(x_l) - \sigma_m T_{m+2}(x_l)) \sum_{r=0}^n K(x_l, x_r) (T_j(x_r) - \theta_j T_{j+2}(x_r)),$$

$$\theta_j = \begin{cases} 1, & j = 0, 1, \dots, n-2, \\ 0, & j = n-1, n, \end{cases} \quad \sigma_m = \begin{cases} 1, & m = 0, 1, \dots, n-2, \\ 0, & m = n-1, n, \end{cases}$$

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.$$
(10)

### Приближенное решение уравнения (1)

Рассмотрим две схемы численного решения уравнения (1) при условии (2).

**Схема 1.** Приближенное решение уравнения (1) будем искать как решение следующей задачи относительно новой неизвестной функции  $\varphi_n(x)$ :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_n'(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) \ln|t-x| dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) K_{n,n}(x, t) dt = f_{n+2}(x), \quad -1 < x < 1,$$

$$\varphi_n(\pm 1) = 0,$$
(11)

где  $K_{n,n}(x, t)$  – интерполяционный многочлен (10) функции  $K(x, t)$  степени  $n$  по обоим переменным;  $f_{n+2}(x)$  – интерполяционный многочлен функции  $f(x)$  вида (9) степени  $n+2$ ;  $\varphi_n(x)$  – некоторое приближение к искомой функции.

Чтобы получить явное выражение для  $\varphi_n(x)$ , поступим следующим образом. Введем вспомогательную функцию

$$v_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_n'(t)}{t-x} dt.$$
(12)

Тогда, выполняя обращение интеграла (12) в классе неограниченных функций, имеем

$$\varphi_n'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} v_n(t)}{t-x} dt + \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Далее, исходя из того, что  $\varphi_n(-1) = 0$ , получаем

$$\varphi_n(x) = \int_{-1}^x \varphi_n'(\tau) d\tau = -\int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} v_n(t)}{t-\tau} dt + \frac{c}{\sqrt{1-\tau^2}} \right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) v_n(t) dt + \mu(x), \quad \mu(x) = c \left( \arcsin x + \frac{\pi}{2} \right),$$
(13)

где

$$H(x, t) = -\sqrt{1-t^2} \int_{-1}^x \left( \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) =$$

$$= -\sqrt{1-t^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \ln \frac{1-xt + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2}}{|t-x|} \right) = -\ln \frac{1-xt + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2}}{|t-x|}.$$

Учитывая, что  $H(-1, t) = H(1, t)$ , находим  $c = 0$ . Кроме того, что функция  $H(x, t)$  симметрическая, она также неположительная, и имеют место оценки

$$H(x, t) = H(\cos\theta, \cos\sigma) = -\ln \frac{1 - \cos(\theta + \sigma)}{2 \sin \frac{\theta + \sigma}{2} \left| \sin \frac{\theta - \sigma}{2} \right|} = -\ln \frac{\sin \frac{\theta + \sigma}{2}}{\left| \sin \frac{\theta - \sigma}{2} \right|} \leq 0, \quad 0 < \sigma, \theta \leq \pi,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 |H(x, t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \int_{-1}^x \left( \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) dt = \sqrt{1-x^2} \leq 1.$$

Для вспомогательной функции (12) используем разложение

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k U_k(x), \quad (14)$$

где  $c_k, k = 0, 1, \dots, n$ , – пока неизвестные постоянные.

Тогда из (13) и (14) следует, что

$$\varphi_n(x) = -\sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} U_k(x), \quad (15)$$

так как

$$\varphi_n(x) = -\int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{v_n(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau = -\sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_k(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} T_{k+1}(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^n c_k A_k(x),$$

где

$$A_k(x) = \int_{-1}^x \frac{T_{k+1}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = -\frac{1}{k+1} \sin((k+1)\arccos(x)) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{k+1} U_k(x), \quad k \geq 0.$$

Введем далее операторы

$$I(\varphi_n; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) \ln|t-x| dt, \quad (16)$$

$$k(\varphi_n; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) K_{n,n}(x, t) dt. \quad (17)$$

Уравнение (11) с учетом (14), (16), (17) принимает вид

$$v_n(x) + I(\varphi_n; x) + k(\varphi_n; x) = f_{n+2}(x). \quad (18)$$

На основании полученного представления (15) выполним эквивалентные преобразования и упростим входящие в (16) и (17) интегралы.

$$\begin{aligned} I(\varphi_n; x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) \ln|t-x| dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} U_k(t) \ln|t-x| dt = \\ &= -\sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) \ln|t-x| dt = -\sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} J_k(x), \end{aligned}$$

при этом  $J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) \ln|t-x| dt$  вычисляются в соответствии с формулами (7). С учетом данного соотношения имеем

$$\begin{aligned} I(\varphi_n; x) &= c_0 \left( \left( \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{8} \right) U_0(x) - \frac{1}{8} U_2(x) \right) + c_1 \left( -\frac{1}{12} U_3(x) + \frac{1}{3} U_1(x) \right) + \\ &+ \sum_{k=2}^n c_k \frac{1}{k+1} \left( -\frac{U_{k-2}(x)}{4k} + \frac{k+1}{2k(k+2)} U_k(x) - \frac{1}{4(k+2)} U_{k+2}(x) \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Перегруппировав это выражение, получим разложение интеграла с логарифмической особенностью по многочленам Чебышева второго рода:

$$I(\varphi_n; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) \ln|t-x| dt = \sum_{k=0}^{n+2} D_k U_k(x). \quad (20)$$

Значения  $D_k$  нетрудно выписать на основании (19).

Преобразуем (17) с учетом представления (10):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) K_{n,n}(x, t) dt &= -\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} c_k \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j}^* \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) U_j(t) dt = \\ &= -\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} c_k \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j}^* M_{k,j}, \quad M_{k,j} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k=j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

Тем самым из (21) получим разложение интеграла (17) по многочленам Чебышева второго рода:

$$k(\varphi_n; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) K_{n,n}(x, t) dt = \sum_{m=0}^n E_m U_m(x), \quad (22)$$

где

$$E_m = \sum_{k=0}^n c_k \omega_{m,k}, \quad \omega_{m,k} = -\frac{k_{m,k}^*}{2k+2}. \quad (23)$$

Подставляя в (18) представления (14), (20), (22) и (9), приходим к уравнению

$$\sum_{k=0}^n (c_k + D_k + E_k) U_k(x) + \sum_{k=n+1}^{n+2} D_k U_k(x) = \sum_{k=0}^{n+2} f_k U_k(x).$$

Полученное равенство выполняется, когда коэффициенты разложения удовлетворяют системе уравнений  $c_k + D_k + E_k = f_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ ,  $D_k = f_k$ ,  $k = \overline{n+1, n+2}$ , из которой после несложных преобразований приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $c_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ :

$$\begin{aligned} (\beta_k + 1)c_k + \gamma_k c_{k+2} + \sum_{q=0}^n c_q \omega_{k,q} &= f_k, \quad k = \overline{0, 1}, \\ \alpha_k c_{k-2} + (\beta_k + 1)c_k + \gamma_k c_{k+2} + \sum_{q=0}^n c_q \omega_{k,q} &= f_k, \quad k = \overline{2, n-2}, \end{aligned}$$

$$\alpha_k c_{k-2} + (\beta_k + 1)c_k + \sum_{q=0}^n c_q \omega_{k,q} = f_k, \quad k = \overline{n-1, n},$$

$$\alpha_k c_{k-2} = f_k, \quad k = \overline{n+1, n+2},$$
(24)

где коэффициенты  $\omega_{k,q}$  вычисляются согласно (23),

$$\alpha_k = -\frac{1}{4k(k-1)}, \quad \beta_k = \begin{cases} \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{8}, & k=0, \\ \frac{1}{2k(k+2)}, & k>0, \end{cases} \quad \gamma_k = -\frac{1}{4(k+2)(k+3)}.$$

Решая систему (24) относительно неизвестных  $c_k, k = 0, 1, \dots, n$ , при  $n \geq 4$ , приближенное решение уравнения (1) получим по формуле (15).

**Схема 2.** Построим еще одну схему численного решения уравнения (1). Рассмотрим вначале следующие утверждения.

**Утверждение 2.** Для  $|x| < 1$  имеет место равенство

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left( \sqrt{1-t^2} T_k(t) \right)' \frac{dt}{t-x} = \begin{cases} -U_0(x), & k=0, \\ \frac{k-1}{2} U_{k-2}(x) - \frac{k+1}{2} U_k(x), & k \geq 1. \end{cases}$$
(25)

**Доказательство.** При  $k=0$  формула (25) очевидно верна на основании (5). Пусть  $k \geq 1$ . Вычислим производную от подынтегральной функции и используем соотношение  $xT_k(x) = (1-x^2)U_{k-1}(x) - T_{k-1}(x)$  [4].

Тогда  $J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left( (k+1)\sqrt{1-t^2}U_{k-1}(t) - \frac{T_{k-1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} \right) \frac{dt}{t-x}$ . Принимая во внимание (5), (6) и соотно-

шение  $2T_k(x) = U_k(x) - U_{k-2}(x)$ , получим  $J_k(x) = -(k+1)T_k(x) - U_{k-2}(x) = \frac{k-1}{2}U_{k-2}(x) - \frac{k+1}{2}U_k(x)$ , что и требовалось доказать.

**Утверждение 3.** Для  $|x| < 1$  имеет место равенство

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} T_k(t) \ln|t-x| dt =$$

$$= \begin{cases} -\left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{8}\right)U_0(x) + \frac{1}{8}U_2(x), & k=0, \\ -\frac{1}{6}U_1(x) + \frac{1}{24}U_3(x), & k=1, \\ \left(\frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{8}\right)U_0(x) - \frac{5}{32}U_2(x) + \frac{1}{32}U_4(x), & k=2, \\ -\frac{U_{k-4}(x)}{8(k-2)} + \frac{3k-4}{8k(k-2)}U_{k-2}(x) - \frac{3k+4}{8k(k+2)}U_k(x) + \frac{1}{8(k+2)}U_{k+2}(x), & k \geq 3. \end{cases}$$
(26)

**Доказательство.** С учетом соотношений  $2T_k(x) = U_k(x) - U_{k-2}(x), k \geq 1, U_{-1}(x) = 0, T_0 = U_0$ , левая часть (26) сводится к вычислению интегралов вида (7), и тождества (26) проверяются непосредственными вычислениями.

Принимая во внимание (3), приближенное решение уравнения (1) будем искать как решение следующего уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\left(\sqrt{1-t^2} v_n(t)\right)'}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) \ln|t-x| dt + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) K_{n,n}(x,t) dt = f_{n+2}(x), \quad -1 < x < 1, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $K_{n,n}(x, t)$  – интерполяционный многочлен (10) функции  $K(x, t)$  степени  $n$  по обоим переменным;  $f_{n+2}(x)$  – интерполяционный многочлен функции  $f(x)$  вида (9) степени  $n+2$ ;  $\varphi_n(x) = \sqrt{1-x^2} v_n(x)$  – некоторое приближение к искомой функции.

Положим далее

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x), \quad (28)$$

где  $c_k, k=0, 1, \dots, n$ , – пока неизвестные постоянные.

Упростим первый интеграл, входящий в (27). С учетом (28) и (25) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\left(\sqrt{1-t^2} v_n(t)\right)'}{t-x} dt = \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\left(\sqrt{1-t^2} T_k(t)\right)'}{t-x} dt = \\ & = -c_0 U_0(x) + \sum_{k=1}^n c_k \frac{k-1}{2} U_{k-2} - \sum_{k=1}^n c_k \frac{k+1}{2} U_k = \\ & = -c_0 U_0(x) + \sum_{k=0}^{n-2} c_{k+2} \frac{k+1}{2} U_k(x) - \sum_{k=1}^n c_k \frac{k+1}{2} U_k(x) = \\ & = -c_0 U_0(x) + c_2 \frac{U_0(x)}{2} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k+1}{2} (c_{k+2} - c_k) U_k(x) - \sum_{k=n-1}^n c_k \frac{k+1}{2} U_k(x) = \sum_{k=0}^n A_k U_k(x). \end{aligned} \quad (29)$$

Тем самым получено разложение первого интеграла в (27) по многочленам Чебышева второго рода:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\left(\sqrt{1-t^2} v_n(t)\right)'}{t-x} dt = \sum_{k=0}^n A_k U_k(x), \quad (30)$$

где  $A_k$  на основании (29) имеют вид

$$A_k = \begin{cases} 0,5c_2 - c_0, & k=0, \\ 0,5(k+1)(c_{k+2} - c_k), & k=1, n-2, \\ -0,5nc_{n-1}, & k=n-1, \\ -0,5(n+1)c_n, & k=n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Рассмотрим второй интеграл в (27) с учетом представления (28):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) \ln|t-x| dt = \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} T_k(t) \ln|t-x| dt = \sum_{k=0}^n c_k I_k(x).$$

Подставив вместо  $I_k(x)$  его значение согласно (26), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) \ln|t-x| dt = c_0 \left( \frac{1}{8} U_2(x) - \left( \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{8} \right) U_0(x) \right) + \\ & + c_1 \left( -\frac{1}{6} U_1(x) + \frac{1}{24} U_3(x) \right) + c_2 \left( \left( \frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{8} \right) U_0(x) - \frac{5}{32} U_2(x) + \frac{1}{32} U_4(x) \right) + \\ & + \sum_{k=3}^n c_k \left( -\frac{U_{k-4}(x)}{8(k-2)} + \frac{3k-4}{8k(k-2)} U_{k-2}(x) - \frac{3k+4}{8k(k+2)} U_k(x) + \frac{1}{8(k+2)} U_{k+2}(x) \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Перегруппировав это выражение, будем иметь разложение второго интеграла в (27) по многочленам Чебышева второго рода:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) \ln|t-x| dt = \sum_{k=0}^{n+2} B_k U_k(x). \quad (32)$$

Выражения для  $B_k$  несложно получить из (31).

Рассмотрим третий интеграл в (27) и также учтем представления (10) и (28):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) K_{n,n}(x,t) dt = \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j}^* \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} T_k(t) U_j(t) dt = \\ & = \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j}^* \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} (U_{j+k}(t) + U_{j-k}(t)) dt \right) = \\ & = \sum_{m=0}^n U_m(x) \frac{1}{4} \left( \sum_{k=0}^n c_k k_{m,k}^* + c_0 k_{m,0}^* \right) = \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{k=0}^n c_k \omega_{m,k}^*, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\omega_{m,k}^* = \begin{cases} \frac{k_{m,k}^*}{2}, & k=0, \\ \frac{k_{m,k}^*}{4}, & k>0. \end{cases} \quad (34)$$

Тем самым из (33) приходим к разложению третьего интеграла в (27) по многочленам Чебышева второго рода:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) K_{n,n}(x,t) dt = \sum_{m=0}^n D_m U_m(x), \quad (35)$$

где  $D_m = \sum_{k=0}^n c_k \omega_{m,k}^*$ .

Собирая вместе разложение каждого из трех интегралов по формулам (30), (32), (35), слева имеем линейную комбинацию многочленов Чебышева второго рода, а справа – функцию  $f_{n+2}(x)$  в виде (9):

$$\sum_{k=0}^n (A_k + B_k + D_k) U_k(x) + \sum_{k=n+1}^{n+2} B_k U_k(x) = \sum_{k=0}^{n+2} f_k U_k(x).$$

Это равенство верно тогда и только тогда, когда коэффициенты удовлетворяют системе уравнений  $A_k + B_k + D_k = f_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ ,  $B_k = f_k$ ,  $k = \overline{n+1, n+2}$ . После несложных преобразований приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $c_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ :

$$\begin{aligned} & \beta_k c_k + \gamma_k c_{k+2} + \delta_k c_{k+4} + \sum_{q=0}^n c_q \omega_{k,q}^* = f_k, \quad k = \overline{0, 1}, \\ & \alpha_k c_{k-2} + \beta_k c_k + \gamma_k c_{k+2} + \delta_k c_{k+4} + \sum_{q=0}^n c_q \omega_{k,q}^* = f_k, \quad k = \overline{2, n-4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_k c_{k-2} + \beta_k c_k + \gamma_k c_{k+2} + \sum_{q=0}^n c_q \omega_{k,q}^* &= f_k, \quad k = \overline{n-3, n-2}, \\ \alpha_k c_{k-2} + \beta_k c_k + \sum_{q=0}^n c_q \omega_{k,q}^* &= f_k, \quad k = \overline{n-1, n}, \\ \alpha_k c_{k-2} &= f_k, \quad k = \overline{n+1, n+2}, \end{aligned} \quad (36)$$

где коэффициенты  $\omega_{k,q}^*$  вычисляются согласно (34),

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{1}{8}, & k = 2, \\ \frac{1}{8k}, & k = \overline{3, 4}, \\ \frac{1}{8(k-2)}, & k > 4, \end{cases} \quad \beta_k = \begin{cases} -\frac{\ln 2}{2} - \frac{9}{8}, & k = 0, \\ -\frac{7}{6}, & k = 1, \\ -\frac{4(k+1)^3 - k}{8k(k+2)}, & k > 1, \end{cases}$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \frac{\ln 2}{4} + \frac{5}{8}, & k = 0, \\ \frac{4(k+1)^3 - k - 2}{8k(k+2)}, & k > 0, \end{cases} \quad \delta_k = \begin{cases} -\frac{1}{16}, & k = 0, \\ -\frac{1}{8(k+2)}, & k > 0. \end{cases}$$

Решив систему (36) относительно неизвестных  $c_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , при  $n \geq 7$ , приближенное решение уравнения (1) получим по формуле

$$\varphi_n(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k T_k(x). \quad (37)$$

Предложенные схемы протестированы на примере решения модельной задачи для уравнения (1) при

$$K(x, t) = \frac{x^3 t}{(x^2 + 1)(t^2 + 1)}, \quad f(x) = \frac{2}{3} x^3 - 5x - \frac{(2\sqrt{2} - 3)x^3}{x^2 + 1}. \quad \text{Известно, что решением задачи (1), (2) в дан-}$$

ном случае является функция  $\varphi(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ . Как показывают расчеты, проведенные в среде компьютерной алгебры *Mathcad*, уже при сравнительно небольших значениях  $n$  достигается достаточно высокая точность вычисления приближенного решения.

**Схема 1.** Решая систему (24) при  $n$ , равных 7, 14 и 35, видим, что точное решение  $\varphi(x)$  отличается от приближенного  $\varphi_n(x)$ , вычисленного по формуле (15), в системе точек  $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$  не более чем на  $1,0 \cdot 10^{-5}$ ,  $2,2 \cdot 10^{-8}$  и  $8,0 \cdot 10^{-16}$  соответственно.

**Схема 2.** Решая систему (36) при  $n$ , равных 7, 14 и 21, видим, что точное решение  $\varphi(x)$  отличается от приближенного  $\varphi_n(x)$ , вычисленного по формуле (37), в системе точек  $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$  не более чем на  $1,0 \cdot 10^{-5}$ ,  $2,2 \cdot 10^{-8}$  и  $1,5 \cdot 10^{-15}$  соответственно.

Обоснование сходимости и оценки погрешности приближенного решения можно получить по аналогии с представленными в статье [5].

### Библиографические ссылки

1. Панасюк ВВ, Саврук МП, Назарчук ЗТ. *Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции*. Киев: Наукова думка; 1984. 344 с.
2. Бахвалов НС, Жидков НП, Кобельков ГМ. *Численные методы*. Москва: Наука; 1987. 598 с.
3. Бейтмен Г, Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*. Виленкин НЯ, переводчик. Москва: Наука; 1966. 295 с. (Справочная математическая библиотека).
4. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева*. Лебедев ВИ, редактор; Кирич СН, переводчик. Москва: Наука; 1983. 384 с.
5. Расолько ГА. Численное решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения Праудтля методом ортогональных многочленов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2018;3:68–74.

## References

1. Panasyuk VV, Savruk MP, Nazarchuk ZT. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravnenii v dvumernykh zadachakh difraktsii* [The method of singular integral equations in two-dimensional diffraction problems]. Kyiv: Naukova dumka; 1984. 344 p. Russian.
2. Bakhvalov NS, Zhidkov NP, Kobel'kov GM. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Moscow: Nauka; 1987. 598 p. Russian.
3. Bateman H. *Higher transcendental functions. Volume 2*. Erdélyi A, editor. New York: McGraw-Hill Book Company; 1953. XIV, 396 p.  
Russian edition: Bateman H, Erdélyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii. Funktsii Besselya, funktsii parabolicheskogo tsilindra, ortogonal'nye mnogochleny*. Vilenkin NYa, translator. Moscow: Nauka; 1966. 295 p. (Spravochnaya matematicheskaya biblioteka).
4. Pashkovskii S. *Vychislitel'nye primeneniya mnogochlenov i ryadov Chebysheva* [Computational applications of polynomials and Chebyshev series]. Lebedev VI, editor; Kiro SN, translator. Moscow: Nauka; 1983. 384 p. Russian.
5. Rasolko GA. Numerical solution of singular integro-differential Prandtl equation by the method of orthogonal polynomials. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2018;3:68–74. Russian.

Статья поступила в редакцию 06.03.2020.  
Received by editorial board 06.03.2020.



---

---

# ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

---

## DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

---

---

УДК 519.87

### АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ СТРУКТУРЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПОДМНОЖЕСТВА НА ОСНОВЕ ПАРЕТОВСКИХ СЛОЕВ В ЗАДАЧЕ О РАНЦЕ

С. В. ЧЕБАКОВ<sup>1)</sup>, Л. В. СЕРЕБРЯНАЯ<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси,  
ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Беларусь

<sup>2)</sup>Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,  
ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Беларусь

Разработан алгоритм нахождения структуры оптимального подмножества в задаче о ранце на основе предлагаемой многокритериальной оптимизационной модели. Между элементами множества начальных данных введено двухкритериальное отношение предпочтения и выполнено разбиение этого множества на паретовские слои. Сформулировано понятие глубины недоминирования отдельного паретовского слоя. На его основе приняты условия, при выполнении которых решение задачи о ранце содержит в себе первые паретовские слои, определенные на заданном множестве начальных данных. Представлена структура оптимального подмножества, включающая в себя отдельные паретовские слои. Для построения паретовских слоев во введенном пространстве предпочтений

---

#### Образец цитирования:

Чебаков СВ, Серебряная ЛВ. Алгоритм нахождения структуры оптимального подмножества на основе паретовских слоев в задаче о ранце. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;2: 97–104.

<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-97-104>

#### For citation:

Chebakov SV, Serebryanaya LV. Finding algorithm of optimal subset structure based on the Pareto layers in the knapsack problem. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;2:97–104. Russian.

<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-97-104>

---

#### Авторы:

**Сергей Викторович Чебаков** – кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник лаборатории вычислительных сетей.

**Лия Валентиновна Серебряная** – кандидат технических наук, доцент; доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий факультета компьютерных систем и сетей.

#### Authors:

**Sergey V. Chebakov**, PhD (physics and mathematics); senior researcher at the laboratory of computing networks.

[info@chebakov.com](mailto:info@chebakov.com)

**Liya V. Serebryanaya**, PhD (engineering), docent; associate professor at the department of software for information technologies, faculty of computer systems and networks.

[l\\_silver@mail.ru](mailto:l_silver@mail.ru)



не требуется применение переборных алгоритмов к элементам начального множества. Эти алгоритмы используются при нахождении лишь некоторой части оптимального подмножества, что уменьшает число операций, необходимых для решения рассматриваемой комбинаторной задачи. Метод определения найденных паретовских слоев показывает, что число операций зависит от объема ранца и структуры паретовских слоев, на которые разбивается множество начальных данных во введенном двухкритериальном пространстве.

**Ключевые слова:** задача о ранце; многокритериальная оптимизация; множество Парето; паретовский слой.

## FINDING ALGORITHM OF OPTIMAL SUBSET STRUCTURE BASED ON THE PARETO LAYERS IN THE KNAPSACK PROBLEM

S. V. CHEBAKOV<sup>a</sup>, L. V. SEREBRYANAYA<sup>b</sup>

<sup>a</sup>United Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus,  
6 Surhanava Street, Minsk 220012, Belarus

<sup>b</sup>Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics,  
6 P. Broŭka Street, Minsk 220013, Belarus

Corresponding author: L. V. Serebryanaya (l\_silver@mail.ru)

An algorithm is developed for finding the structure of the optimal subset in the knapsack problem based on the proposed multicriteria optimization model. A two-criteria relation of preference between elements of the set of initial data is introduced. This set has been split into separate Pareto layers. The depth concept of the elements dominance of an individual Pareto layer is formulated. Based on it, conditions are determined under which the solution to the knapsack problem includes the first Pareto layers. They are defined on a given set of initial data. The structure of the optimal subset is presented, which includes individual Pareto layers. Pareto layers are built in the introduced preference space. This does not require algorithms for enumerating the elements of the initial set. Such algorithms are used when finding only some part of the optimal subset. This reduces the number of operations required to solve the considered combinatorial problem. The method for determining the found Pareto layers shows that the number of operations depends on the volume of the knapsack and the structure of the Pareto layers, into which the set of initial data in the entered two-criteria space is divided.

**Keywords:** knapsack problem; multicriteria optimization; Pareto set; Pareto layer.

### Введение

В статье предложена двухкритериальная оптимизационная модель решения комбинаторной задачи о ранце со множеством объектов  $N$  и заданным объемом  $T$ . Любому элементу  $n_i$  из множества начальных данных соответствуют две характеристики – величина используемого ресурса  $t_i$ , являющаяся частью объема  $T$ , и вес  $v_i$ . Допустимым будет такое подмножество элементов из  $N$ , чья суммарная величина ресурса не превосходит объем ранца  $T$ , но при добавлении в подмножество любого элемента из  $N$  становится больше  $T$ . Среди всех допустимых подмножеств требуется найти оптимальное подмножество  $Q$  с максимальным суммарным значением веса. Пусть число элементов во множестве  $N$  равно  $r$ . Тогда формальное описание задачи о ранце можно представить следующим образом:

$$f(x) = \sum_{i=1}^r v_i x_i \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^r t_i x_i \leq T, \quad x_i \in \{0, 1\},$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_r), \quad v_i > 0, \quad 0 < t_i \leq T, \quad i = 1, \dots, r.$$

Методы решения указанной оптимизационной задачи приведены в работах [1; 2]. Предложенные в них способы основаны на различных алгоритмах перебора элементов множества начальных данных. В случаях, когда количество элементов достаточно велико, число операций, необходимых для решения задачи, существенно возрастает. Следовательно, актуальной является разработка алгоритмов, позволяющих нивелировать трудности, возникающие при увеличении количества элементов во множестве начальных данных.

Определена структура оптимального подмножества, включающая в себя при выполнении сформулированных условий элементы отдельных паретовских слоев во введенном двухкритериальном пространстве. Предложенная структура позволяет сформировать часть оптимального подмножества  $Q$  без

применения алгоритмов перебора. Это может существенно сократить число операций, требуемых для решения рассматриваемой оптимизационной задачи.

### Определение глубины недоминирования паретовского слоя

В работе [3] на множестве начальных данных  $N$  введено двухкритериальное пространство предпочтений, где координатами каждого элемента  $n_i$  из  $N$  являются его ресурс  $t_i$  и вес  $v_i$ . Между любыми двумя элементами  $n_1 = (t_1, v_1)$  и  $n_2 = (t_2, v_2)$  из  $N$  определено следующее транзитивное отношение доминирования.

**Определение 1.** Элемент  $n_1$  доминирует элемент  $n_2$  тогда и только тогда, когда  $t_1 \leq t_2$ ,  $v_1 \geq v_2$ ,  $(t_1, v_1) \neq (t_2, v_2)$ .

Множество всех недоминируемых элементов на множестве  $N$  представляет собой множество Парето на множестве начальных данных  $N$  во введенном двухкритериальном пространстве.

**Определение 2.** Паретовский слой с номером  $m$  (обозначим его  $P_m$ ) представляет собой совокупность недоминируемых элементов на множестве  $N' = N \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} P_i$ , где  $P_i$  – паретовский слой с номером  $i$ .

Множество Парето, определенное на всем множестве  $N$ , является первым паретовским слоем.

Следовательно, для каждого элемента из  $N$ , входящего во второй и последующие паретовские слои, существует хотя бы один элемент из предыдущего слоя, который его доминирует.

**Определение 3.** Верхней критериальной границей некоторого паретовского слоя  $P_m$  является вектор  $L_m^+$ , чьи координаты представляют собой максимум по предпочтению по каждой координате (наименьшее значение по координате  $t_i$  и наибольшее значение по координате  $v_i$ ) среди всех элементов, образующих этот паретовский слой.

**Определение 4.** Нижней критериальной границей паретовского слоя  $P_m$  является вектор  $L_m^-$ , чьи координаты представляют собой минимум по предпочтению по каждой координате (наибольшее значение по координате  $t_i$  и наименьшее значение по координате  $v_i$ ) среди всех элементов данного паретовского слоя.

Из способа построения векторов  $L_m^+$ ,  $L_m^-$  следует, что вектор  $L_m^+$  доминирует все элементы паретовского слоя  $P_m$ , а вектор  $L_m^-$  доминируется каждым его элементом. В работе [4] доказано утверждение, что верхняя критериальная граница любого паретовского слоя  $P_i$  доминирует верхние критериальные границы всех последующих слоев  $P_{m+1}, P_{m+2}, \dots, P_y$ , где  $y$  – общее число паретовских слоев.

Сформулируем утверждение о доминированности элементов отдельных паретовских слоев.

**Утверждение 1.** Для того чтобы каждый элемент паретовского слоя  $P_m$  доминировал любой элемент паретовского слоя  $P_x$  с большим номером, необходимо и достаточно, чтобы нижняя критериальная граница слоя  $P_m$  доминировала верхнюю критериальную границу слоя  $P_x$ .

**Доказательство.** Пусть нижняя критериальная граница слоя  $P_m$  доминирует верхнюю критериальную границу слоя  $P_x$ . Следовательно, исходя из указанного выше свойства верхних и нижних критериальных границ и транзитивности введенного отношения предпочтения, каждый элемент слоя  $P_m$  доминирует любой элемент слоя  $P_x$ .

Пусть каждый элемент слоя  $P_m$  доминирует любой элемент слоя  $P_x$ . Требуется показать, что нижняя критериальная граница слоя  $P_m$  доминирует верхнюю критериальную границу слоя  $P_x$ . Предположим, что эти критериальные границы находятся между собой в отношении Парето. Тогда по определению 2 существует хотя бы один элемент слоя  $P_m$ , чья координата принадлежит нижней критериальной границе слоя  $P_m$ . Кроме того, этот элемент находится в паретовском отношении с некоторым элементом слоя  $P_x$ , чья координата принадлежит верхней критериальной границе слоя  $P_x$ . Это противоречит условию о том, что любой элемент слоя  $P_m$  доминирует каждый элемент слоя  $P_x$ . Утверждение доказано.

Приведем алгоритм нахождения структуры оптимального подмножества в задаче о ранце.

1. Построение паретовских слоев.
2. Определение условий, при выполнении которых множество Парето включается в оптимальное подмножество  $Q$ , на основе сформулированного понятия глубины недоминирования паретовского слоя.
3. Нахождение структуры оптимального подмножества.

Рассмотрим более подробно реализацию алгоритма.

На первом шаге осуществляется нахождение множества Парето и всех остальных паретовских слоев, на которые разбивается множество начальных данных  $N$  во введенном двухкритериальном пространстве.

На втором шаге определяется понятие глубины недоминирования некоторого паретовского слоя. Любой элемент слоя с номером  $m + 1$  может либо доминироваться каким-либо элементом предыдущего слоя  $m$ , либо находиться с ним в отношении Парето. Для слоя с номером  $m + 2$  в слое с номером  $m + 1$

могут существовать элементы, которые находятся в отношении Парето. Тогда возможен случай, когда для некоторого элемента из слоя  $m + 2$  в паретовском слое с номером  $m$  также существует элемент, находящийся с ним в отношении Парето. Согласно утверждению 1 в этом случае нижняя граница слоя с номером  $m$  не может доминировать верхнюю границу слоев с номерами  $m + 1$  и  $m + 2$ .

Пусть каждый элемент следующего слоя с номером  $m + 3$  доминируется всеми элементами слоя  $m$ , т. е. в слое  $m + 3$  уже не существует элементов, которые находятся в отношении Парето с элементами слоя  $m$ .

**Определение 5.** Паретовский слой  $m$  доминирует паретовский слой  $m + i$ ,  $i \geq 1$ , если любой элемент слоя  $m$  доминирует все элементы слоя  $m + i$ .

**Определение 6.** Глубиной недоминирования паретовского слоя с номером  $m$  называется количество следующих после  $m$  паретовских слоев, которые не доминируются слоем  $m$ .

Справедливость утверждения 1 позволяет сделать вывод, что глубина недоминирования паретовского слоя с номером  $m$  равняется количеству следующих после  $m$  паретовских слоев, верхняя граница которых не доминируется нижней границей слоя  $m$ .

### Условия включения элементов множества Парето в оптимальное подмножество

В работе [4] показана справедливость следующих отношений. Оптимальное подмножество  $Q$  принадлежит множеству  $W$  допустимых подмножеств. Первым элементом любого  $W_i$  из  $W$  должен быть какой-либо элемент из множества Парето во введенном двухкритериальном пространстве. На каждом шаге формирования любого допустимого подмножества  $W_i$  выбор очередного элемента должен осуществляться только из соответствующих паретовских множеств  $X_{ij}$ , где  $j$  – номер выбираемого элемента в формируемом подмножестве  $W_i$ . Каждое из паретовских множеств  $X_{ij}$  представляет собой набор недоминируемых элементов на всем наборе начальных данных  $N$ , за исключением элементов, уже вошедших в формируемое допустимое подмножество  $W_i$  [4]. Таким образом, процесс построения допустимых подмножеств  $W_i$  из  $W$  состоит в нахождении соответствующих паретовских множеств  $X_{ij}$  с последующим выбором в них очередного элемента. Этим элементом может быть любой элемент из  $X_{ij}$ . По структуре множества  $X_{ij}$  могут либо совпадать с некоторым паретовским слоем, либо включать в себя часть элементов одного из нескольких соседних паретовских слоев в соответствии с заданной глубиной недоминирования.

На первом шаге формирования всех  $W_i$  множества  $X_{i1}$  совпадают и представляют собой множество Парето на наборе начальных данных  $N$ . Любой его элемент может быть выбран в качестве первого элемента некоторого допустимого подмножества  $W_i$ . Покажем далее, что при выполнении определенных условий все допустимые подмножества  $W_i$  из  $W$ , каждое из которых должно иметь своим первым элементом некоторый элемент множества Парето, содержат и все остальные его элементы. В этом случае нет необходимости в нахождении паретовских множеств  $X_{ij}$ , включающих в себя элементы множества Парето, и можно сразу переходить к рассмотрению элементов второго паретовского слоя.

Предположим, что нижняя критериальная граница множества Парето доминирует верхнюю критериальную границу второго паретовского слоя. Тогда его глубина недоминирования равна 0, и каждый элемент множества Парето доминирует все элементы второго паретовского слоя.

Покажем общую схему построения допустимого подмножества  $W_1$  из  $W$ , первым элементом которого будет некоторый элемент  $w_1$  множества Парето. Каждый элемент множества Парето доминирует любой элемент как второго, так и всех последующих паретовских слоев [4]. Тогда второе паретовское множество  $X_{12}$ , из которого выполняется выбор очередного элемента подмножества  $W_1$ , содержит все элементы множества Парето, кроме  $w_1$ . Поскольку существует полная доминируемость элементов второго паретовского слоя, то ни один из его элементов также не может быть включен в следующие множества  $X_{13}, X_{14}, \dots, X_{1k}, \dots$  до тех пор, пока все элементы множества Парето не войдут в формируемое подмножество  $W_1$ .

Пусть первым элементом другого допустимого подмножества  $W_2$  из  $W$  будет любой элемент множества Парето, за исключением  $w_1$ . Тогда все соответствующие ему множества  $X_{2j}$  также будут содержать элементы только множества Парето до тех пор, пока оно полностью не войдет в  $W_2$ . Только после этого множества  $X_{2j}$ , из которых должен выбираться очередной элемент  $W_2$ , могут включать в себя элементы второго паретовского слоя. Аналогичные рассуждения будут справедливы и для всех остальных допустимых подмножеств  $W_i$ .

Пусть выполняются следующие условия: сумма ресурса  $t_i$  всех элементов множества Парето меньше  $T$  и разница между этой суммой и величиной  $T$  больше соответствующей координаты верхней критериальной границы второго слоя. Тогда допустимые подмножества  $W_i$  из  $W$  невозможно построить

только из элементов множества Парето, и хотя бы один элемент второго паретовского слоя должен войти в каждое из них. Следовательно, при выполнении этих двух условий и глубине недоминирования, равной 0, все допустимые подмножества  $W_i$  из  $W$  имеют совпадающую часть, т. е. каждое из них включает в себя все элементы множества Парето.

Предположим, что нижняя критериальная граница множества Парето доминирует верхнюю критериальную границу не второго, а третьего паретовского слоя, т. е. глубина недоминирования множества Парето равна 1. В этом случае все элементы как третьего, так и последующих паретовских слоев доминируются любым элементом множества Парето. Тогда множество  $X_{12}$ , из которого должен быть выбран второй элемент для подмножества  $W_1$ , содержит все элементы множества Парето, кроме  $w_1$ . Пусть во втором паретовском слое существуют элементы, которые доминируются только элементом  $w_1$ , а с остальными находятся в отношении Парето. Тогда все указанные элементы второго слоя также принадлежат множеству  $X_{12}$  и могут быть включены на следующем шаге в допустимое подмножество  $W_1$ .

Пусть сумма ресурса  $t_i$  элементов первых двух слоев меньше  $T$ . Как следует из способа построения множеств  $X_{ij}$ , при глубине недоминирования, равной 1, любое допустимое подмножество из  $W$  включает в себя все элементы (или только их часть) первых двух паретовских слоев. Предположим, что разница между этой суммой и величиной  $T$  больше значения ресурса  $t_i$  верхней критериальной границы третьего слоя. Это означает, что любое допустимое подмножество из  $W$  нельзя построить только из элементов первых двух паретовских слоев и каждое из них должно включать в себя хотя бы один элемент третьего паретовского слоя.

Элементы всех множеств  $X_{ij}$ , которые формируются в процессе построения допустимых подмножеств из  $W$ , должны находиться между собой в паретовском отношении. Поскольку глубина недоминирования множества Парето равна 1, то каждый его элемент доминирует весь третий паретовский слой. Элементы, входящие в различные допустимые подмножества, выбираются только из соответствующих  $X_{ij}$ . Следовательно, существование какого-либо множества  $X_{ij}$ , которое включает в себя хотя бы один элемент третьего слоя, невозможно, если в него входят элементы множества Парето. Тогда для включения элемента третьего слоя в любое формируемое подмножество  $W_i$  из  $W$  требуется, чтобы все множество Парето уже вошло в  $W_i$ . Значит, каждое подмножество  $W_i$  будет включать в себя все множество Парето.

Аналогичные рассуждения о составе множеств  $X_{ij}$  будут справедливы и при любом другом значении глубины недоминирования элементов множества Парето. Отсюда вытекает следующее утверждение.

**Утверждение 2.** Пусть глубина недоминирования множества Парето равняется  $n$ ,  $n \geq 0$ , и выполняются следующие условия:

- а) количество паретовских слоев составляет не менее  $n + 2$ ;
- б) величина объема ранца  $T$  такова, что сумма ресурса  $t_i$  элементов первых  $(n + 1)$  паретовских слоев меньше  $T$ ;
- в) разница между суммой ресурса  $t_i$  элементов первых  $(n + 1)$  паретовских слоев и величиной  $T$  больше соответствующей координаты верхней критериальной границы  $(n + 2)$  паретовского слоя.

Тогда все элементы множества Парето принадлежат каждому из допустимых подмножеств  $W_i$  из  $W$ .

Таким образом, учитывая способ формирования паретовских множеств  $X_{ij}$  и выполнение условий утверждения 2, оказалось возможным частично сформировать все допустимые подмножества  $W_i$  из  $W$ .

Поскольку оптимальное подмножество  $Q$  представляет собой некоторое  $W_i$ , то при выполнении условий утверждения 2 все элементы множества Парето являются также частью подмножества  $Q$ .

### Представление оптимального подмножества $Q$

На последнем шаге алгоритма определяется структура оптимального подмножества  $Q$ . Пусть выполняются условия утверждения 2 и все элементы множества Парето включены в оптимальное подмножество  $Q$ . Найдем значение величины  $T_1 = T - \sum_{i=1}^k t_i$ , где  $k$  – количество элементов множества Парето. Она

представляет собой измененный объем ранца, который должен использоваться при последующем формировании допустимых подмножеств из  $W$ . Для дальнейшего построения подмножества  $Q$  требуется решить задачу о ранце с объемом  $T_1$  и множеством начальных данных  $N_1$ , включающим в себя все паретовские слои, кроме множества Парето. Обозначим эту задачу  $Z_1$ . Оптимальное подмножество  $Q$  имеет следующий вид:

$$Q = P_0 \cup Q_1, \quad (1)$$

где  $P_0$  – множество Парето на множестве начальных данных  $N$ , а  $Q_1$  – оптимальное подмножество в задаче  $Z_1$ .

Элементы второго паретовского слоя представляют собой множество Парето в задаче  $Z_1$ . Для нее требуется сформировать свой набор  $W$  допустимых подмножеств, каждое из которых содержит хотя бы один элемент второго паретовского слоя. Набор  $W$  включает в себя и подмножество  $Q_1$  [4]. Пусть глубина недоминирования второго паретовского слоя равна некоторой величине  $n_1$ . Поскольку элементы второго паретовского слоя являются множеством Парето в задаче  $Z_1$ , то для них справедливо утверждение 2. Следовательно, все элементы слоя включаются в решение  $Q_1$  задачи  $Z_1$  и, в соответствии с выражением (1), являются частью оптимального подмножества  $Q$ .

Далее определим значение величины  $T_2 = T_1 - \sum_{i=1}^k t_i$ , где  $k$  – количество элементов второго паретовского слоя. Рассмотрим задачу о ранце  $Z_2$  с объемом  $T_2$  и множеством начальных данных  $N_2$ , представляющим собой все паретовские слои, начиная с третьего. Решение  $Q_1$  задачи  $Z_1$  имеет следующий вид:

$$Q_1 = P_1 \cup Q_2, \quad (2)$$

где  $P_1$  – второй паретовский слой, а  $Q_2$  – решение задачи  $Z_2$ . Следовательно, выражение (1) примет вид

$$Q = P_0 \cup P_1 \cup Q_2. \quad (3)$$

Элементы третьего слоя  $P_2$  являются паретовскими элементами для задачи  $Z_2$ . Для нее требуется сформировать свой набор  $W$  допустимых подмножеств, каждое из которых содержит хотя бы один элемент третьего паретовского слоя. Рассматриваемый набор  $W$  включает в себя решение  $Q_2$ . Пусть глубина недоминирования третьего паретовского слоя равна собственной величине  $n_2$ . Предположим, для величины  $T_2$  и глубины недоминирования  $n_2$  выполняются условия утверждения 2. В результате третий паретовский слой включается в решение  $Q_2$  задачи  $Z_2$  и, в соответствии с выражениями (2) и (3), является частью оптимального подмножества  $Q$ .

Аналогичным образом осуществляется расчет величин  $T_3$  и всех последующих  $T_i$ , а также анализ соответствующих им задач  $Z_i$ . Затем последовательно рассматриваются паретовские слои с заданными значениями глубины недоминирования. При выполнении требуемых условий для величин  $T_i$  элементы указанных слоев являются как частью решений  $Q_i$  задач  $Z_i$ , так и частью оптимального подмножества  $Q$ . Анализ слоев продолжается до тех пор, пока для очередного паретовского слоя  $S$  оставшийся объем ранца  $T_{\text{ост}}$  не будет меньше либо равен суммарному значению ресурса  $t_i$  элементов всех паретовских слоев, соответствующих глубине недоминирования слоя  $S$ . В результате нарушится одно из условий утверждения 2, и элементы слоя  $S$  не смогут войти в формируемые допустимые подмножества  $W$  в соответствующей задаче  $Z_{i+1}$ . Множество начальных данных  $N_{i+1}$  в ней представляет собой элементы всех оставшихся паретовских слоев, начиная с  $S$ . Для нахождения решения  $Q_{i+1}$  задачи  $Z_{i+1}$  необходимо реализовать переборный алгоритм построения всех ее допустимых подмножеств. Нахождение  $Q_{i+1}$  задачи  $Z_{i+1}$ , а следовательно, и оптимального подмножества  $Q$  требует разработки алгоритмов определения множеств  $W_i, X_{ij}$  для различных значений глубины недоминирования слоя  $S$  и последующих паретовских слоев. Кроме того, на способ формирования множеств  $W_i, X_{ij}$  влияет величина объема ранца  $T_{\text{ост}}$ . Следовательно, данная задача ввиду ее сложности нуждается в отдельном рассмотрении. Тогда оптимальное подмножество  $Q$  в задаче о ранце со множеством начальных данных  $N$  и объемом  $T$  при использовании предложенной двухкритериальной модели может быть представлено следующим образом:

$$Q = \bigcup_{j=0}^i P_j \cup Q_{i+1}, \quad (4)$$

где  $P_j$  – набор первых паретовских слоев, на которые разбивается множество  $N$  во введенном двухкритериальном пространстве. Алгоритм нахождения структуры оптимального подмножества закончен.

Структура допустимых подмножеств  $W_i$  теперь может быть представлена следующим образом:

$$W_i = \bigcup_{j=0}^k P_j \cup Y_i,$$

где  $Y_i$  – некоторое допустимое подмножество задачи  $Z_{i+1}$ , а  $i$  – их общее количество.

В работе [4] показано, что оптимальное подмножество  $Q$  является объединением ряда подмножеств, каждое из которых принадлежит одному из первых паретовских слоев. Однако при этом не были предложены конкретные способы их нахождения. Исходя из выражения (4), данные подмножества могут представлять собой паретовские слои.

Из выражения (4) следует, что для решения первоначальной задачи о ранце требуется решить задачу  $Z_{i+1}$  с объемом ранца  $T_{\text{ост}}$  и набором начальных данных  $N_{i+1}$ . В частном случае эти две задачи

могут совпадать. Пусть объем ранца и структура связей элементов первых паретовских слоев таковы, что утверждение 2 не выполняется для элементов множества Парето на множестве начальных данных  $N$ . Следовательно, ни один паретовский слой не может быть включен в выражение (4). В этом случае объем ранца  $T$  равен величине  $T_{\text{ост}}$  и множество начальных данных  $N$  совпадает со множеством  $N_{i+1}$ , т. е. первоначальная задача о ранце и задача  $Z_{i+1}$  имеют одинаковые решения.

Элементы множества Парето в двухкритериальном пространстве предпочтений отвечают следующему соотношению из теории многокритериальной оптимизации [5]: если упорядочить их по возрастанию предпочтения одного из критериев, то по второму критерию они будут следовать друг за другом по убыванию предпочтения. Тогда для построения во введенном двухкритериальном пространстве как множества Парето, так и любого паретовского слоя не требуется применение переборных алгоритмов к элементам начального множества  $N$ . Для этого достаточно использовать только алгоритмы поиска в упорядоченных структурах данных. Указанное отличие двухкритериальных пространств от пространств с большей размерностью позволяет утверждать следующее: алгоритмы перебора при нахождении оптимального подмножества  $Q$  будут применяться лишь при определении множества  $Q_{i+1}$ , представляющего собой только некоторую часть оптимального подмножества  $Q$ .

Пусть паретовские слои, которые входят в выражение (4), существуют. Тогда чем меньше величина  $T_{\text{ост}}$ , тем большая часть оптимального подмножества  $Q$  не требует для своего формирования операций перебора элементов начального множества  $N$ . Покажем, что величина  $T_{\text{ост}}$  зависит от значения глубины недоминирования паретовских слоев, которые вошли в выражение (4). Объем ранца  $T_{\text{ост}}$  равен разности между объемом ранца  $T_i$  в задаче  $Z_i$  и суммой ресурса  $t_i$  элементов последнего паретовского слоя  $P_i$ , входящего в (4). Величина  $T_i$  по утверждению 2 зависит от глубины недоминирования этого слоя. Значение глубины недоминирования слоя и величина  $T_i$  находятся в прямо пропорциональной зависимости, а  $T_i$  и  $T_{\text{ост}}$  – в обратно пропорциональной.

Очевидно, что чем больше паретовских слоев войдет в оптимальное подмножество  $Q$ , тем меньше элементов начальных данных будет содержать множество  $N_{i+1}$ . Тогда потребуется меньше операций перебора для формирования множества  $Q_{i+1}$  при решении задачи  $Z_{i+1}$ . На основании предложенного алгоритма число паретовских слоев, вошедших в (4), определяется следующим соотношением: чем больше объем ранца  $T$ , тем большее количество паретовских слоев может войти в (4). Это означает, что число операций, необходимых для нахождения оптимального подмножества  $Q$ , зависит от заданного объема ранца  $T$  и отношений между элементами паретовских слоев. Представление оптимального подмножества  $Q$  в виде выражения (4), кроме определения соответствующих паретовских слоев, требует перехода к задаче о ранце  $Z_{i+1}$ . Ее множество начальных данных  $N_{i+1}$  представляет собой объединение элементов всех оставшихся паретовских слоев, начиная с  $S$ . При построении допустимых подмножеств задачи  $Z_{i+1}$  сохраняется выбор очередных элементов из некоторых множеств  $X_{ij}$ , содержащих элементы данных слоев. Это позволяет предположить, что может существовать паретовский слой, элементы которого, равно как и всех последующих слоев, не могут войти в решение  $Q_{i+1}$ . Значит, их можно исключить из рассмотрения при нахождении  $Q$ . Определение указанного слоя приведет к максимально возможному сокращению множества  $N_{i+1}$ . Алгоритм поиска такого слоя требует отдельного изучения.

### Заключение

В статье предложен алгоритм нахождения структуры оптимального подмножества в задаче о ранце на основе разработанной многокритериальной оптимизационной модели. Сформулировано понятие глубины недоминирования паретовского слоя. На его основе приняты условия, при выполнении которых оптимальное подмножество  $Q$  включает в себя паретовские слои, построенные на множестве начальных данных  $N$  во введенном двухкритериальном пространстве. Определена структура оптимального подмножества, из которой следует, что алгоритм перебора элементов множества начальных данных будет использоваться при нахождении лишь части оптимального подмножества  $Q$ . Это может привести к уменьшению времени решения комбинаторной задачи. Реализация алгоритма определения паретовских слоев, которые включаются в оптимальное подмножество, показывает следующее. Число операций, требуемых для нахождения структуры оптимального подмножества в задаче о ранце, зависит от объема ранца  $T$  и структуры паретовских слоев, на которые разбивается множество  $N$  во введенном двухкритериальном пространстве.

### Библиографические ссылки

1. Martello S, Toth P. *Knapsack problems: algorithms and computer implementations*. Chichester: John Wiley & Sons; 1990. 308 p.
2. Посыпкин МА, Сигал ИХ. Комбинированный параллельный алгоритм решения задачи о ранце. В: *Труды IV Международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления»*; 27–29 октября 2008 г.; Москва, Россия. Москва: Институт проблем управления; 2008. с. 177–189.

3. Чебаков СВ. Двухкритериальная модель построения оптимального подмножества альтернатив с максимальной суммарной вероятностью достижения цели. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук.* 2005;2:112–118.
4. Чебаков СВ, Серебряная ЛВ. Определение структуры оптимального подмножества в задаче о ранце. *Доклады БГУИР.* 2019;6:72–79. DOI: 10.35596/1729-7648-2019-124-6-72-79.
5. Kung HT, Luccio F, Preparata FP. On finding the maxima of a set of vectors. *Journal of the Association for Computing Machinery.* 1975;22(4):469–476.

## References

1. Martello S, Toth P. *Knapsack problems: algorithms and computer implementations*. Chichester: John Wiley & Sons; 1990. 308 p.
2. Posypkin MA, Sigal IKh. Parallel combined algorithm for solving knapsack problems. In: *Proceedings of the 4<sup>th</sup> International conference «Parallel computations and control problems»; 2008 October 27–29; Moscow, Russia*. Moscow: Institute of Control Sciences; 2008. p. 177–189. Russian.
3. Chebakov SV. [Two-criteria model for constructing an optimal subset of alternatives with a maximum total probability of achieving a goal]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2005;2:112–118. Russian.
4. Chebakov SV, Serebryanaya LV. Finding of optimal subset structure in the knapsack problem. *Doklady BGUIR.* 2019;6:72–79. Russian. DOI: 10.35596/1729-7648-2019-124-6-72-79.
5. Kung HT, Luccio F, Preparata FP. On finding the maxima of a set of vectors. *Journal of the Association for Computing Machinery.* 1975;22(4):469–476.

Статья поступила в редакцию 06.03.2020.  
Received by editorial board 06.03.2020.



---

---

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

---

## THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

---

---

УДК 004.93'1:004.032:621.38.049.77

### КОМБИНИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОСТНОГО ВОЗРАСТА НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА РЕНТГЕНОГРАММ КИСТИ

И. И. КОСИК<sup>1)</sup>, А. М. НЕДЗЬВЕДЬ<sup>2), 3)</sup>, Г. М. КАРАПЕТЯН<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный медицинский университет,  
пр. Дзержинского, 83, 220116, г. Минск, Беларусь

<sup>2)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

<sup>3)</sup>Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси,  
ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Беларусь

Исследуется актуальная проблема, связанная с определением костного возраста по рентгенограмме кисти. Предлагается комбинированный алгоритм распознавания рентгенограмм, основанный на совместном использовании моделей нейронных сетей Xception и DenseNet169, что позволяет обобщать знания медицинских экспертов разного профиля и повышает точность распознавания в целом.

---

#### Образец цитирования:

Косик ИИ, Недзведь АМ, Карапетян ГМ. Комбинированный алгоритм определения костного возраста на основе анализа рентгенограмм кисти. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;2:105–114.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-105-114>

#### For citation:

Kosik II, Nedzved AM, Karapetsian RM. Combined algorithm for bone age determination based on hand X-rays analysis. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;2:105–114. Russian.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-105-114>

---

#### Авторы:

**Иван Иванович Косик** – научный сотрудник лаборатории информационно-компьютерных технологий научно-исследовательской части.

**Александр Михайлович Недзведь** – доктор технических наук; декан факультета прикладной математики и информатики<sup>2)</sup>, главный научный сотрудник отдела интеллектуальных информационных систем<sup>3)</sup>.

**Григорий Мушегович Карапетян** – заведующий лабораторией информационно-компьютерных технологий научно-исследовательской части.

#### Authors:

**Ivan I. Kosik**, researcher at the laboratory of information and computer technologies of research division.

[ivankosik91@gmail.com](mailto:ivankosik91@gmail.com)

<https://orcid.org/0000-0002-0582-0556>

**Alexander M. Nedzved**, doctor of science (engineering); dean of the faculty of applied mathematics and computer science<sup>b</sup> and chief researcher at the department of intellectual information systems<sup>c</sup>.

[nedzveda@tut.by](mailto:nedzveda@tut.by)

<https://orcid.org/0000-0001-6367-5900>

**Ryhor M. Karapetsian**, head of the laboratory of information and computer technologies of research division.

[greg.itlab@gmail.com](mailto:greg.itlab@gmail.com)

<https://orcid.org/0000-0002-3672-9405>

**Ключевые слова:** костный возраст; рентгенограмма; анализ изображений; сегментация; сверточная нейронная сеть; автоматизация диагностики.

**Благодарность.** Работа выполнена при частичной поддержке проекта Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований и Российского фонда фундаментальных исследований Ф20Р-134 «Разработка и исследование дескриптивных методов анализа динамических изображений для автоматизации диагностических процедур» и проекта Государственного комитета по науке и технологиям Республики Беларусь и Министерства науки и технологий Китайской Народной Республики Ф20КИТГ-006 «Анализ движения биологических объектов на видеопоследовательностях, полученных с помощью микроскопов высокого разрешения».

## COMBINED ALGORITHM FOR BONE AGE DETERMINATION BASED ON HAND X-RAYS ANALYSIS

*I. I. KOSIK<sup>a</sup>, A. M. NEDZVED<sup>b, c</sup>, R. M. KARAPETSIAN<sup>a</sup>*

<sup>a</sup>*Belarusian State Medical University, 83 Dzierżyńska Avenue, Minsk 220116, Belarus*

<sup>b</sup>*Belarusian State University, 4 Niezależności Avenue, Minsk 220030, Belarus*

<sup>c</sup>*United Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus,  
6 Surhanava Street, Minsk 220012, Belarus*

*Corresponding author: A. M. Nedzved (nedzveda@tut.by)*

In this paper, we investigate the urgent problem associated with bone age determination using hand X-rays. A combined algorithm for the recognition of radiographs is proposed, which uses simultaneous two neural network models, based on Xception and DenseNet169. The method allows to generalize the knowledge of different medical experts and increases the accuracy of bone age prediction in general.

**Keywords:** bone age; X-ray; radiograph; image processing; activation map; convolutional neural network; automation of diagnostics.

**Acknowledgements.** This research was partially supported by the project of the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research and Russian Foundation for Basic Research F20R-134 «Development and research of descriptive methods for analyzing dynamic images to automatise diagnostic procedures» and project of the State Committee on Science and Technology of the Republic of Belarus and Ministry of Science and Technology of the People's Republic of China F20KITG-006 «Motion analysis of biological objects in video-sequence obtained by high-resolution microscope».

### Введение

При возникновении нарушений роста у детей обязательным в клинической практике является определение костного возраста. Отклонения от нормальных показателей роста имеют различную степень выраженности и обуславливаются конкретными причинами, в том числе связанными с расстройствами функций организма или отдельных органов. В настоящее время диагностика роста базируется в основном на полуинтерактивных алгоритмах, в которых анализируется состояние костных структур кисти и запястья. Это предполагает сравнение рентгенограммы пациента (чаще всего изображения его левой руки) с эталонными рентгенограммами. Наиболее известными являются методы Грейлиха – Пайла и Таннера – Уайтхауса. Однако они отличаются низкой точностью и высокой вариабельностью при проведении анализа рентгенограмм разными специалистами. Например, рентгенолог и эндокринолог могут сделать заключение о костном возрасте одного и того же пациента с разницей в более чем 10 лет. Как следствие, существенно ограничиваются возможности ранней диагностики. В связи с этим перспективными являются исследования, в которых используются современные автоматизированные методы, в частности методы, основанные на применении технологий нейронных сетей и машинного обучения.

В работе предлагается комбинированный алгоритм определения костного возраста, базирующийся на совместном использовании моделей нейронных сетей Xception и DenseNet169. Алгоритм позволяет обобщать знания медицинских экспертов разной специализации и повышает точность распознавания в целом.

## Анализ проблемы и постановка задачи

Использование методов машинного обучения для определения костного возраста получило импульс в 2017 г., когда RSNA (*Radiological Society of North America*) был объявлен конкурс на разработку автоматического метода диагностики костного возраста. Все представленные на этом конкурсе методы разделились на два направления: сегментация областей с признаками и глобальный анализ изображения. В рамках конкурса для сегментации применялись нейронные сети на основе моделей UNET и SegNet, после чего проводился анализ наличия признаков, на основе которых выполнялась диагностика. К сожалению, они не показали высоких результатов. Прежде всего это связано с плохой подготовкой наборов данных для обучения: признаки были выбраны из медицинских атласов для специалистов, при использовании которых большое значение имеет наличие врачебной интуиции и присутствует человеческий фактор. Таким образом, группа признаков не была четко очерчена. Более успешными оказались семантические сети на моделях VGG16, RSNA, LeNet. Наилучшие результаты показало применение сетей Inception V4, ResNet152, DenseNet and Inception V3 SE, программные реализации которых и выиграли конкурс.

Тем не менее прямое использование ядер указанных сетей на наборах, подготовленных в Белорусском государственном медицинском университете (БГМУ), не дало удовлетворительных результатов. Это связано с тем, что данные были подготовлены медицинскими специалистами разного профиля. Для каждого из них характерна своя специфика, которую не учитывает нейронная сеть при обучении на одном наборе. Кроме того, анализ результатов обучения показал, что разные архитектуры сетей приводят к акцентированию разных признаков диагностики. Это подтолкнуло к модификации наборов данных для обучения, подготовленных разными специалистами (эндокринологом и рентгенологом), и выбору стратегии комбинированного использования нескольких моделей нейронных сетей.

## Подготовка данных для обучения алгоритмов

В качестве исходных данных использовались 14 236 обучающих изображений из источников RSNA Bone Age on kaggle<sup>1</sup> и 2017 RSNA pediatric bone age challenge<sup>2</sup>, которые были предложены на конкурсах<sup>3</sup>. Каждое изображение сопровождается ярлыками с указанием пола пациента и его скелетного возраста в месяцах. Специалисты-медики допускают ошибки при разметке изображений для тестирования, поэтому при формировании данных RSNA использовались три разметки, по которым проводилось усреднение.

Дополнительно собраны 356 рентгенограмм левой кисти и лучезапястного сустава пациентов разного паспортного возраста (от 3 до 16 лет). Эти данные были размечены рентгенологами и эндокринологами Республиканского центра детской эндокринологии (Минск). Основная часть изображений составила тестовую выборку, так как они были проверены и размечены большим количеством медицинских специалистов.

Стандартные сетевые архитектуры обычно принимают изображения размером  $256 \times 256$  пк в 8-битном формате RGB. Размеры подготовленных изображений варьируются от  $640 \times 520$  до  $3000 \times 3000$  пк, средний размер –  $1665 \times 1320$  пк, формат изображений – оттенки серого (8 бит). Врач-рентгенолог не способен определить возраст скелета на изображении размером  $256 \times 256$  пк, поэтому все изображения приводились к входному размеру  $500 \times 500$  пк (как показали эксперименты с различными разрешениями, именно он является оптимальным для анализа). Данные были разбиты на три группы: обучающие (11 745 изображений – 82,5 %), валидационные (2135 изображений – 15,0 %) и тестовые (356 изображений – 2,5 %). Для увеличения устойчивости решения алгоритма использовались следующие виды аугментации: поворот ( $20^\circ$ ), смещение, масштабирование, отражение по горизонтали, изменение гаммы, изменение резкости, оптическое искажение, изменение яркости и контраста. Для этого применялась библиотека Albumentations<sup>4</sup>.

## Алгоритм определения костного возраста

Изображения имеют простую природу. Это полутоновые рентгеновские снимки, на которых первоначальные свойства объектов обладают такими общими оценками, как яркость и контраст. Основные признаки, определяющие костный возраст, имеют геометрический характер, который формируется границами областей на изображении.

<sup>1</sup>RSNA Bone Age on kaggle [Electronic resource]. URL: <https://www.kaggle.com/kmader/rsna-bone-age> (date of access: 15.10.2019).

<sup>2</sup>2017 RSNA pediatric bone age challenge [Electronic resource]. URL: <http://rsnachallenges.cloudapp.net/competitions/4> (date of access: 15.10.2019).

<sup>3</sup>См.: <https://www.kaggle.com/c/rsna-intracranial-hemorrhage-detection/discussion/109261>.

<sup>4</sup>См.: <https://github.com/albumentations-team/albumentations>.

Предварительная обработка изображений ограничивалась добавлением полей (для получения квадратных картинок без нарушения пропорций исходных изображений) и масштабированием до размера входа  $500 \times 500$  пк. После анализа результатов тестирования обученных моделей пришлось отказаться от добавления полей при масштабировании изображений, так как это ухудшало точность предсказания костного возраста. Из чего можно сделать вывод, что незначительное непропорциональное масштабирование изображения рентгенограммы руки не снижает точность модели.

Для построения эффективного алгоритма использовался принцип трансферного обучения [1], который позволил намного быстрее создать точные модели: вместо того чтобы начинать процесс обучения с нуля, применяли модели с весами, натренированные на данных ImageNet [2]. Базовые предобученные модели были определены на основе оценки вычислительной стоимости обучения и качества распознавания, опубликованной в работе [3]. Для основной архитектуры сети были выбраны модели Xception [4] и DenseNet169 [5], которые показали наилучшие результаты при тестировании.

Архитектура Xception представляет собой развитие архитектуры Inception путем замены стандартных Inception-модулей глубокими разделяемыми свертками (*depthwise separable convolutions*). В отличие от классического решения в данном фрагменте сети отсутствует объединение в единый модуль свертки исходного тензора ядром  $1 \times 1$  и свертки каждого канала в отдельности ядром  $3 \times 3$ . Таким образом, все возможности модели Xception используются вплоть до последнего слоя (полносвязный слой, содержащий 2048 нейронов), но без окончательного принятия решения. Эффективность обеспечивается снижением вычислительной сложности каждого слоя вследствие уменьшения количества анализируемых весов.

Относительно новая архитектура DenseNet является логическим продолжением ResNet. Уникальность данной архитектуры в том, что при увеличении глубины сети ее результативность не уменьшается. Для улучшения информационного потока DenseNet использует схему, в которой определены прямые соединения из любого слоя во все последующие слои. При увеличении глубины повышается точность модели [6; 7].

Тестирование нескольких моделей показало, что пол пациента существенно влияет на точность определения костного возраста. Поэтому в архитектуру каждой из базовых моделей (Xception, DenseNet169) были добавлены второй вход (нейрон, кодирующий пол) и дополнительные полносвязные слои. Общая схема реализованного алгоритма получения костного возраста представлена на рис. 1.

Каждая из моделей в схеме определяет свою информативную зону на изображении, которая является ключевой для предсказания возраста. Данная информативная зона выступает картой активации последнего слоя свертки предобученных моделей. Две модели дают два равноценных решения, значения которых могут отличаться. Существует несколько методов объединения базовых алгоритмов в композиции: голосование, взвешенное голосование, смесь экспертов (*mixture of experts* [8; 9]). Эти методы часто применяются, когда базовые алгоритмы существенно отличаются друг от друга. Тем не менее результаты, полученные в ходе работы блоков Xception и DenseNet169, нередко имеют схожие значения. Среднее арифметическое результатов двух моделей на большой тестовой выборке дает большую среднюю ошибку, чем результаты лучшей из моделей. Получение правильного ответа напрямую зависит от признаков, определяемых особенностями архитектуры нейронных сетей. Более точный анализ возраста обуславливается не столько взвешенным значением двух результатов, сколько их комбинацией. Линейных зависимостей в данных результатах не было выявлено. Поэтому применялся метод ансамблирования – стекинг [10–12], идея которого заключается в использовании предсказаний базовых алгоритмов в качестве признаков для метаалгоритма.

В нашем случае метаалгоритм представлен простой нейронной сетью, которая состоит из четырех полносвязных слоев и одного нейрона на выходе, что позволяет объединить два отдельных результата и получить более точное решение, чем результат каждой из базовых моделей.

Программное обеспечение было разработано на языке Python 3.6 с использованием пакетов Keras 2.2.4 и TensorFlow 1.14. Обучение проводилось на графическом процессоре NVIDIA GTX 1080 Ti. Размер блока (*batch-size*): 9 – для Xception и метамодели, 7 – для модели DenseNet169. Обучение длилось 70 эпох. На выходе сеть дает значение возраста в диапазоне  $[-1, 1]$ , которое затем переводится в месяцы по формуле, обратной уравнению нормализации:

$$\text{age} = (\text{age}_{\text{norm}} + 1) \cdot 120.$$

Полученный результат подкреплялся картой активации, формирующейся на последних слоях нейронной сети. Карта активации представляет собой изображение кисти, на котором области, оказавшие наибольшее влияние на предсказанный возраст, выделяются разными значениями пикселей, соответствующими цветовым оттенкам на изображении (рис. 2).

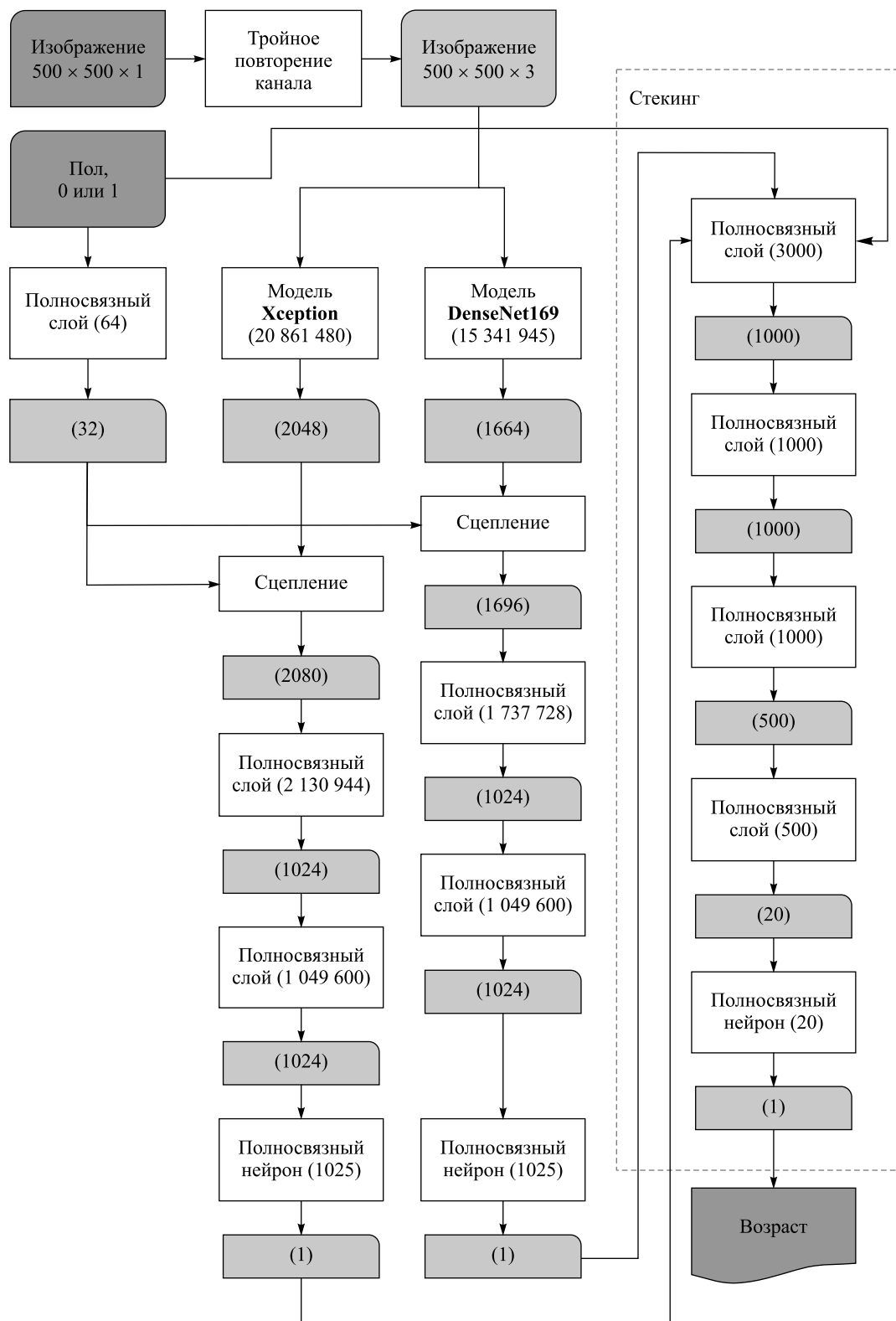


Рис. 1. Общая схема алгоритма. Белые блоки отражают основные операции и алгоритмы обработки данных, где значения в скобках – общее количество параметров ввода. Светло-серые блоки соответствуют наборам данных указанной размерности

Fig. 1. The general scheme of the algorithm. White blocks reflect the main operations and algorithms of data processing, where the values in brackets represent the total number of input parameters. The light gray blocks correspond to data sets of the specified dimension



*Рис. 2.* Цветовая идентификация информативных участков на карте активации. Цветовые оттенки распределены по палитре в направлении от наименее значимых к наиболее значимым участкам, т. е. наиболее значимые участки отображены красным цветом

*Fig. 2.* Color identification of informative regions on the activation map. Color shades are distributed across the palette in the direction from significant areas to the most significant. The most significant areas are displayed in red

Для лучшего обучения моделей на каждой эпохе к тренировочным изображениям применялись различные фильтры и трансформации (т. е. выполнялась аугментация данных). Использовались следующие виды преобразований: поворот в диапазоне  $20^\circ$ , горизонтальный и вертикальный сдвиг до 20 %, увеличение до 20 %, отражение по горизонтали, гамма-коррекция, добавление резкости, оптическое искажение, изменение яркости и контраста. К тестовому набору данных преобразования не применялись, и он был полностью сформирован из изображений, полученных в Беларуси. Значения преобразований подобраны эмпирически и соответствуют реальным отклонениям для данного класса изображений на практике. Таким образом, обучаемая сеть сосредоточивается на особенностях изображения, а не технике визуализации.

### Методика тестирования алгоритма

Тестирование алгоритма выполнялось дважды. Прежде всего применялась традиционная методика оценки алгоритма, используемая в машинном обучении. Тестовая выборка составила 357 изображений, подготовленных в БГМУ.

Для определения костного возраста по рентгенограмме кисти сравнивались несколько методов, но наиболее известные из них следующие:

- метод Грейлиха – Пайла, предполагающий оценку состояния костных структур по рентгенограмме левой кисти с лучезапястным суставом. Определение костного возраста производится путем визуального выбора из классического атласа того изображения, на котором количество ядер оссификации, их размеры, форма и взаимное расположение наиболее полно соответствуют рентгенограмме пациента. Костный возраст пациента принимается равным тому значению, которое указано для выбранного в атласе изображения;

- метод Таннера – Уайтхауса (Tanner – Whitehouse, или TW2), также подразумевающий использование рентгенограммы левой кисти и лучезапястного сустава. Но в этом случае осуществляется пошаговое визуальное сравнение рентгенограммы пациента с экспертными изображениями 20 конкретных центров окостенения, для каждого из которых присутствует описание в привязке к костному возрасту. После выбора всех наиболее похожих вариантов по специальной формуле с помощью компьютерной программы проводится итоговый подсчет баллов и определяется костный возраст;

- алгоритм на основе модели нейронной сети Xception;
- алгоритм на основе модели нейронной сети DenseNet169;
- предлагаемый в данной статье комбинированный алгоритм на основе совмещения моделей нейронной сети Xception и DenseNet169.

Ниже в качестве примера приводится типичный случай результатов, полученных разными методами, и пояснения независимого эксперта по поводу определения наиболее точного из них.

Паспортный возраст пациента на момент обследования – 14 лет 3 месяца. Причина обследования – задержка роста. Рентгенолог, используя атлас Грейлиха – Пайла (рис. 3), пришел к заключению, что костный возраст пациента составляет 13 лет.

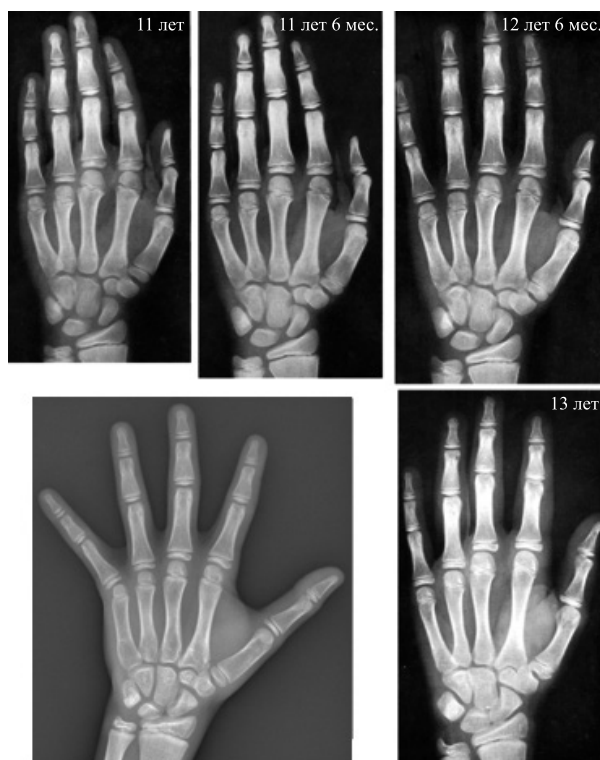


Рис. 3. Рентгенограмма пациента Г (слева внизу)  
и эталоны по возрастам из атласа

Fig. 3. X-ray of patient G (bottom-left) and age standards from the atlas

Эндокринолог по той же методике получил результат 12 лет 9 месяцев. Специалист, использующий метод Таннера – Уайтхауса, пришел к заключению, что костный возраст соответствует 12 годам 1 месяцу. Результат работы нейронной сети резко контрастировал с этими данными и оказался равным 11 годам 2 месяцам.

При обобщенном анализе во время проведения дополнительной экспертизы выявлены закономерности в расхождении результатов, которые демонстрируются на рис. 4.

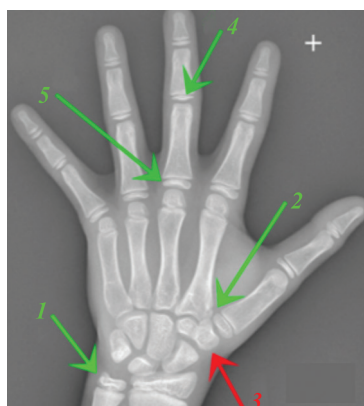


Рис. 4. Анализ результатов с пометками  
эксперта информативных признаков

Fig. 4. Result analysis with expert notes of informative features

В ходе анализа эксперты сделали следующие выводы, выделив на изображении признаки для определения костного возраста (цифры соответствуют обозначениям на рис. 4):

1. Дистальный эпифиз локтевой кости по размерам и форме находится в пределах возрастного диапазона 11 лет – 11 лет 6 месяцев.

2. Размеры и форма проксимальной фаланги третьего пальца ближе к 11 годам.

3. Размеры эпифиза средней фаланги третьего пальца ближе к 11 годам.
4. Взаимное расположение кости трапеции (большой многоугольной кости) и близлежащих эпифизов пястных костей соответствует возрастному диапазону 11 лет – 11 лет 6 месяцев.
5. На рентгенограмме отсутствует локтевая сесамовидная кость первого пястно-фалангового сустава, которая визуализируется примерно с 12 лет 8 месяцев.

По совокупности признаков результат нейронной сети (11 лет 2 месяца) выглядит наиболее обоснованным.

Исходя из вышеизложенного, можно сделать вывод, что экспертиза выполняется на основе определения локальных признаков, которые сосредоточены в общей информативной зоне, при этом важное значение имеют относительный размер и форма костей.

Эти признаки играют ключевую роль при формировании результата в комбинированном алгоритме, описанном выше.

Таким образом, первоначально выполнялись тесты с использованием алгоритмов машинного обучения на основе моделей Xception, DenseNet169 и комбинированного алгоритма.

Дополнительно проводилась экспертиза с привлечением специалистов, которые сперва осуществляли оценку на основе методов Грейлиха – Пайла и Таннера – Уайтхауса, а потом выполняли дополнительный анализ качества работы методов, включая автоматический метод определения костного возраста, описанный выше. В итоге по каждому представленному для исследования рентгеновскому снимку были получены четыре результата определения костного возраста. Два из них предоставляли эксперты (рентгенолог и эндокринолог), работавшие независимо друг от друга по интерактивной методике, предполагающей использование атласа Грейлиха – Пайла. Третий получали в полуавтоматическом режиме в два этапа: сначала экспертом с помощью таблиц TW2 формировались данные, которые затем вводились в программу *Tanner – Whitehouse Test*<sup>5</sup>, рассчитывающую предполагаемый костный возраст. Четвертый результат в полностью автоматическом режиме выдавала нейронная сеть, дополняя его картой активации. Поскольку подавляющее большинство результатов различались между собой, окончательное решение о выборе одного, наиболее точного из них принималось независимым экспертом после дополнительного анализа.

### Оценка работы комбинированного алгоритма

Первоначально выполнялись тесты по оценке качества разработанного алгоритма. Каждая из моделей (Xception, DenseNet169) была обучена два раза. После двух обучений выбраны образцы моделей, показавшие лучший результат (Xception № 2, DenseNet № 1). На основе предсказаний отобранных моделей сформирован набор данных для обучения обобщающей модели (метамодел), которая также была обучена два раза. Средняя абсолютная ошибка (MAE) лучшей из обобщающих моделей (модель № 2) составила 5,39 месяца (см. таблицу).

Усредненная абсолютная ошибка  
при тестировании моделей нейронных сетей  
Average absolute error when testing neural network models

Модель	MAE, мес.		
	Обучение № 1	Обучение № 2	Средняя ошибка
Xception	5,679	5,624	5,652
DenseNet169	5,589	5,597	5,593
Обобщающая модель	5,511	5,392	5,452

Прежде всего следует отметить высокий уровень несовпадений результатов экспертов, работавших даже по одному методу. Значения костного возраста, полученные рентгенологом и эндокринологом по атласу Грейлиха – Пайла, могли находиться близко друг от друга, но чаще они существенно различались. Так, при 14 % точных совпадений и 19 % близко лежащих результатов (разница не более 2 месяцев) различавшиеся на 9 и более месяцев результаты составили 38 %. Остальные 19 % пришлись на результаты с разницей от 3 до 7 месяцев. Таким образом, 2/3 рентгенограмм были интерпретированы с сомнительной точностью, не позволяющей принять однозначное решение о наличии или степени патологии. Высокая вариабельность результатов, получаемых на основе визуального анализа, усугублялась их низкой повторяемостью. Один специалист с перерывом в неделю мог несколько иначе интерпретировать один

<sup>5</sup>См.: [http://vl.academicdirect.ro/medical\\_informatics/bone\\_age/v1.0/](http://vl.academicdirect.ro/medical_informatics/bone_age/v1.0/).



и тот же снимок. Точное совпадение или близкие значения результатов (в пределах 2 месяцев), полученных с помощью искусственного интеллекта и специалистом, оказались в пределах 9,5 % в случае рентгенолога и 28,5 % в случае эндокринолога. При этом повторяемость результата, формируемого искусственной нейронной сетью, составляет 100 %, а на его получение затрачивается не более 4–5 с.

Дополнительный, финальный анализ результатов проводился опытным независимым экспертом с использованием атласа Грейлиха – Пайла и сформированных компьютерной программой карт активации. В ходе кропотливой работы им сделаны следующие выводы: автоматический метод, основанный на применении искусственных нейронных сетей, в 81 % случаев показал более точный результат по сравнению с ручным и полуавтоматическим методами. Оставшиеся 19 % результатов пришлось на детей младшего возраста – 4,5 года и менее. Недостаточная точность определения костного возраста для данной группы пациентов, очевидно, объясняется малым количеством именно таких рентгенограмм, имевшихся в базе изображений, использованных для обучения нейронной сети (180 из 2000, т. е. менее 10 % от общего числа). Нейронная сеть оказалась слабо обученной на распознавание рентгенограмм детей младшего возраста.

### Заключение

В работе предложен алгоритм, основанный на комбинации моделей нейронных сетей Xception и DenseNet169. Модели самостоятельно формируют набор признаков, по которым строится собственная классификация, позволяющая с высокой точностью и 100-процентной повторяемостью определять костный возраст. Алгоритм показал высокие результаты по сравнению с известными интерактивными методами Грейлиха – Пайла и Таннера – Уайтхауса, а также автоматическими методами, основанными на работе одной модели нейронной сети. Экспериментальные исследования позволяют сделать вывод, что комбинированный алгоритм превосходит остальные по точности определения возраста (81 % от общего количества случаев в выборке, тогда как для других методов лучшая оценка не превышала 70 %), повторяемости (100 %) и скорости получения результата (4–5 с, когда на интерактивный анализ тратилось более 20 мин). Кроме того, применение алгоритма является более удобным для клинициста, поскольку не требует использования атласов сравнения. Алгоритм был реализован в специализированном программном обеспечении БГМУ, где активно внедряется в клиническую практику.

### Библиографические ссылки

1. Baykal E, Dogan H, Ercin ME, Ersoz S, Ekinici M. Transfer learning with pre-trained deep convolutional neural networks for serous cell classification. *Multimedia Tools and Applications*. 2020;79(21–22):15593–15611. DOI: 10.1007/s11042-019-07821-9.
2. Deng J, Dong W, Socher R, Li L-J, Li K, Fei-Fei L. ImageNet: a large-scale hierarchical image database. In: *IEEE conference on computer vision and pattern recognition; 2009 June 20–25; Miami, Florida, USA*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2009. p. 248–255. DOI: 10.1109/CVPR.2009.5206848.
3. Джулли А, Пал С. Библиотека Keras – инструмент глубокого обучения: реализация нейронных сетей с помощью библиотек Theano и TensorFlow. Слинкин АА, переводчик. Москва: ДМК Пресс; 2017. 294 с.
4. Chollet F. Xception: deep learning with depthwise separable convolutions. In: *IEEE conference on computer vision and pattern recognition (CVPR); 2017 July 21–26; Honolulu, Hawaii, USA*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2017. p. 1800–1807. DOI: 10.1109/CVPR.2017.195.
5. Huang G, Liu Z, Van Der Maaten L, Weinberger KQ. Densely connected convolutional networks. In: *IEEE conference on computer vision and pattern recognition (CVPR); 2017 July 21–26; Honolulu, Hawaii, USA*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2017. p. 2261–2269. DOI: 10.1109/CVPR.2017.243.
6. Khan A, Sohail A, Zahoora U, Qureshi AS. A survey of the recent architectures of deep convolutional neural networks. *Artificial Intelligence Review*. 2020:1–70. DOI: 10.1007/s10462-020-09825-6.
7. Lin T-Y, Dollár P, Girshick R, He K, Hariharan B, Belongie S. Feature pyramid networks for object detection. In: *IEEE conference on computer vision and pattern recognition (CVPR); 2017 July 21–26; Honolulu, Hawaii, USA*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2017. p. 936–944. DOI: 10.1109/CVPR.2017.106.
8. *Machine learning: concepts, methodologies, tools and applications*. Hershey: Information Science Reference; 2011. 2141 p. (Premier reference source).
9. Jordan MI, Jacobs RA. Hierarchical mixtures of experts and the EM algorithm. *Neural Computation*. 1994;6(2):181–214. DOI: 10.1162/neco.1994.6.2.181.
10. Wolpert DH. Stacked generalization. *Neural Networks*. 1992;5(2):241–259. DOI: 10.1016/S0893-6080(05)80023-1.
11. Menahem E, Rokach L, Elovici Y. Troika – an improved stacking schema for classification tasks. *Information Sciences*. 2009; 179(24):4097–4122. DOI: 10.1016/j.ins.2009.08.025.
12. Seewald AK. How to make stacking better and faster while also taking care of an unknown weakness. In: Sammut C, Hoffmann AG, editors. *ICML'02. Proceedings of the 19<sup>th</sup> International conference on machine learning*. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers; 2002. p. 554–561.

## References

1. Baykal E, Dogan H, Ercin ME, Ersoz S, Ekinci M. Transfer learning with pre-trained deep convolutional neural networks for serous cell classification. *Multimedia Tools and Applications*. 2020;79(21–22):15593–15611. DOI: 10.1007/s11042-019-07821-9.
2. Deng J, Dong W, Socher R, Li L-J, Li K, Fei-Fei L. ImageNet: a large-scale hierarchical image database. In: *IEEE conference on computer vision and pattern recognition; 2009 June 20–25; Miami, Florida, USA*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2009. p. 248–255. DOI: 10.1109/CVPR.2009.5206848.
3. Gulli A, Pal S. *Deep learning with Keras: implement neural networks with Keras on Theano and TensorFlow*. Birmingham: Packt Publishing; 2017. 320 p.  
Russian edition: Gulli A, Pal S. *Biblioteka Keras – instrument glubokogo obucheniya: realizatsiya neironnykh setei s pomoshch'yu bibliotek Theano i TensorFlow*. Slinkin AA, translator. Moscow: DMK Press; 2017. 294 p.
4. Chollet F. Xception: deep learning with depthwise separable convolutions. In: *IEEE conference on computer vision and pattern recognition (CVPR); 2017 July 21–26; Honolulu, Hawaii, USA*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2017. p. 1800–1807. DOI: 10.1109/CVPR.2017.195.
5. Huang G, Liu Z, Van Der Maaten L, Weinberger KQ. Densely connected convolutional networks. In: *IEEE conference on computer vision and pattern recognition (CVPR); 2017 July 21–26; Honolulu, Hawaii, USA*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2017. p. 2261–2269. DOI: 10.1109/CVPR.2017.243.
6. Khan A, Sohail A, Zahoor U, Qureshi AS. A survey of the recent architectures of deep convolutional neural networks. *Artificial Intelligence Review*. 2020:1–70. DOI: 10.1007/s10462-020-09825-6.
7. Lin T-Y, Dollár P, Girshick R, He K, Hariharan B, Belongie S. Feature pyramid networks for object detection. In: *IEEE conference on computer vision and pattern recognition (CVPR); 2017 July 21–26; Honolulu, Hawaii, USA*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2017. p. 936–944. DOI: 10.1109/CVPR.2017.106.
8. *Machine learning: concepts, methodologies, tools and applications*. Hershey: Information Science Reference; 2011. 2141 p. (Premier reference source).
9. Jordan MI, Jacobs RA. Hierarchical mixtures of experts and the EM algorithm. *Neural Computation*. 1994;6(2):181–214. DOI: 10.1162/neco.1994.6.2.181.
10. Wolpert DH. Stacked generalization. *Neural Networks*. 1992;5(2):241–259. DOI: 10.1016/S0893-6080(05)80023-1.
11. Menahem E, Rokach L, Elovici Y. Troika – an improved stacking schema for classification tasks. *Information Sciences*. 2009; 179(24):4097–4122. DOI: 10.1016/j.ins.2009.08.025.
12. Seewald AK. How to make stacking better and faster while also taking care of an unknown weakness. In: Sammut C, Hoffmann AG, editors. *ICML'02. Proceedings of the 19<sup>th</sup> International conference on machine learning*. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers; 2002. p. 554–561.

Статья поступила в редакцию 14.04.2020.  
Received by editorial board 14.04.2020.

---

---

# ПАМЯТИ УЧЕНОГО

---

## TO THE MEMORY OF SCIENTIST

---

---

**Рафаил Федорович  
ГАБАСОВ**

**Rafail Fedorovich  
GABASOV**



8 мая 2020 г. на 85-м году ушел из жизни заслуженный деятель науки Республики Беларусь, доктор физико-математических наук, профессор Рафаил Федорович Габасов.

Рафаил Федорович родился 17 декабря 1935 г. в г. Магнитогорске Челябинской области в семье рабочего. После окончания семилетней школы, а затем индустриального техникума поступил на механический факультет Уральского политехнического института имени С. М. Кирова в Свердловске (ныне – Екатеринбург), который окончил в 1958 г. Этот институт стал для Р. Ф. Габасова стартовой площадкой в большую науку. Там он окончил аспирантуру и в 1963 г. защитил кандидатскую диссертацию на тему «Некоторые вопросы качественной теории регулируемых систем», в которой для решения задач устойчивости движения и оптимального управления развил методы расчетов, предложенные его научными руководителями – академиком Е. А. Барбашиным и Н. Н. Красовским. С 1964 по 1967 г. Р. Ф. Габасов работал старшим научным сотрудником в Уральском филиале Академии наук СССР (Свердловск).

В конце 1967 г. Рафаил Федорович переехал в Минск и возглавил только что созданную на математическом факультете БГУ кафедру прикладной математики. В 1970 г. она стала структурным подразделением нового факультета прикладной математики и была переименована в кафедру методов оптимального управления. Р. Ф. Габасов руководил ею до июля 2000 г., в 2000–2018 гг. работал на кафедре в должности профессора.

В стенах БГУ наиболее ярко расцвел его научный и педагогический талант. В 1968 г. Рафаил Федорович защитил докторскую диссертацию на тему «Математические вопросы оптимизации систем управления», в которой получены фундаментальные результаты по проблеме управляемости систем с запаздываниями, теории существования оптимальных управлений, открыт принцип квази-максимума для дискретных систем, построена теория особых управлений, обоснована универсальная форма представления необходимых условий оптимальности с помощью вариационных производных. В 1971 г. Р. Ф. Габасову присвоено ученое звание профессора.

Рафаил Федорович был одним из основателей белорусской научной школы по оптимизации и оптимальному управлению.

В кратком сообщении трудно даже перечислить те направления научных исследований, автором или одним из создателей которых является Р. Ф. Габасов. Напомним лишь некоторые из них.

Кроме вышеназванной проблемы относительной управляемости, полностью решаемой с помощью определяющих уравнений для систем с последействием, была решена и более трудная проблема полной управляемости.

Следующая проблема теории оптимальных процессов – проблема существования оптимальных управлений, которая в работах Р. Ф. Габасова ставится и решается по-новому. В публикациях Рафаила Федоровича и его соавторов найден универсальный способ выражения принципа максимума Понтрягина и обоснован этот результат для весьма широкого класса дифференциальных систем, включающих, в частности, системы с последействием.

В дальнейшем были исследованы ситуации, когда принцип максимума не дает информации об оптимальном управлении, т. е. возникают так называемые особые режимы (или особые оптимальные управления).

Параллельно с исследованиями особых управлений была разработана теория условий оптимальности высокого порядка, которые усиливают принцип максимума на неособых участках, т. е. когда принцип максимума не дает достаточную информацию для распознавания неоптимальных управлений.

Значительное внимание в работах Р. Ф. Габасова уделено и достаточным условиям оптимальности.

Все указанные выше проблемы, для которых получены принципиальные результаты в публикациях Рафаила Федоровича, относятся к качественной теории оптимального управления. Для окончательного же решения задачи требуются вычислительные алгоритмы.

В начале 1970-х гг. Р. Ф. Габасовым совместно с Ф. М. Кирилловой предложен и обоснован новый подход к решению задач линейного программирования, на базе которого были созданы методы и алгоритмы решения задач математического программирования и оптимального управления. Эти работы положили начало крупному направлению, известному как конструктивные методы оптимизации. Созданный адаптивный метод для задач линейного программирования был перенесен на более сложные задачи квадратичного, кусочно-линейного, дробно-линейного программирования и аналогичные задачи оптимального управления.

Все полученные алгоритмы решения указанных задач были реализованы учениками в виде программ для ЭВМ и изданы в серии выпусков по

программному обеспечению экстремальных задач «Адаптивная оптимизация» (1983–1993), одним из редакторов которых являлся Р. Ф. Габасов.

За цикл работ по конструктивной теории экстремальных задач в 1995 г. Рафаилу Федоровичу присуждена премия Академии наук Беларуси.

Р. Ф. Габасовым был предложен новый подход к решению проблемы синтеза оптимальных систем. В начале 1990-х гг. в соавторстве с учениками им написаны первые работы по синтезу оптимальных обратных связей для линейных систем. Впоследствии новый подход дал возможность решать задачи оптимального управления и для нелинейных систем.

Среди результатов Р. Ф. Габасова имеются также исследования, посвященные системам с распределенными параметрами, состояния которых представляют элементы бесконечномерного пространства.

В последние годы под руководством Рафаила Федоровича весьма интенсивно исследовались задачи оптимального управления в различных классах управляющих воздействий, а также синтез оптимальных систем в режиме реального времени.

Помимо этого, в работах Р. Ф. Габасова и его учеников методы теории оптимального управления были перенесены и на задачи экономики: с помощью методов оптимального управления построены программные и позиционные решения динамических задач микро- и макроэкономики.

Р. Ф. Габасовым опубликовано около 600 научных работ, в том числе 8 монографий в соавторстве: «Качественная теория оптимальных процессов» (М., 1971) (переведена в США); «Оптимизация линейных систем» (Минск, 1973) (переведена в США и Японии); «Особые оптимальные управления» (М., 1973) (переведена в США); «Принцип максимума в теории оптимального управления» (Минск, 1974); «Основы динамического программирования» (Минск, 1975); «Методы линейного программирования» (в 3 ч.) (Минск, 1977–1980); «Конструктивные методы оптимизации» (в 5 ч.) (Минск, 1984–1998); «Optimal feedback control» (Springer, 1995). Результаты научной деятельности Р. Ф. Габасова широко известны во всем мире. Он выступал с докладами на самых представительных научных форумах, читал лекции в университетах многих стран Европы, Азии, а также США. Рафаил Федорович неоднократно получал гранты Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований и Министерства образования Республики Беларусь.

Трудно переоценить заслуги профессора Р. Ф. Габасова в подготовке научных кадров. Среди его учеников – 9 докторов и 67 кандидатов наук. Они работают в Национальной академии наук Беларуси, почти во всех учреждениях высшего образования республики, во многих университетах

и научных центрах СНГ, США, Канады, Австралии, Германии, Болгарии, Литвы, Израиля, Китая, КНДР, Вьетнама, Сирии, Афганистана, Алжира, Гвинеи. За заслуги в подготовке специалистов высокой квалификации Р. Ф. Габасов в 2000 г. награжден Почетной грамотой Президиума Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь, а в 2001 г. – медалью Социалистической Республики Вьетнам «За заслуги в просвещении».

Рафаил Федорович был не только выдающимся ученым, но и прекрасным педагогом. Его лекции отличались глубиной изложения материала и педагогическим мастерством. Тремя изданиями вышло написанное им в соавторстве учебное пособие «Методы оптимизации» (1975, 1981, 2011), которое переведено в США. Как правило, профессор Р. Ф. Габасов читал лекции на основе собственных научных и научно-методических разработок. По его глубокому убеждению, лектор должен внести свой вклад в область тех знаний, которые он передает студентам. Этим, в частности, было продиктовано то, что после создания на факультете прикладной математики и информатики специальности «экономическая кибернетика» Р. Ф. Габасов приступил к исследованию задач оптимизации экономических процессов. В соавторстве им написано учебное пособие «Оптимизация линейных экономических моделей» (Минск, 2000). За плодотворную

деятельность в сфере образования Р. Ф. Габасов неоднократно награждался почетными грамотами БГУ и Министерства высшего и среднего специального образования БССР.

В 1982 г. Р. Ф. Габасову присвоено звание «Заслуженный деятель науки БССР». Он был награжден Почетной грамотой Верховного Совета Республики Беларусь (1995). Р. Ф. Габасов – почетный доктор наук Иркутского государственного университета (1995), член Петровской академии наук и искусств в Санкт-Петербурге (1993). В 2005 г. Рафаил Федорович был награжден нагрудным знаком «Отличник образования», в 2010 г. ему присвоено звание «Заслуженный работник БГУ».

Р. Ф. Габасову были присущи неиссякаемая энергия, оптимизм, титаническое трудолюбие, фанатичное увлечение наукой, требовательность к себе и ученикам. За неделю до ухода из жизни он приглашал к себе учеников, чтобы обсудить новое издание по методам оптимизации и идеи по исследованию новых задач.

Все это оказывало и будет оказывать огромное влияние на формирование личности специалиста, прошедшего школу Рафаила Федоровича Габасова. Его ум, талант, трудолюбие, отеческое отношение к тем, с кем он работал, навсегда останутся в памяти благодарных учеников.

*Коллеги и ученики*

## АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ В БГУ РАБОТ INDICATIVE ABSTRACTS OF THE PAPERS DEPOSITED IN BSU

УДК 004.413:005.5(075.8)

*Овсянников А. В.* **Менеджмент программного обеспечения** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 07-03 «Прикладная информатика (веб-программирование и компьютерный дизайн)». Ч. 1 / А. В. Овсянников ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2020. 79 с. : ил. Библиогр.: с. 78–79. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/241747>. Загл. с экрана. Деп. 09.04.2020, № 003909042020.

Электронный учебно-методический комплекс содержит материал, характеризующий основные особенности и понятия менеджмента программного обеспечения: программный продукт, управление проектами, ментальность менеджмента программного обеспечения, уровни менеджмента и др. Комплекс представлен теоретическим разделом с контрольными вопросами и лабораторным практикумом, а также учебной программой дисциплины. Адресуется студентам специальности «прикладная информатика (веб-программирование и компьютерный дизайн)» факультета социокультурных коммуникаций БГУ. Может быть использован в процессе изучения менеджмента информационно-коммуникационных технологий.

УДК 514(075.8)+512(075.8)

**Геометрия и алгебра** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)», 1-31 03 04 «Информатика», 1-31 03 05 «Актуарная математика», 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика (по направлениям)», 1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)» / БГУ ; сост.: Г. П. Размыслович, А. В. Филиппов. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2020. 2803 с. : ил. Библиогр.: с. 2802–2803. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/242860>. Загл. с экрана. Деп. 21.05.2020, № 005321052020.

Настоящий электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) разработан в соответствии с образовательными стандартами первой ступени высшего образования для специальностей 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)», 1-31 03 04 «Информатика», 1-31 03 05 «Актуарная математика», 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика (по направлениям)», 1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)» и предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Геометрия и алгебра» для студентов данных специальностей.

УДК 004(072)(076.5)

*Юркевич К. С.* **Основы информационных технологий** [Электронный ресурс] : учеб.-метод. рекомендации по выполнению лабораторных работ по основному учебному курсу / К. С. Юркевич, С. М. Босьяков ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2020. 67 с. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/243903>. Загл. с экрана. Деп. 11.06.2020, № 006311062020.

В данное издание включены рекомендации по выполнению лабораторных работ в системе компьютерной математики Wolfram Mathematica по основному учебному курсу «Основы информационных технологий», читаемому студентам механико-математического факультета БГУ. Учебно-методические рекомендации включают в себя материалы по темам: «Основы работы с компьютерной системой Mathematica»,

«Работа с ячейками», «Подстановки», «Работа со списками», «Функции линейной алгебры», «Константы и переменные системы Mathematica. Математические выражения», «Двумерная графика», «Операции математического анализа. Представление и обработка данных», «Комплексные числа», «Трёхмерная графика», «Стандартные пакеты расширения системы Mathematica», «Внешний пакет Structural Mechanics расширения системы Mathematica», «Основы программирования», «Вставка гиперссылок».

*УДК 519.85(075.8)*

**Методы оптимизации** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)», 1-31 03 04 «Информатика», 1-31 03 05 «Актuarная математика», 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика (по направлениям)», 1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)» / В. В. Альсевич [и др.] ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2020. 203 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 202–203. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/243989>. Загл. с экрана. Деп. 16.06.2020, № 006816062020.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) предназначен для студентов специальностей 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)», 1-31 03 04 «Информатика», 1-31 03 05 «Актuarная математика», 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика (по направлениям)», 1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)». Содержание ЭУМК предполагает изучение математического аппарата и методов, необходимых для решения экстремальных задач, возникающих в практической деятельности, особенно в экономике, при решении задач оптимального управления, распределения ресурсов, организации производства сетевого планирования и т. п.

*УДК 517.98(075.8)+517.968(075.8)*

**Чиб Е. С. Функциональный анализ и интегральные уравнения** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)», направление специальности 1-31 03 03-01 «Прикладная математика (научно-производственная деятельность)» / Е. С. Чиб ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2020. 201 с. Библиогр.: с. 200–201. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/244161>. Загл. с экрана. Деп. 23.06.2020, № 006923062020.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Функциональный анализ и интегральные уравнения» адресован студентам специальности 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)», составлен в соответствии с образовательным стандартом первой ступени высшего образования и предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Функциональный анализ и интегральные уравнения» для студентов данной специальности. В ЭУМК содержатся конспект лекций, перечень практических занятий с материалами для работы, задания по управляемой самостоятельной работе.

*УДК 517(075.8)*

**Мазаник С. А. Математический анализ** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 04 «Информатика» : в 3 ч. Ч. 1 / С. А. Мазаник, О. А. Кастрица ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2020. 75 с. Библиогр.: с. 67–69. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/244693>. Загл. с экрана. Деп. 30.06.2020, № 007230062020.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Математический анализ» предназначен для студентов специальности 1-31 03 04 «Информатика». В ЭУМК содержится материал, изучаемый студентами первого курса в осеннем семестре. Содержание учебного материала включает разделы: «Функции одной переменной», «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл». Изложение соответствует программе учебной дисциплины.

## СОДЕРЖАНИЕ

### ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

<i>Поцейко П. Г., Ровба Е. А., Смотрицкий К. А.</i> Об одном рациональном интегральном операторе типа Фурье – Чебышёва и аппроксимации функций Маркова.....	6
<i>Миротин А. Р.</i> Операторы Хаусдорфа на однородных пространствах локально компактных групп.....	28

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

<i>Кушнеров А. В., Липницкий В. А.</i> Обобщенные БЧХ-коды. Полиномиально-норменное декодирование ошибок.....	36
---	----

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

<i>Калитин Б. С.</i> Устойчивость решений и проблема Айзермана для дифференциальных уравнений шестого порядка.....	49
--	----

### ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

<i>Кирлица В. П.</i> D-оптимальные планы экспериментов для линейной множественной регрессии с неравноточными наблюдениями.....	59
<i>Кирлица В. П.</i> Письмо в редакцию.....	68
<i>Терех В. С.</i> Асимптотические свойства M-оценки параметров модели GARCH(1, 1).....	69

### ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

<i>Никитин А. В.</i> Определение механических характеристик биокompозита кость – титан на основании данных компьютерной томографии и конечно-элементного моделирования.....	79
---	----

### ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

<i>Расолько Г. А., Шешко С. М.</i> Приближенное решение одного сингулярного интегро-дифференциального уравнения методом ортогональных многочленов.....	86
--	----

### ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

<i>Чебаков С. В., Серебряная Л. В.</i> Алгоритм нахождения структуры оптимального подмножества на основе паретовских слоев в задаче о ранце.....	97
--	----

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

<i>Косик И. И., Недзьведь А. М., Карапетян Г. М.</i> Комбинированный алгоритм определения костного возраста на основе анализа рентгенограмм кисти.....	105
--	-----

### ПАМЯТИ УЧЕНОГО

<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Рафаил Федорович Габасов</span> .....	115
--	-----

Аннотации депонированных в БГУ работ.....	118
---	-----



## CONTENTS

### REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

- Patseika P. G., Rouba Y. A., Smatrytski K. A.* On one rational integral operator of Fourier – Chebyshev type and approximation of Markov functions ..... 6  
*Mirotin A. R.* Hausdorff operators on homogeneous spaces of locally compact groups ..... 28

### MATHEMATICAL LOGIC, ALGEBRA AND NUMBER THEORY

- Kushnerov A. V., Lipnitski V. A.* Generic BCH codes. Polynomial-norm error decoding ..... 36

### DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

- Kalitine B. S.* Stability of solutions and the problem of Aizerman for sixth-order differential equations ..... 49

### PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

- Kirlitsa V. P.* D-optimal experimental designs for linear multiple regression under heteroscedastic observations ..... 59  
*Kirlitsa V. P.* Letter to the editors ..... 68  
*Tserakh U. S.* Asymptotic properties of M-estimator for GARCH(1,1) model parameters ..... 69

### THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

- Nikitsin A. V.* Estimation of the mechanical properties for bone – titanium biocomposite based on computed tomography data and finite element modeling ..... 79

### COMPUTATIONAL MATHEMATICS

- Rasolko G. A., Sheshko S. M.* An approximate solution of one singular integro-differential equation using the method of orthogonal polynomials ..... 86

### DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

- Chebakov S. V., Serebryanaya L. V.* Finding algorithm of optimal subset structure based on the Pareto layers in the knapsack problem..... 97

### THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

- Kosik I. I., Nedzved A. M., Karapetsian R. M.* Combined algorithm for bone age determination based on hand X-rays analysis ..... 105

### TO THE MEMORY OF SCIENTIST

- Rafail Fedorovich Gabasov ..... 115

- Indicative abstracts of the papers deposited in BSU..... 118

*Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области математики и информатики).*

*Журнал включен в наукометрические базы данных Scopus, Mathematical Reviews, Ulrichsweb, Google Scholar, zbMath, РИНЦ.*

**Журнал Белорусского  
государственного университета.  
Математика. Информатика.  
№ 2. 2020**

Учредитель:  
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4,  
220030, г. Минск.

Почтовый адрес: пр. Независимости, 4,  
220030, г. Минск.

Тел. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: [jmathinf@bsu.by](mailto:jmathinf@bsu.by)

URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Журнал Белорусского государственного  
университета. Математика. Информатика»  
издается с января 1969 г.  
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ.  
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»  
(ISSN 1561-834X).

Редактор *О. А. Семенец*  
Технический редактор *В. В. Пижкова*  
Корректор *Л. А. Меркуль*

Подписано в печать 29.07.2020.  
Тираж 100 экз. Заказ 260.

Республиканское унитарное предприятие  
«Информационно-вычислительный центр  
Министерства финансов Республики Беларусь».  
ЛП № 02330/89 от 03.03.2014.  
Ул. Кальварийская, 17, 220004, г. Минск.

© БГУ, 2020

**Journal  
of the Belarusian State University.  
Mathematics and Informatics.  
No. 2. 2020**

Founder:  
Belarusian State University

Registered address: 4 Niezaliežnasci Ave.,  
Minsk 220030.

Correspondence address: 4 Niezaliežnasci Ave.,  
Minsk 220030.

Tel. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: [jmathinf@bsu.by](mailto:jmathinf@bsu.by)

URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Journal of the Belarusian State University.  
Mathematics and Informatics»  
published since January, 1969.  
Until 2017 named «Vestnik BGU.  
Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika»  
(ISSN 1561-834X).

Editor *O. A. Semenets*  
Technical editor *V. V. Pishkova*  
Proofreader *L. A. Merkul'*

Signed print 29.07.2020.  
Edition 100 copies. Order number 260.

Republican Unitary Enterprise  
«Informatsionno-vychislitel'nyi tsentr  
Ministerstva finansov Respubliki Belarus'».  
License for publishing No. 02330/89, 3 March 2014.  
17 Kal'varyjskaja Str., Minsk 220004.

© BSU, 2020