



БЕЛОРУССКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

ЖУРНАЛ  
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

# МАТЕМАТИКА ИНФОРМАТИКА

---

JOURNAL  
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

# MATHEMATICS and INFORMATICS

Издается с января 1969 г.  
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.  
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)

Выходит три раза в год

---

**3**

**2022**

---

МИНСК  
БГУ

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Главный редактор** ХАРИН Ю. С. – академик НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор; директор Научно-исследовательского института прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.  
E-mail: kharin@bsu.by

**Заместители главного редактора** КРОТОВ В. Г. – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.  
E-mail: krotov@bsu.by

ДУДИН А. Н. – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий лабораторией прикладного вероятностного анализа факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.  
E-mail: dudin@bsu.by

**Ответственный секретарь** МАТЕЙКО О. М. – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.  
E-mail: matseika@bsu.by

- Абламейко С. В.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Альтенбах Х.* Магдебургский университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия.  
*Антоневич А. Б.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Бауэр С. М.* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.  
*Беняш-Кривец В. В.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Берник В. И.* Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
*Бухштабер В. М.* Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.  
*Вабищевич П. Н.* Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук, Москва, Россия.  
*Волков В. М.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Гладков А. Л.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Го В.* Китайский университет науки и технологий, Хэфэй, провинция Аньхой, Китай.  
*Гогинава У.* Тбилисский государственный университет им. Иванэ Джавахишвили, Тбилиси, Грузия.  
*Головко В. А.* Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь.  
*Гороховик В. В.* Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
*Громак В. И.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Демидо Г.* Институт математики и информатики Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва.  
*Донской В. И.* Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия.  
*Егоров А. Д.* Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
*Еремеев В. А.* Гданьский политехнический университет, Гданьск, Польша.  
*Жоландек Х.* Институт математики Варшавского университета, Варшава, Польша.  
*Журавков М. А.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Залесский П. А.* Бразильский университет, Бразилиа, Бразилия.  
*Зубков А. М.* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.  
*Каплунов Ю. Д.* Университет Кииле, Кииле, Великобритания.  
*Кашин Б. С.* Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.  
*Келлерер Х.* Грацский университет им. Карла и Франца, Грац, Австрия.  
*Кожанов А. И.* Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.

- Котов В. М.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Краснопрошин В. В.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Лауринчикас А. П.** Вильнюсский университет, Вильнюс, Литва.
- Мадани К.** Университет Париж-Эст Марн-ла-Валле, Марн-ла-Валле, Франция.
- Макаров Е. К.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Матус П. П.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Медведев Д. Г.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Михасев Г. И.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Нестеренко Ю. В.** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
- Никопоров Ю. Г.** Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук, Владикавказ, Россия.
- Освальд П.** Боннский университет, Бонн, Германия.
- Романовский В. Г.** Мариборский университет, Марибор, Словения.
- Рязанов В. В.** Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук, Москва, Россия.
- Сафонов В. Г.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Скиба А. Н.** Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель, Беларусь.
- Сотсков Ю. Н.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Трофимов В. А.** Южно-Китайский университет технологий, Гуанчжоу, Китай.
- Тузиков А. В.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Фильцмозер П.** Венский технический университет, Вена, Австрия.
- Черноусов В. И.** Альбертский университет, Эдмонтон, Канада.
- Чижик С. А.** Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Шешок Д.** Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса, Вильнюс, Литва.
- Шубэ А. С.** Институт математики и информатики Академии наук Республики Молдова, Кишинев, Молдова.
- Янчевский В. И.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

## EDITORIAL BOARD

- Editor-in-chief**      **KHARIN Y. S.**, academician of the National Academy of Sciences of Belarus, doctor of science (physics and mathematics), full professor; director of the Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
E-mail: kharin@bsu.by
- Deputy editors-in-chief**      **KROTOV V. G.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
E-mail: krotov@bsu.by
- DUDIN A. N.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the laboratory of applied probabilistic analysis, faculty of applied mathematics and computer science, Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
E-mail: dudin@bsu.by
- Executive secretary**      **MATEIKO O. M.**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of general mathematics and computer science, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
E-mail: matseika@bsu.by
- Ablameyko S. V.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Altenbach H.** Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany.  
**Antonevich A. B.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Bauer S. M.** Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia.  
**Beniash-Kryvets V. V.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Bernik V. I.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
**Buchstaber V. M.** Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.  
**Chernousov V. I.** University of Alberta, Edmonton, Canada.  
**Chizhik S. A.** National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
**Donskoy V. I.** V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia.  
**Dzemyda G.** Institute of Mathematics and Informatics of the Vilnius University, Vilnius, Lithuania.  
**Egorov A. D.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
**Eremeyev V. A.** Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland.  
**Filzmoser P.** Vienna University of Technology, Vienna, Austria.  
**Gladkov A. L.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Goginava U.** Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia.  
**Golovko V. A.** Brest State Technical University, Brest, Belarus.  
**Gorokhovich V. V.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
**Gromak V. I.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Guo W.** University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, China.  
**Kaplunov J. D.** Keele University, Keele, United Kingdom.  
**Kashin B. S.** Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.  
**Kellerer H.** University of Graz, Graz, Austria.  
**Kotov V. M.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Kozhanov A. I.** Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia.  
**Krasnoproshin V. V.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Laurinchikas A. P.** Vilnius University, Vilnius, Lithuania.  
**Madani K.** Université Paris-Est, Marne-la-Vallée, France.  
**Makarov E. K.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
**Matus P. P.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
**Medvedev D. G.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Mikhasev G. I.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Nesterenko Y. V.** Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.

- Nikonorov Y. G.** Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia.
- Oswald P.** University of Bonn, Bonn, Germany.
- Romanovskij V. G.** University of Maribor, Maribor, Slovenia.
- Ryazanov V. V.** Dorođnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
- Safonov V. G.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Šešok D.** Vilnius Gediminas Technical University, Vilnius, Lithuania.
- Skiba A. N.** Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus.
- Sotskov Y. N.** United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Suba A. S.** Institute of Mathematics and Computer Science of the Academy of Sciences of Moldova, Kishinev, Moldova.
- Trofimov V. A.** South China University of Technology, Guangzhou, China.
- Tuzikov A. V.** Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Vabishchevich P. N.** Institute for the Safe Development of Atomic Energy of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
- Volkov V. M.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Yanchevskii V. I.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Zalesskii P. A.** University of Brazilia, Brazilia, Brazil.
- Zhuravkov M. A.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Zoladek H.** Mathematics Institute of the University of Warsaw, Warsaw, Poland.
- Zubkov A. M.** Lomonosov Moscow State University, Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

---

---

# Вещественный, комплексный и функциональный анализ

---

## REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

---

---

УДК 517.968.7

### ГИПЕРСИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С РЕКУРРЕНТНЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ В КОЭФФИЦИЕНТАХ

А. П. ШИЛИН<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

На замкнутой кривой, расположенной на комплексной плоскости, рассмотрено новое гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение, которое относится к линейным уравнениям с переменными коэффициентами специального вида. Характерной особенностью является наличие в коэффициентах постоянных множителей, заданных некоторыми рекуррентными соотношениями. Уравнение сведено вначале к решению краевой задачи Римана на исходной кривой. Установлен класс функций для решения задачи Римана, после чего эта задача решается. Далее следует решать два линейных дифференциальных уравнения произвольного порядка для аналитических функций в двух разных областях комплексной плоскости. Найдены соответствующие фундаментальные системы решений, после чего использован метод вариации произвольных постоянных. На полученные решения дифференциальных уравнений накладываются ограничения, чтобы добиться их аналитичности. Все возникающие условия разрешимости исходного уравнения записаны явно. При их выполнении решение исходного уравнения также может быть записано явно. Решен пример.

**Ключевые слова:** интегро-дифференциальное уравнение; гиперсингулярный интеграл; краевая задача Римана; линейное дифференциальное уравнение; аналитическая функция.

---

#### Образец цитирования:

Шилин А.П. Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с рекуррентными соотношениями в коэффициентах. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;3:6–15.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-6-15>

#### For citation:

Shilin AP. Hypersingular integro-differential equation with recurrent relations in coefficients. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;3:6–15. Russian.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-6-15>

---

#### Автор:

**Андрей Петрович Шилин** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики и математической физики физического факультета.

#### Author:

**Andrei P. Shilin**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics and mathematical physics, faculty of physics.  
[a.p.shilin@gmail.com](mailto:a.p.shilin@gmail.com)

## HYPERSINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH RECURRENT RELATIONS IN COEFFICIENTS

A. P. SHILIN<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

A new hypersingular integro-differential equation is considered on a closed curve located on the complex plane. The equation refers to linear equations with variable coefficients of a special kind. A characteristic feature is the presence of constant multipliers in the coefficients, given by some recurrent relations. The equation is first reduced to solving the Riemann boundary value problem on the original curve. A class of functions is established for solving the Riemann problem, after which this problem is solved. Next, it is necessary to solve two linear differential equations of arbitrary order for analytical functions in two different regions of the complex plane. The corresponding fundamental systems of solutions are found, after which the method of variation of arbitrary constants is used for the solution. Restrictions are imposed on the obtained solutions of differential equations in order to achieve their analyticity. As a result, all the resulting solvability conditions of the original equation are written explicitly. The solution of the original equation after solving the differential equations can be written explicitly. Solved the example.

**Keywords:** integro-differential equation; hypersingular integral; Riemann boundary problem; linear differential equation; analytic function.

### Введение

В последнее время возрастает интерес к гиперсингулярным интегралам, понимаемым в смысле конечной части по Адамару, поскольку найдены их важные приложения к таким разделам физических и технических наук, как аэро- и электродинамика, атомная и ядерная физика, вопросы трещиностойчивости и др. Обзор важнейших результатов по интегральным уравнениям с такими интегралами содержится в работе [1]. В статье [2] дано точное аналитическое решение линейного гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения на замкнутой кривой, расположенной на комплексной плоскости. Аналогичные уравнения более сложного вида решены затем в публикациях [3–5] и др. К этим же работам относится настоящая статья, где найдено решение нового уравнения.

### Постановка задачи и общая схема решения

Пусть  $L$  – простая замкнутая гладкая положительно ориентированная кривая на расширенной комплексной плоскости,  $D_+$  и  $D_-$  – области расширенной комплексной плоскости с границей  $L$ ,  $0 \in D_+$ ,  $\infty \in D_-$ . Зададим  $H$ -непрерывные (т. е. удовлетворяющие условию Гёльдера) функции  $a(t) \neq 0$ ,  $b(t) \neq 0$ ,  $f(t)$ ,  $t \in L$ . Зададим также комплексные числа  $a_0 = b_0 = 1$ ,  $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Обозначим через  $\alpha_{jm}$ ,  $j = \overline{0, n}$ ,  $m = \overline{0, j}$ , целые числа, определяемые рекуррентными соотношениями

$$\alpha_{jj} = (-1)^j, \quad j = \overline{0, n}; \quad \alpha_{j0} = 0, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\alpha_{jm} = (1 - j - m)\alpha_{j-1, m} - \alpha_{j-1, m-1}, \quad j = \overline{2, n} \text{ (при } n \geq 2), \quad m = \overline{1, j-1}.$$

Будем искать  $n$  раз  $H$ -непрерывно дифференцируемую функцию  $\varphi(t)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\sum_{k=0}^n \sum_{s=2k}^{n+k} \alpha_{s-k, k} t^s \left( (a(t)a_{n+k-s} + b(t)b_{n+k-s}) \varphi^{(k)}(t) + \frac{(a(t)a_{n+k-s} - b(t)b_{n+k-s})k!}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}} \right) = f(t), \quad t \in L, \quad (1)$$

с интегралами, понимаемыми в смысле конечной части по Адамару.

Введем интеграл типа Коши

$$\Phi_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D_{\pm},$$

и применим далее схему решений интегро-дифференциальных уравнений, указанную в работе [6]. Согласно этой схеме следует вначале исследовать краевую задачу Римана

$$F_+(t) = \frac{b(t)}{a(t)} F_-(t) + \frac{f(t)}{2a(t)}, \quad t \in L, \quad (2)$$

для аналитических функций

$$F_-(z) = \sum_{k=0}^n \sum_{s=2k}^{n+k} \alpha_{s-k, k} b_{n+k-s} z^s \Phi_-^{(k)}(z), \quad z \in D_-, \quad (3)$$

$$F_+(z) = \sum_{k=0}^n \sum_{s=2k}^{n+k} \alpha_{s-k, k} a_{n+k-s} z^s \Phi_+^{(k)}(z), \quad z \in D_+, \quad (4)$$

с  $H$ -непрерывными предельными значениями  $F_{\pm}(t)$ ,  $t \in L$ . Если задача Римана не имеет решений, то и уравнение (1) не имеет решений. Если же задача Римана окажется разрешимой, а ее решение будет найдено, то соотношения (3), (4) следует расценивать затем как линейные дифференциальные уравнения для нахождения аналитических функций  $\Phi_{\pm}(z)$ ,  $\Phi_{\pm}(\infty) = 0$ . Если и функции  $\Phi_{\pm}(z)$  будут найдены, то решение исходного уравнения (1) записывается по формуле Сохоцкого:

$$\varphi(t) = \Phi_+(t) - \Phi_-(t), \quad t \in L. \quad (5)$$

### Решение задачи Римана

**Лемма 1.** Если функция  $F_-(z)$  представляется в виде соотношения (3), где  $\Phi_-(\infty) = 0$ , то она ограничена на бесконечности.

*Доказательство.* Перегруппируем в формуле (3) слагаемые:

$$F_-(z) = \sum_{j=0}^n b_{n-j} \left( \alpha_{j0} z^j \Phi_-(z) + \alpha_{j1} z^{j+1} \Phi'_-(z) + \alpha_{j2} z^{j+2} \Phi''_-(z) + \dots + \alpha_{j, j-1} z^{2j-1} \Phi_-^{(j-1)}(z) + \alpha_{jj} z^{2j} \Phi_-^{(j)}(z) \right). \quad (6)$$

Возьмем разложение функции  $\Phi_-(z)$  в ряд Тейлора в окрестности бесконечности:

$$\Phi_-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

Подставим в равенство (6) это разложение, а также разложения для производных  $\Phi_-(z)$ , полученные почленным дифференцированием. При этом слагаемые в сумме из равенства (6), получающиеся при  $j = 0, j = 1$ , станут равными соответственно

$$b_n \alpha_{00} \Phi_-(z) = \frac{b_n c_1}{z} + \frac{b_n c_2}{z^2} + \dots,$$

$$b_{n-1} \left( \alpha_{10} z \Phi_-(z) + \alpha_{11} z^2 \Phi'_-(z) \right) = b_{n-1} c_1 + \frac{2b_{n-1} c_2}{z} + \dots$$

и, следовательно, будут ограничены на бесконечности. При  $j \geq 2$  некоторые слагаемые в сумме из равенства (6) окажутся с полюсами на бесконечности. Покажем, что при суммировании произойдет «погашение» полюсов. Для этого запишем лишь те слагаемые в правой части равенства (6), которые окажутся с полюсами:

$$\sum_{j=2}^n b_{n-j} \sum_{k=1}^{j-1} A_{jk} c_k z^{j-k},$$

где  $A_{jk} = (-k)\alpha_{j1} + (-k)(-k-1)\alpha_{j2} + (-k)(-k-1)(-k-2)\alpha_{j3} + \dots + (-k)(-k-1)(-k-2)\dots(-k-j+1)\alpha_{jj}$ .

Обоснуем методом математической индукции по  $j$ , что все числа  $A_{jk} = 0$ . Для  $j = 2$  будет всего одно число, равное  $A_{21} = (-1)\alpha_{21} + (-1)(-2)\alpha_{22} = (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) \cdot 1 = 0$ . Пусть для некоторого  $j \geq 2$   $A_{jk} = 0$  при всех  $k = \overline{1, j-1}$ . Теперь для всех  $k = \overline{1, j}$  вычислим числа

$$\begin{aligned}
 A_{j+1,k} &= (-k)\alpha_{j+1,1} + (-k)(-k-1)\alpha_{j+1,2} + (-k)(-k-1)(-k-2)\alpha_{j+1,3} + \\
 &+ \dots + (-k)(-k-1)(-k-2) \dots (-k-j)\alpha_{j+1,j+1} = (-k) \left[ -(j+1)\alpha_{j1} \right] + \\
 &+ (-k)(-k-1) \left[ -(j+2)\alpha_{j2} - \alpha_{j1} \right] + (-k)(-k-1)(-k-2) \left[ -(j+3)\alpha_{j3} - \alpha_{j2} \right] + \\
 &+ \dots + (-k)(-k-1)(-k-2) \dots (-k-j) \left[ -\alpha_{jj} \right] = \left[ (-k)(-j+1) - (-k)(-k-1) \right] \alpha_{j1} + \\
 &+ \left[ (-k)(-k-1)(-j+2) - (-k)(-k-1)(-k-2) \right] \alpha_{j2} + \\
 &+ \left[ (-k)(-k-1)(-k-2)(-j+3) - (-k)(-k-1)(-k-2)(-k-3) \right] \alpha_{j3} + \dots + \\
 &+ \left[ (-k)(-k-1) \dots (-k-j+1)(-2j) - (-k)(-k-1) \dots (-k-j+1)(-k-j) \right] \alpha_{jj} = \\
 &= (k-j) \left[ (-k)\alpha_{j1} + (-k)(-k-1)\alpha_{j2} + (-k)(-k-1)(-k-2)\alpha_{j3} + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + (-k)(-k-1) \dots (-k-j+1)\alpha_{jj} \right] = (k-j)A_{jk}.
 \end{aligned}$$

Для  $k = j$  полученные числа обратятся в ноль за счет множителя  $k - j$ , а для  $k = \overline{1, j-1}$  – за счет индуктивного предположения. Лемма доказана.

Теперь понятно, что решение задачи Римана (2) следует находить в классе функций, ограниченных на бесконечности. Согласно монографии [7] такое решение зависит от индекса  $\alpha = \text{Ind}_L \frac{b(t)}{a(t)}$  и имеет вид

$$F_{\pm}(z) = X_{\pm}(z)(\Psi_{\pm}(z) + P(z)), \quad z \in D_{\pm},$$

где  $X_{\pm}(z)$  – канонические функции задачи (их явный вид здесь не приводим);  $\Psi_{\pm}(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{f(\tau)d\tau}{a(\tau)X_{\pm}(\tau)(\tau-z)}$ ;  $P(z) = \sum_{k=0}^{\alpha} d_k z^k$  – многочлен степени  $\alpha$  с произвольными комплексными коэффициентами  $d_k$  при  $\alpha \geq 0$ ,  $P(z) \equiv 0$  при  $\alpha < 0$ . При  $\alpha \geq -1$  задача (2) разрешима безусловно, а при  $\alpha < -1$  для ее решения необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\int_L \frac{f(\tau)\tau^k d\tau}{a(\tau)X_{\pm}(\tau)} = 0, \quad k = \overline{0, -\alpha-2}. \quad (7)$$

### Решение дифференциальных уравнений

Пусть задача (2) разрешима, а ее решение найдено. Переходим к решению уравнения (3).

**Лемма 2.** Если  $\lambda_1$  – корень уравнения

$$\sum_{j=0}^n b_{n-j} \lambda_1^j = 0, \quad (8)$$

то функция  $e^{\frac{\lambda_1}{z}}$  удовлетворяет однородному уравнению (3).

Доказательство. Вычисление производных функции  $e^{\frac{\lambda_1}{z}}$  приводит к формулам

$$\left( e^{\frac{\lambda_1}{z}} \right)^{(k)} = e^{\frac{\lambda_1}{z}} \sum_{s=0}^k \frac{\alpha_{ks} \lambda_1^s}{z^{k+s}}, \quad k = \overline{0, n}.$$

Подставим выражения для этих производных в правую часть уравнения (3). Тогда после перегруппировки слагаемых правой части можно придать вид

$$e^{\frac{\lambda_1}{z}} \sum_{j=0}^n b_{n-j} B_j,$$

где

$$B_j = \sum_{m=0}^j \left( \alpha_{jm} \alpha_{mm} + \alpha_{j, m+1} \alpha_{m+1, m} + \alpha_{j, m+2} \alpha_{m+2, m} + \dots + \alpha_{j, j-1} \alpha_{j-1, m} + \alpha_{jj} \alpha_{jm} \right) z^{j-m} \lambda_1^m, \quad j = \overline{0, n}. \quad (9)$$

При  $m = j$  слагаемое в сумме из (9) будет иметь вид  $\alpha_{jj} \alpha_{jj} \lambda_1^j = \lambda_1^j$ . Обоснуем методом математической индукции по  $j$ , что остальные слагаемые в сумме из (9) обратятся в ноль за счет сумм в (9), находящихся в скобках. При  $j = 0$  «остальных» слагаемых нет. При  $j = 1$  для  $m = 0$   $\alpha_{10} \alpha_{00} + \alpha_{11} \alpha_{10} = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 0$ . Пусть для некоторого  $j \geq 1$  при всех  $m = 0, 1, \dots, j-1$

$$\alpha_{jm} \alpha_{mm} + \alpha_{j, m+1} \alpha_{m+1, m} + \alpha_{j, m+2} \alpha_{m+2, m} + \dots + \alpha_{j, j-1} \alpha_{j-1, m} + \alpha_{jj} \alpha_{jm} = 0.$$

Докажем, что тогда для всех  $m = 0, 1, \dots, j$

$$\alpha_{j+1, m} \alpha_{mm} + \alpha_{j+1, m+1} \alpha_{m+1, m} + \alpha_{j+1, m+2} \alpha_{m+2, m} + \dots + \alpha_{j+1, j} \alpha_{jm} + \alpha_{j+1, j+1} \alpha_{j+1, m} = 0. \quad (10)$$

Для  $m = 0$  последнее равенство справедливо, так как  $\alpha_{j+1, 0} = \alpha_{10} = \alpha_{20} = \dots = \alpha_{j0} = 0$ . Для  $m = 1, 2, \dots, j$  сумма в левой части (10) получается равной

$$\begin{aligned} & \left( -(j+m) \alpha_{jm} - \alpha_{j, m-1} \right) \alpha_{mm} + \left( -(j+m+1) \alpha_{j, m+1} - \alpha_{jm} \right) \alpha_{m+1, m} + \\ & + \left( -(j+m+2) \alpha_{j, m+2} - \alpha_{j, m+1} \right) \alpha_{m+2, m} + \dots + \left( -2j \alpha_{jj} - \alpha_{j, j-1} \right) \alpha_{jm} - \alpha_{jj} \alpha_{j+1, m} = \\ & = \left[ -(j+m) \alpha_{jm} \alpha_{mm} - (j+m+1) \alpha_{j, m+1} \alpha_{m+1, m} - (j+m+2) \alpha_{j, m+2} \alpha_{m+2, m} - \dots - 2j \alpha_{jj} \alpha_{jm} \right] + \\ & + \left[ -\alpha_{j, m-1} \left( -\alpha_{m-1, m-1} \right) - \alpha_{jm} \left( -2m \alpha_{mm} - \alpha_{m, m-1} \right) - \alpha_{j, m+1} \left( -(2m+1) \alpha_{m+1, m} - \alpha_{m+1, m-1} \right) - \dots - \right. \\ & \quad \left. - \alpha_{j, j-1} \left( -(j+m-1) \alpha_{j-1, m} - \alpha_{j-1, m-1} \right) - \alpha_{jj} \left( -(j+m) \alpha_{jm} - \alpha_{j, m-1} \right) \right] = \\ & = \left[ -(j+m) \alpha_{jm} \alpha_{mm} - (j+m+1) \alpha_{j, m+1} \alpha_{m+1, m} - (j+m+2) \alpha_{j, m+2} \alpha_{m+2, m} - \dots - 2j \alpha_{jj} \alpha_{jm} \right] + \\ & + \left[ 2m \alpha_{jm} \alpha_{mm} + (2m+1) \alpha_{j, m+1} \alpha_{m+1, m} + \dots + (j+m-1) \alpha_{j, j-1} \alpha_{j-1, m} + (j+m) \alpha_{jj} \alpha_{jm} \right] + \\ & + \left[ \alpha_{j, m-1} \alpha_{m-1, m-1} + \alpha_{jm} \alpha_{m, m-1} + \alpha_{j, m+1} \alpha_{m+1, m-1} + \dots + \alpha_{j, j-1} \alpha_{j-1, m-1} + \alpha_{jj} \alpha_{j, m-1} \right]. \end{aligned}$$

Сумма в последних квадратных скобках равна нулю по индуктивному предположению. В первых и вторых квадратных скобках приводим подобные члены:

$$(m-j) \left[ \alpha_{jm} \alpha_{mm} + \alpha_{j, m+1} \alpha_{m+1, m} + \dots + \alpha_{j, j-1} \alpha_{j-1, m} + \alpha_{jj} \alpha_{jm} \right] = 0$$

– снова по индуктивному предположению.

Таким образом, подстановка  $\Phi_-(z) = e^{\lambda_1 z}$  в правую часть однородного уравнения (3) приводит после сокращения на  $e^{\lambda_1 z}$  к верному равенству  $0 = \sum_{j=0}^n b_{n-j} \lambda_1^j$ , что и доказывает лемму.

Будем считать в дальнейшем для простоты, что все корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  уравнения (8) являются одно-кратными. В этом случае функции  $e^{\frac{\lambda_1}{z}}, e^{\frac{\lambda_2}{z}}, \dots, e^{\frac{\lambda_n}{z}}$  составляют фундаментальную систему решений однородного уравнения (3). Через  $W$  обозначим определитель Вронского функций  $e^{\frac{\lambda_j}{z}}$ , а через  $V$  – определитель Вандермонда чисел  $\lambda_j, j = 1, n$ .

**Лемма 3.** Справедлива формула

$$W = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} e^{\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{z}} V}{z^{n(n-1)}}. \quad (11)$$

Доказательство. Имеем

$$W = \begin{vmatrix} e^{\frac{\lambda_1}{z}} \sum_{s=0}^0 \frac{\alpha_{0s} \lambda_1^s}{z^{0+s}} & \dots & e^{\frac{\lambda_n}{z}} \sum_{s=0}^0 \frac{\alpha_{0s} \lambda_n^s}{z^{0+s}} \\ e^{\frac{\lambda_1}{z}} \sum_{s=0}^1 \frac{\alpha_{1s} \lambda_1^s}{z^{1+s}} & \dots & e^{\frac{\lambda_n}{z}} \sum_{s=0}^1 \frac{\alpha_{1s} \lambda_n^s}{z^{1+s}} \\ \dots & \dots & \dots \\ e^{\frac{\lambda_1}{z}} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\alpha_{n-1,s} \lambda_1^s}{z^{n-1+s}} & \dots & e^{\frac{\lambda_n}{z}} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\alpha_{n-1,s} \lambda_n^s}{z^{n-1+s}} \end{vmatrix}.$$

Вынесем за знак определителя общие экспоненциальные множители элементов каждого столбца и знак «минус» в четных строках. Оставшийся определитель представим в виде надлежащей суммы таких определителей, элементами которых будут отдельные слагаемые элементов исходного определителя. Из этих определителей ненулевым будет лишь определитель из всех последних слагаемых, остальные определители обратятся в ноль из-за пропорциональности каких-либо строк. В результате получится

$$W = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} e^{\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{z}} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \frac{\lambda_1}{z^2} & \dots & \frac{\lambda_n}{z^2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\lambda_1^{n-1}}{z^{2n-2}} & \dots & \frac{\lambda_n^{n-1}}{z^{2n-2}} \end{vmatrix}.$$

К формуле (11) придем, если теперь вынесем из каждой  $j$ -й строки за знак последнего определителя множитель  $\frac{1}{z^{2j-2}}$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Лемма доказана.

Аналогично формуле (11) будет получаться

$$W_j = \frac{(-1)^{\frac{(n+2)(n+3)}{2}} e^{\frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_{j-1} + \lambda_{j+1} + \dots + \lambda_n}{z}} V_j}{z^{(n-1)(n-2)}}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (12)$$

где  $W_j$  – определитель Вронского функций  $e^{\frac{\lambda_1}{z}}, \dots, e^{\frac{\lambda_{j-1}}{z}}, e^{\frac{\lambda_{j+1}}{z}}, \dots, e^{\frac{\lambda_n}{z}}$ ;  $V_j$  – определитель Вандермонда чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n$ . (При  $n = 1$  полагаем, что  $W_1 = 1$ .)

Для решения уравнения (3) применим метод вариации произвольных постоянных. Согласно этому методу решение может быть записано в виде

$$\Phi_-(z) = \sum_{j=1}^n (\tilde{C}_j^-(z) + C_j^-) e^{\frac{\lambda_j}{z}}, \quad (13)$$

где  $\tilde{C}_j^-(z)$  – первообразные в  $D_-$  функций  $\frac{(-1)^j F_-(z) W_j}{z^{2n} W}$ ,  $C_j^-$  – произвольные комплексные постоянные,

$j = \overline{1, n}$ . Из формул (11), (12) заключаем, что  $\frac{(-1)^j F_-(z) W_j}{z^{2n} W} = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ ,  $z \rightarrow \infty$ , поэтому упомянутые перво-

образные существуют. После несложных упрощений формуле (13) удобно придать вид

$$\Phi_-(z) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{(-1)^n}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (\lambda_k - \lambda_j)} \int_{\infty}^z \frac{F_-(\zeta) e^{\frac{\lambda_j}{\zeta}} d\zeta}{\zeta^2} + C_j^- \right) e^{\frac{\lambda_j}{z}} \quad (14)$$

(при  $n = 1$  произведение  $\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (\lambda_k - \lambda_j)$  заменяется на 1). Интегралы вида  $\int_{\infty}^z$  выделяют те первообразные, которые на бесконечности обращаются в ноль. Благодаря этому легко добиться выполнения условия  $\Phi_-(\infty) = 0$ : произвол постоянных  $C_j^-$  в формуле (14) должен быть ограничен требованием

$$\sum_{j=1}^n C_j^- = 0. \quad (15)$$

Переходим к решению уравнения (4). Предположим, что уравнение

$$\sum_{j=0}^n a_{n-j} \mu^j = 0, \quad (16)$$

как и аналогичное уравнение (8), имеет однократные корни  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ . Пусть  $\tilde{C}_j^+(z)$  – первообразные в  $D_+$  функций  $\frac{(-1)^n F_+(z) e^{-\frac{\mu_j}{z}}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (\mu_k - \mu_j) z^2}$ ,  $C_j^+$  – произвольные комплексные числа,  $j = \overline{1, n}$ . Формула решения уравнения (4)

$$\Phi_+(z) = \sum_{j=1}^n (\tilde{C}_j^+(z) + C_j^+) e^{\frac{\mu_j}{z}} \quad (17)$$

аналогична формуле (14) решения уравнения (3), однако эта формула не даст аналитическую в  $D_+$  функцию. Во-первых, могут не существовать упомянутые первообразные. Для их существования (в области  $D_+ \setminus \{0\}$ ) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{F_+(z) e^{-\frac{\mu_j}{z}}}{z^2} = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (18)$$

Если эти условия выполнены, то можно взять

$$\tilde{C}_j^+(z) = \frac{(-1)^n}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (\mu_k - \mu_j)} \int_{z_0}^z \frac{F_+(\zeta) e^{-\frac{\mu_j}{\zeta}} d\zeta}{\zeta^2} + K_j, \quad j = \overline{1, n},$$

где  $z_0 \in D_+, z_0 \neq 0$ ;  $K_j$  – некоторые комплексные постоянные, а интегрирование ведется по любой кривой в  $D_+$ , не проходящей через точку  $z = 0$ . Отметим, что при  $\alpha \geq 0$  выполнение условий (18) будет означать совместность линейной алгебраической системы

$$\sum_{k=0}^{\alpha} \gamma_{jk} d_k = \delta_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (19)$$

где для всех указанных  $j, k$

$$\gamma_{jk} = \operatorname{res}_{z=0} \left( X_+(z) z^{k-2} e^{-\frac{\mu_j}{z}} \right), \quad \delta_j = - \operatorname{res}_{z=0} \frac{X_+(z) \Psi_+(z) e^{-\frac{\mu_j}{z}}}{z^2}.$$

Во-вторых, постоянные  $C_j^+$  в формуле (17) не могут оставаться произвольными, иначе сумма  $\sum_{j=1}^n C_j^+ e^{\frac{\mu_j}{z}}$ , выражающая в этой формуле общее решение однородного уравнения (4), будет иметь в нуле существенно особую точку. Из-за линейной независимости функций  $e^{\frac{\mu_j}{z}}$  избежать существенно особой точки можно, лишь взяв в указанной сумме все постоянные  $C_j^+$  равными нулю.

Теперь остается приемлемым для дальнейших рассуждений только частное решение

$$\Phi_+(z) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{(-1)^n}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (\mu_k - \mu_j)} \int_{z_0}^z \frac{F_+(\zeta) e^{-\frac{\mu_j}{\zeta}} d\zeta}{\zeta^2} + K_j \right) e^{\frac{\mu_j}{z}}, \quad (20)$$

но и в нем еще подбором констант  $K_j$  надо устранить возможную существенно особую точку в нуле. Для этого записываем соответствующее лорановское разложение и приравниваем к нулю коэффициенты при отрицательных степенях  $z$ . В результате приходим к бесконечной линейной алгебраической системе

$$\sum_{j=1}^n \mu_j^m K_j = q_m, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (21)$$

где для всех  $m, j$

$$q_m = -\frac{m!}{2\pi i} \sum_{j=1}^n M_j \int_{\Gamma} \frac{e^{\frac{\mu_j}{t}} dt}{t^{1-m}} \int_{z_0}^t \frac{F_+(\zeta) e^{-\frac{\mu_j}{\zeta}} d\zeta}{\zeta^2}, \quad M_j = \frac{(-1)^n}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (\mu_k - \mu_j)}.$$

Здесь  $\Gamma$  – окружность с центром в нуле достаточно малого радиуса.

Матрица системы (21) имеет характер бесконечной матрицы Вандермонда попарно различных чисел. Ранг такой матрицы равен  $n$ , поэтому при  $\alpha \leq -1$  решение системы (21) может быть разве что единственным. При  $\alpha \geq 0$  системе (21) можно придать вид

$$\sum_{j=1}^n \mu_j^m K_j + \sum_{k=0}^{\alpha} p_{mk} d_k = r_m, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

где

$$p_{mk} = \frac{m!}{2\pi i} \sum_{j=1}^n M_j \int_{\Gamma} \frac{e^{\frac{\mu_j}{t}} dt}{t^{1-m}} \int_{z_0}^t X_+(\zeta) \zeta^{k-2} e^{-\frac{\mu_j}{\zeta}} d\zeta,$$

$$r_m = -\frac{m!}{2\pi i} \sum_{j=1}^n M_j \int_{\Gamma} \frac{e^{\frac{\mu_j}{t}} dt}{t^{1-m}} \int_{z_0}^t \frac{X_+(\zeta) \Psi_+(\zeta) e^{-\frac{\mu_j}{\zeta}} d\zeta}{\zeta^2},$$

и тогда также за счет части постоянных  $d_k$ , оставшихся после решения системы (19) произвольными, можно добиваться разрешимости системы (21).

### Основной результат. Пример

Теперь в отношении исходного уравнения можно сформулировать окончательный результат.

**Теорема.** Если выполняются условия (7) при  $\alpha < -1$ , корни уравнений (8), (16) однократны, справедливости равенства (18) и система (21) совместна, то решения уравнения (1) существуют и все они записываются по формуле (5), где  $\Phi_+(t)$ ,  $\Phi_-(t)$  получаются из формул (14), (20). При этом в формуле (14) постоянные  $C_j^-$  связаны равенством (15), а в остальном произвольны; постоянные  $K_j$  в формуле (20) являются общим решением системы (21).

Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$t^4(t+1)\varphi''(t) + (2t^4 + 5t^3 + 7t^2)\varphi'(t) + 2(t+6)\varphi(t) +$$

$$+ \frac{2t^4(t-1)}{\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} + \frac{2t^4 + t^3 - 7t^2}{\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} + \frac{2(t-6)}{\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} =$$

$$= 12t^5 + 12t^4 + 4t^3 - 2e^{\frac{1}{t^2}}, \quad |t|=1. \quad (22)$$

В таком виде можно записать на единичной окружности уравнение (1), если  $n = 2$ ,  $a(t) = t$ ,  $b(t) = 1$ ,  $b_1 = -7$ ,  $b_2 = 12$ ,  $a_1 = -3$ ,  $a_2 = 2$ ,  $f(t) = 12t^5 + 12t^4 + 4t^3 - 2e^{\frac{1}{t}}$ .

Задача Римана (2) приобретает вид

$$F_+(t) = \frac{1}{t}F_-(t) + 6t^4 + 6t^3 + 2t^2 - \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t}, \quad |t| = 1.$$

Получается, что  $\alpha = \text{Ind}_{|t|=1} \frac{1}{t} = -1$ , условий разрешимости нет, единственное решение в классе ограниченных на бесконечности функций имеет вид

$$F_+(z) = 6z^4 + 6z^3 + 2z^2, \quad F_-(z) = e^{\frac{1}{z^2}}.$$

Теперь следует решать дифференциальные уравнения

$$z^4\Phi_-''(z) + (2z^3 + 7z^2)\Phi_-'(z) + 12\Phi_-(z) = e^{\frac{1}{z^2}}, \quad |z| > 1, \quad (23)$$

$$z^4\Phi_+''(z) + (2z^3 + 3z^2)\Phi_+'(z) + 2\Phi_+(z) = 6z^4 + 6z^3 + 2z^2, \quad |z| < 1. \quad (24)$$

Для уравнения (23) соответствующее уравнение (8) имеет вид  $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$ , откуда  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 4$ , поэтому фундаментальную систему решений однородного уравнения составят функции  $e^{\frac{3}{z}}$ ,  $e^{\frac{4}{z}}$ . Решение уравнения (23) методом вариации произвольных постоянных с учетом условия (15) приводит к формуле с единственной произвольной постоянной  $C$

$$\Phi_-(z) = \left( \int_{\infty}^z \frac{e^{\frac{1}{\zeta^2} - \frac{3}{\zeta}} d\zeta}{\zeta^2} + C \right) e^{\frac{3}{z}} - \left( \int_{\infty}^z \frac{e^{\frac{1}{\zeta^2} - \frac{4}{\zeta}} d\zeta}{\zeta^2} + C \right) e^{\frac{4}{z}}.$$

Для уравнения (24) соответствующее уравнение (16) имеет вид  $\mu^2 - 3\mu + 2 = 0$ , откуда  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 2$ .

Фундаментальную систему решений однородного уравнения составят функции  $e^{\frac{1}{z}}$ ,  $e^{\frac{2}{z}}$ . Решение уравнения (24) методом вариации произвольных постоянных приводит к формуле

$$\Phi_+(z) = (\tilde{C}_1^+(z) + C_1^+)e^{\frac{1}{z}} - (\tilde{C}_2^+(z) + C_2^+)e^{\frac{2}{z}}, \quad (25)$$

где  $\tilde{C}_1^+(z)$ ,  $\tilde{C}_2^+(z)$  – какие-либо первообразные функций соответственно  $(6z^2 + 6z + 2)e^{-\frac{1}{z}}$ ,  $(6z^2 + 6z + 2)e^{-\frac{2}{z}}$  в области  $0 < |z| < 1$ . Поскольку

$$\text{res}_{z=0} (6z^2 + 6z + 2)e^{-\frac{1}{z}} = \text{res}_{z=0} (6z^2 + 6z + 2)e^{-\frac{2}{z}} = 0,$$

то такие первообразные существуют, и последующие вычисления дают в качестве этих первообразных, например, функции соответственно  $2z^2(z+1)e^{-\frac{1}{z}}$ ,  $z^2(2z+1)e^{-\frac{2}{z}}$ . Тогда формула (25) при  $C_1^+ = C_2^+ = 0$  приведет к аналитической в области  $|z| < 1$  функции  $\Phi_+(z) = z^2$ . Поскольку такая функция при  $\alpha = -1$  может быть единственной, записывать и анализировать условия вида (21) не требуется. Окончательно согласно формуле (5) получим следующее решение уравнения (22):

$$\varphi(t) = t^2 - \left( \int_{\infty}^t \frac{e^{\frac{1}{\zeta^2} - \frac{3}{\zeta}} d\zeta}{\zeta^2} + C \right) e^{\frac{3}{t}} + \left( \int_{\infty}^t \frac{e^{\frac{1}{\zeta^2} - \frac{4}{\zeta}} d\zeta}{\zeta^2} + C \right) e^{\frac{4}{t}},$$

где  $|t| = 1$ ;  $\forall C \in \mathbb{C}$ ; интегралы берутся по любым кривым в области  $|z| > 1$ .

## Заключение

Проведен полный конструктивный анализ исходного уравнения (1). Решен в явном виде пример, показывающий наличие случаев, когда выполняются все условия существования решения. Заметим еще, что возможность решить однородные уравнения 2-го порядка вида (23), (24) отмечена в справочнике [8, с. 443, пример 2.352].

## Библиографические ссылки

1. Бойков ИВ. Аналитические и численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений. *Динамические системы*. 2019;9(3):244–272.
2. Зверович ЭИ. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. *Доклады Национальной академии наук Беларуси*. 2010;54(6):5–8.
3. Зверович ЭИ, Шилин АП. Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2018; 54(4):404–407. DOI: 10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407.
4. Шилин АП. Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение эйлера типа. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2020;56(1):17–29. DOI: 10.29235/1561-2430-2020-56-1-17-29.
5. Шилин АП. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с определителями типа вронскианов. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2021;57(3):296–310. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-3-296-310.
6. Шилин АП. Гиперсингулярные интегро-дифференциальные уравнения со степенными множителями в коэффициентах. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2019;3:48–56. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-3-48-56.
7. Гахов ФД. *Краевые задачи*. 3-е издание. Москва: Наука; 1977. 640 с.
8. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. 6-е издание. Фомин СВ, переводчик. Санкт-Петербург: Лань; 2003. 576 с.

## References

1. Boykov IV. Analytical and numerical methods for solving hypersingular integral equations. *Dinamicheskie sistemy*. 2019;9(3): 244–272. Russian.
2. Zverovich EI. Solution of the hypersingular integro-differential equation with constant coefficients. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 2010;54(6):5–8. Russian.
3. Zverovich EI, Shilin AP. Integro-differential equations with singular and hypersingular integrals. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2018;54(4):404–407. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407.
4. Shilin AP. A hypersingular integro-differential equation of the Euler type. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2020;56(1):17–29. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2020-56-1-17-29.
5. Shilin AP. A solution of the hypersingular integro-differential equation with determinants of the Vronsky type. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2021;57(3):296–310. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-3-296-310.
6. Shilin AP. Hypersingular integro-differential equations with power factors in coefficients. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;3:48–56. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-3-48-56.
7. Gakhov FD. *Kraevye zadachi* [Boundary value problems]. 3<sup>rd</sup> edition. Moscow: Nauka; 1977. 640 p. Russian.
8. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* [Handbook on ordinary differential equations]. 6<sup>th</sup> edition. Fomin SV, translator. Saint Petersburg: Lan'; 2003. 576 p. Russian.

Получена 01.06.2022 / исправлена 30.09.2022 / принята 30.09.2022.  
Received 01.06.2022 / revised 30.09.2022 / accepted 30.09.2022.

УДК 517.51; 517.53

## ПРИМЕНЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА ХАРДИ – СОБОЛЕВА НА ПРЯМОЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СКОРОСТИ РАВНОМЕРНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ

Т. С. МАРДВИЛКО<sup>1)</sup>, А. А. ПЕКАРСКИЙ<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассмотрено действительное пространство Харди – Соболева на прямой, и описаны некоторые достаточные условия принадлежности функций данному пространству. Также получены оценки нормы функций из этого пространства. Приведены различные примеры функций из пространства Харди – Соболева, и исследованы скорости их наилучших равномерных рациональных приближений. Получены оценки наилучших рациональных приближений для четного и нечетного продолжений функций с монотонными производными. Исследованы также скорости наилучших рациональных приближений четного и нечетного продолжений функций в общем случае. Оценки приведены как с учетом модуля непрерывности, так и без него. Полученные результаты применяются для изучения наилучших рациональных приближений функций с изломом, введенных А. А. Гончаром.

**Ключевые слова:** пространство Харди; пространство Соболева; пространство Харди – Соболева; равномерные рациональные приближения; четное и нечетное продолжения функций.

**Благодарность.** Работа выполнена при финансовой поддержке Национальной академии наук Беларуси в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025».

## APPLICATION OF THE REAL HARDY – SOBOLEV SPACE ON THE LINE TO STUDY THE ORDER OF UNIFORM RATIONAL APPROXIMATIONS OF FUNCTIONS

T. S. MARDVILKO<sup>a</sup>, A. A. PEKARSKII<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: T. S. Mardvilko (mardvilko@gmail.com)

The real space of Hardy – Sobolev on a straight line is considered and some sufficient conditions for belonging to functions to this space are described. Estimates of the norm of functions from this space are also obtained. Various examples of functions from the Hardy – Sobolev space are given and the order of their best uniform rational approximations are

### Образец цитирования:

Мардвилко ТС, Пекарский АА. Применение действительного пространства Харди – Соболева на прямой для исследования скорости равномерных рациональных приближений функций. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;3:16–36.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-16-36>

### For citation:

Mardvilko TS, Pekariskii AA. Application of the real Hardy – Sobolev space on the line to study the order of uniform rational approximations of functions. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;3:16–36. Russian.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-16-36>

### Авторы:

**Татьяна Сергеевна Мардвилко** – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры теории функций механико-математического факультета.  
**Александр Антонович Пекарский** – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры теории функций механико-математического факультета.

### Authors:

**Tatsiana S. Mardvilko**, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics.  
[mardvilko@gmail.com](mailto:mardvilko@gmail.com)  
<https://orcid.org/0000-0002-5346-6942>  
**Aleksandr A. Pekariskii**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics.  
[pekariskii@live.com](mailto:pekariskii@live.com)  
<https://orcid.org/0000-0002-8334-4874>

investigated. Estimates of the best rational approximations for even and odd continuations of functions with monotonous derivatives are obtained. The order of the best rational approximations of the even and odd continuations of functions in the general case have also been studied. Estimates are given both considering the continuity module and without it. The obtained results are also used to study the best rational approximations of functions with a kink, introduced by A. A. Gonchar.

**Keywords:** Hardy space; Sobolev space; Hardy – Sobolev space; uniform rational approximations; even and odd continuations of functions.

**Acknowledgements.** The research was financially supported by the National Academy of Sciences of Belarus within the framework of the state program of scientific research «Convergence-2025».

## Введение

Пусть  $I$  – одно из множеств: расширенная числовая ось  $\widehat{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ , отрезок  $[a, b]$  ( $a, b \in \mathbb{R}$  и  $a < b$ ), полуось  $[a, +\infty]$  или полуось  $[-\infty, b]$ . Через  $C(I)$  обозначим множество непрерывных функций  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . В случае  $I = \widehat{\mathbb{R}}, [a, +\infty], [-\infty, b]$  предполагается существование конечных пределов  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =: f(\infty)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =: f(+\infty)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =: f(-\infty)$  соответственно. Пространство  $C(I)$  является банаховым относительно стандартной нормы

$$\|f\|_{C(I)} = \max_{x \in I} |f(x)|.$$

Пусть  $n \in \mathbb{N}_0$  ( $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ ). Через  $\mathcal{R}_n$  обозначим множество алгебраических рациональных функций с коэффициентами из  $\mathbb{R}$  и степени не выше  $n$ . Пусть  $R_n(f)$ ,  $f \in C(I)$  и  $n \in \mathbb{N}_0$ , – наилучшее равномерное приближение  $f$  посредством множества  $\mathcal{R}_n$ :

$$R_n(f) := R_n(f; I) := \inf \left\{ \|f - r\|_{C(I)} : r \in \mathcal{R}_n \right\}.$$

Для  $\{R_n(f; \widehat{\mathbb{R}})\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $f \in C(\widehat{\mathbb{R}})$ , известны [1] прямая и обратная теоремы, в которых используется действительное пространство Харди – Соболева  $\mathcal{H}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$ . Введем пространство  $\mathcal{H}^s$  и другие обозначения.

Для измеримого множества  $I \subset \mathbb{R}$  через  $L_p(I)$ ,  $0 < p \leq \infty$ , обозначим пространство Лебега функций  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Функционал

$$\|f\|_{L_p(I)} = \left( \int_I |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{при } 0 < p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(I)} = \text{ess sup} \{ |f(x)| : x \in I \} \quad \text{при } p = \infty$$

на  $L_p(I)$  является нормой при  $1 \leq p \leq \infty$  и  $p$ -нормой при  $0 < p < 1$ . Последнее означает, что для  $f, g \in L_p(I)$  при  $0 < p < 1$  в качестве неравенства треугольника выступает  $p$ -неравенство треугольника, т. е.

$$\|f + g\|_{L_p(I)}^p \leq \|f\|_{L_p(I)}^p + \|g\|_{L_p(I)}^p.$$

В комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  рассмотрим верхнюю полуплоскость  $\Pi = \{z : z \in \mathbb{C}, \text{Im } z > 0\}$ . Говорим [2], что аналитическая в  $\Pi$  функция  $f$  принадлежит пространству Харди  $H_p$ ,  $0 < p \leq \infty$ , если

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{y > 0} \|f(\cdot + iy)\|_{L_p(\mathbb{R})} < \infty.$$

Как известно, для функции  $f \in H_p$  почти для всех  $x \in \mathbb{R}$  существуют некасательные предельные значения, которые обозначим через  $f(x)$ . При этом  $\|f\|_{H_p} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R})}$ .

Через  $H^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , обозначим пространство Харди – Соболева аналитических в  $\Pi$  функций. Именно  $f \in H^s$ , если  $f$  аналитична в  $\Pi$ ,  $f^{(s)} \in H_1$  и при  $s \geq 2$  существует  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = f(\infty) \in \mathbb{C}$  при  $z \in \Pi$  и  $z \rightarrow \infty$ . Отметим, что последнее условие для  $f \in H^1$  выполняется без дополнительных предположений. Согласно теореме Харди – Литтлвуда [7, suppl. 3]  $H^s \subset C_A(\bar{\Pi})$ , т. е. функция  $f \in H^s$  аналитична в  $\Pi$ , продолжается по непрерывности в замкнутую полуплоскость  $\bar{\Pi} = \{z : z \in \mathbb{C}, \text{Im } z \geq 0\}$ , и существует  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = f(\infty) \in \mathbb{C}$  при  $z \in \bar{\Pi}$  и  $z \rightarrow \infty$ .

Введем сейчас пространство Харди – Соболева  $\mathcal{H}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , действительных функций. Пусть  $g \in C(\widehat{\mathbb{R}})$  и  $u(z)$ ,  $z \in \bar{\Pi}$ , есть решение задачи Дирихле, т. е.  $u$  непрерывна в  $\bar{\Pi}$ ,  $u(x) = g(x)$  для  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u(z)$  гармонична и ограничена в  $\Pi$ . Через  $v(z)$  обозначим гармонически сопряженную с  $u$  функцию, которая однозначно определяется из условия  $v(i) = 0$ . Говорим, что  $g \in \mathcal{H}^s$ , если функция  $f(z) := u(z) + iv(z)$  принадлежит  $H^s$ . При этом  $\frac{1}{s}$ -норма функции  $g$  вводится следующим образом:

$$\|g\|_{\mathcal{H}^s} = \|f^{(s)}\|_{H_{\frac{1}{s}}}. \quad (1)$$

Функция  $f(z)$  находится с помощью интеграла типа Коши [2, р. 105]:

$$f(z) = (Cg)(z) := \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} g(t) \left( \frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right) dt, \quad z \in \Pi.$$

Значит, для  $s \in \mathbb{N}$  имеем

$$f^{(s)}(z) = (Cg)^{(s)}(z) := \frac{s!}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)}{(t-z)^{s+1}} dt, \quad z \in \Pi. \quad (2)$$

Из равенства (1) следуют полнота пространства  $\mathcal{H}^s$  и  $\frac{1}{s}$ -неравенство треугольника:

$$\|g+h\|_{\mathcal{H}^s}^{\frac{1}{s}} \leq \|g\|_{\mathcal{H}^s}^{\frac{1}{s}} + \|h\|_{\mathcal{H}^s}^{\frac{1}{s}}, \quad g, h \in \mathcal{H}^s.$$

Формулу (2) можно применять для вычисления или оценки  $\frac{1}{s}$ -нормы  $\|g\|_{\mathcal{H}^s}$ .

Для пространства  $\mathcal{H}^s$  известна еще одна эквивалентная  $\frac{1}{s}$ -норма. Чтобы ее определить, введем дополнительные обозначения и понятия. Через  $C^s(I)$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , обозначим множество  $s$  раз непрерывно дифференцируемых функций  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Будем считать также, что  $C^0(I) := C(I)$ . Здесь  $I$  – отрезок  $[a, b]$ , полуось  $(-\infty, b]$ , полуось  $[a, +\infty)$  или числовая ось  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ . Через  $W_p^s(I)$  ( $s \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ) обозначим пространство Соболева. Функция  $f \in W_p^s(I)$ , если  $f \in C^{s-1}(I)$ ,  $f^{(s-1)}$  абсолютно непрерывна на  $I$  и  $f, f', f'', \dots, f^{(s)} \in L_p(I)$ .

Функцию  $\varphi \in W_{\infty}^s(\mathbb{R})$  называем  $s$ -простой, если она финитна. С  $s$ -простой функцией  $\varphi$  будем ассоциировать опорный отрезок  $J(\varphi)$  такой, что  $\text{supp } \varphi \subset J$ . Для  $s$ -простой функции  $\varphi$  введем характеристику

$$\mu_s(\varphi) = |J|^s \|\varphi^{(s)}\|_{L_{\infty}(J)},$$

где  $|J|$  – длина отрезка  $J$ .

**Теорема 1.** Функция  $g \in C(\widehat{\mathbb{R}})$  принадлежит  $\mathcal{H}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , в том и только том случае, если существует постоянная  $a$  и последовательность  $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$   $s$ -простых функций, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_s(\varphi_k)^{\frac{1}{s}} =: A < \infty, \quad (3)$$

$$a + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) = g(x) \text{ при } x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

При этом  $\|g\|_{\mathcal{H}^s}^{\#} := \inf \left\{ A^s : \text{выполняются соотношения (3) и (4)} \right\}$  является  $\frac{1}{s}$ -нормой в  $\mathcal{H}^s$ , эквивалентной  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^s}$ .

Теорема 1 является следствием результата Р. Койфмана [3; 4] об атомическом представлении функций класса  $\text{Re}H_p$  при  $p \leq 1$ . Прямые вычисления показывают, что  $\frac{1}{s}$ -нормы  $\|g\|_{\mathcal{H}^s}$  и  $\|g\|_{\mathcal{H}^s}^{\#}$  обладают следующим интересным и весьма полезным свойством: они инвариантны относительно невырожденных линейных преобразований аргумента функции  $g$ .

Имеют место теоремы 2 и 3 – прямая и обратная теоремы рациональной аппроксимации соответственно (подробнее см. [1]). Здесь и далее через  $c, c_1, c_2, \dots$  обозначаем некоторые положительные величины (постоянные). Если они зависят от каких-либо параметров, то эти параметры указываем в скобках. В пределах одного раздела различные постоянные отмечаем разными индексами.

**Теорема 2.** Пусть  $g \in \mathcal{H}^s, s \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$R_n(g; \hat{\mathbb{R}}) \leq \frac{c_1(s)}{n^s} \|g\|_{\mathcal{H}^s}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Кроме того, при  $s = 1$  имеет место асимптотическое равенство

$$R_n(g; \hat{\mathbb{R}}) = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Если же  $s \geq 2$ , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( n^s R_n(g; \hat{\mathbb{R}}) \right)^2 \leq c_2(s) \|g\|_{\mathcal{H}^s}^2.$$

**Теорема 3.** Пусть  $g \in C(\hat{\mathbb{R}})$  и  $s \in \mathbb{N}$ . Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( n^s R_n(g; \hat{\mathbb{R}}) \right)^{\frac{1}{s}} =: B < \infty,$$

то  $g \in \mathcal{H}^s$  и  $\|g\|_{\mathcal{H}^s} \leq c_3(s) B^s$ .

В настоящей статье для изучения скорости наилучших рациональных приближений функций будем использовать теорему 2. При этом применяем как  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^s}$ , так и  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^s}^{\#}$   $\frac{1}{s}$ -нормы. Вследствие теоремы 1 в дальнейшем используем лишь обозначение  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^s}$  для  $\frac{1}{s}$ -нормы. Из контекста будет ясно, когда имеется в виду  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^s}$ , а когда  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^s}^{\#}$ .

В разделах «Примеры функций класса  $\mathcal{H}^s$ : использование  $s$ -простых функций» и «Примеры функций класса  $\mathcal{H}^{s+1}$ : использование интеграла типа Коши» приводятся различные примеры функций из действительного пространства Харди – Соболева. Наилучшие приближения функций с монотонными производными и их четных продолжений изучаются в разделе «Аппроксимация функций с монотонными производными и их четных продолжений». В разделе «Аппроксимация нечетного продолжения функций с монотонными производными» аналогичная задача рассматривается для нечетных продолжений функций.

### Примеры функций класса $\mathcal{H}^s$ : использование $s$ -простых функций

Через  $\mathcal{P}_n, n \in \mathbb{N}_0$ , обозначим множество алгебраических многочленов с коэффициентами из  $\mathbb{R}$  и степени не выше  $n$ . Пусть функция  $f \in L_{\infty}(X), X \subset \mathbb{R}$ , в частности  $f \in C(X)$ . Для краткости полагаем, что  $\|f\|_X := \|f\|_{L_{\infty}(X)}$ .

**Лемма 1.** Пусть  $-\infty < a < b < +\infty, s \in \mathbb{N}$  и  $p \in \mathcal{P}_{2s-1}$ . Тогда для  $l = 0, 1, \dots, 2s-1$  выполняется неравенство

$$\|p^{(l)}\|_{[a,b]} \leq c(s) \sum_{j=0}^{s-1} (b-a)^{j-l} \left( |p^{(j)}(a)| + |p^{(j)}(b)| \right). \quad (5)$$

**Доказательство.** Достаточно рассмотреть случай  $[a, b] = [0, 1]$ . Общий случай сводится к указанному с помощью линейной замены аргумента  $x = a + t(b-a), 0 \leq t \leq 1$ . Хорошо известно, что  $\|p\|_{[0,1]}$  является нормой в пространстве  $\mathcal{P}_{2s-1}$ . Сумма  $\sum_{j=0}^{s-1} \left( |p^{(j)}(0)| + |p^{(j)}(1)| \right) =: \mathfrak{S}(p)$  также есть норма в пространстве  $\mathcal{P}_{2s-1}$ . При проверке аксиом нормы в рассматриваемом случае затруднение может вызвать лишь проверка импликации  $\mathfrak{S}(p) = 0 \Rightarrow p(x) = 0$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ . Докажем это. Действительно, если  $\mathfrak{S}(p) = 0$ , то точки 0 и 1 являются нулями порядков не ниже  $s$  для полинома  $p \in \mathcal{P}_{2s-1}$ . Значит, с учетом кратности полином  $p$  имеет не менее  $2s$  нулей. Согласно основной теореме алгебры это возможно лишь в случае, когда  $p(x) = 0$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ .

Как известно, в конечномерном пространстве любые две нормы эквивалентны. Тогда для каждого  $p \in \mathcal{P}_{2s-1}$  выполняется неравенство

$$\|p\|_{[0,1]} \leq c_1(s) \sum_{j=0}^{s-1} \left( |p^{(j)}(0)| + |p^{(j)}(1)| \right). \quad (6)$$

Согласно неравенству А. А. Маркова [5, р. 97] для  $l = 0, 1, \dots, 2s - 1$  имеем

$$\|p^{(l)}\|_{[0,1]} \leq c_2(s) \|p\|_{[0,1]}.$$

Значит, из формулы (6) следует выражение (5) для  $[a, b] = [0, 1]$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\psi \in C(\widehat{\mathbb{R}})$ ,  $\text{supp} \psi \subset [a, b]$  ( $-\infty < a < b < +\infty$ ) и  $\psi|_{[a,b]} \in W_\infty^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\psi \in \mathcal{H}^s$  и

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^s} \leq c_2(s) \sum_{l=1}^s (b-a)^l \|\psi^{(l)}\|_{[a,b]}. \quad (7)$$

**Доказательство.** Если  $s = 1$ , то соотношение (7) очевидно ввиду теоремы 1, поэтому считаем  $s \geq 2$ . Кроме того, полагаем, что  $[a, b] = [0, 1]$ , так как общий случай выводится отсюда с помощью линейной замены аргумента.

Для каждого  $k \in \mathbb{N}_0$  введем отрезки  $J_{k0} = [-2^{-k}, 0]$ ,  $J_{k1} = [1, 1 + 2^{-k}]$  и функцию  $\psi_k \in W_\infty^s(\mathbb{R})$ . Именно  $\psi_k(x) = \psi(x)$  при  $x \in \mathbb{R} \setminus (J_{k0} \cup J_{k1})$ , а на отрезках  $J_{k0}$  и  $J_{k1}$  функция  $\psi_k$  совпадает с полиномами степени не выше  $2s - 1$ , которые ввиду условия  $\psi_k \in W_\infty^s(\mathbb{R})$  существуют и являются единственными. Здесь воспользуемся решением интерполяционной задачи Эрмита [5, р. 118, theorem 6.1]. Имеем

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^1 \varphi_{ki}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

где  $\varphi_{ki}(x) = \psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)$  при  $x \in J_{ki}$  и  $\varphi_{ki}(x) = 0$  при  $x \in \mathbb{R} \setminus J_{ki}$ . Функции  $\psi_0$  и  $\varphi_{ki}$  являются  $s$ -простыми функциями с опорными отрезками  $J(\psi_0) = [-1, 2]$  и  $J(\varphi_{ki}) = J_{ki}$ . Следовательно,

$$\mu_s(\psi_0) = 3^s \|\psi_0^{(s)}\|_{[-1,2]} = 3^s \max \left\{ \|\psi_0^{(s)}\|_{[-1,0]}, \|\psi_0^{(s)}\|_{[0,1]}, \|\psi_0^{(s)}\|_{[1,2]} \right\}. \quad (9)$$

Для оценки первого и третьего выражений из фигурных скобок формулы (9) воспользуемся леммой 1. Рассмотрим первое выражение. При этом учтем, что  $\psi_0^{(j)}(-1) = 0$  при  $j = 0, 1, \dots, s - 1$ ;  $\psi_0(0) = 0$  и  $\psi_0^{(j)}(0) = \psi_0^{(j)}(+0)$  при  $j = 1, 2, \dots, s - 1$ . Следовательно,

$$\|\psi_0^{(s)}\|_{[-1,0]} \leq c_3(s) \sum_{j=1}^{s-1} |\psi_0^{(j)}(0)| \leq c_3(s) \sum_{j=1}^{s-1} \|\psi^{(j)}\|_{[0,1]}.$$

Ясно, что аналогичная оценка верна и для  $\|\psi_0^{(s)}\|_{[1,2]}$ . Таким образом, с учетом равенства (9) находим

$$\mu_s(\psi_0) \leq c_4(s) \sum_{j=1}^s \|\psi^{(j)}\|_{[0,1]}. \quad (10)$$

Ниже покажем, что при  $i = 0, 1$  и  $k \in \mathbb{N}_0$  имеет место неравенство

$$\mu_s(\varphi_{ki}) \leq c_5(s) 2^{-k} \sum_{j=1}^s \|\psi^{(j)}\|_{[0,1]}. \quad (11)$$

Будем считать, например,  $i = 0$ . Функция  $\varphi_{k0}$  является  $s$ -простой функцией с опорным отрезком  $J_{k0} = [-2^{-k}, 0]$ ;  $\varphi_{k0}|_{[-2^{-k}, -2^{-k-1}]}$  и  $\varphi_{k0}|_{[-2^{-k-1}, 0]}$  – полиномами степени, не превышающей  $2s - 1$ . Кроме того,  $\varphi_{k0}(x) = -\psi_k(x)$  при  $x \in [-2^{-k}, -2^{-k-1}]$ . Следовательно, используя лемму 1, получим

$$\begin{aligned} \|\varphi_{k0}^{(j)}\|_{[-2^{-k}, -2^{-k-1}]} &\leq \|\psi_k^{(j)}\|_{[-2^{-k}, 0]} \leq c_6(s) \sum_{m=1}^{s-1} 2^{-k(m-j)} |\psi^{(m)}(+0)| \leq \\ &\leq c_6(s) \sum_{m=1}^{s-1} 2^{-k(m-j)} \|\psi^{(m)}\|_{[0,1]}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (12)$$

Действуя аналогично, находим, что

$$\left\| \Phi_{k0}^{(s)} \right\|_{[-2^{-k-1}, 0]} \leq c_6(s) \sum_{j=1}^{s-1} 2^{-k(j-s)} \left| \Phi_{k0}^{(j)}(-2^{-k-1}) \right|.$$

Далее используем выражение (12) для оценки  $\left| \Phi_{k0}^{(j)}(-2^{-k-1}) \right|$ . Таким образом, получим

$$\begin{aligned} \left\| \Phi_{k0}^{(s)} \right\|_{[-2^{-k-1}, 0]} &\leq c_7(s) \sum_{j=1}^{s-1} 2^{-k(j-s)} \sum_{m=1}^{s-1} 2^{-k(m-j)} \left\| \Psi^{(m)} \right\|_{[0,1]} = \\ &= (s-1)c_7(s) \sum_{m=1}^{s-1} 2^{-k(m-s)} \left\| \Psi^{(m)} \right\|_{[0,1]}. \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку  $\mu_s(\Phi_{k0}) = 2^{-ks} \left\| \Phi_{k0}^{(s)} \right\|_{[-2^{-k}, 0]}$ , то из формул (12), (13) получим

$$\mu_s(\Phi_{k0}) \leq c_8(s) \sum_{m=1}^{s-1} 2^{-km} \left\| \Psi^{(m)} \right\|_{[0,1]} \leq c_8(s) 2^{-k} \sum_{j=1}^s \left\| \Psi^{(j)} \right\|_{[0,1]}.$$

Таким образом, неравенство (11) доказано для  $i = 0$ .

Аналогично рассматривается случай  $i = 1$ . Из выражений (8), (10) и (11) следует неравенство (7) для  $[a, b] = [0, 1]$ .

**Лемма 3.** Пусть  $s \in \mathbb{N}$   $-\infty < a < b \leq u < y < +\infty$ . Если функция  $\psi \in C(\widehat{\mathbb{R}})$ ,  $\text{supp } \psi \subset [a, y]$ ,  $\psi|_{[a,b]} \in W_\infty^s$ ,  $\psi|_{[u,y]} \in W_\infty^s$  и  $\psi(x) = \text{const}$  при  $x \in [b, u]$ , то  $\psi \in \mathcal{H}^s$  и имеет место соотношение

$$\left\| \psi \right\|_{\mathcal{H}^s} \leq c_9(s) \sum_{l=1}^s (y-a)^l \left\| \psi^{(l)} \right\|_{[a,b] \cup [u,y]}. \quad (14)$$

**Доказательство.** Для  $s = 1$  неравенство (14) выполняется ввиду теоремы 1, так как  $\psi$  суть 1-простая функция с отрезком  $J(\psi) = [a, y]$ . Следовательно, считаем, что  $s \geq 2$ . При этом утверждение леммы для  $s \geq 2$  получим вначале, если выполнено дополнительное условие

$$y - a \leq 2(u - b). \quad (15)$$

Пусть  $\phi \in C(\mathbb{R})$ ,  $\text{supp } \phi \subset [b, u]$ ,  $\phi|_{[b,u]} \in \mathcal{P}_{2s-1}$ , и является единственным решением интерполяционной задачи Эрмита [5, p. 118, theorem 6.1]:

$$\phi(b) = \phi(u) = 0, \quad \phi^{(j)}(b+0) = \psi^{(j)}(b-0), \quad \phi^{(j)}(u-0) = \psi^{(j)}(u+0), \quad (16)$$

где  $j = 1, 2, \dots, s-1$ . Тогда функции  $\phi$  и  $\hat{\psi} := \psi + \phi$  удовлетворяют условиям леммы 2, где в качестве отрезка  $[a, b]$  берутся  $[b, u]$  и  $[a, y]$  соответственно. Согласно лемме 1 и условию (16) для  $l = 1, 2, \dots, s$  получим

$$\left\| \phi^{(l)} \right\|_{[b,u]} \leq c_{10}(s) \sum_{j=1}^{s-1} (u-b)^{j-l} \left\| \psi^{(j)} \right\|_{[a,b] \cup [u,y]}. \quad (17)$$

Следовательно, с учетом леммы 2 находим

$$\left\| \phi \right\|_{\mathcal{H}^s} \leq c_{11}(s) \sum_{l=1}^s (u-b)^l \left\| \phi^{(l)} \right\|_{[b,u]} \leq c_{12}(s) \sum_{j=1}^{s-1} (u-b)^j \left\| \psi^{(j)} \right\|_{[a,b] \cup [u,y]}. \quad (18)$$

Далее применим лемму 2 к функции  $\hat{\psi}$ :

$$\left\| \hat{\psi} \right\|_{\mathcal{H}^s} \leq c_{13}(s) \sum_{l=1}^s (y-a)^l \left\{ \left\| \psi^{(l)} \right\|_{[a,b] \cup [u,y]} + \left\| \phi^{(l)} \right\|_{[b,u]} \right\}.$$

Здесь первое слагаемое из фигурных скобок дает сумму, как требуется в формуле (14). Для второго слагаемого с учетом условий (15) и (17) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^s (y-a)^l \|\varphi^{(l)}\|_{[b,u]} &\leq c_{14}(s) \sum_{l=1}^s (y-a)^l \sum_{j=1}^{s-1} (u-b)^{j-l} \|\Psi^{(j)}\|_{[a,b] \cup [u,y]} = \\ &= c_{15}(s) \sum_{l=1}^s \sum_{j=1}^{s-1} (y-a)^j \left(\frac{u-b}{y-a}\right)^{j-l} \|\Psi^{(j)}\|_{[a,b] \cup [u,y]} \leq \\ &\leq s2^{s-1} c_{15}(s) \sum_{j=1}^{s-1} (y-a)^j \|\Psi^{(j)}\|_{[a,b] \cup [u,y]}. \end{aligned}$$

Собрав найденные оценки, находим

$$\|\hat{\Psi}\|_{\mathcal{H}^s} \leq c_{16}(s) \sum_{l=1}^s (y-a)^l \|\Psi\|_{[a,b] \cup [u,y]}. \quad (19)$$

Поскольку  $\Psi = \hat{\Psi} - \varphi$ , то, применив  $\frac{1}{s}$ -неравенство треугольника из формул (18) и (19), получим выражение (14) при условии (15).

Сейчас снимем ограничения (15). Рассмотрим сначала случай  $b = u$ . Существует последовательность  $\{[a_k, y_k]\}_{k=0}^\infty$  отрезков, удовлетворяющая следующим условиям: (i)  $a_0 = a, y_0 = y$ ; (ii)  $[a_{k+1}, y_{k+1}] \subset (a_k, y_k)$  при  $k \in \mathbb{N}_0$ ; (iii)  $y_k - a_k = 2^{-k}(y-a)$  при  $k \in \mathbb{N}$ ; (iv)  $\Psi(a_k) = \Psi(y_k)$  при  $k \in \mathbb{N}_0$ ; (v)  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = b$ . Определим на  $\mathbb{R}$  вспомогательные функции  $\{\Psi_k\}_{k=0}^\infty$ :

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [a_0, y_0], \\ \Psi(x), & x \in [a_0, y_0] \setminus [a_1, y_1], \\ \Psi(a_1), & x \in [a_1, y_1]. \end{cases}$$

Далее для  $k = 1, 2, \dots$  полагаем, что

$$\Psi_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [a_k, y_k], \\ \Psi(x) - \Psi(a_k), & x \in [a_k, y_k] \setminus [a_{k+1}, y_{k+1}], \\ \Psi(a_{k+1}) - \Psi(a_k), & x \in [a_{k+1}, y_{k+1}]. \end{cases}$$

Легко заметить, что  $\Psi(x) = \sum_{k=0}^\infty \Psi_k(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , причем ввиду условия (iii) каждая из функций  $\{\Psi_k\}_{k=0}^\infty$  удовлетворяет рассмотренному частному случаю (15). Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\Psi\|_{\mathcal{H}^s}^{\frac{1}{s}} &\leq \sum_{k=0}^\infty \|\Psi_k\|_{\mathcal{H}^s}^{\frac{1}{s}} \leq c_{17}(s) \sum_{k=0}^\infty \left\{ \sum_{l=1}^s (y_k - a_k)^l \|\Psi^{(l)}\|_{[a_k, a_{k+1}] \cup [y_{k+1}, y_k]} \right\}^{\frac{1}{s}} \leq \\ &\leq c_{17}(s) \sum_{k=0}^\infty 2^{-k} \left\{ \sum_{l=1}^s (y-a)^l \|\Psi^{(l)}\|_{[a,b] \cup [u,y]} \right\}^{\frac{1}{s}} = \\ &= 2c_{17}(s) \left\{ \sum_{l=1}^s (y-a)^l \|\Psi^{(l)}\|_{[a,b] \cup [u,y]} \right\}^{\frac{1}{s}}. \end{aligned}$$

Таким образом, лемма 3 доказана, если  $b = u$ . Если же  $b < u$ , то в последних рассуждениях будет конечное число функций  $\Psi_k$ .

Лемма 3 дает наиболее общее достаточное условие принадлежности функции пространству  $\mathcal{H}^s$  и оценку (14) соответствующей  $\frac{1}{s}$ -нормы. В лемме 4 получим уточнение оценки (14) для  $b = u$ .

**Определение 1.** Функцию  $\Delta \in C(\hat{\mathbb{R}})$  будем называть треугольной с точками  $a, b, u$  и обозначать через  $\Delta(x; a, b, y)$ , если  $\text{supp } \Delta \subset [a, y]$ ,  $\Delta(b) = 1$  и на отрезках  $[a, b]$  и  $[b, y]$  функция  $\Delta(x)$  линейна.

**Лемма 4.** Пусть  $s \in \mathbb{N}$  и  $-\infty < a < b < y < +\infty$ . Если функция  $\psi \in C(\widehat{\mathbb{R}})$ ,  $\text{supp} \psi \subset [a, y]$ ,  $\psi|_{[a, b]} \in W_\infty^s$  и  $\psi|_{[b, y]} \in W_\infty^s$ , то  $\psi \in \mathcal{H}^s$  и имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{\mathcal{H}^s} &\leq c_{18}(s) \sum_{l=1}^s \left\{ (b-a)^l \|\psi^{(l)}\|_{[a, b]} + (y-b)^l \|\psi^{(l)}\|_{[b, y]} \right\} + \\ &+ c_{19}(s) |\psi(b)| \log_2^s \frac{y-a}{\min\{b-a, y-b\}}. \end{aligned} \quad (20)$$

**Доказательство.** Имеем  $\psi(x) - \psi(b)\Delta(x; a, b, y) = \psi_-(x) + \psi_+(x)$ , где функции  $\psi_-$  и  $\psi_+$  удовлетворяют условиям леммы 2 с отрезками  $[a, b]$  и  $[b, y]$  соответственно. Рассмотрим подробнее, например, функцию  $\psi_-$ . Очевидно, что

$$|\psi(b)| \cdot \|\Delta'(\cdot; a, b, y)\|_{[a, b]} = \frac{|\psi(b) - \psi(a)|}{b-a} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b |\psi'(x)| dx \leq \|\psi'\|_{[a, b]}.$$

Следовательно,

$$\|\psi'_-\|_{[a, b]} \leq \|\psi'\|_{[a, b]} + |\psi(b)| \cdot \|\Delta'(\cdot; a, b, y)\|_{[a, b]} \leq 2\|\psi'\|_{[a, b]}.$$

Аналогично получим, что

$$\|\psi'_+\|_{[b, y]} \leq 2\|\psi'\|_{[b, y]}.$$

Отметим также, что в случае  $s \geq 2$  для  $j = 2, 3, \dots, s$  имеем  $\psi_-^{(j)}(x) = \psi^{(j)}(x)$  при  $x \in (a, b)$  и  $\psi_+^{(j)}(x) = \psi^{(j)}(x)$  при  $x \in (b, y)$ . Таким образом, используя лемму 2, получим

$$\|\psi_-\|_{\mathcal{H}^s} \leq c_{17}(s) \sum_{l=1}^s (b-a)^l \|\psi^{(l)}\|_{[a, b]}, \quad (21)$$

$$\|\psi_+\|_{\mathcal{H}^s} \leq c_{17}(s) \sum_{l=1}^s (y-b)^l \|\psi^{(l)}\|_{[b, y]}. \quad (22)$$

Поскольку  $\psi(x) = \psi(b)\Delta(x; a, b, y) + \psi_-(x) + \psi_+(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , то из соотношений (21) и (22) видно, что для доказательства выражения (20) достаточно получить неравенство

$$\|\Delta(\cdot; a, b, y)\|_{\mathcal{H}^s} \leq c_{18}(s) \log_2^s \frac{y-a}{\min\{b-a, y-b\}}. \quad (23)$$

Пусть, например,  $b-a \leq y-b$ . Если при этом  $y-b \leq 4(b-a)$ , то формула (23) вытекает из леммы 3. В случае  $y-b > 4(b-a)$  воспользуемся свойством инвариантности  $\frac{1}{s}$ -нормы пространства  $\mathcal{H}^s$  относительно невырожденных линейных преобразований аргумента функции (см. раздел «Введение»). Перейдем к новой переменной  $t$  с помощью замены  $x = b + t(b-a)$ . При этом функция  $\Delta(x; a, b, y)$  перейдет в треугольную функцию  $\Delta(t; -1, 0, A)$ , где  $A = \frac{y-b}{b-a} > 4$ .

Введем положительную строго убывающую функцию  $\omega(q) = \frac{\log_2 A}{\log_2 q}$ ,  $q > 1$ . Имеем  $\omega(2) - \omega(4) = \frac{1}{2} \log_2 A > 1$ . Следовательно, существует  $q_0 \in [2, 4]$  такое, что  $\omega(q_0) =: m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Полагая, что  $\lambda_k = \Delta(q_0^k; -1, 0, A)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m-1$ , замечаем, что  $\lambda_k \in (0, 1)$  и имеет место равенство

$$\begin{aligned} \Delta(t; -1, 0, A) &= \Delta(t; -1, 0, q_0) + \lambda_1 \Delta(t; 0, q_0, q_0^2) + \\ &+ \lambda_2 \Delta(t; q_0, q_0^2, q_0^3) + \dots + \lambda_{m-1} \Delta(t; q_0^{m-2}, q_0^{m-1}, q_0^m), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Каждая из треугольных функций в правой части этого равенства удовлетворяет рассмотренному выше условию типа  $b-a \leq y-b \leq 4(b-a)$ . Тогда, применив  $\frac{1}{s}$ -неравенство треугольника и лемму 3, получим

$$\|\Delta(\cdot; -1, 0, A)\|_{\mathcal{H}^s}^{\frac{1}{s}} \leq c_{19}(s)m \leq c_{19}(s) \log_2 \frac{y-b}{b-a}.$$

Таким образом, неравенство (23) и лемма 4 доказаны.

**Лемма 5.** Пусть  $s, k \in \mathbb{N}$  и  $-\infty < a < b < y < +\infty$ . Если функция  $\psi \in C(\widehat{\mathbb{R}})$ ,  $\text{supp } \psi \subset [a, y]$ ,  $\psi|_{[a,b]} \in \mathcal{P}_k$  и  $\psi|_{[b,y]} \in \mathcal{P}_k$ , то  $\psi \in \mathcal{H}^s$  и имеет место соотношение

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^s} \leq c_{20}(s, k) \|\psi\|_{[a,y]} \log_2^s \frac{y-a}{\min\{b-a, y-b\}}.$$

**Доказательство.** Согласно неравенству А. А. Маркова [5, р. 97] для  $l = 1, 2, \dots, s$  имеют место соотношения

$$(b-a)^l \|\psi^{(l)}\|_{[a,b]} \leq c_{21}(s, k) \|\psi\|_{[a,b]},$$

$$(y-b)^l \|\psi^{(l)}\|_{[b,y]} \leq c_{21}(s, k) \|\psi\|_{[b,y]}.$$

Остается воспользоваться леммой 4.

Лемма, аналогичная лемме 5, получена в работе [6, лемма 1] для пространства Бесова  $B_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}$ . Чтобы доказать результаты, представленные в публикации [6], пространство Бесова  $B_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}$  и лемму 1 из источника [6] можно заменить на пространство  $\mathcal{H}^s$  и лемму 5 соответственно.

Ниже приводится пример 1, где используются теорема 2 и лемма 2. При этом запись  $a_n \asymp b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , для положительных последовательностей  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  и  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  означает, что  $c_{22}a_n \leq b_n \leq c_{23}a_n$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , где  $c_{23} \geq c_{22} > 0$ .

**Пример 1.** Пусть  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $g_{\alpha\beta}(x) = x^{\alpha} |\sin(\pi x^{-\beta})|$  при  $x \in (0, 1]$  и  $g_{\alpha\beta}(0) = 0$ . Тогда

$$R_n(g_{\alpha\beta}; [0, 1]) \asymp n^{-\frac{\alpha}{\beta}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (24)$$

где постоянные, скрытые символом  $\asymp$ , зависят лишь от  $\alpha$  и  $\beta$ .

Получим сначала верхнюю оценку из выражения (24). С этой целью введем последовательность  $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$  функций

$$\psi_k(x) = \begin{cases} x^{\alpha} |\sin(\pi x^{-\beta})| & \text{при } x \in \left[ (k+1)^{-\frac{1}{\beta}}, k^{-\frac{1}{\beta}} \right], \\ 0 & \text{при } x \in \widehat{\mathbb{R}} \setminus \left[ (k+1)^{-\frac{1}{\beta}}, k^{-\frac{1}{\beta}} \right]. \end{cases} \quad (25)$$

Эти функции удовлетворяют лемме 2 при любом  $s \in \mathbb{N}$ . Полагаем, что  $s = \left\lceil \frac{\alpha}{\beta} \right\rceil + 1$ . Используя лемму 2, получим

$$\|\psi_k\|_{\mathcal{H}^s} \leq c_{24}(\alpha, \beta) k^{-\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Следовательно, согласно теоремам 1 и 2 для функции  $\Lambda_n = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n$  получаем

$$R_n(\Lambda_n; \widehat{\mathbb{R}}) \leq \frac{c_{25}(s)}{n^s} \left( \sum_{k=1}^n \|\psi_k\|_{\mathcal{H}^s}^{\frac{1}{s}} \right)^s \leq \frac{c_{26}(\alpha, \beta)}{n^s} \left( \sum_{k=1}^n k^{-\frac{\alpha}{s\beta}} \right)^s \leq c_{27}(\alpha, \beta) n^{-\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Поскольку  $\|g_{\alpha\beta} - \Lambda_n\|_{[0,1]} \leq n^{-\frac{\alpha}{\beta}}$ , то считаем, что верхняя оценка из формулы (24) доказана.

Для доказательства нижней оценки из выражения (24) воспользуемся теоремой Валле-Пуссена [7, р. 214]. Введем последовательность  $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ , где  $x_{2k-1} = k^{-\frac{1}{\beta}}$  и  $x_{2k} = \left(k + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{\beta}}$  при  $k \in \mathbb{N}$ . Ясно, что

$1 = x_1 > x_2 > x_3 > \dots$ . Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  обозначим  $\tilde{n} = 2 \left( \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2 \right)$ . Функция  $h(x) := g_{\alpha\beta}(x) - \frac{1}{2} \left( \frac{2}{n+5} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}}$  при  $k = 1, 2, \dots, \frac{\tilde{n}}{2}$  удовлетворяет соотношениям

$$h(x_{2k-1}) = -\frac{1}{2} \left( \frac{2}{n+5} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad h(x_{2k}) \geq \frac{1}{2} \left( \frac{2}{n+5} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Поскольку  $\tilde{n} \geq n + 3$ , то, используя теорему Валле-Пуссена, получим

$$R_n(g_{\alpha\beta}; [0, 1]) \geq \min \{ |h(x_m)| : m = 1, 2, \dots, \tilde{n} \} = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{n+5} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Таким образом, нижняя оценка из выражения (24) доказана.

Отметим, что исследованием наилучших равномерных рациональных приближений функции  $g_{\alpha\alpha}(x)$  для  $\alpha \in (0, 1]$  занимался Е. А. Ровба [8]. Для  $n \geq 2$  он получил оценки

$$R_n(g_{\alpha\alpha}; [0, 1]) = O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right) \text{ при } 0 < \alpha < 1 \text{ и } R_n(g_{11}; [0, 1]) = O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Несложно заметить, что справедливо следующее обобщение примера 1.

**Пример 2.** Пусть  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots)$  – случайная последовательность, состоящая из 1 и  $-1$ . Используя функции (25), полагаем, что

$$g_{\alpha\beta}(x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \psi_k(x).$$

Тогда

$$R_n(g_{\alpha\beta}(\cdot, \xi); [0, 1]) \asymp n^{-\frac{\alpha}{\beta}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где постоянные, скрытые символом  $\asymp$ , зависят лишь от  $\alpha$  и  $\beta$ .

### Примеры функций класса $\mathcal{H}^{s+1}$ : использование интеграла типа Коши

Пусть  $I = [a, b]$  – отрезок числовой оси  $\mathbb{R}$ ,  $|I| = b - a$  – длина  $I$ . Через  $V = V(I)$  обозначим множество функций  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , которые имеют ограниченное полное изменение, выраженное через  $v = v(f, I)$ . В дальнейшем считаем, что если  $f \in V(I)$ , то функция  $f$  непрерывна справа и слева в точках  $a$  и  $b$  соответственно.

Если же  $x_0 \in (a, b)$  и является точкой разрыва функции  $f$ , то полагаем, что  $f(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$ .

Через  $V^s = V^s(I)$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , обозначим подмножество функций  $f \in W_{\infty}^s(I)$  таких, что  $f^{(s)} \in V(I)$ .

**Лемма 6.** Пусть  $\psi \in C(\hat{\mathbb{R}})$ ,  $\text{supp} \psi \subset I$  ( $I = [a, b]$ ) и  $\psi|_I \in V^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\psi \in \mathcal{H}^{s+1}$  и справедливы неравенства

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^2} \leq c|I|v(\psi', I) \text{ при } s = 1, \quad (26)$$

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^{s+1}} \leq c_1(s) \sum_{l=1}^{s-1} |I|^l \|\psi^{(l)}\|_I + c_2(s) |I|^s v(\psi^{(s)}, I) \text{ при } s \geq 2. \quad (27)$$

**Доказательство.** Используя сдвиг аргумента функции  $\psi$ , можем убедиться, что достаточно рассмотреть случай  $I = [-h, h]$ , где  $h = \frac{b-a}{2}$ . Полагаем также, что  $2I = [-2h, 2h]$ . Получим сначала оценку (26). Согласно формуле (2) имеем

$$(C\psi)''(z) = \frac{2}{\pi i} \int_I \frac{\psi(t)}{(t-z)^3} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus I. \quad (28)$$

Применив дважды интегрирование по частям к интегралу из выражения (28), находим

$$(C\psi)''(z) = \frac{\psi'(h-0)}{\pi i(h-z)} + \frac{\psi'(-h+0)}{\pi i(h+z)} - \frac{1}{\pi i} \int_{-h}^h \frac{d\psi'(t)}{t-z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus I. \quad (29)$$

Из формулы (28) видно, что функция  $(C\psi)''(z)$  аналитична в  $\mathbb{C} \setminus I$  и бесконечность для нее является нулем не ниже третьего порядка. Далее из равенства (29) и свойств преобразований Коши – Стильтеса и Гильберта – Стильтеса [9, р. 231] следует, что  $(C\psi)''$  принадлежит пространству Харди  $H_p(\hat{\mathbb{C}} \setminus I)$  при

$\frac{1}{3} < p < 1$ . Значит,  $(C\Psi)''(z)$ ,  $z \in \Pi$ , принадлежит пространству Харди  $H_p(\Pi)$  при  $\frac{1}{3} < p < 1$ . Таким образом, для получения неравенства (26) нам необходимо доказать, что

$$\int_{\mathbb{R}} |(C\Psi)''(x)|^{\frac{1}{2}} dx \leq c_3 |I|^{\frac{1}{2}} v(\Psi', I). \quad (30)$$

С этой целью оценим соответствующие вклады в интеграл (30) по  $\mathbb{R} \setminus 2I$  и  $2I$ . Но прежде всего докажем следующие два свойства функции  $\Psi(x)$ :

$$|\Psi'(-h+0)| + |\Psi'(h-0)| \leq v(\Psi', I), \quad (31)$$

$$\int_I |\Psi(x)| dx \leq \frac{1}{2} |I|^2 v(\Psi', I). \quad (32)$$

Докажем неравенство (31). Если  $\Psi'(-h+0)\Psi'(h-0) \leq 0$ , то

$$|\Psi'(-h+0)| + |\Psi'(h-0)| = |\Psi'(-h+0) - \Psi'(h-0)| \leq v(\Psi', I).$$

Если же  $\Psi'(-h+0)\Psi'(h-0) > 0$ , например  $\Psi'(-h+0) > 0$  и  $\Psi'(h-0) > 0$ , то существует точка  $x_0 \in (-h, h)$ , для которой  $\Psi'(x_0) < 0$ . В противном случае приходим к противоречию:

$$0 = \Psi(h) - \Psi(-h) = \int_{-h}^h \Psi'(t) dt > 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Psi'(-h+0) + \Psi'(h-0) &< (\Psi'(-h+0) - \Psi'(x_0)) + (\Psi'(h-0) - \Psi'(x_0)) \leq \\ &\leq |\Psi'(h-0) - \Psi'(x_0)| + |\Psi'(x_0) - \Psi'(-h+0)| \leq v(\Psi', I) \end{aligned}$$

и неравенство (31) доказано.

Для доказательства соотношения (32) напомним, что  $\Psi(-h) = \Psi(h) = 0$ . Поэтому, используя дважды интегрирование по частям и формулу (31), получим

$$\begin{aligned} \int_I |\Psi(x)| dx &= -\int_I x \Psi'(x) \operatorname{sign} \Psi(x) dx \leq h \int_I |\Psi'(x)| dx \leq \\ &\leq h^2 (|\Psi'(h-0)| + |\Psi'(-h+0)|) - h \int_I x d|\Psi'(x)| \leq \\ &\leq h^2 v(\Psi', I) + h^2 v(|\Psi'|, I) \leq \frac{1}{2} |I|^2 v(\Psi', I). \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (32) доказано.

Применяя формулы (28) и (32), находим, что

$$\begin{aligned} |(C\Psi)''(x)| &\leq \frac{16 |I|^2 v(\Psi', I)}{\pi |x|^3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus 2I, \\ \int_{\mathbb{R} \setminus 2I} |(C\Psi)''(x)|^{\frac{1}{2}} dx &\leq 8 |I|^{\frac{1}{2}} v(\Psi', I)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Далее для получения оценки вклада в интеграл (30) по отрезку  $2I$  слагаемые из правой части равенства (29) обозначим через  $u_1(z)$ ,  $u_2(z)$  и  $u_3(z)$  соответственно. Применив формулу (31), получим

$$\int_{2I} \left( |u_1(x)|^{\frac{1}{2}} + |u_2(x)|^{\frac{1}{2}} \right) dx \leq c_4 |I|^{\frac{1}{2}} v(\Psi', I)^{\frac{1}{2}}. \quad (34)$$

Через  $|u_3(x)|^*$  обозначим симметрическую относительно точки  $x = 0$  не возрастающую на полуоси  $(0, +\infty)$  перестановку функции  $|u_3(x)|$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Из свойств преобразования Коши – Стильтьеса и Гильберта – Стильтьеса [9, р. 231] получаем неравенство

$$|u_3(x)|^* \leq \frac{c_5 v(\Psi', I)}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Следовательно,

$$\int_{2I} |u_3(x)|^{\frac{1}{2}} dx \leq 2(c_5 v(\Psi', I))^{\frac{1}{2}} \int_0^{2h} x^{-\frac{1}{2}} dx \leq c_6 |I|^{\frac{1}{2}} v(\Psi', I)^{\frac{1}{2}}. \quad (35)$$

Таким образом, из формул (29), (34) и (35) находим

$$\int_{2I} |(C\Psi)''(x)|^{\frac{1}{2}} dx \leq c_7 |I|^{\frac{1}{2}} v(\Psi', I)^{\frac{1}{2}}. \quad (36)$$

Наконец, из соотношений (33) и (36) получаем неравенство (26).

Докажем оценку (27). Пусть  $\varphi \in C(\mathbb{R})$ ,  $\text{supp } \varphi \subset I$ ,  $\varphi|_I \in \mathcal{P}_{2s-1}$ , и является единственным решением интерполяционной задачи Эрмита [5, p. 118, theorem 6.1]:

$$\varphi(-h) = \varphi(h) = 0, \quad \varphi^{(j)}(-h+0) = \psi^{(j)}(-h+0), \quad \varphi^{(j)}(h-0) = \psi^{(j)}(h-0), \quad (37)$$

где  $j = 1, 2, \dots, s-1$ . Полагаем, что  $\check{\psi}(x) = \psi(x) - \varphi(x)$ . Применяя леммы 1 и 2 и теорему 1, получаем

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}^{s+1}} \leq c_8(s) \sum_{j=1}^{s-1} |I|^j \|\psi^{(j)}\|_I. \quad (38)$$

Отметим также нужное неравенство

$$v(\varphi^{(s)}, I) \leq c_9(s) |I|^{-s} \sum_{j=1}^{s-1} |I|^j \|\psi^{(j)}\|_I, \quad (39)$$

которое вытекает из леммы 1.

Поскольку  $\psi(x) = \check{\psi}(x) + \varphi(x)$  и имеет место неравенство (38), то для доказательства соотношения (27) нам достаточно получить оценку

$$\|\check{\psi}^{(s)}\|_{\mathcal{H}^{s+1}} \leq c_{10}(s) \sum_{l=1}^{s-1} |I|^l \|\psi^{(l)}\|_I + c_{11}(s) |I|^s v(\psi^{(s)}, I). \quad (40)$$

Заметим, что

$$(C\check{\psi})^{(s+1)}(z) = \frac{(s+1)!}{\pi i} \int_I \frac{\check{\psi}(t)}{(t-z)^{s+2}} dt, \quad z \in \Pi, \quad (41)$$

и, следовательно,

$$\left| (C\check{\psi})^{(s+1)}(x) \right| \leq \frac{2^{s+2}(s+1)!}{\pi |x|^{s+2}} \int_I |\check{\psi}(t)| dt, \quad x \in \mathbb{R} \setminus 2I. \quad (42)$$

Здесь  $\check{\psi} \in V^s(I)$  и имеет на концах отрезка  $I$  нули не ниже  $s$ -го порядка. Поэтому, применяя  $s+1$  раз тот же прием (интегрирование по частям), что и при доказательстве неравенства (32), получим

$$\int_I |\check{\psi}(t)| dt \leq \frac{1}{2^s} |I|^{s+1} v(\check{\psi}^{(s)}, I). \quad (43)$$

Из соотношений (42) и (43) находим, что

$$\int_{\mathbb{R} \setminus 2I} \left| (C\check{\psi})^{(s+1)}(x) \right|^{\frac{1}{s+1}} dx \leq c_{12}(s) |I|^{\frac{s}{s+1}} v(\check{\psi}^{(s)}, I)^{\frac{1}{s+1}}. \quad (44)$$

Сейчас получим оценку интеграла (44) по отрезку  $2I$ . Поскольку функция  $\check{\psi}|_I \in V^s$  и на концах отрезка  $I$  имеет нули не ниже  $s$ -го порядка, то, применяя к равенству (41) интегрирование по частям  $s+1$  раз, получим

$$(C\check{\psi})^{(s+1)}(z) = \frac{\check{\psi}^{(s)}(h-0)}{\pi i(h-z)} + \frac{\check{\psi}^{(s)}(-h+0)}{\pi i(h+z)} - \frac{1}{\pi i} \int_I \frac{d\check{\psi}^{(s)}(t)}{t-z}, \quad z \in \Pi. \quad (45)$$

Далее, действуя аналогично, как и при доказательстве неравенства (36), находим

$$\int_{2I} \left| (C\tilde{\Psi})^{(s+1)}(x) \right|^{\frac{1}{s+1}} dx \leq c_{13}(s) |I|^{\frac{s}{s+1}} v(\tilde{\Psi}^{(s)}, I)^{\frac{1}{s+1}}. \quad (46)$$

Напомним, что  $\tilde{\Psi}(t) = \Psi(t) - \Phi(t)$ ,  $t \in I$ . Поэтому с учетом выражения (39) выполняется неравенство

$$v(\tilde{\Psi}^{(s)}, I) \leq c_{14}(s) |I|^{-s} \sum_{j=1}^{s-1} |I|^j \|\Psi^{(j)}\|_I + v(\Psi^{(s)}, I). \quad (47)$$

Сейчас из соотношений (38), (44), (46) и (47) следует неравенство (27).

Лемма 7 для функции  $\Psi \in V^s$  является аналогом леммы 3 для  $\Psi \in W_\infty^s$ .

**Лемма 7.** Пусть  $s \in \mathbb{N}$   $-\infty < a < b \leq u < y < +\infty$ . Если  $\Psi \in C(\hat{\mathbb{R}})$ ,  $\text{supp } \Psi \subset [a, y]$ ,  $\Psi|_{[a,b]} \in V^s$ ,  $\Psi|_{[u,y]} \in V^s$  и  $\Psi(x) = \text{const}$  при  $x \in [b, u]$ , то  $\Psi \in \mathcal{H}^{s+1}$  и справедливо неравенство

$$\|\Psi\|_{\mathcal{H}^{s+1}} \leq c_{15}(s) \sum_{j=1}^{s-1} (y-a)^j \|\Psi^{(j)}\|_{[a,b] \cup [u,y]} + c_{16}(s) (y-a)^s \left( v(\Psi^{(s)}, [a,b]) + v(\Psi^{(s)}, [u,y]) \right).$$

Здесь сумма по  $j$  при  $s = 1$  заменяется нулем.

**Доказательство.** Через  $\lambda \in C(\hat{\mathbb{R}})$  обозначим трапецевидную функцию такую, что  $\text{supp } \lambda \subset [a, y]$ ,  $\lambda(a) = \lambda(y) = 0$ ,  $\lambda(b) = \lambda(u) = \Psi(b)$ , а на отрезках  $[a, b]$ ,  $[b, u]$  и  $[u, y]$  она линейна. Тогда  $\tilde{\Psi}(x) := \Psi(x) - \lambda(x) = \Psi_-(x) + \Psi_+(x)$ , где  $\Psi_-$  и  $\Psi_+$  удовлетворяют условиям леммы 6 с отрезками  $[a, b]$  и  $[u, y]$  соответственно. Заметим, что  $\|\lambda'\|_{[a,b]} \leq \|\Psi'\|_{[a,b]}$  и  $\|\lambda'\|_{[u,y]} \leq \|\Psi'\|_{[u,y]}$ . Таким образом, используя лемму 3, получим

$$\|\lambda\|_{\mathcal{H}^{s+1}} \leq c_{17}(s) (y-a) \|\Psi'\|_{[a,b] \cup [u,y]}.$$

Согласно лемме 6 для функций  $\Psi_-$  и  $\Psi_+$  выполняются неравенства

$$\|\Psi_-\|_{\mathcal{H}^{s+1}} \leq c_{18}(s) \sum_{j=1}^{s-1} (b-a)^j \|\Psi^{(j)}\|_{[a,b]} + c_{19}(s) (b-a)^s v(\Psi^{(s)}, [a,b]),$$

$$\|\Psi_+\|_{\mathcal{H}^{s+1}} \leq c_{18}(s) \sum_{j=1}^{s-1} (y-u)^j \|\Psi^{(j)}\|_{[u,y]} + c_{19}(s) (y-u)^s v(\Psi^{(s)}, [u,y]).$$

Поскольку  $\Psi = \lambda + \Psi_- + \Psi_+$ , то лемма 7 доказана.

### Аппроксимация функций с монотонными производными и их четных продолжений

Среди результатов о скорости наилучших равномерных рациональных приближений функций, полученных элементарными методами, т. е. посредством конструкций аппроксимирующих рациональных дробей, основанных на рациональной функции, хорошо приближающей  $\text{sign } x$  на  $[-1, -\delta] \cup [\delta, 1]$ ,  $\delta \in (0, 1)$ , наиболее сложным результатом является теорема 1 из источника [10] о приближении функций с монотонными производными. В настоящем разделе, используя теорему 2 и лемму 7, получим основной результат работы [10] в усиленном виде (см. ниже теоремы 5 и 6 и ср. их с результатами из публикации [10]).

**Определение 2.** Пусть  $s \in \mathbb{N}$  и  $b \in (0, +\infty)$ . Через  $M_s([0, b])$  обозначим множество функций  $w \in C([0, b])$ , удовлетворяющих следующим условиям: (i)  $w(0) = 0$ ; (ii)  $w|_{[a,b]} \in W_\infty^s$  для любого  $a \in (0, b)$ ; (iii) для каждого  $j = 1, 2, \dots, s$  функция  $g_j(x) := (-1)^{j-1} w^{(j)}(x)$  неотрицательна и не возрастает на  $(0, b]$ .

**Лемма 8.** Пусть  $w \in M_s([0, b])$ . Тогда для  $x \in (0, b]$  выполняются неравенства

$$xw'(x) \leq w(x), \quad s \geq 1, \quad (48)$$

$$x^{j-1} |w^{(j)}(x)| \leq 2^{j-1} w' \left( \frac{x}{2^{j-1}} \right), \quad j = 2, 3, \dots, s \quad (s \geq 2). \quad (49)$$

Доказательство. Неравенство (48) немедленно следует из выкладки

$$w(x) = \int_0^x w'(t) dt \geq w'(x) \int_0^x dt = xw'(x).$$

Пусть теперь  $s \geq 2$  и  $2 \leq j \leq s$ . Из свойств функций  $g_j$  и  $g_{j-1}$  находим

$$0 \leq \frac{x}{2} g_j(x) \leq \int_{\frac{x}{2}}^x g_j(t) dt = - \int_{\frac{x}{2}}^x g'_{j-1}(t) dt = g_{j-1}\left(\frac{x}{2}\right) - g_{j-1}(x) \leq g_{j-1}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Следовательно,

$$x |w^{(j)}(x)| \leq 2 \left| w^{(j-1)}\left(\frac{x}{2}\right) \right| \text{ при } x \in (0, b] \text{ и } j = 2, 3, \dots, s.$$

Таким образом, неравенство (49) доказано.

Для функции  $g \in C([0, b])$ ,  $b > 0$ , через  $g^+$  обозначим ее продолжение на  $\widehat{\mathbb{R}}$ , выполненное следующим образом:  $g^+(x) = g(|x|)$  при  $|x| \leq b$  и  $g^+(x) = g(b)$  при  $|x| > b$ .

**Теорема 4.** Пусть  $s \in \mathbb{N}$ ,  $b > 0$  и  $w \in M_s([0, b])$ . Тогда (i)  $w^+ \in \mathcal{H}^1$  и  $\|w^+\|_{\mathcal{H}^1} \leq c_1 w(b)$ ; (ii) если дополнительно сходится интеграл  $\int_0^b \sqrt{s+1} \sqrt{xw'(x)} \frac{dx}{x} =: A_s(w)$ , то  $w^+ \in \mathcal{H}^{s+1}$  и  $\|w^+\|_{\mathcal{H}^{s+1}} \leq c_1(s) A_s^{s+1}(w)$ .

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай  $b = 1$ . Случай  $b > 0$  следует отсюда с помощью замены переменной  $x = bt$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Для каждого  $k \in \mathbb{N}_0$  введем функцию

$$\Psi_k(x) = \begin{cases} w(2^{-k}) - w(2^{-k-1}) & \text{при } |x| \leq 2^{-k-1}, \\ w(2^{-k}) - w(|x|) & \text{при } 2^{-k-1} < |x| \leq 2^{-k}, \\ 0 & \text{при } 2^{-k} < |x| < +\infty. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$w^+(x) = w(1) - \sum_{k=0}^{+\infty} \Psi_k(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (50)$$

Функции удовлетворяют условиям леммы 3 при  $s = 1$ . Следовательно,

$$\|\Psi_k\|_{\mathcal{H}^1} \leq c_1 2^{-k-2} w'(2^{-k-1}), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Используя равенство (50), получаем утверждение (i):

$$\|w^+\|_{\mathcal{H}^1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\Psi_k\|_{\mathcal{H}^1} \leq c_1 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k-1} w'(2^{-k}) \leq c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} w'(t) dt \leq c_1 \int_0^1 w'(t) dt = c_1 w(1).$$

Предположив, что  $A_s(w) < \infty$ , докажем утверждение (ii). Согласно лемме 7, находим

$$\|\Psi_k\|_{\mathcal{H}^{s+1}} \leq c_2(s) \sum_{l=1}^s 2^{-kl} |w^{(l)}(2^{-k})|.$$

Используя лемму 8, упростим правую часть последнего неравенства:

$$\|\Psi_k\|_{\mathcal{H}^{s+1}} \leq c_3(s) 2^{-k} w'(2^{-k-s+1}).$$

Следовательно,

$$\|w^+\|_{\mathcal{H}^{s+1}}^{\frac{1}{s+1}} \leq c_4(s) \sum_{k=0}^{\infty} \left( 2^{-k} w'(2^{-k-s+1}) \right)^{\frac{1}{s+1}} \leq c_5(s) A_s(w).$$

Теорема 4 доказана.

Из теорем 2 и 4 немедленно вытекает следующая теорема.

**Теорема 5.** Пусть  $s \in \mathbb{N}$ ,  $b > 0$  и  $w \in M_s([0, b])$ . Тогда

$$(i) R_n(w^+; \hat{\mathbb{R}}) \leq \frac{c_6}{n} w(b), n \in \mathbb{N}, \text{ и } R_n(w^+; \hat{\mathbb{R}}) = o\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty;$$

(ii) если дополнительно  $A_s(w) < \infty$ , то  $R_n(w^+; \hat{\mathbb{R}}) \leq \frac{c_7(s)}{n^{s+1}} A_s^{s+1}(w)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( n^{s+1} R_n(w^+; \hat{\mathbb{R}}) \right)^2 \leq c_8(s) A_s^{2(s+1)}(w).$$

Отметим, что ранее пространства Харди – Соболева для изучения скорости наилучших рациональных приближений в круге, на окружности и на отрезке применялись в работах [7; 11; 12]. В частности, идея доказательства теоремы, подобной теореме 5 (утверждение (i)), в периодическом случае применялась в монографии [7, р. 330].

Далее докажем теорему 6, дополняющую теорему 5 в случае  $A_s(w) = \infty$ .

**Теорема 6.** Пусть  $s \in \mathbb{N}$ ,  $b > 0$  и  $w \in M_s([0, b])$ . Тогда

$$R_n(w^+; \hat{\mathbb{R}}) \leq \frac{c_9(s)}{n^{s+1}} \left( \int_{2^{-nb}}^b \sqrt[s+1]{\frac{w(x)}{\ln\left(\frac{b}{x}\right)} \frac{dx}{x}} \right)^{s+1}, n \in \mathbb{N}.$$

Для доказательства теоремы 6 нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 9** [13, с. 422]. Пусть  $\varphi \in L_\infty([0, 1])$ ,  $\varphi(x) \geq 0$  на  $[0, 1]$ ,  $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$  и  $p \in (0, 1)$ . Тогда

$$\int_0^1 (x\varphi(x))^p \frac{dx}{x} \leq \left( \frac{1-p}{p} \right)^p \int_0^1 \left( \frac{\Phi(x)}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} \right)^p \frac{dx}{x}.$$

Доказательство теоремы 6. Как и при доказательстве теоремы 4, можем считать, что  $b = 1$ .

Предполагая, что  $n \geq 2s$ , обозначим  $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ . Используя равенство (50), получаем

$$w^+(x) = w(1) - \theta_m(x) - \eta_m(x), \tag{51}$$

где

$$\theta_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \psi_k(x), \eta_m(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \psi_k(x) = \begin{cases} w(2^{-m}) - w(|x|) & \text{при } |x| \leq 2^{-m}, \\ 0 & \text{при } |x| > 2^{-m}. \end{cases}$$

Из теоремы 5 (утверждение (i)) получаем

$$R_m(\eta_m; \mathbb{R}) \leq \frac{c_6}{m} w(2^{-m}). \tag{52}$$

Действуя аналогично, как и при доказательстве теоремы 4 (утверждение (ii)), находим, что

$$\|\theta_m\|_{\mathcal{H}^{s+1}}^{\frac{1}{s+1}} \leq c_{10}(s) \int_{2^{-m-s+1}}^1 \sqrt[s+1]{xw'(x)} \frac{dx}{x}. \tag{53}$$

Теперь воспользуемся леммой 9. В ней получаем  $\varphi(x) = 0$  при  $x \in [0, 2^{-m-1+s}]$  и  $\varphi(x) = w'(x)$  при  $x \in (2^{-m-1+s}, 1]$ ;  $p = \frac{1}{s+1}$ . Тогда

$$\int_{2^{-m-s+1}}^1 \sqrt[s+1]{xw'(x)} \frac{dx}{x} \leq \sqrt[s+1]{s} \int_{2^{-m-s+1}}^1 \sqrt[s+1]{\frac{w(x)}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} \frac{dx}{x}}. \tag{54}$$

Далее применим теорему 5 (утверждение (ii)), а также неравенства (53) и (54). В итоге получим

$$R_m(\varphi_m; \hat{\mathbb{R}}) \leq \frac{c_{11}(s)}{m^{s+1}} \left( \int_{2^{-m-s+1}}^1 \sqrt{\frac{w(x)}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}} \frac{dx}{x} \right)^{s+1}. \quad (55)$$

Заметим, что  $w(x) \geq w(2^{-m-s+1})$  при  $x \in [2^{-m-1+s}, 1]$  и  $w(2^{-m-s+1}) \geq 2^{-s+1}w(2^{-m})$ . Следовательно,

$$\frac{1}{m^{s+1}} \left( \int_{2^{-m-s+1}}^1 \sqrt{\frac{w(x)}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}} \frac{dx}{x} \right)^{s+1} \geq c_{12}(s)w(2^{-m}). \quad (56)$$

Поскольку  $R_n(w^+; \hat{\mathbb{R}}) \leq R_m(\theta_m; \hat{\mathbb{R}}) + R_m(\eta_m; \hat{\mathbb{R}})$ , то из соотношений (52), (55) и (56) получим

$$R_n(w^+; \hat{\mathbb{R}}) \leq \frac{c_{13}(s)}{m^{s+1}} \left( \int_{2^{-m-s+1}}^1 \sqrt{\frac{w(x)}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}} \frac{dx}{x} \right)^{s+1}. \quad (57)$$

Ввиду предположения, что  $n \geq 2s$ , имеем  $m + s - 1 \leq n$ . Поэтому из неравенства (57) следует теорема 6 для  $n \geq 2s$ . Чтобы доказать теорему 6 для всех  $n \geq 1$ , возможно, понадобится увеличить постоянную  $c_9(s)$ .

В теоремах 5 и 6 получены оценки наилучших равномерных рациональных приближений не только функций класса  $M_s([0, b])$ , но и их четных продолжений. Оказывается, что это не случайность, а проявление общей закономерности, сформулированной в следующей теореме.

**Теорема 7.** Пусть  $s \in \mathbb{N}$  и  $b \in (0, +\infty]$ . Тогда для любой функции  $f \in C([0, b])$  и любого  $n \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство

$$R_{2n}(f(|\cdot|); [-b, b]) \leq \frac{c_{14}(s)}{n^s} \left[ \sum_{k=0}^n \sqrt[s]{R_k(f; [0, b])} \right]^s. \quad (58)$$

Эта теорема для отрезка  $[0, 1]$  ранее была приведена без доказательства вторым автором настоящей статьи в монографии [7, р. 341]. Для доказательства теоремы 7 понадобится следующая теорема.

**Теорема 8** [1]. Пусть  $s \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma > 0$  и  $b = 1$  или  $b = +\infty$ . Тогда для любой функции  $f \in C([0, b])$  и  $f_\gamma(x) = f(x^\gamma)$ ,  $x \in [0, b]$ , выполняется неравенство

$$R_n(f_\gamma; [0, b]) \leq \frac{c_{15}(s, \gamma)}{n^s} \left[ \sum_{k=0}^n \sqrt[s]{R_k(f; [0, b])} \right]^s.$$

Доказательство теоремы 7. Через  $r_n^* \in \mathcal{R}_n$  обозначим элемент наилучшего приближения функции  $f_{\frac{1}{2}}(x) = f(\sqrt{x})$ ,  $x \in [0, b]$ , т. е.

$$\left\| f_{\frac{1}{2}} - r_n^* \right\|_{[0, b]} = R_n \left( f_{\frac{1}{2}}; [0, b] \right). \quad (59)$$

Из теоремы Чебышева об альтернансе (см., например, [7, р. 214]) следует, что  $r_n^*(x^2) \in \mathcal{R}_{2n}$  – элемент наилучшего приближения функции  $f_{\frac{1}{2}}(x^2) = f(|x|)$ ,  $x \in [-b, b]$ . Таким образом, из равенства (59) получаем

$$R_{2n}(f(|\cdot|); [-b, b]) = R_n \left( f_{\frac{1}{2}}; [0, b] \right).$$

Теперь из последнего равенства и теоремы 8 следует теорема 7.

**Следствие 1.** Пусть  $f \in C([0, b])$ ,  $b \in (0, +\infty]$ , и  $\alpha \in (0, +\infty)$ . Тогда для  $n \in \mathbb{N}$  равносильны следующие условия: (i)  $R_n(f; [0, b]) = O(n^{-\alpha})$ ; (ii)  $R_n(f(|\cdot|); [-b, b]) = O(n^{-\alpha})$ .

Рассмотрим примеры функций, принадлежащих классу  $M_s([0, b])$ . Очевидно, что функция  $x^\alpha \in M_s([0, b])$  при всех  $\alpha \in (0, 1]$  и  $b > 0$ . Однако наилучшие рациональные приближения функции  $x^\alpha$  хорошо изучены [7; 14], и в данном случае применение теорем 5 и 6 практически ничего нового не дает. Наиболее содержательными примерами являются функции с логарифмическими особенностями, именно функции вида

$$h_{v\beta}(x) = \left( \ln_{(v)} \frac{a}{x} \right)^{-\beta}, \quad 0 < x \leq 1; \quad h_{v\beta}(0) = 0.$$

Здесь  $v \in \mathbb{N}$  означает порядок итерации логарифма, т. е.  $\ln_{(1)}(\cdot) = \ln(\cdot)$  и  $\ln_{(v)}(\cdot) = \ln(\ln_{(v-1)}(\cdot))$  при  $v \geq 2$ .

Число  $\beta > 0$ , а  $a > 1$  и достаточно большое, чтобы функция  $\ln_{(v)} \frac{a}{x}$  была положительная при  $x \in (0, 1]$ . Именно  $a > 1$  при  $v = 1$ ,  $a > e$  при  $v = 2$ ,  $a > e^e$  при  $v = 3$  и т. д.

**Следствие 2.** При указанных выше условиях на  $v$ ,  $\beta$  и  $a$  справедливы соотношения

$$R_n(h_{1\beta}^+; \hat{\mathbb{R}}) \asymp \frac{1}{n^{1+\beta}} \text{ при } n \geq 1, \quad (60)$$

$$R_n(h_{v\beta}^+; \hat{\mathbb{R}}) \asymp \frac{1}{n(\ln_{(v-1)} n)^\beta} \text{ при } v \geq 2 \text{ и } n \geq n(v). \quad (61)$$

Изучением наилучших рациональных приближений функции  $h_{v\beta}$  на отрезке  $[0, 1]$  занимались А. А. Гончар [15], А. П. Буланов [16], А. А. Пекарский [10; 12] и другие авторы (см. [10; 12; 15]). В работах [10; 12] получены точные порядковые оценки для  $R_n(h_{v\beta}; [0, 1])$ . Из них вытекают нижние оценки в соотношениях (60) и (61). Отметим еще публикацию [17], в которой найдена сильная асимптотика наилучших рациональных приближений функций с логарифмическими особенностями в ВМОА – пространстве аналитических функций ограниченной средней осцилляции.

Для доказательства верхних оценок из соотношений (60) и (61) заметим, что  $h_{v\beta} \in M_1([0, 1])$  при всех  $v \in \mathbb{N}$  и  $\beta > 0$ . Поэтому, применяя теорему 6 при  $s = 1$ , получим выражение (61) для всех  $v \geq 2$  и  $\beta > 0$ , а также формулу (60) в случае  $\beta \in (0, 1)$ . Чтобы получить соотношение (60) для  $\beta \geq 1$  естественно воспользоваться теоремой 6 при  $s = [\beta] + 2$ . К сожалению, в этом случае включение  $h_{1\beta} \in M_s([0, 1])$  может не выполняться для малых  $a$ . Однако легко заметить, что существует  $b = b(\beta, a) \in (0, 1)$ , удовлетворяющее условию  $h_{1\beta}|_{[0, b]} \in M_s([0, b])$ , поэтому функцию  $h_{1\beta}^+$  представим в виде

$$h_{1\beta}^+(x) = g(x; b) + q(x; b) + \lambda(b), \quad x \in \hat{\mathbb{R}}, \quad (62)$$

где  $g(x; b) = \min\{h_{1\beta}^+(x), h_{1\beta}^+(b)\}$ ,  $q(x; b) = h_{1\beta}(x) - g(x; b) - \lambda(b)$ ,  $\lambda(b) = h_{1\beta}(1) - h_{1\beta}(b)$ .

Для  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  полагаем, что  $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ . Из равенства (62) находим

$$R_n(h_{1\beta}^+; \hat{\mathbb{R}}) \leq R_m(g(\cdot; b); \hat{\mathbb{R}}) + R_m(q(\cdot; b); \hat{\mathbb{R}}).$$

Далее к первому слагаемому правой части последнего неравенства следует применить теорему 6, а ко второму – лемму 3 и теорему 2. Тогда соотношение (60) будет доказано для  $\beta \geq 1$ .

### Аппроксимация нечетного продолжения функций с монотонными производными

Пусть  $f \in C([0, 1])$  и  $f(0) = 0$ . В этом случае непрерывны на отрезке  $[-1, 1]$  как четное, так и нечетное продолжение функции  $f$ , т. е.  $f^+(x) = f(|x|)$  и  $f^-(x) = f(|x|) \cdot \text{sign } x$ . Очевидно, что

$$R_n(f^\pm; [-1, 1]) \geq R_n(f; [0, 1]), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (63)$$

Согласно теореме 7 неравенство (63) можно обратить для функции  $f^+$ , если последовательность  $\{R_n(f; [0, 1])\}_{n=1}^\infty$  имеет порядок стремления к нулю не выше степенного. Естественно возникает вопрос: «Можно ли аналогично обратить неравенство (63) для функции  $f^-$ ?» Из полученного ниже следствия 3 видно, что обращение неравенства (63) для функции  $f^-$  невозможно без потери скорости стремления к нулю последовательности  $\{R_n(f^-; [-1, 1])\}_{n=1}^\infty$  по сравнению с последовательностью  $\{R_n(f; [0, 1])\}_{n=1}^\infty$ . При этом потеря скорости составляет один порядок, т. е.  $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^\infty$ .

Используя лемму 5.4 монографии [14, р. 112], обращение неравенства (63) можно получить в следующем виде:

$$R_n(f^\pm; [-1, 1]) \leq R_{\left[\frac{n}{8}\right]}(f; [0, 1]) + 4\omega(e^{-\sqrt{n}}; f) + e^{-\varkappa\sqrt{n}} \|f\|_{[0,1]}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (64)$$

где  $[a]$  – целая часть числа  $a$ ;  $\varkappa \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$  – абсолютная постоянная;  $\omega(\cdot; f)$  – модуль непрерывности функции  $f$ .

Заметим, что функция  $h_{\nu\beta}$  из следствия 2 является модулем непрерывности самой себя. Применив неравенство (64) к функции  $h_{\nu\beta}$ , легко убедимся, что для  $R_n(h_{\nu\beta}^+; [-1, 1])$  будем иметь весьма грубую оценку. В то же время из полученного ниже следствия 3 видно, что для  $R_n(h_{\nu\beta}^-; [-1, 1])$  с  $\nu \geq 2$  при  $n \rightarrow \infty$  будем иметь точный порядок стремления к нулю.

Для  $f \in C([0, 1])$  с  $f(0) = 0$  А. А. Гончар [15] изучал наилучшие равномерные рациональные приближения функций с изломом, т. е. функций вида

$$f^\perp(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in [-1, 0), \\ f(x) & \text{при } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

При дополнительном условии, что  $f(x)$  возрастает на отрезке  $[0, 1]$ , в работе [15] получена следующая нижняя оценка:

$$R_n(f^\perp; [-1, 1]) \geq \max_{\delta \in (0, 1)} f(\delta) \left[ 1 + \exp \left( \frac{\pi^2 n}{\ln \left( \frac{1}{\delta} \right)} \right) \right]^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (65)$$

Для некоторых функций  $f$  в публикации [15] найдены также верхние оценки  $R_n(f^\perp; [-1, 1])$ .

Например, для функции  $h_{\beta}(x)$  из следствия 1 (см. раздел «Аппроксимация функций с монотонными производными и их четных продолжений») в работе [15] получены соотношения

$$c_1(\beta) \frac{1}{n^\beta} \leq R_n(h_{\beta}^\perp; [-1, 1]) \leq c_2(\beta) \left( \frac{\ln n}{n} \right)^\beta, \quad n \geq 2. \quad (66)$$

Ясно, что левое неравенство в формуле (66) вытекает из выражения (65). Далее в следствии 3 покажем, что  $\ln n$  в правой части соотношения (66) можно опустить.

**Теорема 9.** Пусть  $s \in \mathbb{N}$  и  $w \in M_s([0, 1])$ . Тогда

(i)

$$R_n(w^\perp; [-1, 1]) \leq \frac{c_3(s)}{n^{s+1}} \left( \int_{2^{-n}}^1 {}^{s+1}\sqrt{w(x)} \frac{dx}{x} \right)^{s+1}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad (67)$$

(ii) если дополнительно сходится интеграл  $\int_0^1 {}^{s+1}\sqrt{w(x)} \frac{dx}{x} =: B_s(w)$ , то

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \left( n^{s+1} R_n(w^\perp; [-1, 1]) \right)^2 \leq c_4(s) B_s^{2(s+1)}(w). \quad (68)$$

Доказательство. (i) Для  $k = 0, 1, \dots, n$  построим (см. определение 1) треугольные функции  $\Delta_k(x) := \Delta(x; 2^{-k-1}, 2^{-k}, 2^{-k+1})$ . Заметим, что

$$\sum_{k=0}^n \Delta_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\infty, 2^{-n-1}] \cup [2, +\infty), \\ 2^{n+1}x - 1 & \text{при } x \in (2^{-n-1}, 2^{-n}], \\ 1 & \text{при } x \in (2^{-n}, 1], \\ 2 - x & \text{при } x \in (1, 2). \end{cases} \quad (69)$$

Доопределим функцию  $w^\perp(x)$  на  $\mathbb{R}$ , полагая, что  $w^\perp(x) = 0$  при  $x < -1$  и  $w^\perp(x) = w(1)$  при  $x > 1$ . Введем функции  $\lambda_k(x) = \Delta_k(x)w^\perp(x)$  ( $x \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \dots, n$ ) и

$$\Lambda_n(x) := \sum_{k=0}^n \lambda_k(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (70)$$

Из формулы (69) следует, что

$$0 \leq w^\perp(x) - \Lambda_n(x) \leq w(2^{-n}) \quad \text{при } x \in [-1, 1]. \quad (71)$$

Каждая функция  $\lambda_k(x)$  удовлетворяет условиям леммы 7 с  $a = 2^{-k-1}, b = u = 2^{-k}$  и  $y = 2^{-k+1}$ . Следовательно,

$$\|\lambda_k\|_{\mathcal{H}^{s+1}}^{\frac{1}{s+1}} \leq c_6(s) \left( w(2^{-k}) \right)^{\frac{1}{s+1}}.$$

Применив к выражению (70)  $\frac{1}{s+1}$ -неравенство треугольника с учетом последнего неравенства, получим

$$\|\Lambda_n\|_{\mathcal{H}^{s+1}}^{\frac{1}{s+1}} \leq c_7(s) \sum_{k=0}^n \left( w(2^{-k}) \right)^{\frac{1}{s+1}} \leq c_8(s) \int_{2^{-n}}^1 \left( w(x) \right)^{\frac{1}{s+1}} \frac{dx}{x}. \quad (72)$$

Из соотношений (71) и (72) и теоремы 2 следует, что

$$R_n(w^\perp; [-1, 1]) \leq w(2^{-n}) + \frac{c_9(s)}{n^{s+1}} \left( \int_{2^{-n}}^1 \sqrt[s+1]{w(x)} \frac{dx}{x} \right)^{s+1}.$$

Для завершения доказательства теоремы 9 (утверждение (i)) остается заметить, что первое слагаемое правой части последнего неравенства «поглощается» вторым слагаемым.

(ii) В этом случае вместо формулы (70) следует использовать равенство

$$\Lambda_\infty(x) := \sum_{k=0}^\infty \lambda_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in [-\infty, 0] \cup [2, +\infty), \\ w(x) & \text{при } x \in (0, 1], \\ (2-x)w(1) & \text{при } x \in (1, 2), \end{cases} \quad (73)$$

где функции  $\lambda_k(x)$  для  $k \geq n+1$  определяются аналогично, как и для  $k \leq n$ . Действуя так же, как и при доказательстве неравенства (72), получим

$$\|\Lambda_\infty\|_{\mathcal{H}^{s+1}}^{\frac{1}{s+1}} \leq c_{10}(s) B_s(w). \quad (74)$$

Из формул (73) и (74) и теоремы 2 следует соотношение (68).

**Теорема 10.** Пусть  $s \in \mathbb{N}$  и  $w \in M_s([0, 1])$ . Тогда (i)  $R_n(w^-; [-1, 1]) \leq \frac{c_{11}(s)}{n^{s+1}} \left( \int_{2^{-n}}^1 \sqrt[s+1]{w(x)} \frac{dx}{x} \right)^{s+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;

(ii) если дополнительно  $B_s(w) < \infty$ , то  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \left( n^{s+1} R_n(w^-; [-1, 1]) \right)^2 \leq c_{12}(s) B_s^{2(s+1)}(w)$ .

Доказательство. (i) Можем считать, что  $n \geq 2$ . Полагаем, что  $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ . Поскольку  $w^-(x) = w^\perp(x) - w^\perp(-x)$  при  $x \in [-1, 1]$ , то

$$R_n(w^-; [-1, 1]) \leq 2R_n(w^\perp; [-1, 1]). \quad (75)$$

Остается воспользоваться теоремой 9 (утверждение (i)).

(ii) В этом случае следует применить формулу (75) и теорему 9 (утверждение (ii)).

**Теорема 11.** Пусть функции  $s \in \mathbb{N}$  и  $w \in M_s([0, 1])$  такие, что

$$\int_t^1 \frac{\sqrt{w(x)}}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}} dx = o\left(s+1 \sqrt{w(t)} \ln\left(\frac{1}{t}\right)\right) \text{ при } t \rightarrow +0. \quad (76)$$

Тогда при  $n \geq n(s, w)$  выполняется неравенство

$$R_n(w^-; [-1, 1]) \geq c_0 w(2^{-n}), \quad (77)$$

где  $c_0 = \left[1 + \exp\left(\frac{2\pi^2}{\ln 2}\right)\right]^{-1}$ .

Доказательство. Очевидно, что  $2w^\perp(x) = w^-(x) + w^+(x)$ ,  $x \in [-1, 1]$ . Следовательно, для  $n \in \mathbb{N}$  выполняются неравенства

$$\begin{aligned} 2R_{2n}(w^\perp; [-1, 1]) &\leq R_n(w^-; [-1, 1]) + R_n(w^+; [-1, 1]), \\ R_n(w^-; [-1, 1]) &\geq 2R_{2n}(w^\perp; [-1, 1]) - R_n(w^+; [-1, 1]). \end{aligned} \quad (78)$$

Для нижней оценки  $R_{2n}(w^\perp; [-1, 1])$  воспользуемся неравенством (65) с  $2n$  вместо  $n$  и с  $\delta = 2^{-n}$ , а для верхней оценки  $R_n(w^+; [-1, 1])$  – теоремой 6. В итоге из соотношения (78) получим

$$R_n(w^-; [-1, 1]) \geq 2c_0 w(2^{-n}) - \frac{c_{13}(s)}{n^{s+1}} \left( \int_{2^{-n}}^1 \frac{\sqrt{w(x)}}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}} dx \right)^{s+1}.$$

Неравенство (77) доказано.

Из теорем 9–11 и неравенства (65) для функций  $h_{\nu\beta}(x)$  (см. раздел «Аппроксимация функций с монотонными производными и их четных продолжений») получаем следствие 3 (ср. со следствием 2).

**Следствие 3.** При указанных в разделе «Аппроксимация функций с монотонными производными и их четных продолжений» условиях на параметры  $\nu, \beta$ , а для функций  $h_{\nu\beta}$  выполняются эквивалентности

$$R_n(h_{\nu\beta}^-; [-1, 1]) \asymp \frac{1}{n^\beta} \text{ при } n \geq 1,$$

$$R_n(h_{\nu\beta}^-; [-1, 1]) \asymp \frac{1}{(\ln_{(\nu-1)} n)^\beta} \text{ при } \nu \geq 2 \text{ и } n \geq n(\nu).$$

Такие же эквивалентности справедливы и для  $R_n(h_{\nu\beta}^\perp; [-1, 1])$ .

### Заключение

Для исследования скорости наилучших равномерных приближений функций в настоящей работе применяется действительное пространство Харди – Соболева на прямой. Рассмотрены примеры функций и скорости их наилучших равномерных рациональных приближений. Изучены скорости наилучших приближений функций с монотонными производными, также приближения их четного и нечетного продолжений. Улучшены оценки наилучших рациональных приближений таких функций, полученные ранее с помощью конструкции аппроксимирующих дробей, хорошо приближающих функцию  $\text{sign} x$  на отрезке  $[-1, -\delta] \cup [\delta, 1]$ ,  $\delta \in (0, 1)$ . Оценки наилучшего рационального приближения даны как с учетом модуля непрерывности, так и без него. Найдены также оценки наилучших рациональных приближений функций с изломом. В частности, полученные результаты улучшают оценки А. А. Гончара для рациональных приближений функций с изломом и с логарифмическими особенностями.

## Библиографические ссылки

1. Пекарский АА. Равномерные рациональные приближения и пространства Харди – Соболева. *Математические заметки*. 1994;56(4):132–140.
2. Garnett JB. *Bounded analytic function*. 1<sup>st</sup> edition, revised. New York: Springer; 2007. XIV, 463 p. (Graduate texts in mathematics; volume 236). DOI: 10.1007/0-387-49763-3.
3. Coifman RR, Weiss G. Extension of Hardy spaces and their use in analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1977;83(4):569–645.
4. Кротов ВГ. Дифференциальные свойства граничных функций из пространств Харди. *Mathematische Nachrichten*. 1986;126(1):241–253.
5. DeVore RA, Lorentz GG. *Constructive approximation*. Berlin: Springer; 1993. 462 p. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; volume 303).
6. Пекарский АА. Скорость рациональной аппроксимации и дифференциальные свойства функций. *Analysis Mathematica*. 1991;17(2):153–171. DOI: 10.1007/BF01906601.
7. Lorentz GG, Golitschek MV, Makovoz Y. *Constructive approximation. Advanced problem*. Berlin: Springer; 1996. 660 p. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; volume 304).
8. Ровба ЕА. Приближение аналитических функций со счетным числом особенностей на вещественной оси рациональными функциями. *Вестник Белорусского государственного университета имени В. И. Ленина. Серия 1. Математика. Механика. Физика*. 1976;2:52–54.
9. King FW. *Hilbert transform. Volume 1*. Cambridge: Cambridge University Press; 2009. 896 p.
10. Пекарский АА. Рациональные приближения выпуклых функций. *Математические заметки*. 1985;38(5):679–690.
11. Пекарский АА. Классы аналитических функций, определяемые наилучшими рациональными приближениями в  $H^p$ . *Математический сборник*. 1985;127(1):3–20.
12. Пекарский АА. Чебышевские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке. *Математический сборник*. 1987;133(1):86–102.
13. Харди Г, Литтлвуд Дж, Поля Г. *Неравенства*. Левин ВИ, переводчик. Москва: Государственное издательство иностранной литературы; 1948. 456 с.
14. Petrushev PP, Popov VA. *Rational approximation of real functions*. Cambridge: Cambridge University Press; 1987. 384 p.
15. Гончар АА. О скорости рациональной аппроксимации непрерывных функций с характерными особенностями. *Математический сборник*. 1967;73(4):630–638.
16. Буланов АП. Приближение выпуклых функций с заданным модулем непрерывности рациональными функциями. *Математический сборник*. 1978;105(1):3–27.
17. Pushnitski A, Yafaev D. Best rational approximation of functions with logarithmic singularities. *Constructive approximation*. 2017;46(2):243–269. DOI: 10.1007/s00365-016-9347-1.

## References

1. Pekarskii AA. Uniform rational approximations and Hardy – Sobolev spaces. *Matematicheskie zametki*. 1994;56(4):132–140. Russian.
2. Garnett JB. *Bounded analytic function*. 1<sup>st</sup> edition, revised. New York: Springer; 2007. XIV, 463 p. (Graduate texts in mathematics; volume 236). DOI: 10.1007/0-387-49763-3.
3. Coifman RR, Weiss G. Extension of Hardy spaces and their use in analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1977;83(4):569–645.
4. Krotov VG. Differential properties of boundary functions of Hardy spaces. *Mathematische Nachrichten*. 1986;126(1):241–253. Russian.
5. DeVore RA, Lorentz GG. *Constructive approximation*. Berlin: Springer; 1993. 462 p. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; volume 303).
6. Pekarskii AA. The rate of rational approximation and differentiability properties of functions. *Analysis Mathematica*. 1991;17(2):153–171. Russian. DOI: 10.1007/BF01906601.
7. Lorentz GG, Golitschek MV, Makovoz Y. *Constructive approximation. Advanced problem*. Berlin: Springer; 1996. 660 p. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; volume 304).
8. Rovba EA. [Approximation, by rational functions, of analytic functions with a countable number of singularities on the real axis]. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta imeni V. I. Lenina. Seriya 1. Matematika. Mekhanika. Fizika*. 1976;2:52–54. Russian.
9. King FW. *Hilbert transform. Volume 1*. Cambridge: Cambridge University Press; 2009. 896 p.
10. Pekarskii AA. Rational approximations of convex functions. *Matematicheskie zametki*. 1985;38(5):679–690. Russian.
11. Pekarskii AA. Classes of analytic functions determined by best rational approximations in  $H^p$ . *Matematicheskii sbornik*. 1985;127(1):3–20. Russian.
12. Pekarskii AA. Tchebycheff rational approximation in the disk, on the circle, and on a closed interval. *Matematicheskii sbornik*. 1987;133(1):86–102. Russian.
13. Hardy G, Littlewood J, Polya G. *Neravenstva* [Inequalities]. Levin VI, translator. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo inostrannoi literatury; 1948. 456 p. Russian.
14. Petrushev PP, Popov VA. *Rational approximation of real functions*. Cambridge: Cambridge University Press; 1987. 384 p.
15. Gonchar AA. On the rapidity of rational approximation of continuous functions with characteristic singularities. *Matematicheskii sbornik*. 1967;73(4):630–638. Russian.
16. Bulanov AP. Approximation, by rational functions, of convex functions with given modulus of continuity. *Matematicheskii sbornik*. 1978;105(1):3–27. Russian.
17. Pushnitski A, Yafaev D. Best rational approximation of functions with logarithmic singularities. *Constructive approximation*. 2017;46(2):243–269. DOI: 10.1007/s00365-016-9347-1.

---

---

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

---

## MATHEMATICAL LOGIC, ALGEBRA AND NUMBER THEORY

---

---

УДК 517.547.59

### АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ПОЛИНОМЫ НАД КОЛЬЦОМ $p$ -КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

В. В. ДОВГОДИЛИН<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Изучены алгебраические уравнения над кольцом  $p$ -комплексных чисел. Приведены теоремы о делении с остатком и аналог теоремы Безу для  $p$ -комплексных полиномов. Для уравнений второй и третьей степени получены условия существования корней, в некоторых случаях даны решения в явном виде. Для полиномов произвольной степени с обратимым старшим коэффициентом доказаны теоремы о разложении на множители с единичным старшим коэффициентом в случаях наличия простых корней, кратных корней и отсутствия корней. Показано, что при отсутствии кратных корней указанное разложение будет единственным, а в случае наличия кратных корней полином допускает бесконечное множество разложений.

**Ключевые слова:** дуальное число; многочлен; кольцо  $p$ -комплексных чисел;  $p$ -комплексный полином; делитель нуля; формула Кардано; разложение на множители.

---

#### Образец цитирования:

Довгодилин ВВ. Алгебраические уравнения и полиномы над кольцом  $p$ -комплексных чисел. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;3:37–44 (на англ.).  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-37-44>

#### For citation:

Dovgodilin VV. Algebraic equations and polynomials over the ring of  $p$ -complex numbers. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;3:37–44.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-37-44>

---

#### Автор:

**Владимир Владимирович Довгодилин** – аспирант кафедры теории функций механико-математического факультета. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук И. Л. Васильев.

#### Author:

**Vladimir V. Dovgodilin**, postgraduate student at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics.  
[footballer4@mail.ru](mailto:footballer4@mail.ru)  
<https://orcid.org/0000-0002-8081-1713>



## ALGEBRAIC EQUATIONS AND POLYNOMIALS OVER THE RING OF $p$ -COMPLEX NUMBERS

V. V. DOVGODILIN<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

In this paper, we study the algebraic equations over the ring of  $p$ -complex numbers. Remainder division theorems and an analogue of Bezout's theorem for  $p$ -complex polynomials are represented. For equations of the 2<sup>nd</sup> and 3<sup>rd</sup> degrees, conditions for the existence of roots are obtained, in some cases solutions are given in an explicit form. For polynomials of an arbitrary degree with an invertible leading coefficient, theorems on factorisation with a unit leading coefficient are proven in the cases where there are simple roots, multiple roots, and no roots. It is shown that in the absence of multiple roots, this decomposition will be unique, and in the case of the presence of multiple roots, the polynomial admits an infinite number of expansions.

**Keywords:** dual number; polynomial; ring of  $p$ -complex numbers;  $p$ -complex polynomial; zero divisor; Cardano's formula; polynomial factorisation.

### Introduction

In the mathematical literature, the theory of  $p$ -complex (dual) numbers and functions of a  $p$ -complex variable is not enough explored. In connection with the existing applications in geometry and physics, further research in this direction is topical. Earlier, in papers [1–3], the properties of  $h$ -complex functions and polynomials were obtained. In this article, the solution of algebraic equations and the factorisation of polynomials over the ring of  $p$ -complex numbers are considered. The properties of these numbers and some of the results obtained earlier are given in papers [4–8].

### Some general theorems about polynomials over the ring of $p$ -complex numbers

Let  $\mathbb{C}_p$  be a ring of  $p$ -complex numbers of the form  $z = x + jy$ , where  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $j^2 = 0$ ,  $j \neq 0$ . Number  $\text{Re } z = x$  is the real part, and number  $\text{Par } z = y$  is the parabolic part of  $z$ . The ring  $\mathbb{C}_p$  has zero divisors of the form  $jy$ , where  $y \in \mathbb{R}$ , all other elements of this ring are invertible.

We consider an algebraic equation

$$P_n(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0 = 0, \quad (1)$$

where  $c_k \in \mathbb{C}_p$  and  $n \in \mathbb{N}$ . Let  $c_k = a_k + jb_k$ ,  $z_0$  is the root of equation (1). Notice, that  $P_n(z) = Q_n(x) + j(yQ'_n(x) + T_n(x))$ , where  $Q_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  and  $T_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$  are real polynomials.

The following theorem gives a general idea of the roots of the given equation. The proof of the theorem is given in the source [6, p. 33–39].

**Theorem 1.** a) Equation (1) has roots if and only if its real part  $Q_n(x)$  has roots.

b) Equation (1) has two types of roots:

1) isolated one with the form  $z_0 = x_0 + j\left(-\frac{T_n(x_0)}{Q'_n(x_0)}\right)$ , if and only if  $x_0$  is the simple root of  $Q_n(x)$ , and  $z_0$  is real, if and only if  $x_0$  is the root of  $T_n(x)$ ;

2) non-isolated one with the form  $z_0 = x_0 + jy$ , where  $y \in \mathbb{R}$  is arbitrary, if and only if  $x_0$  is multiple root of the polynomial  $Q_n(x)$  and the root of the polynomial  $T_n(x)$ .

**Theorem 2** (on division with a remainder). Let  $f(z), g(z) \in \mathbb{C}_p[z]$ , where the leading coefficient of the polynomial  $g(z)$  is not a zero divisor. Then there are unique polynomials  $q(z)$  and  $r(z)$ , such that

$$f(z) = g(z)q(z) + r(z),$$

with the degree  $r(z)$  less than  $g(z)$  or  $r(z) = 0$ .

The proof of this theorem completely repeats the analogous one for polynomials over an arbitrary field [9, p. 134–135].

An analogue of Bezout's theorem directly follows from this theorem.

**Theorem 3.** *The remainder of the division of a polynomial  $P_n(z)$  by  $(z - a)$ , where  $a \in \mathbb{C}_p$ , equals  $P_n(a)$ .*

We further assume that the leading coefficient of the polynomial  $P_n(z)$  is not a zero divisor and consider some special cases.

### Quadratic equations over $\mathbb{C}_p$

At the beginning, we consider

$$z^2 = D, \quad (2)$$

where  $D = d_1 + jd_2 \in \mathbb{C}_p$ . Let  $d_1 > 0$ . Then  $x^2 + 2jyx = d_1 + jd_2$ , from here we find two solutions  $z_{1,2} = \pm\sqrt{d_1} \pm j\frac{d_2}{2\sqrt{d_1}} = \pm\sqrt{D}$ . If  $D = 0$ , then  $x = 0$ , and  $y \in \mathbb{R}$  is arbitrary, then the solution of the equation is an arbitrary

zero divisor  $z_0 = jy$ . If  $d_1 = 0$ , and  $d_2 \neq 0$ , then  $x = 0$  and we have  $0 = 0 + 2jy0 = jd_2 \neq 0$ , thus the equation has no roots, as in the case  $d_1 < 0$ .

Let us consider the equation

$$P_2(z) = Az^2 + Bz + C = 0, \quad (3)$$

where  $A, B, C \in \mathbb{C}_p$  and  $\text{Re}A \neq 0$ . As in the real case, equation (3) can be transformed to the form

$$(2Az + B)^2 = B^2 - 4AC.$$

By analogy with the real case, we introduce the discriminant  $D = B^2 - 4AC$ .

If  $\text{Re}D > 0$ , then we have the first case for equation (2):

$$2Az + B = \pm\sqrt{B^2 - 4AC}.$$

It follows that the roots of equation (3) are calculated by the usual formulas  $z_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}$ , and the polynomial  $P_2(z)$  is uniquely expressed as the product of two linear factors with leading coefficients equal to one

$$P_2(z) = A(z - z_1)(z - z_2).$$

If  $\text{Re}D < 0$  or  $\text{Re}D = 0$ ,  $\text{Im}D \neq 0$ , equation (3) has no solutions over  $\mathbb{C}_p$  and the polynomial  $P_2(z)$  can not be expressed as the product of two linear factors with invertible leading coefficients.

Else, if  $D = 0$ , then equation (3) has an infinite set of solutions of the form  $z = \frac{-B}{2A} + jy$ , where  $y \in \mathbb{R}$  is arbitrary. At the same time  $z_0 = \frac{-B}{2A}$  is the unique multiple root of equation (3) [6, p. 37–38].

Using theorem 1, one can show that for  $D = 0$  the general solution of equation (3) can be expressed as  $z = x_0 + jy$ , where  $y \in \mathbb{R}$ ,  $x_0$  is the multiple root of equation (3):

$$(\text{Re}A)x^2 + (\text{Re}B)x + \text{Re}C = 0.$$

The polynomial  $P_2(z)$  for  $D = B^2 - 4AC = 0$  admits a continuum of expressions as the product of two linear factors. Let  $z_0 = \frac{-B}{2A} = x_0 + jy_0$ ,  $z_1 = x_0 + jy_1$ ,  $z_2 = x_0 + jy_2$  be the roots of equation (3). It is easy to verify that the condition  $2y_0 = y_1 + y_2$  is necessary and sufficient for

$$Az^2 + Bz + C = A(z - z_0)^2 = A(z - z_1)(z - z_2).$$

Equation (3) is considered in the research [6, p. 37–38], the question of factorisation in this form is considered for the first time.

### Cubic equations over $\mathbb{C}_p$

At first, we consider a cubic equation over  $\mathbb{R}$

$$x^3 + px + q = 0, \quad (4)$$

where  $p, q \in \mathbb{R}$ . The solution of the cubic equation in the general case will be expressed through the solution of equation (4). If  $p = 0$ , equation (4) is equivalent to  $x^3 = -q$  and has only one root  $x = -\sqrt[3]{q}$ . If  $p \neq 0$ , we represent equation (4) in the form

$$x^3 + px + q = \left(x + \frac{3q}{2p}\right)^2 \left(x - 3\frac{q}{p}\right) + \left(p + \frac{27q^2}{4p^2}\right) \left(x + \frac{q}{p}\right). \quad (5)$$

We introduce the discriminant  $D = q^2 + \frac{4}{27}p^3 = \frac{4}{27}p^2 \left(\frac{27q^2}{4p^2} + p\right)$  and consider different cases.

Let  $D = 0$ . Then the formula (5) simplifies to

$$x^3 + px + q = \left(x + \frac{3q}{2p}\right)^2 \left(x - 3\frac{q}{p}\right). \quad (6)$$

Equation (4), in this case, has a simple root  $x = 3\frac{q}{p}$  and also has a multiple root  $x = -\frac{3q}{2p}$ .

Let  $f(x) = x^3 + px + q$ , then  $f'(x) = 3x^2 + p$ . For  $D = 0$ , the root  $x = -\frac{3q}{2p}$  coincides with one of the roots of the derivative, which means  $p < 0$  and  $q^2 = \frac{4}{9}p^2 \left(-\frac{p}{3}\right)$ . If  $q > 0$ , then  $q = -\frac{2p}{3} \sqrt{-\frac{p}{3}}$  and  $-\frac{3q}{2p} = \sqrt{-\frac{p}{3}}$ . If  $q < 0$ , then  $q = \frac{2p}{3} \sqrt{-\frac{p}{3}}$  and  $-\frac{3q}{2p} = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$ . The case  $q = 0$  for  $D = 0$  is not possible.

Now consider the case  $D > 0$ . Let us find solutions (4) in the form  $x = \alpha + \beta$ , where  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

$$(\alpha + \beta)^3 + p(\alpha + \beta) + q = 0 \Leftrightarrow (\alpha^3 + \beta^3) + (\alpha + \beta)(3\alpha\beta + p) + q = 0. \quad (7)$$

Let us choose  $\alpha, \beta$  so that

$$\begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 = -q, \\ \alpha\beta = -\frac{p}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 = -q, \\ \alpha^3\beta^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta^3 = -\alpha^3 - q, \\ \alpha^3(-\alpha^3 - q) = -\frac{p^3}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta^3 = -\alpha^3 - q, \\ \alpha^6 + q\alpha^3 - \frac{p^3}{27} = 0. \end{cases}$$

Solving this system, taking into account the symmetry of formula (7), we obtain the following solution for equation (4):

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}}, \quad (8)$$

which is an analogue of the Cardano formula [9, p. 233–241].

Let us show that this solution is unique. If  $p > 0$ , then  $f'(x) = 3x^2 + p > 0$ , it follows that  $f$  is strictly increasing and equation (4) has a unique solution (8). If  $p < 0$ , then  $f$  has a strict local maximum at  $x_1 = -\sqrt{\frac{-p}{3}}$  and a strict local

maximum at  $x_2 = \sqrt{\frac{-p}{3}}$ . For  $q > 0$  the value of  $f(x_2) = -\frac{p}{3} \sqrt{\frac{-p}{3}} + p \sqrt{\frac{-p}{3}} + q = \frac{2p}{3} \sqrt{\frac{-p}{3}} + q > 0$ , and hence

equation (4) has a unique solution (8). At  $q < 0$  the value of  $f(x_1) = \frac{p}{3} \sqrt{\frac{-p}{3}} - p \sqrt{\frac{-p}{3}} + q = -\frac{2p}{3} \sqrt{\frac{-p}{3}} + q < 0$

and equation (4) has a unique solution (8). The case  $q = 0$  is impossible with  $p < 0$ , if  $D > 0$ .

Let now  $D < 0$ , then formula (8) is not defined over  $\mathbb{R}$ . Since  $f(x_1) > 0$  and  $f(x_2) < 0$ , then equation (4) has three simple roots.

Now let us consider the cubic equation over  $\mathbb{C}_p$  with  $p$ -complex coefficients  $p = a + jb, q = c + jd$  such that  $a, c \neq 0$

$$z^3 + pz + q = 0. \quad (9)$$

This equation is equivalent to the system

$$\begin{cases} x^3 + ax + c = 0, \\ y(3x^2 + a) + bx + d = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Let  $D_1 = c^2 + \frac{4}{27}a^3$ . If  $D_1 = 0$ , then by virtue of formula (6) the first equation in system (10) has a simple root  $x = \frac{3c}{a}$  and a root  $x = -\frac{3c}{2a}$  of multiplicity 2. The following cases are possible:

- 1)  $3cb = 2ad$ . In this case, the second equation in system (10) has a root  $x = -\frac{3c}{2a}$  and equation (9) has infinitely many solutions of the form  $z = -\frac{3c}{2a} + jy$ , where  $y \in \mathbb{R}$  is arbitrary, and a solution  $z = \frac{3c}{a} + j\left(-\frac{3a^2d}{27c^2 + a^3}\right)$ ;
- 2)  $3cb \neq 2ad$ . Equation (9) has a unique solution  $z = \frac{3c}{a} + j\left(-\frac{3abc + a^2d}{27c^2 + a^3}\right)$ .

Else, if  $D_1 > 0$ , the first equation in system (10) has a unique solution, substituting it into the second, we find the only value  $y$ . Thus, equation (9) has a unique solution, which is expressed in radicals using the Cardano formula.

If  $D_1 < 0$ , then equation (9) has three different  $p$ -complex solutions, which can not be expressed using the Cardano formula, since this formula in the case is not defined over  $\mathbb{C}_p$ .

Let now in formulas (9)–(10)  $a = 0, c \neq 0$ . Then  $x = -\sqrt[3]{c}$ , therefore  $y = \frac{b\sqrt[3]{c} - d}{3\sqrt[3]{c^2}}$ . In this case, equation (9) has a single root  $z = -\sqrt[3]{c} + j\frac{b\sqrt[3]{c} - d}{3\sqrt[3]{c^2}}$ .

In case  $a \neq 0, c = 0$  the first equation in system (10) has a root  $x = 0$ , which corresponds  $y = \frac{-d}{a}$ , and hence equation (9) has a root  $z = -j\frac{d}{a}$ . If  $a > 0$ , then the root is unique. If  $a < 0$ , then the first equation in system (10) has two more roots  $x_{1,2} = \pm\sqrt{-a}$ , which correspond to  $y_{1,2} = \frac{\pm b\sqrt{-a} + d}{2a}$ . In this case, equation (9) has two more roots  $z_{1,2} = \pm\sqrt{-a} + j\frac{\pm b\sqrt{-a} + d}{2a}$ .

If  $a = c = 0$ , then the first equation in system (10) has a single root  $x = 0$ , therefore, in the second equation of the system we have the expression  $y \cdot 0 + d = 0$ . Else, if  $d = 0$ , then equation (9) has infinitely many solutions of the form  $z = jy$ , where  $y \in \mathbb{R}$  is arbitrary, otherwise the equation has no roots.

Let us consider now the general cubic equation over  $\mathbb{C}_p$ :

$$P_3(z) = Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0, \quad (11)$$

where  $A$  is not a zero divisor.

Note that equation (11) can be reduced to form (9) by the change of variable  $z = t - \frac{B}{A}$ .

We will assume that the coefficients  $p, q$  of the equation obtained as a result of such a change are not zero divisors, then we use the results obtained above to obtain the following conclusions regarding the factorisation of equation (11).

If  $z_1, z_2, z_3$  are different roots of equation (11), then  $Az^3 + Bz^2 + Cz + D = A(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$ . If  $z_0$  is the unique root  $Az^3 + Bz^2 + Cz + D = (z - z_0)(Az^2 + Ez + R)$ . Note that such expressions are unique due to theorems 2 and 3. If  $z_0$  is the root of multiplicity 2, then, similarly to the case of a quadratic equation, the polynomial  $P_3(z)$  admits a continuum of expressions of the form

$$Az^3 + Bz^2 + Cz + D = A(z - z_0)^2(z - z_1) = A(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3),$$

if and only if  $2y_0 = y_2 + y_3$ , where  $y_0 = \text{Par}z_0, y_2 = \text{Par}z_2, y_3 = \text{Par}z_3$ .

If  $z_0$  is the root of multiplicity 3, then the polynomial  $P_3(z)$  admits a continuum of expressions of the form

$$P_3(z) = A(z - z_0)^3 = A(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3),$$

if and only if  $3y_0 = y_1 + y_2 + y_3$ , where  $y_0 = \text{Par}z_0, y_1 = \text{Par}z_1, y_2 = \text{Par}z_2, y_3 = \text{Par}z_3$ .

### Factorisation of polynomials with an invertible leading coefficient over $\mathbb{C}_p$

Consider the polynomial

$$P_n(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_1z + c_0, \quad (12)$$



$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_{n-3} & 1 & p_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_{n-4} & h_{n-3} & q_1 & p_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ h_{k-1} & h_k & 0 & 0 & \dots & q_1 & p_1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ h_2 & h_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ h_1 & h_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & p_1 & 1 \\ h_0 & h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & q_1 & p_1 \\ 0 & h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & q_1 \end{vmatrix}.$$

Note that this determinant is the resultant of the polynomials  $(x^{n-2} + h_{n-3}x^{n-3} + \dots + h_1x + h_0)$  and  $(x^2 + p_1x + q_1)$  (the concept of resultant and its properties can be found in more detail in the source [9, p. 334–345]). Thus,  $M$  is the product of pairwise differences between their roots in the algebraic closure of the field  $\mathbb{R}$ , that is  $\mathbb{C}$ . Due to the conditions of the theorem, these polynomials have no common roots, then  $M \neq 0$ . Thus, system (14) has a unique solution, and hence  $P_n(z)$  is expressed in the form  $(z^{n-2} + l_{n-3}z^{n-3} + \dots + l_1z + l_0)(z^2 + \alpha_1z + \beta_1)$  in a unique way. It follows from this, by virtue of the inductive assumption, that the polynomial  $P_n(z)$  admits a unique expression in the form (13). The theorem is proved.

**Theorem 5.** *Let the real part of  $P_n(z)$  have the following irreducible factorisation:*

$$Q_n(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_s)(x^2 + p_1x + q_1) \cdots (x^2 + p_kx + q_k), \quad (15)$$

and all factors be different, then  $P_n(z)$  can be expressed in a unique way as

$$P_n(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_s)(z^2 + \alpha_1z + \beta_1) \cdots (z^2 + \alpha_kz + \beta_k), \quad (16)$$

where  $z_1, \dots, z_s, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{C}_p$ .

**Proof.** From formula (15) it follows that  $P_n(z)$  has  $s$  roots, and all of them are simple. So, by virtue of theorems 2 and 3,  $P_n(z)$  can be uniquely expressed as

$$P_n(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_s)(z^{n-s} + l_{n-s-1}z^{n-s-1} + \dots + l_1z + l_0), \quad (17)$$

where the last factor has no roots. By virtue of the conditions imposed on the factors in formula (15), theorem 4 can be applied to the last factor in formula (17), then

$$(z^{n-s} + l_{n-s-1}z^{n-s-1} + \dots + l_1z + l_0) = (z^2 + \alpha_1z + \beta_1) \cdots (z^2 + \alpha_kz + \beta_k),$$

where  $2k = n - s$ . This implies the statement of the theorem and expression (16).

*Remark.* It is easy to see that when the square trinomials coincide, the expansion  $P(z) = (z^2 + \alpha z + \beta)^2$  can be rewritten in another form, for example,  $P(z) = (z^2 + \alpha z + \beta + j)(z^2 + \alpha z + \beta - j)$ .

Now let the polynomial (12) has a unique root  $z_0$  of multiplicity  $n$ . The case  $n = 2$  has been already discussed, now let us consider the general case.

**Theorem 6.** *The polynomial  $P_n(z) = (z - z_0)^n$  admits factorisation*

$$P_n(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n),$$

if and only if  $ny_0 = y_1 + y_2 + \dots + y_n$ , where  $y_k = \text{Par} z_k$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

**Proof.** It is obvious that  $\text{Re} z_1 = \text{Re} z_2 = \dots = \text{Re} z_n = \text{Re} z_0$ , otherwise there would be a contradiction with the fact that the root  $z_0$  is multiple. Then

$$\begin{aligned} (z - z_1) \cdots (z - z_n) &= (x - x_0 + j(y - y_1)) \cdots (x - x_0 + j(y - y_n)) = \\ &= (x - x_0)^n + j(x - x_0)^{n-1}(ny - y_1 - y_2 - \dots - y_n) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (x - x_0)^n + j(x - x_0)^{n-1}(ny - ny_0) + j(x - x_0)^{n-1}(ny - y_1 - y_2 - \dots - y_n) = \\ &= (z - z_0)^n + j(x - x_0)^{n-1}(ny - y_1 - y_2 - \dots - y_n), \end{aligned}$$

since  $(z - z_0)^n = (x - x_0)^n + jn(x - x_0)^{n-1}(y - y_0)$ , due to the properties of  $\mathbb{C}_p$ . This implies the statement of the theorem.

Summing up all of the above, we get that a polynomial with a leading coefficient equal to one has a unique expression as the product of linear and square factors with a leading coefficient equal to one if and only if all its roots are simple, and all square trinomials in the expansion of its real part are different. If the polynomial has a multiple root or there are two coinciding square trinomials in the expansion of its real part, then the polynomial has a continuum of factorisations, and the corresponding equation has a continuum of solutions.

## Conclusions

In this paper, the issue of solvability of algebraic equations in the ring of  $p$ -complex numbers is studied. Equations of the second and third degree are considered separately, in particular, an analogue of the Cardano formula is obtained. For polynomials of an arbitrary degree with an invertible leading coefficient, theorems on factoring with a unit leading coefficient over the ring of  $p$ -complex numbers are proven.

## Библиографические ссылки

1. Павловский ВА. Алгебраические уравнения с вещественными коэффициентами в кольце  $h$ -комплексных чисел. *Весті БДПУ. Серыя 3. Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія*. 2020;4:25–31.
2. Павловский ВА, Васильев ИЛ. О свойствах  $h$ -дифференцируемых функций. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2021;2:29–37. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-2-29-37.
3. Павловский ВА, Васильев ИЛ. О локальной обратимости функций  $h$ -комплексного переменного. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2022;1:103–107. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-1-103-107.
4. Яглом ИМ. *Комплексные числа и их применение в геометрии*. 2-е издание, стереотипное. Москва: Едиториал УРСС; 2004. 192 с.
5. Довгодилин ВВ. Сходимость на множестве  $p$ -комплексных чисел и свойства  $p$ -комплексных степенных рядов. *Весті БДПУ. Серыя 3. Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія*. 2020;4:32–39.
6. Диментберг ФМ. *Винтовое исчисление и его приложения в механике*. Москва: Наука; 1965. 200 с.
7. Васильев ИЛ, Довгодилин ВВ. О некоторых свойствах  $p$ -голоморфных и  $p$ -аналитических функций. *Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук*. 2021;57(2):176–184. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-2-176-184.
8. Messelmi F. Analysis of dual functions. *Annual Review of Chaos Theory, Bifurcations and Dynamical Systems*. 2013;4:37–54.
9. Курош АГ. *Курс высшей алгебры*. 9-е издание. Москва: Наука; 1968. 431 с.

## References

1. Pavlovsky VA. Algebraic equations with material coefficients in the ring of  $h$ -complex numbers. *Vesci BDPV. Seryja 3. Fizika. Matjematyka. Infarmatyka. Bijalogija. Geografija*. 2020;4:25–31. Russian.
2. Pavlovsky VA, Vasiliev IL. On properties of  $h$ -differentiable functions. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2021;2:29–37. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-2-29-37.
3. Pavlovsky VA, Vasiliev IL. On local invertibility of functions of an  $h$ -complex variable. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2022;1:103–107. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-1-103-107.
4. Yaglom IM. *Kompleksnyye chisla i ikh primenenie v geometrii* [Complex numbers in geometry]. 2<sup>nd</sup> edition, stereotyp. Moscow: Editorial URSS; 2004. 192 p. Russian.
5. Dovgodilin VV. Convergence on the multitude of  $p$ -complex numbers and properties of  $p$ -complex degree rows. *Vesci BDPV. Seryja 3. Fizika. Matjematyka. Infarmatyka. Bijalogija. Geografija*. 2020;4:32–39. Russian.
6. Dimentberg FM. *Vintovoe ischislenie i ego prilozheniya v mekhanike* [The screw calculus and its applications in mechanics]. Moscow: Nauka; 1965. 200 p. Russian.
7. Vasilyev IL, Dovgodilin VV. On some properties of  $p$ -holomorphic and  $p$ -analytic function. *Vesci Nacyjanal' naj akadzemii navuk Belarusi. Seryja fizika-matjematychnyh navuk*. 2021;57(2):176–184. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-2-176-184.
8. Messelmi F. Analysis of dual functions. *Annual Review of Chaos Theory, Bifurcations and Dynamical Systems*. 2013;4:37–54.
9. Kurosh AG. *Kurs vysshei algebrы* [Higher algebra course]. 9<sup>th</sup> edition. Moscow: Nauka; 1968. 431 p. Russian.

---

---

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

---

## DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

---

---

УДК 517.938:925

### ПСЕВДОПРОЛОНГАЦИИ В КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Б. С. КАЛИТИН<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Проанализированы устойчиво подобные свойства замкнутых инвариантных множеств динамических и полу-динамических систем на метрическом пространстве, обладающих свойством асимптотической компактности. Изучены свойства компактности, инвариантности и связности псевдопродолгации. Получены характеристики типов траекторий окрестностей слабых аттракторов. Уточнена связь псевдопродолгации с первой положительной продолгацией  $T$ . Ура и множеством слабоэллиптических точек.

**Ключевые слова:** динамическая система; замкнутое множество; притяжение; продолгация.

---

#### Образец цитирования:

Калитин БС. Псевдопродолгации в качественной теории динамических систем. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;3: 45–53.

<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-45-53>

#### For citation:

Kalitine BS. Pseudo-prolongations in the qualitative theory of dynamical systems. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;3:45–53. Russian. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-45-53>

---

#### Автор:

**Борис Сергеевич Калитин** – кандидат физико-математических наук, доцент; профессор кафедры аналитической экономики и эконометрики экономического факультета.

#### Author:

**Boris S. Kalitine**, PhD (physics and mathematics), docent; professor at the department of analytical economics and econometrics, faculty of economy. [kalitine@yandex.by](mailto:kalitine@yandex.by)



## PSEUDO-PROLONGATIONS IN THE QUALITATIVE THEORY OF DYNAMICAL SYSTEMS

*B. S. KALITINE<sup>a</sup>*

<sup>a</sup>*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

This paper considers the qualitative behaviour of the flow in a neighbourhood of closed invariant sets of dynamical systems. The properties of compactness, invariance, and connectivity of pseudo-prolongations are investigated. A rather deep analysis of the flow in the vicinity of a compact invariant set of asymptotically compact phase spaces is presented. The connection of pseudo-prolongation with the first positive prolongation of T. Ura and the set of weakly elliptic points is refined.

**Keywords:** dynamical system; closed set; attraction; prolongation.

### Введение

В работе Т. Ура [1] представлено перспективное направление развития качественной теории устойчивости движения – теория пролонгаций. В продолжение этого в статье [2] введено понятие пролонгаций высших порядков, рассмотрено свойство устойчивости инвариантных множеств порядка  $\alpha$ , а также понятие абсолютной устойчивости (устойчивости любого порядка). Детальной разработке теории пролонгаций и ее применению в поиске решения ряда задач динамических систем целенаправленно посвящены работы [3–13].

Использование теории пролонгаций дало толчок развитию важного направления теории устойчивости – метода функций Ляпунова [3–5]. Обобщенные пролонгации и обобщенные предельные пролонгации развивались А. Пэльчером [6; 7] для динамических систем применительно к вопросам равномерной устойчивости замкнутых множеств.

Однако сфера приложений введенного понятия пролонгаций не ограничивается прямым изучением задач устойчивости. Оно с успехом было использовано Н. Н. Ладисом при решении задачи о топологической эквивалентности систем дифференциальных уравнений [8], а также Л. Э. Рейзином при исследовании проблем различения [9]. Динамические системы с устойчивой пролонгацией изучали А. Н. Шарковский [10] и В. А. Добрынский [11]. Общие вопросы топологической динамики с использованием теории пролонгаций рассматривались в статьях [12; 13].

В публикациях [14; 15] введено понятие псевдоустойчивости как необходимого свойства орбитальной устойчивости компактных инвариантных множеств. Продолжением этих исследований стали работы [16–24], где и представлена соответствующая теория псевдопронгаций, приспособленная для изучения общих проблем качественной теории и, в частности, проблем псевдоустойчивости инвариантных множеств. С помощью свойств псевдопронгаций рассмотрен ряд задач качественной теории, а именно структура окрестности слабо притягивающих и притягивающих компактных множеств [21; 22], проблема В. В. Немыцкого о существовании множеств эллиптического и слабоэллиптического типов [22] и др. В работе [16] установлено, что для локально компактных динамических систем свойство асимптотической устойчивости компактного множества равносильно наличию двух свойств – псевдоустойчивости и изолированности, и на этой основе сформулирован объединяющий критерий асимптотической устойчивости [23, с. 129].

В настоящей статье рассматриваются проблемы качественной теории устойчиво подобных свойств инвариантных множеств динамических и полудинамических систем на метрическом пространстве. Дополнены результаты, полученные ранее для локально компактных динамических систем, относительно свойств компактности, инвариантности и связности псевдопронгации [23; 24]. С использованием псевдопронгации доказана теорема о характере поведения траекторий в окрестности слабо притягивающих компактных инвариантных множеств. На основе проведенных исследований указаны условия совпадения псевдопронгации с первой положительной пролонгацией Т. Ура и множеством слабоэллиптических точек.

### Обозначения и определения

Приведем используемые в динамических системах обозначения и общепринятые понятия:

•  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^+$  и  $\mathbb{N}$  – множества вещественных, вещественных неотрицательных и натуральных чисел соответственно;

- $\mathbb{R}^n$  –  $n$ -мерное евклидово пространство;
- $X$  – метрическое пространство с метрикой  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ ;
- $2^X$  – множество всех подмножеств  $X$ ;
- $B(N, \alpha) = \{x \in X : d(N, x) < \alpha\}$  для  $\alpha > 0$ ;
- $x_n \rightarrow x$  – сходящаяся к  $x$  последовательность  $(x_n)$ ;
- $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$  – полудинамическая система с фазовым отображением  $\pi : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ ;
- $\pi(x, t) = xt, \forall x \in X$  и  $\forall t \in \mathbb{R}^+$ ;
- аксиомы полудинамической системы:
  - (I)  $x0 = x$  для каждого  $x \in X$ ,
  - (II)  $xt(\tau) = x(t + \tau)$  для каждого  $x \in X$  и  $t, \tau \in \mathbb{R}^+$ ,
  - (III)  $\pi$  непрерывно;
- $\pi_x : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$  (или  $x : t \rightarrow xt$ ) – движение из точки  $x$  в фазовом пространстве  $X$ ;
- если  $Y \subset X$ , то  $\text{Fr}Y$  и  $\bar{Y}$  – граница и замыкание множества  $Y$  соответственно;
- если  $I \subset \mathbb{R}^+, Y \subset X, x \in Y, t \in I$ , то

$$xI = \{xt \in X : t \in I\}, YI = \{xt \in X : x \in Y, t \in I\};$$

- множество  $Y$  из  $X$  положительно инвариантно, если  $Y\mathbb{R}^+ = Y$ ;
- $\gamma^+(x) = x\mathbb{R}^+$  – положительная полутраектория точки  $x \in X$ ;
- $L^+(x) = \{y \in X : xt_n \rightarrow y, t_n \rightarrow +\infty \text{ при } n \rightarrow +\infty\}$  – множество  $\omega$ -предельных точек для  $x \in X$ ;
- $A_\omega^+(M) = \{x \in X : \exists(t_n), d(M, xt_n) \rightarrow 0, t_n \rightarrow +\infty \text{ при } n \rightarrow +\infty\}$  – область слабого притяжения множества  $M$  при  $t \rightarrow +\infty$ ;
- $A^+(M) = \{x \in X : d(M, xt) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty\}$  – область притяжения множества  $M$ ;
- $(X, \mathbb{R}, \pi)$  – динамическая система (движения определены при всех  $t \in \mathbb{R}$ );
- $L^-(x) = \{y \in X : xt_n \rightarrow y, t_n \rightarrow -\infty \text{ при } n \rightarrow +\infty\}$  – множество  $\alpha$ -предельных точек для  $x \in X$  в  $(X, \mathbb{R}, \pi)$ ;
- $\gamma(x) = x\mathbb{R}$  – траектория точки  $x \in X$  в  $(X, \mathbb{R}, \pi)$ ;
- $\gamma^-(x) = x\mathbb{R}^-$  – отрицательная полутраектория точки  $x \in X$  в  $(X, \mathbb{R}, \pi)$ ;
- $A_\omega^+(M) = \{x \in X : \exists(t_n), d(M, xt_n) \rightarrow 0, t_n \rightarrow +\infty \text{ при } n \rightarrow +\infty\}$  – область слабого притяжения множества  $M$  при  $t \rightarrow +\infty$ ;
- $A^+(M) = \{x \in X : d(M, xt) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty\}$  – область притяжения множества  $M$ .

Если метрическое пространство  $X$  локально компактно, то динамическую систему  $(X, \mathbb{R}, \pi)$  называют локально компактной.

**Определение 1** [15; 19; 20]. Пусть  $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$  – полудинамическая система и  $M$  – замкнутое подмножество  $X$ . Будем считать, что  $M$  является:

- псевдоустойчивым, если

$$(\forall x \notin M)(\forall m \in M)(\exists \delta = \delta(x, m) > 0) : x \notin B(m, \delta)\mathbb{R}^+;$$

- устойчивым, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in M)(\exists \delta = \delta(x, \varepsilon) > 0) : B(x, \delta)\mathbb{R}^+ \subset B(M, \varepsilon);$$

- слабо притягивающим, если  $A_\omega^+(M)$  есть окрестность  $M$ ;
- притягивающим, если  $A^+(M)$  есть окрестность  $M$ ;
- асимптотически устойчивым, если оно устойчивое и притягивающее.

**Определение 2** [25–29]. Полудинамическая система  $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$  называется асимптотически компактной при  $t \rightarrow +\infty$  на множестве  $W$ , если для любой пары последовательностей  $(x_n) \subset W$  и  $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$  таких, что  $x_n[0, t_n] \subset W, \forall n \in \mathbb{N}$  и  $t_n \rightarrow +\infty$ , последовательность  $(x_n t_n)$  относительно компактна.

Аналогичным образом определяется понятие асимптотической компактности при  $t \rightarrow -\infty$  на множестве  $W$ .

Для пояснения отметим некоторое обстоятельство. Если множество  $W$  положительно инвариантно, то из свойства асимптотической компактности на  $W$  следует, что для всякого движения  $x : t \rightarrow xt$  ( $xt \in W$ ,  $\forall t \geq 0$ ) предельное множество  $L^+(x)$  непусто и компактно.

### Псевдопродолгация

Напомним следующие определения.

**Определение 3** [30, р. 24]. Пусть  $(X, \mathbb{R}, \pi)$  – динамическая система на метрическом пространстве  $X$ . Пролонгацией точки  $m \in X$  называется множество

$$D^+(m) = \{x \in X : \exists (x_n) \subset X \text{ и } \exists (t_n) \subset \mathbb{R}^+ \text{ такие, что } x_n \rightarrow m \text{ и } x_n t_n \rightarrow x\}.$$

Если  $M \subset X$  – замкнутое множество, то  $D^+(M) = \bigcup_{m \in M} D^+(m)$  – пролонгация множества  $M$ .

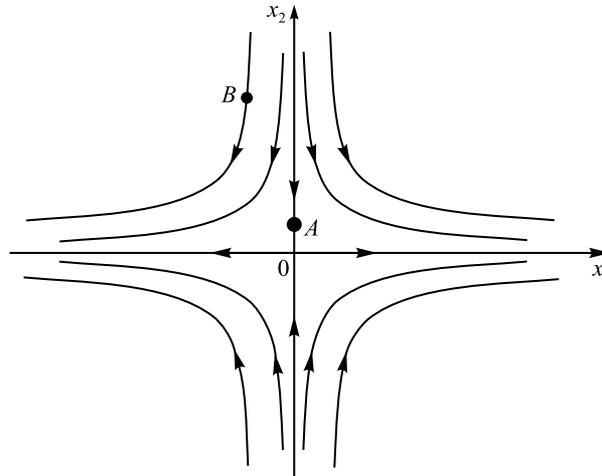
**Определение 4** [18]. Пусть  $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$  – полудинамическая система на метрическом пространстве  $X$ . Псевдопродолгацией точки  $m \in X$  называется множество

$$\sigma^+(m) = \{x \in X : \exists (x_n) \subset X \text{ и } \exists (t_n) \subset \mathbb{R}^+ \text{ такие, что } x_n \rightarrow m \text{ и } x_n t_n = x, \forall n \in \mathbb{N}\}. \quad (1)$$

Если  $M \subset X$  – замкнутое множество, то  $\sigma^+(M) = \bigcup_{m \in M} \sigma^+(m)$  называется псевдопродолгацией множества  $M$ .

Из определений 3 и 4 следует, что  $\sigma^+(M) \subset D^+(M)$ . Как показывает следующий пример, возможно и совпадение этих множеств.

**Пример 1.** Рассмотрим динамическую систему  $\dot{x}_1 = x_1$ ,  $\dot{x}_2 = -x_2$  на плоскости  $X = \mathbb{R}^2$ . Траектории этой системы изображены на рисунке.



Фазовый портрет траекторий  
 Phase portrait of trajectories

Укажем пролонгационные множества  $D^+(x)$ ,  $\sigma^+(x)$  для точек фазовой плоскости  $A$  и  $B$ :

- если  $A = (0, a)$  и  $a \neq 0$ , то  $D^+(A) = \gamma^+(A) \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$ ,  $\sigma^+(A) = \gamma^+(A)$ ;
- если  $A = (0, 0)$ , то  $D^+(A) = \sigma^+(A) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$ ;
- если  $B = (\alpha, \beta)$ ,  $\alpha\beta \neq 0$ , то  $D^+(B) = \sigma^+(B) = \gamma^+(B)$ .

Напомним утверждения относительно  $\sigma^+(M)$ , которые будут использованы ниже.

**Теорема 1** [20]. Замкнутое множество  $M \subset X$  полудинамической системы  $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$  на метрическом пространстве  $X$  псевдоустойчиво тогда и только тогда, когда

$$\sigma^+(M) = M. \quad (2)$$

**Теорема 2** [20]. Пусть  $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$  – полудинамическая система на метрическом пространстве  $X$  и  $M \subset X$  – компактное положительно инвариантное слабо притягивающее множество. Предположим, что система  $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$  асимптотически компактна при  $t \rightarrow +\infty$  в области слабого притяжения  $A_\omega^+(M)$ . Тогда множество  $\sigma^+(M)$  является компактным.

Укажем также некоторые свойства асимптотической устойчивости компактного множества  $M$ . Для этого предварительно напомним понятия отрицательной полутраектории для полудинамических систем [31].

Пусть  $\Delta(x)$  означает интервал существования движения  $x : t \rightarrow xt$ . Отображение  $\bar{x} : t \rightarrow \bar{x}t$  является продолжением движения  $x : t \rightarrow xt$ , если  $\Delta(\bar{x}) \supset \Delta(x)$  и  $xt = \bar{x}t$  на  $\Delta(x)$ .

Движение  $x : t \rightarrow xt$  называется максимальным, если для каждого продолжения  $y$  этого движения имеем  $\Delta(y) = \Delta(x)$  (и, следовательно,  $xt = yt$  на  $\Delta(x)$ ).

Траектория точки  $x \in X$  есть образ фазового отображения максимального движения, проходящего через точку  $x$ . В этом случае через  $\gamma(x)$  будем обозначать траекторию максимального движения.

Максимальное движение  $x : t \rightarrow xt$  и соответствующая траектория  $\gamma(x)$  называются полными, если  $\Delta(x) = \mathbb{R}$ .

Пусть  $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$  – полудинамическая система и точке  $x \in X$  соответствует некоторое полное движение  $x : t \rightarrow xt, t \in \mathbb{R}$ . Тогда отрицательной полутраекторией  $\gamma^-(x)$  точки  $x \in X$  называется множество  $\gamma^-(x) = \gamma(x) \setminus \gamma^+(x)$ . С практической точки зрения для каждого  $t \in \mathbb{R}^-$ , для которого движение  $x : t \rightarrow xt$  определено, полагаем, что  $xt = \{y \in X : x \in y(-t)\}$ .

**Теорема 3** [27]. Пусть  $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$  – полудинамическая система на метрическом пространстве  $X$  и  $M \subset X$  – компактное положительно инвариантное множество. Предположим, что  $U$  – окрестность  $M$ , в которой  $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$  асимптотически компактна при  $t \rightarrow +\infty$ . Тогда множество  $M$  асимптотически устойчиво в том и только в том случае, когда существует окрестность  $W \subset U$  для  $M$  такая, что  $W \setminus M$  не содержит относительно компактных отрицательных полутраекторий.

**Теорема 4** [27]. Пусть  $(X, \mathbb{R}, \pi)$  – динамическая система на метрическом пространстве  $X$  и  $M \subset X$  – компактное слабо притягивающее множество. Предположим, что  $(X, \mathbb{R}, \pi)$  асимптотически компактна при  $t \rightarrow +\infty$  в области слабого притяжения  $A_\omega^+(M)$ . Тогда выполняется одно из следующих двух условий:

- а)  $M$  асимптотически устойчиво, и  $A^+(M) = A_\omega^+(M)$ ;
- б) существует точка  $q \in X \setminus M$  такая, что  $L^-(q) \cap M \neq \emptyset$ .

Предварительно представим некоторые характеристики псевдопродолгации  $\sigma^+(M)$  для множества  $M$  из  $X$ .

**Лемма 1.** Пусть  $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$  – полудинамическая система на метрическом пространстве  $X$  и  $M \subset X$  – замкнутое множество. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1)  $M \subset \sigma^+(M)$ ;
- 2) если  $M$  положительно инвариантно, то для точек  $m \in M$  и  $x \in X \setminus M$  в условии (1)  $t_n \rightarrow +\infty$ ;
- 3)  $\sigma^+(M)$  положительно инвариантно.

**Доказательство.** Докажем справедливость утверждения 1. Действительно, для произвольной точки  $m \in M$  полагаем, что  $x = m$  и  $x_n = m, t_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Тогда в силу этих обозначений для точки  $x$  и последовательностей  $(x_n) \subset X, (t_n) \subset \mathbb{R}^+$  будут выполняться следующие условия:  $x_n \rightarrow m, x_n t_n = x$ . Следовательно, для  $x$  имеет место (1), т. е.  $x \in \sigma^+(m)$ . Более того, по построению  $m = x$ , а значит,  $m \in \sigma^+(m)$ . Отсюда в силу произвольности выбора точки  $m \in M$  и определения псевдопродолгации  $\sigma^+(M)$  следует требуемое включение  $M \subset \sigma^+(M)$ .

Докажем теперь утверждение 2, предполагая, что множество  $M$  положительно инвариантно. Действительно, для любых  $m \in M$  и  $x \in \sigma^+(m) \setminus M$  по определению псевдопродолгации выполняется условие (1). Предположим при этом, что для последовательности  $(t_n)$  существует ограниченная подпоследовательность  $(t_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subset (t_n)$ . Тогда  $x_{n(k)} t_{n(k)} = x, \forall k \in \mathbb{N}$ , и  $x_{n(k)} \rightarrow m$ , а  $t_{n(k)} \rightarrow T \in \mathbb{R}^+$  при  $k \rightarrow +\infty$ . В этом случае

из тождества  $x_{n(k)}t_{n(k)} = x$  в пределе при  $k \rightarrow +\infty$  приходим к равенству  $mT = x$ . Однако, так как  $x \notin M$ , то это противоречит положительной инвариантности  $M$ . Следовательно,  $t_n \rightarrow +\infty$ .

Покажем теперь, что множество  $\sigma^+(M)$  положительно инвариантно. Пусть  $m \in M$  и точка  $x \in \sigma^+(m)$ . В этом случае согласно определению 4 можно указать последовательности  $(x_n) \subset X$  и  $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$  такие, что  $x_n \rightarrow m$  и  $x_n t_n = x$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Пусть  $t \in \mathbb{R}^+$  – произвольный момент времени. Тогда последовательность  $(t_n + t) \subset \mathbb{R}^+$ . Полагаем, что  $y = xt$  и  $\tau_n = t_n + t$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . В этом случае с учетом равенств  $x_n t_n = x$  следует, что  $x_n(t_n + t) = (x_n t_n)t = xt$  или  $x_n \tau_n = y$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Другими словами, согласно определению 4 точка  $y = xt \in \sigma^+(m)$ . Поскольку  $x \in \sigma^+(m)$ , то в силу произвольности выбора  $t \in \mathbb{R}^+$  отсюда следует положительная инвариантность  $\sigma^+(m)$ , что и соответствует положительной инвариантности множества  $\sigma^+(M)$ .

**Лемма 2.** Пусть  $(X, \mathbb{R}, \pi)$  – динамическая система на метрическом пространстве  $X$  и  $M \subset X$  – замкнутое инвариантное множество. Тогда множество  $\sigma^+(M) \setminus M$  инвариантно.

**Доказательство.** Пусть  $m \in M$  и точка  $x \in \sigma^+(m) \setminus M$ . По определению 4 можно указать последовательности  $(x_n) \subset X$  и  $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$  такие, что  $x_n \rightarrow m$  и  $x_n t_n = x$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Пусть  $t \in \mathbb{R}$  – произвольный момент времени. Тогда согласно утверждению 2 леммы 1  $t_n \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow +\infty$ , а значит, для достаточно большого  $N \in \mathbb{N}$  выполняются неравенства  $(t_n + t) > 0$ ,  $\forall n \geq N$ . Полагаем, что  $y = xt$  и  $\tau_n = t_n + t$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . В этом случае с учетом равенств  $x_n t_n = x$  следует, что  $x_n(t_n + t) = (x_n t_n)t = xt$  или  $x_n \tau_n = y$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Другими словами, согласно определению 4 точка  $y = xt \in \sigma^+(m) \setminus M$ . Поскольку  $x \in \sigma^+(m) \setminus M$ , то в силу произвольности выбора  $t \in \mathbb{R}$  отсюда следует инвариантность  $\sigma^+(m) \setminus M$ , что и соответствует инвариантности множества  $\sigma^+(M) \setminus M$ .

Напомним следующие понятия.

**Определение 5** [23, с. 32]. Пусть  $(X, \mathbb{R}, \pi)$  – динамическая система на метрическом пространстве  $X$  и  $M \subset X$  – замкнутое инвариантное множество. Точка  $x$  из  $X$  называется:

- эллиптической точкой  $M$ , если

$$L^+(x) \neq \emptyset, L^-(x) \neq \emptyset \text{ и } L^+(x) \subset M, L^-(x) \subset M;$$

- слабоэллиптической точкой  $M$ , если  $L^+(x) \cap M \neq \emptyset$  и  $L^-(x) \cap M \neq \emptyset$ .

Обозначим через  $E_\omega(M)$  ( $E(M)$ ) множество всех слабоэллиптических (соответственно эллиптических) точек множества  $M$ . Из определения 3, в частности, следует, что если  $M$  компактно, то  $M \subset E(M) \subset E_\omega(M)$ .

Следующая теорема поясняет характер траекторий на множестве  $\sigma^+(M)$ .

**Теорема 5.** Пусть  $(X, \mathbb{R}, \pi)$  – динамическая система и  $M \subset X$  – компактное инвариантное слабо притягивающее множество. Тогда имеет место равенство  $\sigma^+(M) = E_\omega(M)$ .

**Доказательство.** Если  $M$  псевдоустойчиво, то согласно теореме 1  $\sigma^+(M) = M$ . Но поскольку  $M$  компактно, а следовательно,  $M \subset E_\omega(M)$ , то в итоге получаем включение

$$\sigma^+(M) \subset E_\omega(M). \quad (3)$$

Предположим теперь, что  $M$  не является псевдоустойчивым. Тогда из теоремы 1 следует существование точки  $x \in \sigma^+(M) \setminus M$ . Это значит, что выполняются соотношения

$$(\exists m \in M)(\exists (x_n) \subset X)(\exists (t_n) \subset \mathbb{R}^+) : x_n t_n = x, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ и } d(m, x_n) \rightarrow 0.$$

Отсюда с учетом инвариантности  $M$  следует, что  $t_n \rightarrow +\infty$ . Кроме того, так как  $x_n t_n = x$ , можем записать равенства  $x_n = x(-t_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Следовательно, по построению имеем  $d(m, x(-t_n)) \rightarrow 0$ . Иначе говоря,  $L^-(x) \cap M \neq \emptyset$ . Но тогда с учетом свойства слабого притяжения  $M$  получаем, что  $x \in E_\omega(M) \setminus M$ . Таким образом, и в случае отсутствия псевдоустойчивости  $M$  выполняется включение (3).

Докажем теперь обратное включение. Пусть  $x \in E_\omega(M) \setminus M$ , т. е., в частности,  $L^-(x) \cap M \neq \emptyset$ . Это по теореме 1 [19] означает, что  $M$  не является псевдоустойчивым. Другими словами, существуют последовательность моментов времени  $(\tau_n) \subset \mathbb{R}^-$  и точка  $m \in M$  такая, для которой  $d(m, x\tau_n) \rightarrow 0$ . Полагаем,

что  $x_n = x\tau_n$ , тогда  $d(m, x_n) \rightarrow 0$ , причем  $x_n(-\tau_n) = x$ . Последние построения с учетом неравенства  $\tau_n \leq 0$  означают, что  $x \in \sigma^+(M) \setminus M$ . Следовательно, в силу произвольности выбора точки  $x$  можем записать включение  $E_\omega(M) \subset \sigma^+(M)$ , обратное включению (3). Это и завершает доказательство равенства  $\sigma^+(M) = E_\omega(M)$ .

Сформулируем теперь утверждение относительно структуры окрестности слабо притягивающих множеств.

**Теорема 6.** Пусть  $(X, \mathbb{R}, \pi)$  – динамическая система на метрическом пространстве  $X$  и  $M \subset X$  – компактное инвариантное слабо притягивающее множество. Предположим, что  $(X, \mathbb{R}, \pi)$  асимптотически компактна при  $t \rightarrow +\infty$  и  $t \rightarrow -\infty$  в области слабого притяжения  $A_\omega^+(M)$ . Тогда псевдопродолгация  $\sigma^+(M)$  является наименьшим компактным инвариантным асимптотически устойчивым множеством, содержащим  $M$ , причем

$$A_\omega^+(M) = A^+(\sigma^+(M)). \quad (4)$$

**Доказательство.** Во-первых, заметим, что так как  $M$  – компактное инвариантное слабо притягивающее множество, то по теореме 2 множество  $\sigma^+(M)$  компактно. Если при этом  $M$  псевдоустойчиво, то по теореме 1 [19] имеет место условие  $L^-(x) \cap M = \emptyset, \forall x \notin M$ . В этом случае с учетом слабого притяжения  $M$  из теоремы 4 следует асимптотическая устойчивость множества  $M$ . Кроме того, согласно теореме 1 псевдоустойчивость  $M$  означает равенство  $\sigma^+(M) = M$ . Отсюда делаем вывод, что  $\sigma^+(M)$  является наименьшим компактным инвариантным асимптотически устойчивым множеством, содержащим  $M$ .

Предположим теперь, что  $M$  не является псевдоустойчивым, т. е.  $\sigma^+(M) \setminus M \neq \emptyset$ . Поскольку  $M$  – слабо притягивающее множество, то существует число  $\Delta > 0$  такое, что для любого  $x \in \overline{B(M, \Delta)}$  множества  $L^+(x)$  и  $M$  имеют непустое пересечение. Заметим, что по определению  $A_\omega^+(M)$  является открытой окрестностью множества  $M$  и, следовательно, число  $\Delta > 0$  можно считать настолько малым, что  $\overline{B(M, \Delta)} \subset A_\omega^+(M)$ . Кроме того, согласно теореме 2, леммам 1, 2 и 4 [20] множество  $\sigma^+(M)$  компактно, инвариантно, причем  $M \subset \sigma^+(M)$ , поэтому с учетом того, что множество  $A_\omega^+(M)$  – открытая инвариантная окрестность  $M$ , следует включение  $\sigma^+(M) \subset A_\omega^+(M)$ .

Покажем, что  $\sigma^+(M)$  асимптотически устойчиво. Действительно, предположим, что это не так. Тогда по теореме 3 для любого числа  $\delta > 0$  существует отрицательная полутраектория  $\gamma^-(x)$ , расположенная во множестве  $B(\sigma^+(M), \delta) \setminus \sigma^+(M)$ . Так как  $\sigma^+(M)$  компактно и содержится в открытом множестве  $A_\omega^+(M)$ , то  $\delta$  можно считать настолько малым, что  $\overline{B(\sigma^+(M), \delta)} \subset A_\omega^+(M)$ . Следовательно, с учетом инвариантности  $A_\omega^+(M)$  имеем  $\gamma^-(x) \subset A_\omega^+(M) \setminus \sigma^+(M)$ .

На основании теоремы 3 [20] (где следует вместо  $M$  использовать  $\sigma^+(M)$ ) псевдопродолгация  $\sigma^+(M)$  является наименьшим псевдоустойчивым множеством, которое содержит  $M$ . Таким образом, из теоремы 1 [19] получаем, что  $L^-(x) \cap \sigma^+(M) = \emptyset$ , откуда с учетом включения  $M \subset \sigma^+(M)$  следует, что

$$L^-(x) \cap M = \emptyset. \quad (5)$$

В силу предположения об асимптотической компактности  $(X, \mathbb{R}, \pi)$  при  $t \rightarrow -\infty$  следует, что  $L^-(x) \neq \emptyset$ . Пусть  $y \in L^-(x)$ . Учтем, что по предположению  $M$  – слабо притягивающее множество, поэтому в соответствии с предыдущими построениями для точки  $y$ , удовлетворяющей соотношениям

$$y \in L^-(x) \subset \overline{B(\sigma^+(M), \delta)} \subset A_\omega^+(M),$$

можно указать последовательность  $(t_n), t_n \rightarrow +\infty$ , такую, что  $d(M, yt_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ . Но множество  $M$  компактно, а значит,  $L^-(x) \cap M \neq \emptyset$ . Однако это противоречит условию (5), что и доказывает асимптотическую устойчивость  $\sigma^+(M)$ .

Нетрудно показать справедливость равенства (4). Действительно, так как по лемме 1  $M \subset \sigma^+(M)$ , то ясно, что  $A_\omega^+(M) \subset A_\omega^+(\sigma^+(M))$  и для любого  $x \in A_\omega^+(\sigma^+(M))$  имеем  $L^+(x) \subset \sigma^+(M) \subset A_\omega^+(M)$ . Следовательно,  $A^+(\sigma^+(M)) = A_\omega^+(M)$ , что и подтверждает (4).

Докажем теперь, что  $\sigma^+(M)$  является наименьшим из всех компактных инвариантных асимптотически устойчивых множеств, содержащих  $M$ . Пусть  $Y$  – компактное асимптотически устойчивое множество такое, что  $M \subset Y \subset \sigma^+(M)$ . Тогда имеем включения

$$\sigma^+(M) \subset \sigma^+(Y) \subset \sigma^+(\sigma^+(M)). \quad (6)$$

Более того, так как псевдопродолгация  $\sigma^+(M)$  является компактным псевдоустойчивым множеством, то по теореме 1  $\sigma^+(\sigma^+(M)) = \sigma^+(M)$ . Это в совокупности с включениями (6) приводит к равенству  $\sigma^+(Y) = \sigma^+(M)$ . Если  $Y$  – асимптотически устойчивое множество, то оно и псевдоустойчивое, а тогда  $Y = \sigma^+(Y) = \sigma^+(M)$ . Следовательно,  $\sigma^+(M)$  является наименьшим из всех компактных инвариантных асимптотически устойчивых множеств, содержащих  $M$ .

Теорема доказана.

На основании теоремы 6 из настоящей статьи и теоремы 1.25 из источника [30, р. 64], где динамическая система предполагается локально компактной, можно уточнить связь первой положительной продолгации  $D^+(M)$ , введенной Т. Ура, с псевдопродолгацией  $\sigma^+(M)$ .

**Следствие 1.** Пусть  $(X, \mathbb{R}, \pi)$  – локально компактная динамическая система и  $M \subset X$  – компактное инвариантное слабо притягивающее множество. Тогда имеет место равенство  $\sigma^+(M) = D^+(M)$ .

### Библиографические ссылки

1. Ura T. Sur les courbes définies par les équations différentielles dans espace a m dimensions. *Ecole Normale Supérieure. Serie 3.* 1953;70:287–360. DOI: 10.24033/asens.1014.
2. Ura T. Sur les courants extérieur a une région invariante; prolongement d'une caractéristique et l'ordre de stabilité. *Funkcialaj Ekvacioj.* 1959;2:143–190.
3. Seibert P. Prolongations and generalized Liapunov functions. *Technical Reports. RIAS.* 1961;61(7):454–462.
4. Seibert P. Prolongations and generalized Liapunov functions. In: *Proceedings of the International Symposium on Non-Linear Oscillations; 1961 September 12–18; Kyiv, Ukraine.* Kyiv: Izdatel'stvo Akademii Nauk SSSR; 1963. p. 332–341.
5. Auslander J, Seibert P. Prolongations and stability in dynamical systems. *Annales de l'Institut Fourier.* 1964;14(2):237–267. DOI: 10.5802/aif.179.
6. Pelczar A. Semistability of motions and regular dependence of limit sets on points in general semi-systems. *Annales Polonici Mathematici.* 1983;42:263–282. DOI: 10.4064/ap-42-1-263-282.
7. Pelczar A. Prolongations and prolongational limit sets in generalized semi-systems on metric spaces. *Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica.* 1994;31:203–240.
8. Ладис НН. Топологическая эквивалентность некоторых дифференциальных систем. *Дифференциальные уравнения.* 1972; 8(7):1116–1119.
9. Рейзинь ЛЭ. *Функции Ляпунова и проблемы различения.* Рига: Зинатне; 1986. 192 с.
10. Шарковский АН. Структурная теория дифференциальных динамических систем и слабо неблуждающие точки. В: *VII Internationale Konferenz über nichtlineare Schwingungen; 1975 September 8–13; Berlin, Germany. Band 2.* Berlin: Akademie-Verlag; 1977. p. 193–200.
11. Добрынский ВА. Типичность динамических систем с устойчивой продолгацией. В: Митропольский ЮА, редактор. *Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений.* Киев: Издательство Института математики АН УССР; 1973. с. 43–53.
12. Hajek O. Prolongation in topological dynamical. In: Yorke JA, editor. *Seminar on differential equations and dynamical systems, II.* Berlin: Springer; 1970. p. 79–89 (Lecture notes in mathematics; volume 144).
13. Jong Sook Bae, Sung Kyu Choi, Jong Suh Park. Limit sets and prolongations in topological dynamics. *Journal of Differential Equations.* 1986;64(3):336–339. DOI: 10.1016/0022-0396(86)90079-3.
14. Kalitine BS. Pseudo-stabilité et classification des ensembles fermés invariants. *Prepublication USTHB, B.P. 9 Dar El-Beida (Alger).* 1983;9:1–12.
15. Калитин БС. Псевдоустойчивость замкнутых инвариантных множеств. *Дифференциальные уравнения.* 1986;22(2):187–193.
16. Калитин БС. Псевдоустойчивость и первые продолжения. *Дифференциальные уравнения.* 1988;24(4):571–574.
17. Калитин БС. Непрерывность псевдопродолгаций. *Дифференциальные уравнения.* 1989;25(12):2187.
18. Калитин Б.С. Псевдопродолгация. *Дифференциальные уравнения.* 1996;32(8):1043–1050.
19. Kalitine BS. On the pseudo-stability of semidynamical systems. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2015;1:79–84 (на англ.).
20. Калитин БС. О некоторых свойствах псевдоустойчивости и псевдопродолгации. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2015;2:77–83.
21. Калитин БС. О структуре окрестности слабо притягивающих компактных множеств. *Дифференциальные уравнения.* 1994;30(4):565–574.
22. Калитин БС. Качественная характеристика траекторий в окрестности притягивающего компактного множества. *Дифференциальные уравнения.* 1998;34(7):886–893.
23. Калитин БС. *Качественная теория устойчивости движения динамических систем.* Минск: БГУ; 2002. 198 с.
24. Калитин БС. *Устойчивость динамических систем (качественная теория).* Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing; 2012. 258 p.
25. Ladyzhenskaya O. *Attractors for semigroups and evolution equations.* Cambridge: Cambridge University Press; 1991. 98 p.

26. Arredondo JH, Seibert P. On a characterization of asymptotic stability. *Aportaciones Matematicas: Communicationes*. 2001;29: 11–16.
27. Kalitine BS. About asymptotic stability in semidynamical systems. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика*. 2016;1:114–119 (на англ.).
28. Калигин БС. Неустойчивость замкнутых инвариантных множеств полудинамических систем. Метод знакопостоянных функций Ляпунова. *Математические заметки*. 2009;85(3):382–394. DOI: 10.4213/mzm4115.
29. Калигин БС. О свойствах окрестности аттрактора динамической системы. *Математические заметки*. 2021;109(5): 734–746. DOI: 10.4213/mzm12915.
30. Bhatia NP, Szegő GH. *Stability theory of dynamical systems*. Berlin: Springer; 1970. 225 p.
31. Saperstone SH. *Semidynamical systems in infinite dimensional space*. Berlin: Springer; 1981. 474 p.

## References

1. Ura T. Sur les courbes définies par les équations différentielles dans espace a m dimentions. *Ecole Normale Supérieure. Serie 3*. 1953;70:287–360. DOI: 10.24033/asens.1014.
2. Ura T. Sur les courant extérieur a une région invariante; prolongement d'une caractéristique et l'ordre de stabilité. *Funkcialaj Ekvacioj*. 1959;2:143–190.
3. Seibert P. Prolongations and generalized Liapunov functions. *Technical Reports. RIAS*. 1961;61(7):454–462.
4. Seibert P. Prolongations and generalized Liapunov functions. In: *Proceedings of the International Symposium on Non-Linear Oscillations; 1961 September 12–18; Kyiv, Ukraine*. Kyiv: Izdatel'stvo Akademii Nauk SSSR; 1963. p. 332–341.
5. Auslander J, Seibert P. Prolongations and stability in dynamical systems. *Annales de l'Institut Fourier*. 1964;14(2):237–267. DOI: 10.5802/aif.179.
6. Pelczar A. Semistability of motions and regular dependence of limit sets on points in general semi-systems. *Annales Polonici Mathematici*. 1983;42:263–282. DOI: 10.4064/ap-42-1-263-282.
7. Pelczar A. Prolongations and prolongational limit sets in generalized semi-systems on metric spaces. *Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica*. 1994;31:203–240.
8. Ladis NN. Topological equivalence of certain differential systems. *Differentsial'nye uravneniya*. 1972;8(6):1116–1119. Russian.
9. Reizin LE. *Funktsii Lyapunova i problemy razlicheniya* [Lyapunov functions and the problem of discrimination]. Riga: Zinatne; 1986. 192 p. Russian.
10. Sharkovskii AN. [Structural theory of differential dynamical systems and weakly non-wandering points]. In: *VII Internationale Konferenz über nichtlineare Schwingungen; 1975 September 8–13; Berlin, Germany. Band 2*. Berlin: Akademie-Verlag; 1977. p. 193–200. Russian.
11. Dobryn'skii VA. [Typicality of dynamical systems with stable prolongation]. In: Mitropol'skii YuA, editor. *Dinamicheskie sistemy i voprosy ustoychivosti reshenii differentsial'nykh uravnenii* [Dynamical systems and questions of stability of solutions of differential equations]. Kyiv: Izdatel'stvo Instituta matematiki AN USSR; 1973. p. 43–53. Russian.
12. Hajek O. Prolongation in topological dynamical. In: Yorke JA, editor. *Seminar on differential equations and dynamical systems, II*. Berlin: Springer; 1970. p. 79–89 (Lecture notes in mathematics; volume 144).
13. Jong Sook Bae, Sung Kyu Choi, Jong Suh Park. Limit sets and prolongations in topological dynamics. *Journal of Differential Equations*. 1986;64(3):336–339. DOI: 10.1016/0022-0396(86)90079-3.
14. Kalitine BS. Pseudo-stabilité et classification des ensembles fermés invariants. *Prepublication USTHB, B.P. 9 Dar El-Beida (Alger)*. 1983;9:1–12.
15. Kalitine BS. Pseudostability of closed invariant sets. *Differentsial'nye uravneniya*. 1986;22(2):187–193. Russian.
16. Kalitine BS. Pseudostability and first prolongations. *Differentsial'nye uravneniya*. 1988;24(4):571–574. Russian.
17. Kalitine BS. Continuity of pseudo-prolongations. *Differentsial'nye uravneniya*. 1989;25(12):2187. Russian.
18. Kalitine BS. Pseudo-prolongations. *Differentsial'nye uravneniya*. 1996;32(8):1043–1050. Russian.
19. Kalitine BS. On the pseudo-stability of semi-dynamical systems. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika*. 2015;1:79–84.
20. Kalitine BS. About some properties of pseudo-stability and pseudo-prolongation. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika*. 2015;2:77–83. Russian.
21. Kalitine BS. On the structure of a neighborhood of weakly attracting compact sets. *Differentsial'nye uravneniya*. 1994;30(4): 565–574. Russian.
22. Kalitine BS. Qualitative characterization of trajectories in a neighborhood of an attracting compact set. *Differentsial'nye uravneniya*. 1998;34(7):886–893. Russian.
23. Kalitine BS. *Kachestvennaya teoriya ustoychivosti dvizheniya dinamicheskikh sistem* [Qualitative theory of the stability of dynamical systems]. Minsk: Belaruisan State University; 2002. 198 p. Russian.
24. Kalitine BS. *Stability of dynamical systems (qualitative theory)*. Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing; 2012. 258 p. Russian.
25. Ladyzhenskaya O. *Attractors for semigroups and evolution equations*. Cambridge: Cambridge University Press; 1991. 98 p.
26. Arredondo JH, Seibert P. On a characterization of asymptotic stability. *Aportaciones Matematicas: Communicationes*. 2001;29: 11–16.
27. Kalitine BS. About asymptotic stability in semidynamical systems. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika*. 2016;1:114–119.
28. Kalitine BS. Instability of closed invariant sets of semidynamical systems. Method of sign-constant Lyapunov functions. *Matematicheskie zamecki*. 2009;85(3):382–394. Russian. DOI: 10.4213/mzm4115.
29. Kalitine BS. Properties of neighborhoods of attractors of dynamical systems. *Matematicheskie zamecki*. 2021;109(5):734–746. Russian. DOI: 10.4213/mzm12915.
30. Bhatia NP, Szegő GH. *Stability theory of dynamical systems*. Berlin: Springer; 1970. 225 p.
31. Saperstone SH. *Semidynamical systems in infinite dimensional space*. Berlin: Springer; 1981. 474 p.

---

---

# ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

---

## DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

---

---

УДК 519.87

### АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАНЦЕ ПРИ ОПРЕДЕЛЕННЫХ СВОЙСТВАХ ПАРЕТОВСКИХ СЛОЕВ

С. В. ЧЕБАКОВ<sup>1)</sup>, Л. В. СЕРЕБРЯНАЯ<sup>2), 3)</sup>

<sup>1)</sup>Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,  
ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Беларусь

<sup>2)</sup>БИП – университет права и социально-информационных технологий,  
ул. Короля, 3, 220004, г. Минск, Беларусь

<sup>3)</sup>Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,  
ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Беларусь

Разработан алгоритм решения задачи о ранце на основе предложенной многокритериальной модели. Представлена структура допустимых подмножеств при глубине недоминирования паретовского слоя, равной нулю, и сумме значений ресурса элементов этого слоя, большей величины объема ранца либо равной ей. На основе данной структуры определен вид оптимального допустимого подмножества с максимальным суммарным значением веса его элементов. Показано, что на определенном этапе предложенный алгоритм включает в себя решение подзадач о ранце с объемами ранцев, меньшими, чем объемы ранца в первоначальной задаче с множеством начальных данных. Введено определение избыточности множества начальных данных, а также условие существования избыточности при заданном значении глубины недоминирования паретовского слоя.

**Ключевые слова:** задача о ранце; многокритериальная оптимизация; множество Парето; паретовский слой.

---

#### Образец цитирования:

Чебаков СВ, Серебряная ЛВ. Алгоритм решения задачи о ранце при определенных свойствах паретовских слоев. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;3:54–66.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-54-66>

#### For citation:

Chebakov SV, Serebryanaya LV. Algorithm for solving the knapsack problem with certain properties of Pareto layers. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;3:54–66. Russian.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-54-66>

---

#### Авторы:

**Сергей Викторович Чебаков** – кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник отдела технологий цифровой трансформации.

**Лия Валентиновна Серебряная** – кандидат технических наук, доцент; заведующий кафедрой информационных технологий и математики экономико-правового факультета<sup>2)</sup>, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий факультета компьютерных систем и сетей<sup>3)</sup>.

#### Authors:

**Sergey V. Chebakov**, PhD (physics and mathematics); senior researcher at the department of computing networks.

[info@chebakov.com](mailto:info@chebakov.com)

**Liya V. Serebryanaya**, PhD (engineering), docent; head of the department of information technology and mathematics, faculty of economics and law<sup>b</sup>, and associate professor at the department of software for information technologies, faculty of computer systems and networks<sup>c</sup>.  
[l\\_silver@mail.ru](mailto:l_silver@mail.ru)

---

## ALGORITHM FOR SOLVING THE KNAPSACK PROBLEM WITH CERTAIN PROPERTIES OF PARETO LAYERS

S. V. CHEBAKOV<sup>a</sup>, L. V. SEREBRYANAYA<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup>United Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus,  
6 Surhanava Street, Minsk 220012, Belarus

<sup>b</sup>BIP – University of Law and Social-Information Technologies, 3 Karalia Street, Minsk 220004, Belarus

<sup>c</sup>Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 6 P. Broŭki Street, Minsk 220013, Belarus

Corresponding author: L. V. Serebryanaya (l\_silver@mail.ru)

An algorithm for solving the knapsack problem based on the proposed multicriteria model has been developed. The structure of admissible subsets is presented for the value of the non-dominance depth of the Pareto layer equal to zero. The sum of the resource of the elements of this layer is greater than or equal to the value of the volume of the knapsack. Based on the structure, the form of the optimal admissible subset with the maximum total value of the weight of its elements is determined. It is shown that at a certain stage the developed algorithm includes the solution of a number of knapsack subtasks. Their knapsack volumes are smaller than in the original problem with input data sets. The definition of the redundancy of the set of initial data and the condition for the existence of redundancy for a given value of the depth of non-dominance of the Pareto layer are introduced.

**Keywords:** knapsack problem; multicriteria optimisation; Pareto set; Pareto layer.

### Введение

В данной работе рассмотрена задача о ранце с множеством объектов  $N$  и заданным объемом  $T$ . Любому элементу  $n_i$  из множества начальных данных соответствуют две характеристики – величина используемого ресурса  $t_i$  и вес  $w_i$ . Допустимым будет такое подмножество элементов из  $N$ , чья суммарная величина ресурса не превосходит объем ранца  $T$ , но при добавлении в подмножество любого элемента из  $N$  становится больше  $T$ . Среди всех допустимых подмножеств требуется найти оптимальное подмножество  $Q$  с максимальным суммарным значением веса элементов  $w_i$ . Пусть число элементов в множестве  $N$  равно  $r$ . Тогда формальное описание задачи о ранце можно представить следующим образом:

$$f(x) = \sum_{i=1}^r w_i x_i \rightarrow \max, \sum_{i=1}^r t_i x_i \leq T, x_i \in \{0, 1\},$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_r), w_i > 0, 0 < t_i \leq T, i = 1, \dots, r.$$

Методы решения указанной оптимизационной задачи представлены в работах [1; 2]. Предложенные в них способы основаны на различных алгоритмах перебора элементов множества начальных данных.

В статьях [3–5] авторы рассмотрели различные аспекты создания двухкритериальной модели решения задачи о ранце. Основная идея этих работ – гипотеза о возможности разработки алгоритмов, реализующих упорядочивание элементов начального множества  $N$  по приоритету их вхождения в оптимальное подмножество. В этом случае ставится задача определить условия избыточности множества начальных данных, т. е. существование в нем элементов, которые при заданном значении объема ранца не могут быть включены в оптимальное подмножество. Множество начальных данных  $N$  может содержать достаточно большое число элементов, но при их упорядочивании по указанному приоритету возможна следующая ситуация. Начиная с некоторой группы, все оставшиеся элементы из множества  $N$  могут не рассматриваться при формировании оптимального подмножества. Построение модели задачи о ранце выполнялось на основе двух характеристик каждого элемента из множества начальных данных  $N$  – ресурса и веса. Эти характеристики можно считать значениями критериев в двухкритериальном пространстве предпочтений. Введение отношения доминирования в работе [3] между элементами множества  $N$  позволило в последующих исследованиях [4; 5] определить структуру оптимального подмножества. В настоящей работе предложен алгоритм нахождения набора допустимых подмножеств при глубине недоминирования заданного паретовского слоя, равной нулю, а также представлен вид оптимального подмножества.

### Построение допустимого подмножества при глубине недоминирования слоя $S$ , равной нулю

В работе [3] между любыми двумя элементами  $n_1 = (t_1, w_1)$  и  $n_2 = (t_2, w_2)$  из множества  $N$  введено транзитивное отношение доминирования, сформулированное следующим образом.

**Определение 1.** Элемент  $n_1$  доминирует элемент  $n_2$  тогда и только тогда, когда  $t_1 \leq t_2$ ,  $w_1 \geq w_2$ ,  $(t_1, w_1) \neq (t_2, w_2)$ .

**Определение 2.** Паретовский слой с номером  $m$ ,  $m > 1$  (обозначим его через  $P_m$ ), представляет собой совокупность недоминируемых элементов на множестве  $N^{m-1} = N \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} P_i$ , где  $P_i$  – паретовский слой с номером  $i$ . Множество Парето, определенное на всем множестве  $N$ , является первым паретовским слоем  $P_1$ .

Таким образом, для каждого элемента, входящего во второй и последующие паретовские слои, существует хотя бы один элемент из предыдущего слоя, который его доминирует.

В работе [5] представлена структура оптимального подмножества в задаче о ранце, имеющая следующий вид:

$$Q = \bigcup_{j=1}^g P_j \cup Q_{g+1}, \quad (1)$$

где  $P_j$  – набор первых паретовских слоев, на которые разбивается множество начальных данных  $N$  в двухкритериальном пространстве. Число паретовских слоев в (1) зависит от величины ранца  $T$  и отношения доминирования между элементами соседних паретовских слоев. Следующий  $g + 1$  паретовский слой не может быть включен в оптимальное подмножество, поскольку сумма ресурса элементов заданной группы паретовских слоев, начиная со слоя  $P_{g+1}$ , больше либо равна

$$T_{\text{ост}} = T - \sum_{(t_k, w_k) \in \bigcup_{j=1}^g P_j} t_k.$$

Координатами каждого элемента  $n_i$  в пространстве предпочтений являются ресурс  $t_i$  и вес  $w_i$ ,  $P_1$  – множество Парето на множестве начальных данных  $N$ . Множество  $Q_{g+1}$  представляет собой решение задачи о ранце  $Z_{g+1}$  с множеством начальных данных  $N_s$ , которое включает в себя элементы всех паретовских слоев, начиная со слоя  $S$ , имеющего номер  $g + 1$ . Паретовский слой  $S$  представляет собой множество Парето на множестве  $N_s$ . Объем ранца в задаче  $Z_{g+1}$  равен величине  $T_{\text{ост}}$ .

Далее будем использовать введенное в работе [5] понятие величины глубины недоминирования паретовского слоя  $S$ , показывающее число  $f$  последующих паретовских слоев  $S + 1, \dots, S + f$ , которые содержат элементы, находящиеся в паретовском отношении хотя бы с одним элементом слоя  $S$ . Если эта величина равна 0, то во всех последующих слоях не существует элементов, находящихся в паретовском отношении с элементами слоя  $S$ .

Величину  $F$  определим как сумму координаты  $t_i$  всех элементов паретовских слоев  $S, S + 1, \dots, S + f$ . Далее будем считать, что значение  $F \geq T_{\text{ост}}$  при любом значении глубины недоминирования слоя  $S$  [5]. В данной работе представлен алгоритм нахождения оптимального подмножества  $Q_{g+1}$  в задаче о ранце  $Z_{g+1}$  в частном случае, когда глубина недоминирования слоя  $S$  равна 0. В соответствии с (1) это позволяет определить решение первоначальной задачи о ранце с множеством объектов  $N$  и заданным объемом ранца  $T$ . При глубине недоминирования слоя  $S$ , равной нулю, величина  $F$  представляет собой сумму ресурса  $t$  элементов только слоя  $S$ , и эта сумма больше либо равна  $T_{\text{ост}}$ .

В работе [4] показано, что существует набор допустимых подмножеств (обозначим его через  $W$ ), включающий в себя оптимальное подмножество задачи  $Z_{g+1}$  и удовлетворяющий следующему требованию. При построении любого подмножества  $H_j$  из  $W$ ,  $j = 1, 2, \dots, h$ , где  $h$  – число допустимых подмножеств в  $W$ , должно выполняться следующее условие. На каждом очередном  $k$ -м шаге построения всех подмножеств  $H_j$  выбор его очередного элемента должен осуществляться произвольным образом из соответствующего множества  $X_{j,k}$ , которое представляет собой множество Парето на наборе начальных данных  $N_s'' = N_s \setminus Y$ , где  $Y$  – набор уже включенных в  $H_j$  элементов из  $N_s$ . Следовательно, при выборе первого элемента любого  $H_j$  из  $W$  множеством  $X_{j,1}$  является слой  $S$ , представляющий собой множество Парето на множестве начальных данных  $N_s$ . Тогда первый элемент каждого из допустимого подмножества  $H_j$  должен принадлежать только слою  $S$ . В данной работе представлен алгоритм построения множества всех допустимых подмножеств, первым элементом которых является каждый элемент слоя  $S$ . Тогда  $W = \bigcup_{i=1}^s A_i$ ,

где  $s$  – число элементов в слое  $S$ , а  $A_i$  – множество допустимых подмножеств, первым элементом

которых является определенный  $i$ -й элемент слоя  $S$ . Предложен способ нахождения оптимального подмножества  $Q_{g+1}$  в задаче о ранце  $Z_{g+1}$ , которое принадлежит  $W$ .

Из элементов слоя  $S$  формируется последовательность  $G$  путем их упорядочивания по неубыванию ресурса  $t_i$ . Каждый его элемент  $r_i$  имеет номер  $i$ , изменяющийся от 1 до  $s$ . Пусть в допустимых подмножествах первым элементом является  $r_1$  с наименьшим значением ресурса  $t_i$ . По предположению сумма ресурсов элементов слоя  $S$  больше или равна  $T_{\text{ост}}$ .

**Утверждение 1.** Если элемент  $r_1$  последовательности  $G$  больше величины  $T_{\text{ост}}$ , то все элементы больше величины объема ранца  $T_{\text{ост}}$ , и никакое допустимое подмножество в задачи  $Z_{i+1}$  не может быть построено.

**Доказательство.** Из упорядоченности элементов слоя  $S$  по возрастанию ресурса  $t$  следует, что все его элементы, начиная со второго, превосходят первый элемент или равны ему, а также превышают величину  $T_{\text{ост}}$ . Если элемента с ресурсом  $t$ , меньшего величины  $T_{\text{ост}}$  либо равного ей, в слое  $S$  не существует, то ни один элемент слоя  $S$  не может войти в допустимое множество. Поскольку глубина недоминирования слоя  $S$  равна 0, любой элемент слоя  $S$  доминирует все элементы слоя  $S + 1$ , а также по транзитивности отношения предпочтения и определению паретовских слоев доминирует элементы последующих слоев, на которые разбивается  $N_s$ . Тогда элементы слоев, начиная с  $S + 1$ , имеют большее значение ресурса  $t$ , чем величина  $T_{\text{ост}}$ . Следовательно, ни одно допустимое подмножество в задаче  $Z_{g+1}$  не может быть построено. Утверждение доказано.

Таким образом, при выполнении условий утверждения 1 множество  $Q_{g+1}$  пусто и оптимальное подмножество  $Q$  в задаче о ранце с множеством начальных данных  $N$  и объемом ранца  $T$  представляет собой в соответствии с (1) объединение паретовских слоев.

Далее сформируем допустимые подмножества, первым элементом которых является  $r_1$ . Пусть у элемента  $r_1$  последовательности  $G$  значение ресурса  $t_1 \leq T_{\text{ост}}$ . Элемент  $r_1$  включается в формируемое допустимое подмножество  $H_{1,1}$ , и определяется величина  $T_1 = T_{\text{ост}} - t_1$ . Первый индекс в обозначении допустимого подмножества указывает на то, что оно относится к группе подмножеств, первым элементом которых является  $r_1$ . Второй индекс обозначает порядковый номер подмножеств, формируемых внутри данной группы. Выбор второго элемента подмножества  $H_{1,1}$  осуществляется из упорядоченного множества  $X_{1,2}^1$ , которое представляет собой паретовские элементы на множестве начальных данных  $N_s \setminus \{r_1\}$ . Первый нижний индекс множества  $X_{1,2}^1$  совпадает со значением второго индекса в обозначении допустимых подмножеств, второй нижний индекс – номер шага, который требуется совершить при формировании конкретного подмножества. Верхний индекс совпадает с первым индексом. По условию глубина недоминирования слоя  $S$  равна 0 и каждый элемент слоя  $S$  доминирует любой элемент из последующих паретовских слоев. Тогда  $X_{1,2}^1$  включает в себя все элементы слоя  $S$ , кроме  $r_1$ , и является упорядоченным по неубыванию ресурса  $t$  входящих в него элементов. Если ресурс второго элемента  $r_2$  последовательности  $G$  имеет значение, меньшее либо равное  $T_1$ , то он включается в  $H_{1,1}$ , после чего определяется новое значение  $T_2$ . На данном шаге множества  $X_{1,3}^1$  представляют собой все элементы последовательности  $G$ , начиная с третьего элемента  $r_3$ . Выбирается следующий элемент  $r_3$ , и если его ресурс меньше либо равен  $T_2$ , то элемент включается в формируемое подмножество.

**Утверждение 2.** При последовательном включении элементов  $G$  в формируемое подмножество  $H_{1,1}$  в слое  $S$  существует элемент  $r_i$ , ресурс которого на  $i$ -м шаге будет больше значения соответствующей величины  $T_{i-1}$  либо равен ему. Тогда никакие элементы последующих слоев не могут быть включены в  $H_{1,1}$  и  $H_{1,1} = \{r_1, r_2, \dots, r_{i-1}\}$  представляет собой допустимое подмножество в задаче  $Z_{g+1}$ .

**Доказательство.** По условию сумма всех элементов слоя  $S$  по критерию ресурса  $t$  не меньше  $T_{\text{ост}}$ . При последовательном включении элементов  $G$  в подмножество  $H_{1,1}$  такой элемент  $r_i$  обязательно существует. Требуется показать, что все остальные элементы множества  $N_s$  не могут дополнить подмножество  $H_{1,1}$ . Пусть элемент  $r_i \geq T_{i-1}$ . Если  $r_i = T_{i-1}$ , то  $r_i$  включается в  $H_{1,1}$ , объем ранца полностью исчерпан и построение  $H_{1,1}$  закончено. Пусть  $r_i > T_{i-1}$ . По условию глубина доминирования слоя  $S$  равна 0. Тогда каждый элемент слоя  $S$  доминирует как элементы слоя  $S + 1$ , так и элементы всех последующих паретовских слоев. Вследствие упорядоченности оставшиеся элементы последовательности  $G$ , если такие существуют, а также элементы всех последующих слоев имеют большее значение ресурса  $t$ , чем величина  $T_{i-1}$ . Тогда ни один из них не может быть включен в  $H_{1,1}$ , и его построение закончено. Утверждение доказано.

Пусть  $r_s$  – последний элемент последовательности  $G$ . Предположим, что значение ресурса  $t_s$  элемента  $r_s$  является равным величине  $T_{i-1}$ . Следовательно, формирование подмножества  $H_{1,1}$  заканчивается добавлением элемента  $r_s$ . В этом случае справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 3.** Допустимое подмножество  $H_{1,1}$ , включающее в себя все элементы слоя  $S$ , является решением задачи о ранце  $Z_{g+1}$ .

**Доказательство.** Элемент  $r_s$  является последним добавленным элементом подмножества  $H_{1,1}$ . Объем ранца  $T_{\text{ост}}$  после включения  $r_s$  в  $H_{1,1}$  оказался полностью исчерпанным, и никакой элемент последующих слоев не может войти в это подмножество. Тогда  $H_{1,1}$  содержит все элементы слоя  $S$  и является единственным подмножеством, которое включает в себя элементы только этого слоя. Формирование допустимого подмножества из элементов слоя  $S+1$  не является необходимым, так как оптимальное подмножество  $Q_{g+1}$  принадлежит набору подмножеств  $W$  и его формирование должно начинаться с элемента слоя  $S$ . Формирование новых допустимых подмножеств путем замены некоторого элемента в  $H_{1,1}$  на элемент  $r_k$  из последующих паретовских слоев возможно, если ресурс  $t$  элемента  $r_k$  не превосходит ресурс заменяемого элемента подмножества  $H_{1,1}$ . Поскольку глубина недоминирования слоя  $S$  равна 0, по определению 1 такой элемент  $r_v$  может существовать в паретовских слоях с номерами, большими, чем  $S$ . Однако в этом случае вес  $w_k$  элемента  $r_k$  имеет строго меньшее значение, чем значение заменяемого элемента. Следовательно, любая подобная замена приводит к построению подмножества с суммарным весом, меньшим, чем вес подмножества  $H_{1,1}$ . Тогда  $H_{1,1}$  представляет собой допустимое подмножество с максимальным суммарным значением веса. Утверждение доказано.

Далее будем предполагать, что допустимое подмножество  $H_{1,1}$  не совпадает с паретовским слоем  $S$ . Это означает, что существуют элементы в слое  $S$ , которые не могут войти в подмножество  $H_{1,1}$ . Тогда получаем, что величина  $F > T_{\text{ост}}$ .

**Утверждение 4.** Пусть глубина недоминирования слоя  $S$  равна 0 и  $F > T_{\text{ост}}$ . Тогда все допустимые подмножества из  $W$  и, следовательно, любое оптимальное решение задачи  $Z_{g+1}$  содержат только элементы слоя  $S$ .

**Доказательство.** На каждом шаге построения любого допустимого подмножества  $H_{i,j}$  из набора  $W$ , который включает в себя оптимальное решение задачи  $Z_{g+1}$ , выбор очередного элемента осуществляется только из паретовских множеств  $X_{j,k}^i$ , где  $k$  – номер шага [5]. Каждое множество  $X_{j,k}^i$  представляет собой множество Парето на наборе начальных данных  $N_s'' = N_s \setminus Y$ , где  $Y$  – набор уже включенных в формируемое подмножество элементов из  $N_s$ . Первым множеством  $X_{1,1}^1$  (верхний индекс появляется на следующем шаге, когда из  $X_{1,1}^1$  выбран первый элемент  $H_{1,j}$ ) для всех допустимых подмножеств из  $W$  является слой  $S$ . По условию глубина недоминирования слоя  $S$  равна 0 и, следовательно, каждый элемент слоя  $S$  доминирует любой элемент из последующих паретовских слоев, на которые разбивается множество начальных данных  $N_s$ . Таким образом, появление на каком-либо шаге в паретовских множествах  $X_{j,k}^i$  элементов, отличных от элементов слоя  $S$ , возможно в случае, когда все элементы этого слоя уже включены в формируемое допустимое подмножество. Согласно условию сумма ресурса  $t$  у элементов слоя  $S$  больше, чем величина  $T_{\text{ост}}$ . Тогда невозможно сформировать допустимое подмножество, которое включало бы в себя все элементы слоя  $S$ . Следовательно, элементы всех паретовских множеств  $X_{j,k}^i$ , которые требуются при формировании допустимых подмножеств из  $W$ , принадлежат слою  $S$ . Утверждение доказано.

### Построение группы допустимых подмножеств на основе порождающего подмножества $H_{1,1}$

При формировании подмножества  $H_{1,1}$  элементы паретовских множеств  $X_{1,k}^1$  упорядочены по возрастанию ресурса  $t$ . Каждому  $X_{1,k}^1$  на  $k$ -м шаге формирования допустимого подмножества  $H_{1,1}$  соответствует величина  $T_{k-1} = T_{\text{ост}} - \sum_{p=1}^{k-1} t_p$ , где  $t_p$  – ресурс элементов, уже включенных в  $H_{1,1}$ . Допустимое подмножество назовем порождающим, если на его основе могут быть построены новые допустимые подмножества, каждое из которых содержит некоторую группу его элементов. Будем формировать допустимые подмножества, включающие в себя наборы элементов из  $H_{1,1}$ . Построение допустимого подмножества  $H_{1,1}$  представляло собой на каждом шаге в  $X_{1,k}^1$  выбор лишь элемента с минимальным номером в множестве  $X_{1,k}^1$ . Далее предложен алгоритм построения допустимых подмножеств  $H_{1,j}$ , первым элементом которых является элемент  $r_1$  из  $G$ , и представлена их структура. В соответствии с утверждением 4 все остальные элементы принадлежат слою  $S$ . Основой для реализации алгоритма является группа элементов соответствующих множеств  $X_{1,k}^1$ , элементы которых принадлежат слою  $S$ .

В случае когда число элементов в  $H_{1,1}$  больше 1, рассмотрим паретовское множество  $X_{1,d}^1$ , которое формируется после включения в допустимое подмножество  $H_{1,1}$  его предпоследнего элемента  $r_{d-1}$ . Исходя из определения  $X_{1,d}^1$  и того факта, что глубина недоминируемости слоя  $S$  равна 0,  $X_{1,d}^1$  включает в себя все элементы последовательности  $G$  после  $r_{d-1}$ . Множеству  $X_{1,d}^1$  соответствует величина

$T_{d-1} = T_{\text{ост}} - \sum_{k=1}^{d-1} t_k$ . Пусть в  $X_{1,d}^1$  существует группа  $V_{1,d}^1$  элементов  $r_d, r_{d+1}, \dots, r_{d+g}$ , обладающих следующим свойством. Величина  $T_{d-1}$  меньше ресурса  $t$  любого элемента из этой группы или равна ему, а элемент  $r_{d+g+1}$  превосходит эту величину, либо элемент  $r_{d+g}$  является последним элементом  $G$ . Все остальные элементы множества  $X_{1,d}^1$  с большими номерами, если такие существуют, вследствие их упорядоченности по возрастанию ресурса  $t$  также превосходят величину  $T_{d-1}$ . Первый элемент  $r_d$  из  $X_{1,d}^1$  включен в подмножество  $H_{1,1}$ . Ресурс этого элемента еще не превосходит величину  $T_{d-1}$ , а ресурс всех последующих элементов  $G$  уже превосходит величину  $T_d$ .

Далее рассматриваются все остальные элементы группы  $V_{1,d}^1$  из  $X_{1,d}^1$  после  $r_d$ . Каждый такой элемент формирует новое допустимое подмножество путем замены собой последнего элемента  $r_d$  из  $H_{1,1}$  и включения в новое подмножество всех остальных элементов из  $H_{1,1}$ . Справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 5.** После замены каждым элементом из  $V_{1,d}^1$ , начиная с  $r_{d+1}$ , последнего элемента  $r_d$  из  $H_{1,1}$  в множестве  $N_s$  не существует элемента, которым можно дополнить любое из формируемых допустимых подмножеств, и их построение закончено.

**Доказательство.** В каждом новом допустимом подмножестве последний элемент  $r_d$  подмножества  $H_{1,1}$  заменяется на элементы множества  $X_{1,d}^1$  с номерами, начиная с  $r_{d+1}$ . Тогда полученные после замены значения величин  $r_d$  станут меньше значения  $T_d$ , полученного после формирования  $H_{1,1}$ , либо равны ему. Из способа построения подмножества  $H_{1,1}$  следует, что ресурс элемента  $r_{d+1}$  превосходит величину  $T_d$ . На следующем шаге формирования каждого из новых подмножеств соответствующие паретовские множества  $X_{1,d+1}^1$  содержат элемент  $r_d$  и элементы со значением ресурса, который превосходит ресурс элемента  $r_{d+1}$  либо равен ему. Все эти элементы будут превосходить и величины  $T_d$ . Поскольку глубина недоминируемости слоя  $S$  равна 0, любой из элементов последующих паретовских слоев имеет значение ресурса, не меньшее, чем значение ресурса элементов из множества  $X_{1,d+1}^1$ . Следовательно, ни один из элементов из  $X_{1,d+1}^1$  и всех последующих паретовских слоев не может войти ни в одно из вновь сформированных подмножеств, и их построение закончено. Утверждение доказано.

Таким образом, все допустимые подмножества, которые включают в себя первые элементы  $r_1, \dots, r_{d-1}$  из  $H_{1,1}$ , построены.

Предположим, что  $d_{1,1}$  больше 2. Рассмотрим элемент  $r_{d-2}$  подмножества  $H_{1,1}$  с номером, меньшим на единицу. В результате включения элемента  $r_{d-2}$  в  $H_{1,1}$  паретовское множество  $X_{1,d-1}^1$  содержит все элементы последовательности  $G$  после  $r_{d-2}$ . Этому множеству соответствует величина  $T_{d-2} = T_{\text{ост}} - \sum_{k=1}^{d-2} t_k, k=1, \dots, d-2$ . Как и ранее, предположим, что в  $X_{1,d-1}^1$  существует набор элементов  $V_{1,d-1}^1$  с номерами, большими, чем номер элемента  $r_{d-2}$ . Это  $r_{d-1}, r_d, r_{d+1}, \dots, r_{d+g}$ , обладающие следующим свойством. Величина  $T_{d-2}$  меньше значения ресурса  $t$  любого элемента из этого набора или равна ему, а элемент  $r_{d+g+1}$  превосходит эту величину, или элемент  $r_{d+g}$  является последним элементом последовательности  $G$ . Построение каждого из новых допустимых подмножеств, включающих в себя первые  $d-2$  элемента из  $H_{1,1}$ , состоит в следующем. На множестве элементов  $V_{1,d-1}^1$  требуется найти все его подмножества, суммарное значение ресурса  $t$  элементов которого не должно превышать величину  $T_{d-2}$ .

Процесс построения допустимых подмножеств можно представить следующим образом. Определим величину  $E = T_{d-2}$ . Пусть на множестве  $V_{1,d-1}^1$  сформированы отдельные группы элементов, чье суммарное значение ресурса  $t$  элементов, входящих в любую из групп, не превышает величину  $T_{d-2}$ . Каждое из полученных подмножеств можно представить как допустимое подмножество в подзадаче о ранце  $L^1$  с объемом, равным  $E$ . Множество начальных данных этой подзадачи включает в себя все элементы группы  $V_{1,d-1}^1$ , которая одновременно является и первым множеством паретовских элементов  $X_{1,1}^L$  для всех допустимых подмножеств подзадачи  $L^1$ . Элементы из  $V_{1,d-1}^1$  рассматриваются в порядке возрастания их номеров в последовательности  $G$ . Каждый отдельный элемент из  $V_{1,d-1}^1$  может являться первым элементом нового порождающего допустимого подмножества в подзадаче о ранце  $L^1$ .

Для формирования допустимых подмножеств в подзадаче о ранце  $L^1$  с объемом ранца  $E$  выполняются следующие действия. Формируются все допустимые подмножества. Первыми элементами в каждом из них становится очередной элемент из множества Парето на множестве  $N_E$ , которое совпадает с множеством  $V_{1,d-1}^1$ . На основе данных подмножеств формируются новые допустимые подмножества в подзадаче о ранце. Если число элементов в каждом из них больше либо равно 2, то рассматривается предпоследний элемент подмножества и далее все последующие элементы с номером, меньшим на единицу. При этом новые допустимые подмножества данной подзадачи формируются либо заменой последнего

элемента построенного подмножества, либо построением допустимых подмножеств подзадач второго уровня ( $L^2$ ). Каждое допустимое подмножество подзадачи формирует новое подмножество в задаче  $Z_{g+1}$  путем включения его элементов после первых  $d - 2$  элементов подмножества  $H_{1,1}$ .

Процесс формирования допустимых подмножеств в задаче  $Z_{g+1}$  продолжается следующим образом. Выполняется переход к каждому следующему элементу  $r_{d-m}$  с меньшим номером из  $H_{1,1}$ ,  $m = 3, \dots, d - 1$ , до тех пор, пока не будет достигнут первый элемент  $r_1$  подмножества  $H_{1,1}$ . Соответствующие этим элементам множества  $X_{1,d-(m-1)}^1$  представляют собой все элементы последовательности  $G$  после  $r_{d-m}$  и  $T_{d-m} = T_{\text{ост}} - \sum_{k=1}^{d-m} t_k$ . На каждом шаге определяется группа элементов  $V_{1,d-(m-1)}^1$ , соответствующая значению  $T_{d-m}$ . Кроме того, выполняются все операции, требуемые для формирования новых допустимых подмножеств в подзадачах о ранце на заданных множествах начальных данных  $V_{1,d-(m-1)}^1$  с объемом ранца  $T_{d-m}$ .

### Построение всех допустимых подмножеств из множества $W$

Таким образом, сформированы допустимые подмножества, у которых первыми двумя элементами являются  $r_1$  и  $r_2$ . Однако требуется построить все подмножества, у которых первым является элемент  $r_1$ . Соответствующее паретовское множество включает в себя все элементы из  $N_s$ , за исключением  $r_1$ . По утверждению 4 достаточно включить в это паретовское множество элементы последовательности  $G$ , начиная с  $r_2$ . Необходимо последовательно рассмотреть в качестве второго элемента новых допустимых порождающих подмножеств все его элементы. Данному множеству соответствует величина  $T_1 = T_{\text{ост}} - t_1$ , где  $t_1$  – ресурс элемента  $r_1$ . Определяется группа элементов  $U_1$  последовательности, начиная с  $r_2$ , каждый элемент которой не превосходит  $T_1$ . Формируется группа порождающих допустимых подмножеств  $H_{1,j}$  задаче  $Z_{g+1}$ ,  $j = 2, \dots, z$ , где  $z$  – число элементов в  $U$ , вторым элементом которых является каждый элемент из  $U$ . Элемент  $r_2$  уже был выбран при формировании порождающего подмножества  $H_{1,1}$ .

При формировании какого-либо порождающего подмножества  $H_{1,j}$  может создаться ситуация, когда на некотором  $k$ -м шаге очередное паретовское множество  $X_{j,k}^1$  содержит элементы с номерами в последовательности  $G$ , как большими, так и меньшими, чем номер последнего включенного в  $H_{1,j}$  элемента. Это связано с тем, что любое паретовское множество  $X_{j,k}^1$ , исходя из способа его формирования, на каждом шаге содержит все элементы из  $G$ , кроме уже включенных в  $H_{1,j}$ . Тогда если, например, вторым элементом формируемого подмножества является  $r_{j+1}$  с номером, большим двух, то при выборе следующего элемента в паретовское множество  $X_{j,3}^1$  войдет и элемент  $r_2$ .

Покажем, что элементы с меньшими номерами на следующем шаге можно не рассматривать. При построении допустимых подмножеств  $H_{1,j}$ , первым элементом которых является  $r_1$ , каждый элемент группы  $U_1$  включается в отдельное формируемое порождающее подмножество и рассматривается в порядке возрастания их номеров. Для каждого такого отдельного элемента формируются все возможные допустимые подмножества из элементов, имеющих большие номера. В частности, первым был выбран элемент  $r_2$  и сформировано допустимое подмножество  $H_{1,1}$ . На его основе определялись подзадачи о ранце и построены все допустимые подмножества в задаче  $Z_{g+1}$  из элементов, входящих в соответствующие множества  $V_{1,d-(m-1)}^1$ , вторым элементом которых является  $r_2$ . Все элементы, входящие в эти подмножества, имеют номера, большие, чем  $r_2$ . Тогда при построении подмножеств, вторым элементом которых является  $r_3$ , не требуется рассмотрения элемента  $r_2$ , так как все они были построены ранее. Предположим, что на некотором шаге в создаваемое подмножество  $S$  включен элемент  $r_k$  с номером, меньшим, чем номер последнего добавленного элемента  $r_p$ . При этом сумма значений ресурса  $t$  у группы элементов подмножества  $S$  еще не превысила величину  $T_{\text{ост}}$ . Ранее, начиная с элемента  $r_k$ , были сформированы из элементов с большими номерами все возможные группы элементов, из которых состоят уже имеющиеся допустимые подмножества. К ним относятся и группа, входящая в подмножество  $S$ . Следовательно, для построения новых допустимых подмножеств  $H_{1,j}$  требуется рассматривать на каждом шаге только элементы из множества  $X_{j,k}^1$  с номерами, большими, чем номер последнего включенного в  $H_{1,j}$  элемента.

Сформулируем утверждение о достаточном условии, при выполнении которого заканчивается формирование допустимого порождающего подмножества  $H_{1,j}$ .

**Утверждение 6.** Пусть после включения очередного элемента на некотором  $k$ -м шаге в подмножество  $H_{1,j}$  получено паретовское множество  $X_{j,k}^1$ , все элементы которого принадлежат слою  $S$ . Соответствующее ему значение величины  $T_k = T_{\text{ост}} - \sum_{p=1}^k t_p$ , где  $t_p$  – значение ресурса  $t$  у  $p$ -го элемента  $H_{1,j}$ .

Если ресурс  $t$  элемента  $q$  с минимальным номером среди рассматриваемых на  $(k + 1)$ -м шаге элементов паретовского множества  $X_{j,k}^1$  больше величины  $T_k$ , то построение  $H_{1,j}$  закончено.

**Доказательство.** По утверждению 4 все элементы допустимого подмножества  $H_{1,j}$  принадлежат слою  $S$ . Из упорядоченности элементов этого слоя по возрастанию ресурса  $t$  следует, что все элементы из множества  $X_{j,k+1}^1$ , начиная с элемента  $q$ , превосходят величину  $T_k$ . Тогда ни с одного элемента этого слоя нельзя продолжить формирование подмножества  $H_{1,j}$ , и его построение закончено. Утверждение доказано.

После формирования любого порождающего подмножества  $H_{1,j}$  построение на его основе новых допустимых подмножеств в задаче  $Z_{g+1}$  начинается с возможной замены последнего элемента. Далее согласно ранее описанному алгоритму для подмножества  $H_{1,1}$  последовательно определяются подзадачи о ранце с объемом  $T_{d-m}$ ,  $m = 2, \dots, d - 1$ , и относящиеся к этому объему наборы элементов  $V_{j,d-(m-1)}^1$ . Каждое подмножество подзадачи формирует новое подмножество в задаче  $Z_{g+1}$  путем включения его элементов после соответствующей группы элементов из  $H_{1,j}$ . Утверждение 6 есть также условие завершения построения допустимых подмножеств в подзадачах о ранце на соответствующих паретовских множествах  $V_{j,d-(m-1)}^1$ .

Для нахождения оптимального подмножества в задаче  $Z_{g+1}$  требуется сформировать множество  $W$  допустимых подмножеств, у которых первым элементом является каждый элемент слоя  $S$ . Далее в качестве первых элементов формируемых порождающих подмножеств последовательно рассматриваются второй, третий и все последующие элементы из  $G$  вместе с соответствующими группами элементов  $U_i$ . Пусть требуется сформировать допустимые подмножества, первыми элементами которых являются некоторые элементы с номерами  $r_i$ ,  $i > 1$ . Соответствующие этим элементам паретовские множества состоят из элементов слоя  $S$  как с меньшими, так и с большими номерами в последовательности  $G$ . Однако при нахождении новых допустимых порождающих подмножеств требуется, как было показано ранее, на каждом шаге рассматривать только элементы с номерами, большими, чем номер последнего включенного в формируемое подмножество элемента.

Кроме того, если некоторый элемент  $r_i$  имеет значение ресурса  $t_i$ , большее, чем величина  $T_{\text{ост}}$ , то ни  $r_i$ , ни остальные элементы последовательности  $G$  с большими номерами не могут быть первыми элементами новых допустимых порождающих подмножеств.

При формировании порождающего подмножества  $H_{i,1}$ , начиная с элемента  $r_i$ , в него включаются последовательно элементы из  $G$ , пока их суммарное значение ресурса  $t$  не превысит объем ранца  $T_{\text{ост}}$  или не исчерпаются все элементы последовательности. Далее на основе  $H_{i,1}$  в соответствии с ранее описанным алгоритмом для подмножества  $H_{i,1}$  формируются все возможные допустимые подмножества, первым элементом которых является  $r_i$ .

Пусть формируется новое допустимое подмножество  $H_{n,1}$ , первым элементом которого является некоторый элемент последовательности  $r_n$ ,  $n < s$ . Предположим, что при последовательном включении в  $H_{n,1}$  элементов  $r_n, r_{n+1}, \dots, r_s$  на некотором  $h$ -м шаге в него войдет последний элемент  $r_s$  из  $G$ . Пусть величина  $T_h = T_{\text{ост}} - \sum_{k=n}^s t_k > 0$ , где  $t_k$  – ресурс  $t$  элемента  $r_k$ , а  $s$  – число членов последовательности  $G$ . Если величина  $T_h$  меньше ресурса  $t_1$  первого элемента  $r_1$  из  $G$ , то формирование допустимого подмножества закончено. В ином случае справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 7.** Пусть величина  $T_k = T_{\text{ост}} - \sum_{k=n}^s t_k \geq t_1$ . Тогда все допустимые подмножества, включающие в себя группу элементов  $D = r_n, r_{n+1}, \dots, r_s$ , уже существуют, и новое допустимое подмножество не может быть построено.

**Доказательство.** Согласно условию сумма ресурса  $t$  элементов слоя  $S$  больше величины  $T_{\text{ост}}$ . Тогда для величины  $T_h \geq t_1$  существует хотя бы одна группа элементов последовательности  $G$ , позволяющая закончить формирование допустимого подмножества. Однако все элементы с номерами, меньшими, чем  $n$ , рассмотрены ранее в качестве первых элементов всех возможных допустимых подмножеств. Следовательно, допустимые подмножества, включающие элементы последовательности  $G$  с большими номерами, в том числе и группы элементов, начинающиеся с элемента  $r_n$ , уже сформированы. Поскольку  $T_h \geq t_1$ , в формируемое подмножество могут включаться элементы с номерами, равными  $r_1$  и при необходимости большими, чем  $r_1$ . В результате получим на некотором шаге подмножество, совпадающее по составу с построенными допустимыми подмножествами, но имеющее другой порядок следования элементов. Тогда новые допустимые подмножества, у которых первый элемент есть  $r_n$ , не могут быть построены. Утверждение доказано.

**Утверждение 8.** Пусть величина  $T_k = T_{\text{ост}} - \sum_{k=n}^s t_k \geq t_1$ . Если в качестве первых элементов допустимых подмножеств рассмотреть все элементы с номерами, большими, чем  $n$ , то новые допустимые подмножества не могут быть сформированы.

**Доказательство.** Пусть первым элементом нового допустимого подмножества является любой из элементов с номером  $n_1$ , большим, чем  $n$ . Тогда для этого подмножества после включения в него последнего элемента последовательности величина  $T_i = T_{\text{ост}} - \sum_{k=n_1}^s t_k$  будет больше ресурса  $t$  первого элемента  $r_1$  из  $G$ . Это и доказывает справедливость утверждения 8.

Утверждения 7 и 8 справедливы и при решении подзадач о ранце для соответствующих им наборов начальных данных  $V_{j,k}^i$ , являющихся подмножествами слоя  $S$ , если при этом достигается последний элемент последовательности  $G$ .

### Структура допустимых подмножеств

Будем считать, что число элементов  $d_{i,j} > 1$  во всех подмножествах  $H_{i,j}$ . Далее в тех формулах, где величина  $d_{i,j}$  появляется в индексах при обозначении подмножеств либо других величин, определим  $d_{i,j}$  через  $u$ . Как следует из вышеописанного, предложены два способа построения допустимых подмножеств, включающих в себя элементы порождающего подмножества  $H_{i,j}$ .

1. При выполнении ранее указанных условий осуществляется замена последнего элемента подмножества  $H_{i,j}$  на последний элемент из группы  $V_{j,u}^i$ .

2. Нахождение допустимых подмножеств в подзадачах о ранце с объемом, равным  $T_{u-n}$ , и соответствующих множеств начальных данных  $V_{j,u-(m-1)}^i$ ,  $T_{u-m} = T_{\text{ост}} - \sum_{k=1}^{u-m} t_k$ , где  $t_k$  – значение ресурса  $t$  элементов  $r_k$ . Величина  $d_{i,j} - m$ , где  $m = 2, \dots, d_{i,j} - 2$ , – это число первых элементов подмножеств  $H_{i,j}$ , которые порождают конкретную подзадачу. У элемента  $r_k$  значение индекса представляет собой его номер в допустимом подмножестве  $H_{i,j}$ . Величина  $d_{i,j} - (m - 1)$ ,  $m = 2, \dots, u - 2$ , указывает на номер элемента в  $H_{i,j}$ , с которого начинается множество  $V_{j,u-(m-1)}^i$  для отдельной подзадачи. Реализация второго способа осуществляется при  $d_{i,j} > 3$ . При величине  $d_{i,j}$ , равной двум или трем, выполняется только первый способ построения допустимых подмножеств.

Для описания общего вида формируемых допустимых подмножеств в задаче  $Z_{i+1}$  процесс замены в первом пункте последнего элемента подмножеств  $H_{i,j}$  на элемент из группы  $V_{j,u}^i$  можно представить как подзадачу о ранце с объемом  $T_{u-1}$ . Множество начальных данных этой подзадачи представляет собой элементы группы  $V_{j,u}^i$ . Величина  $T_{u-1}$  такова, что по утверждению 5 для ее исчерпания достаточно ресурса единственного элемента из группы  $V_{j,u}^i$ . Следовательно, в данных подзадачах допустимые подмножества будут состоять из одного элемента.

Пусть  $z_i$  – число порождающих допустимых подмножеств  $H_{i,j}$  в случае, когда первым элементом является элемент  $r_i$  последовательности  $G$ . Обозначим через  $W_i$  множество допустимых подмножеств в задаче  $Z_{i+1}$ , содержащее этот элемент в качестве первого элемента:

$$W_i = \bigcup_{j=1}^{z_i} \bigcup_{m=1}^{p_j} \bigcup_{k=1}^{n_m} (O_{u-m} \cup D_{kmj}), \quad (2)$$

где  $D_{kmj}$  –  $k$ -е допустимое подмножество в  $m$ -й подзадаче о ранце при рассмотрении  $j$ -го порождающего подмножества  $H_{i,j}$ ;  $n_m$  – число допустимых подмножеств в  $m$ -й подзадаче о ранце при рассмотрении порождающего подмножества  $H_{i,j}$ ;  $p_j$  – число подзадач о ранце при рассмотрении порождающего подмножества  $H_{i,j}$ ;  $O_{u-m}$  – подмножество, содержащее первые  $d_{i,j} - m$  элементов подмножества  $H_{i,j}$ , соответствующие  $m$ -й подзадаче о ранце,  $m = 1, \dots, p_j$ .

Пусть последовательно рассмотрены все элементы  $G$  и сформированы допустимые подмножества, указанные элементы которых являются первыми. Множество допустимых подмножеств  $W$ , содержащее оптимальное подмножество  $Q_{i+1}$ , имеет вид

$$W = \bigcup_{k=1}^s W_i,$$

где  $s$  – число элементов в последовательности  $G$ ;  $W_i$  – множества допустимых подмножеств в соответствии с формулой (2). При выполнении условий утверждения 7 множество  $W$  включает в себя только

подмножества, первыми элементами которых являются элементы с номерами  $1, 2, \dots, n-1$ , где  $n-1$  – номер, на единицу меньший, чем номер элемента из утверждения 8. Если, начиная с некоторого номера  $i$ , элементы последовательности  $G$  имеют ресурс  $t_i$ , больший, чем величина  $T_{\text{ост}}$ , то соответствующие им множества  $W_i$  являются пустыми.

Частичным решением задачи  $Z_{g+1}$  назовем допустимое подмножество с максимальным суммарным весом на некоторой группе уже сформированных допустимых подмножеств. Каждое допустимое подмножество любой подзадачи о ранце формирует подмножество задачи  $Z_{g+1}$ , дополняя одну и ту же группу элементов, содержащую первые  $O_{u-m}$  элементов подмножества  $H_{i,j}$ . Пусть  $Y_m$  – оптимальное допустимое подмножество с максимальным суммарным весом в  $m$ -й подзадаче о ранце на подмножестве  $D_{k,m,j}$ ,  $k = 1, \dots, n_m$ . Тогда частичное решение  $Q_{i,j}^{ch}$  в задаче о ранце  $Z_{g+1}$  на всей группе допустимых подмножеств при рассмотрении  $j$ -го порождающего подмножества  $H_{i,j}$  имеет следующий вид:

$$Q_{i,j}^{ch} = \max_{m=1, p_j} (Y_m \cup O_{u-m}). \quad (3)$$

Следовательно, для нахождения частичного решения на группе допустимых подмножеств при рассмотрении  $j$ -го порождающего подмножества  $H_{i,j}$  достаточно определить оптимальные подмножества в соответствующих подзадачах о ранце.

Исходя из формул (2) и (3), частичное решение  $Q_{i,j}^{ch}$  задачи  $Z_{g+1}$ , представляющее собой допустимое подмножество с максимальным суммарным весом на всем множестве допустимых подмножеств  $W_i$ , имеет следующий вид:

$$Q_{ch}^{W_i} = \max_{j=1, z_i} Q_{i,j}^{ch}.$$

Таким образом, нахождение оптимального подмножества  $Q_{g+1}$  в задаче о ранце  $Z_{g+1}$  включает в себя решение подзадач с объемами ранца, меньшими, чем величина  $T_{\text{ост}}$ , и множеством начальных данных, являющихся подмножеством слоя  $S$ .

Пусть формируется множество всех допустимых подмножеств  $W$ , первым элементом которых является каждый элемент слоя  $S$ . По предположению число элементов в каждом допустимом подмножестве было больше 1. Далее рассмотрим иной возможный случай допустимых подмножеств.

**Утверждение 9.** Пусть при построении группы допустимых подмножеств  $H_{i,j}$ , первым элементом которых является  $r_i$ , существует допустимое подмножество, состоящее только из  $r_i$ . Предположим, что величина  $T_o = T_{\text{ост}} - t_i$ , где  $t_i$  – ресурс элемента  $r_i$ , меньший, чем ресурс  $t_1$  первого элемента  $r_1$ . Пусть существует группа допустимых подмножеств, каждое из которых состоит из одного своего элемента и отвечает условию, приведенному для величины  $T_o$  ( $r_h$  – элемент с наибольшим номером). Тогда допустимое подмножество, состоящее из элемента  $r_h$ , имеет наибольший вес из подмножеств, входящих в эту группу.

**Доказательство.** Справедливость утверждения опирается на следующее свойство элементов в двухкритериальных пространствах [6]. Если элементы множества Парето упорядочены по убыванию предпочтения одного из критериев, то по второму критерию они будут следовать друг за другом по возрастанию предпочтения. Тогда чем больше номер элемента  $r_i$  в  $G$ , тем больше его вес  $w_i$ . Следовательно, допустимое подмножество, состоящее из элемента  $r_h$ , имеет наибольший вес. Утверждение доказано.

Оптимальное допустимое подмножество  $Q_{g+1}$ , являющееся решением задачи о ранце  $Z_{g+1}$ , можно представить следующим образом.

1. Если число элементов во всех допустимых подмножествах больше 1, то

$$Q_{i+1} = Q_{\max}, \quad (4)$$

где  $Q_{\max}$  – подмножество с максимальным суммарным весом на множестве допустимых подмножеств  $Q_{ch}^{W_i}$  (подмножество  $Q_{ch}^{W_i}$  для каждого элемента последовательности соответствует формуле (3),  $i = 1, \dots, s$ ;  $s$  равно числу членов последовательности  $G$ ).

2. Предположим, что существуют допустимые подмножества, состоящие из одного элемента. Пусть  $w_h$  – вес элемента  $r_h$  из утверждения 9. Кроме того, определено допустимое подмножество  $Q_1$  с максимальным суммарным весом  $w_{\max}$  у всех подмножеств с числом элементов больше 1 в соответствии с формулой (3).

Введем следующее выражение:

$$\text{если } w_h > w_{\max}, \text{ то } Q_{g+1} = \{r_h\}, \text{ иначе } Q_{g+1} = Q_1. \quad (5)$$

Тогда по формуле (1) могут быть найдены оптимальное подмножество  $Q$ , состоящее из  $\bigcup_{j=0}^g P_j$ , которое было определено в работе [5], и подмножества  $Q_{g+1}$ , принимающие вид согласно выражениям (6) или (7).

## Алгоритм нахождения оптимального подмножества в задаче о ранце $Z_{g+1}$

Нахождение оптимального подмножества  $Q_{g+1}$  при глубине недоминирования слоя  $S$ , равной нулю, и сумме значений ресурса  $t$  его элементов, большей, чем величина  $T_{\text{ост}}$ , можно представить в виде следующего алгоритма. Как и ранее, там, где величина  $d_{i,j}$  появляется в индексах для обозначения подмножеств либо других величин, обозначим  $d_{i,j}$  через  $u$ .

1. Из элементов слоя  $S$  формируется последовательность  $G$  путем упорядочивания их по неубыванию ресурса  $t$ .

2. Если значение ресурса  $t$  первого элемента  $r_1$  последовательности  $G > T_{\text{ост}}$ , то никакое допустимое подмножество в задаче  $Z_{g+1}$  не может быть построено, и алгоритм закончен. Иначе  $j = 1, i = 1, opt = 0, n = 1, opt_1 = 0$ . Пусть  $s$  – число элементов последовательности  $G$ . Если  $s = 1$ , то  $opt = w_s$ . По утверждению 3 единственный элемент последовательности  $G$  является решением задачи  $Z_{g+1}$ , и алгоритм закончен.

3. Формируется допустимое подмножество, где  $r_1$  – первый элемент в упорядоченной последовательности  $G$ . Определяется допустимое порождающее подмножество  $H_{i,j}$ , сумма элементов которого не превосходит величину  $T_1 = T_{\text{ост}} - t_1$ . Для дальнейшего описания алгоритма потребуются не только номер элемента в последовательности  $G$ , но и его порядковый номер в подмножестве  $H_{i,j}$ . Введем следующие обозначения:  $r_k, 1 \leq k \leq s, s = |S|$ , –  $k$ -й элемент последовательности  $G$ ;  $r_k^{i,j}, 1 \leq k \leq d_{i,j}, d_{i,j} = |H_{i,j}|$ , –  $k$ -й элемент упорядоченного множества  $H_{i,j}$ ;  $k = j + 1$ .

3.1. Первый элемент  $H_{i,j}$  есть  $r_1$ . Формирование  $H_{i,j}$  продолжается с элемента, имеющего номер  $r_k$ . Однако если ресурс  $t_k$  элемента  $r_k > T_1$ , то  $opt_1 = w_i$ , и переходим к пункту 7. Далее в соответствии с правилом последовательного включения в  $H_{i,j}$  войдут элементы с номерами  $r_k, r_{k+1}, r_{k+2}, \dots, r_{k+a}$  до тех пор, пока на  $(a + 1)$ -м шаге не исчерпается величина  $T_1$ , т. е. величина  $T_{a+2} = T_1 - \sum_{p=k}^{k+a} t_p$  станет меньше 0.

Если на некотором шаге  $k + a > s$ , т. е. последний элемент  $G$  включен в  $H_{i,j}$ , то формирование  $H_{i,j}$  будет закончено. Пусть  $H_{i,j}$  содержит  $d_{i,j}$  членов последовательности.

4.  $m = 0$ .

4.1. Пусть элемент  $r_{u-m}^{i,j}$  имеет в последовательности  $G$  номер  $q$ . В множестве  $V_{j,u-m}^i$  определяется группа  $V_{j,u-m}^i$  элементов последовательности  $r_k, k = q, q + 1, \dots, h$ , где  $h$  – количество элементов в группе  $V_{j,u-m}^i$ . Ресурс  $t$  каждого из элементов  $r_k$  не должен превосходить величину  $T_{u-n}$ , которая равна сумме значений ресурса  $t$  первых  $d_{i,j-n}$  элементов подмножества  $H_{i,j}$ .

4.2. Формирование новых допустимых подмножеств выполняется следующим образом. Если  $n = 1$ , то переходим к подпункту 4.3. Если  $d_{i,j}$  меньше либо равно 3, то переходим к пункту 6. В противном случае объем ресурса очередной подзадачи о ранце равен величине  $T_{u-n}$ . Выполняется пункт 9, где формируются допустимые подмножества подзадачи, находится частичное решение задачи  $Z_{g+1}$ . Переходим к пункту 5.

4.3. Формируется новое допустимое подмножество задачи  $Z_{g+1}$  путем замены последнего элемента  $r_u^{i,j}$  подмножества  $H_{i,j}$  на элемент  $r_h$ .

4.4. Находится суммарное значение ( $M$ ) веса элементов сформированного подмножества. Если  $M = opt$  и его состав элементов не совпадает с уже имеющимся частичным решением, то это подмножество дополняет группу подмножеств, представляющих собой частичное решение задачи  $Z_{g+1}$ . Если  $M > opt$ , то  $opt = M$  и допустимое подмножество, полученное в подпункте 4.3, является частичным решением на всем наборе уже сформированных допустимых подмножеств.

5.  $n = n + 1, m = m + 1$ . Если  $d_{i,j} = n$ , т. е. все элементы  $H_{i,j}$  уже рассмотрены, то переходим к следующему пункту, иначе возвращаемся к подпункту 4.1.

6. Переходим к формированию нового порождающего подмножества  $H_{i,j}$ . Если  $i = 1$ , то переходим к следующему пункту, иначе переходим к подпункту 7.1.

6.1.  $k = k + 1$ . Если  $k > s$  либо ресурс  $t_k$  элемента  $r_k$  больше величины  $T_1$ , то все порождающие подмножества  $H_{i,j}$  при  $i = 1$  сформированы, и переходим к пункту 7. Иначе  $j = j + 1$ , и переходим к пункту 3.1.

7.  $i = i + 1$ . Если  $i = s$ , то  $opt_1 = w_i$ , и переходим к пункту 8. Иначе  $j = 1, n = 1$ . Если  $r_i > T_{\text{ост}}$ , то переходим к пункту 8. Иначе  $k = i + 1$ , и переходим к подпункту 7.2.

7.1.  $k = k + 1$ . Если  $k > s$  либо ресурс  $t_k$  элемента  $r_k$  больше величины  $T_1$ , то все  $H_{i,j}$  при данном значении переменной  $i$  сформированы, и переходим к пункту 7. Иначе  $j = j + 1$ .

7.2. Формируется новое порождающее допустимое подмножество  $H_{i,j}$ , начинающееся с элемента  $r_i$ . Величина  $T_1 = T_{\text{ост}} - t_i$ , где  $t_i$  – ресурс элемента  $r_i$ . Вторым элементом  $H_{i,j}$  может являться элемент  $r_k$ .

Однако подмножество  $H_{i,j}$  может состоять только из одного элемента  $r_p$ , если ресурс  $t_k$  элемента  $r_k > T_1$ . Тогда  $opt_1 = w_p$ , и переходим к пункту 7. В ином случае подмножество  $H_{i,j}$  формируется в соответствии с правилом выбора на каждом шаге следующего элемента с бóльшим номером. Сумма ресурса  $t$  элементов  $H_{i,j}$  не должна превосходить  $T_1$ . В противном случае формирование  $H_{i,j}$  с числом элементов  $d_{i,j}$  закончено, и переходим к пункту 4. Если на некотором  $a$ -м шаге последний элемент  $G$  включен в  $H_{i,j}$ , то переходим к подпункту 7.3.

7.3. Если остаток объема ранца  $T_{g+1} = T_1 - \sum_{p=i}^s t_p$ , полученный после включения последнего элемента  $G$  в  $H_{i,j}$ , больше или равен значению ресурса  $t_1$  элемента  $r_1$ , то переходим к пункту 7. В противном случае допустимое подмножество  $H_{i,j}$  построено и содержит  $d_{i,j}$  членов, и переходим к пункту 4.

8. Если  $opt_1 > opt$ , то  $opt = opt_1$ . Если данный пункт выполняется при решении какой-либо подзадачи о ранце, то переходим к пункту 9. В противном случае формирование всех допустимых подмножеств при глубине недоминирования слоя  $S$ , равной нулю, в задаче о ранце  $Z_{g+1}$  закончено. Допустимое подмножество или группа подмножеств с суммарным весом  $opt$  представляют собой решение задачи  $Z_{g+1}$ . Конец алгоритма.

9. Определим подзадачу о ранце с объемом ранца, равным  $T_{u-n}$ , и множеством начальных данных, включающим в себя все элементы из группы  $V_{j,u-m}^i$ . Все допустимые подмножества данной подзадачи находятся следующим образом. Выполняются пункты 2–8, при этом вместо последовательности  $G$  рассматривается группа  $V_{j,u-m}^i$ , вместо  $T_{ост}$  – величина  $T_{u-n}$ . Кроме того, вместо задачи  $Z_{g+1}$  подразумевается данная подзадача. Формируется множество допустимых подмножеств подзадачи, и находится ее решение. При этом возможно решение подзадачи о ранце с уровнем, бóльшим на единицу. Далее создается допустимое подмножество задачи  $Z_{g+1}$  (либо подзадачи о ранце предыдущего уровня) путем добавления к элементам подмножества, являющегося решением подзадачи о ранце первых  $d_{i,j-n}$  элементов подмножества  $H_{i,j}$ . Полученное подмножество  $H_{opt}$  или группа подмножеств (обозначим ее через  $J$ ) с равными суммарными весами представляют собой частичное решение задачи  $Z_{g+1}$  (либо подзадачи о ранце предыдущего уровня) на сформированном наборе допустимых подмножеств.

Пусть суммарное значение веса элементов подмножества  $H_{opt} = M$ . Если  $M > opt$ , то  $opt = M$ , и подмножество  $H_{opt}$  или группа подмножеств  $J$  представляют собой частичное решение на всем наборе уже сформированных допустимых подмножеств. Если  $M = opt$  и их состав не совпадает с имеющимся частичным решением, то дополняется группа подмножеств, являющаяся частичным решением задачи  $Z_{g+1}$  или подзадачи. Пункт 9 завершен.

### Условие избыточности множества начальных данных в задаче о ранце

**Определение 3.** Множество начальных данных  $N_s$  обладает свойством избыточности, если в  $N_s$  существуют элементы, которые могут не рассматриваться при нахождении оптимального подмножества  $Q_{g+1}$ .

**Определение 4.** Избыточность множества начальных данных  $N_s$  является упорядоченной, если в  $N_s$  существует группа элементов, начиная с которой все остальные элементы могут не рассматриваться в качестве элементов подмножества  $Q_{g+1}$ .

Искомое оптимальное подмножество  $Q_{g+1}$  в задаче о ранце  $Z_{g+1}$  представляет собой подмножество с максимальной суммарной величиной веса на множестве допустимых подмножеств  $W$  [4; 5]. Из утверждения 4 следует, что, каким бы ни было число паретовских слоев, на которые разбивается множество  $N_s$  во введенном двухкритериальном пространстве, элементы всех слоев с номером после слоя  $S$  могут не рассматриваться при нахождении  $Q_{g+1}$ . Следовательно, в соответствии с определением 4 существование таких паретовских слоев при разбиении множества  $N_s$  представляет собой условие упорядоченной избыточности множества  $N_s$ . Вместе с тем множество начальных данных любой подзадачи о ранце, рассматриваемой в настоящей работе, не обладает свойством избыточности. Все элементы этого множества находятся между собой в отношении недоминируемости. Таким образом, не существует, кроме множества Парето, ни одного паретовского слоя, который включал бы в себя его элементы, и условия определения 3 не выполняются.

Оптимальное подмножество  $Q$  в задаче о ранце с множеством начальных данных  $N$ , объемом ранца  $T$  и подмножеством  $Q_{g+1}$  связаны соотношением (1). Множество  $N$  включает в себя все элементы  $N_s$ . Следовательно, для множества  $N$  существование паретовских слоев с номерами, бóльшими, чем номер слоя  $S$ , представляет собой условие его упорядоченной избыточности. В работе [6] показано, что построение требуемого числа паретовских слоев в двухкритериальном пространстве предпочтений осуществляется

на основе алгоритма поиска в упорядоченных структурах данных, не требующих операций перебора. Тогда из (1) следует, что при нахождении оптимального подмножества  $Q$  алгоритм перебора требуется только при определении подмножества  $Q_{g+1}$ .

Предположим, что выполняется ограничение на объем ранца  $T$ , где сумма ресурса  $t$  всех элементов множества  $N$  больше  $T$ . Алгоритм решения задачи о ранце при глубине недоминирования слоя  $S$ , равной нулю, можно представить следующим образом.

1. Разбиение множества  $N$  на паретовские слои в двухкритериальном пространстве предпочтений.

2. Начиная с первого паретовского слоя, в соответствии со значением его глубины недоминирования и значением величины  $F$  определяются слои, которые полностью включаются в оптимальное подмножество  $Q$ .

3. Выполняется предложенный в данной работе способ нахождения оптимального подмножества  $Q_{g+1}$  из формулы (1) согласно его представлению в (4) и (5).

Формула (1) может не включать в себя паретовские слои  $P_i$ , если не выполняются условия утверждения 2 из работы [5]. Тогда множество начальных данных  $N$  совпадает с  $N_s$  и  $T = T_{\text{ост}}$ . В этом случае паретовский слой  $S$  совпадает с множеством Парето на множестве начальных данных  $N$ . Тогда наличие еще хотя бы одного паретовского слоя представляет собой условие избыточности множества  $N$  и оптимальное подмножество  $Q_{g+1}$  совпадает с  $Q$ . При глубине недоминирования слоя  $S$ , большей нуля, условия построения допустимых подмножеств в задаче о ранце  $Z_{g+1}$  имеют существенные особенности и требуют рассмотрения в отдельной работе.

### Заключение

В работе представлен алгоритм решения задачи о ранце на основе предложенной многокритериальной модели. Определен способ построения множества допустимых подмножеств в задаче о ранце при глубине недоминирования слоя  $S$ , равной нулю. Алгоритм нахождения оптимального подмножества в задаче о ранце  $Z_{g+1}$  включает в себя решение подзадач с объемами ранца, меньшими, чем объем ранца в рассматриваемой задаче. Определено условие избыточности множества начальных данных.

### Библиографические ссылки

1. Martello S, Toth P. *Knapsack problems: algorithms and computer implementations*. New York: John Wiley & Sons; 1990. 308 p.
2. Посыпкин МА. Комбинированный параллельный алгоритм решения задачи о ранце. В: *Труды IV Международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления»*; 27–29 октября 2008 г.; Москва, Россия. Москва: ИПУ РАН; 2008. с. 177–189.
3. Чебаков СВ. Двухкритериальная модель построения оптимального подмножества альтернатив с максимальной суммарной вероятностью достижения цели. *Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук*. 2005; 2:112–118.
4. Чебаков СВ, Серебряная ЛВ. Определение структуры оптимального подмножества в задаче о ранце. *Доклады БГУИР*. 2019;6:72–79. DOI: 10.35596/1729-7648-2019-124-6-72-79.
5. Чебаков СВ, Серебряная ЛВ. Алгоритм нахождения структуры оптимального подмножества на основе паретовских слоев в задаче о ранце. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2020;2:97–104. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-2-97-104.
6. Kung HF, Luccio F, Preparata FP. On finding the maxima of a set of vectors. *Journal of the ACM*. 1975;22(4):469–476. DOI: 10.1145/321906.321910.

### References

1. Martello S, Toth P. *Knapsack problems: algorithms and computer implementations*. New York: John Wiley & Sons; 1990. 308 p.
2. Posypkin MA. [Combined parallel algorithm for solving the knapsack problem]. In: *Trudy IV Mezhdunarodnoi konferentsii «Parallelnye vychisleniya i zadachi upravleniya»*; 27–29 oktyabrya 2008 g.; Moskva, Rossiya [Proceedings of the 4<sup>th</sup> International conference «Parallel Computing and Control Problems»; 2008 October 27–29; Moscow, Russia]. Moscow: Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences; 2008. p. 177–189. Russian.
3. Chebakov SV. [A two-criterion model for constructing an optimal subset of alternatives with the maximum total probability of achieving the goal]. *Vesci Nacyjanal'naj akadzemii navuk Belarusi. Serija fizika-matjematychnyh navuk*. 2005;2:112–118. Russian.
4. Chebakov SV, Serebryanaya LV. Finding of optimal subset structure in the knapsack problem. *Doklady BGUIR*. 2019;6:72–79. Russian. DOI: 10.35596/1729-7648-2019-124-6-72-79.
5. Chebakov SV, Serebryanaya LV. Finding algorithm of optimal subset structure based on the Pareto layers in the knapsack problem. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2020;2:97–104. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-2-97-104.
6. Kung HF, Luccio F, Preparata FP. On finding the maxima of a set of vectors. *Journal of the ACM*. 1975;22(4):469–476. DOI: 10.1145/321906.321910.

Получена 20.12.2021 / исправлена 10.11.2022 / принята 10.11.2022.  
Received 20.12.2021 / revised 10.11.2022 / accepted 10.11.2022.

## О МНОГОЧЛЕНЕ ХОСОЯ ЦЕПНОЙ ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНОЙ СЕТИ ТРЕТЬЕГО ТИПА

Ш. ДАС<sup>1)</sup>, Ш. РАЙ<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Бенаресский индуистский университет, 221005, г. Варанаси, Уттар-Прадеш, Индия

Топологический индекс играет важную роль в характеристике различных физических свойств, биологической и химической активности молекулярного графа. Полином Хосоя используется для оценки основанных на расстоянии топологических индексов, таких как индекс Винера, индекс гипер-Винера, индекс Харари и индекс Тратча – Станкевича – Зефинова. В настоящем исследовании определяется замкнутая форма многочлена Хосоя для третьего типа цепной шестнадцатеричной производной сети размерности  $n$  и выводятся основанные на расстоянии топологические индексы сети с помощью их прямых формул, а также с помощью полученного многочлена Хосоя. Графически представлены вычисленные топологические индексы на основе расстояния и полином Хосоя базовой сети, чтобы понять их геометрическую структуру. Настоящее исследование полинома Хосоя и соответствующих индексов может заложить основу для дальнейшего изучения цепных шестнадцатеричных сетей и их свойств.

**Ключевые слова:** графические индексы; топологический индекс; шестнадцатеричная сеть третьего типа; топологические индексы на основе расстояний; полином Хосоя; полином графа.

## ON THE HOSOYA POLYNOMIAL OF THE THIRD TYPE OF THE CHAIN HEX-DERIVED NETWORK

S. DAS<sup>a</sup>, S. RAI<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Banaras Hindu University, Varanasi 221005, Uttar Pradesh, India

Corresponding author: S. Das (shib.iitm@gmail.com)

A topological index plays an important role in characterising various physical properties, biological activities, and chemical reactivities of a molecular graph. The Hosoya polynomial is used to evaluate the distance-based topological indices such as the Wiener index, hyper-Wiener index, Harary index, and Tratch – Stankevitch – Zefirov index. In the present study, we determine a closed form of the Hosoya polynomial for the third type of the chain hex-derived network of dimension  $n$  and derive the distance-based topological indices of the network with the help of their direct formulas and alternatively via using the obtained Hosoya polynomial. Finally, we graphically represent the computed distance-based topological indices and the Hosoya polynomial of the underlying network to comprehend their geometrical pattern. This study of the Hosoya polynomial and the corresponding indices can set the basis for more exploration into chain hex-derived networks and their properties.

**Keywords:** graphical indices; topological index; third type of chain hex-derived network; distance-based topological indices; Hosoya polynomial; graph polynomial.

### Образец цитирования:

Дас Ш, Рай Ш. О многочлене Хосоя цепной шестнадцатеричной сети третьего типа. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;3:67–78 (на англ.).  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-67-78>

### For citation:

Das S, Rai S. On the Hosoya polynomial of the third type of the chain hex-derived network. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022; 3:67–78.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-67-78>

### Авторы:

**Шибсанкар Дас** – доктор наук (математика); доцент кафедры математики Института науки.  
**Шикха Рай** – аспирант кафедры математики Института науки. Научный руководитель – Ш. Дас.

### Authors:

**Shibsankar Das**, PhD (mathematics); associate professor (stage II) at the department of mathematics, Institute of Science.  
[shib.iitm@gmail.com](mailto:shib.iitm@gmail.com)  
<https://orcid.org/0000-0003-0082-6673>  
**Shikha Rai**, postgraduate student at the department of mathematics, Institute of Science.  
[shikharai48@gmail.com](mailto:shikharai48@gmail.com)  
<https://orcid.org/0000-0002-9621-8893>

## Introduction

Let  $G = (V, E)$  be a simple connected undirected graph, where the vertex set and the edge set are denoted by  $V = V(G)$  and  $E = E(G)$ , respectively. The degree of a vertex  $p \in V(G)$  in a graph  $G$  is the number of edges that are incident on  $p$  and we denote it as  $d(p)$ . The distance  $d(p, q)$  between two vertices  $p$  and  $q$  of a graph  $G$  is the minimum number of edges in a path connecting them and the diameter  $d(G)$  of a graph  $G$  is the longest distance among the distances of all pairs of vertices of  $G$  [1].

In chemical graph theory, a given chemical compound is represented by a graph where the vertices correspond to the atoms of that molecule and the edges correspond to the chemical bonds between them. The interconnection between graph theory and chemistry and their various chemical applications are discussed in references [2; 3]. In the field of chemical graph theory, the topological indices are graph invariants that predict the biological, physico-chemical and other properties of a molecule when calculated for a molecular graph. In general, it is a numeric quantity that has various applications in the studies of quantitative structure – property relationships and quantitative structure – activity relationships.

There are several classes of topological indices such as distance-based topological indices [4], degree-based topological indices [5], degree and distance-based topological indices [6], and counting related topological indices [7], etc. All these classes of topological indices are helpful in predicting and modelling the physical, chemical, biological, and other properties of a chemical structure. Usually, we adopt the basic definitions of the topological indices to calculate their respective numerical values. Instead, the concept of a polynomial is introduced in the graph theory to calculate different topological indices of a particular class [8]. The reason behind introducing the polynomial in graph theory is that by deriving a single closed polynomial expression, one can calculate several topological indices by differentiating or integrating (or a combination of both) it (the polynomial). We often use these graphic polynomials for the chemical applications of graph theory.

**Hosoya polynomial.** In the literature, numerous polynomials have been defined – the matching polynomial [9], the Hosoya polynomial [10], the Tutte polynomial [11], the Clar covering polynomial (also known as the Zhang – Zhang polynomial) [12], the Schultz polynomial [13], the  $M$ -polynomial [14; 15], to name but a few. Amid all of these polynomials, the Hosoya polynomial is used to calculate the distance-based topological indices.

In 1988, H. Hosoya introduced a counting polynomial and named it Wiener polynomial (commonly known as Hosoya polynomial) [10]. Generally, it sums up the number of distances of paths of different lengths in the graph. One of the most important applications of the Hosoya polynomial is to determine almost all the distance-based topological indices which are used to predict the chemical, physical, and other properties of chemical compounds. There are many articles in the literature in which the Hosoya polynomial has been obtained for the graphs of several classes (see [16–24]).

**Definition 1** [10]. The Hosoya polynomial of a graph  $G$  in a variable  $x$  is denoted by  $H(G, x)$  and is defined as

$$H(G, x) = \sum_{\{p, q\} \subseteq V(G)} x^{d(p, q)} = \sum_{r=1}^{d(G)} d(G, r) x^r,$$

where  $d(G, r)$  denotes the number of pairs of vertices of  $G$  which are at a distance  $r$  from each other.

**Allied distance-based topological indices.** This section deals with the distance-based topological indices which are derived from the Hosoya polynomial of a given network. In order to determine the boiling point of paraffins, H. Wiener [25] introduced a Wiener index (also known as Wiener number) in 1947. Theoretically, the Wiener index of a graph  $G$  is the sum of the lengths of the shortest path between all (unordered) pairs of vertices and it is denoted as  $W(G)$ . Mathematically,

$$W(G) = \sum_{\{p, q\} \subseteq V(G)} d(p, q).$$

In 1993, M. Randić introduced the hyper-Wiener index which predicts the physico-chemical properties of organic compounds [26]. It is denoted as  $WW(G)$  and defined as

$$\begin{aligned} WW(G) &= \sum_{\{p, q\} \subseteq V(G)} \left[ \frac{1}{2} d(p, q)^2 + \frac{1}{2} d(p, q) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{\{p, q\} \subseteq V(G)} d(p, q)^2 + \sum_{\{p, q\} \subseteq V(G)} d(p, q) \right] = \frac{1}{2} \left[ \sum_{\{p, q\} \subseteq V(G)} d(p, q)^2 + W(G) \right]. \end{aligned}$$

In 1990, Tratch et al. [27] further expanded the Wiener index which is known as Tratch – Stankevitch – Zefirov index, denoted as  $TSZ(G)$  and mathematically represented as

$$TSZ(G) = \sum_{\{p, q\} \subseteq V(G)} \left[ \frac{1}{6}d(p, q)^3 + \frac{1}{2}d(p, q)^2 + \frac{1}{3}d(p, q) \right] =$$

$$= \left[ \frac{1}{6} \sum_{\{p, q\} \subseteq V(G)} d(p, q)^3 + \frac{1}{2} \sum_{\{p, q\} \subseteq V(G)} d(p, q)^2 + \frac{1}{3} \sum_{\{p, q\} \subseteq V(G)} d(p, q) \right].$$

Plavšić et al. [28], in 1993, introduced a more pragmatic approach to design a distance index that is slightly different from the Wiener index and named Harary index in admiration of professor F. Harary. The Harary index of a graph  $G$  is denoted as  $Har(G)$  and defined as

$$Har(G) = \sum_{\{p, q\} \subseteq V(G)} \frac{1}{d(p, q)}.$$

The relational formulas [29] associated with the Hosoya polynomial and the distance-based topological indices are mentioned in table 1.

Table 1

Relationship formulas  
between distance-based topological indices and Hosoya polynomial

No.	Topological index	Notation	Derivation from $H(G, x)$
(i)	Wiener index [25]	$W(G)$	$\frac{d}{dx} H(G, x) _{x=1}$
(ii)	Hyper-Wiener index [26]	$WW(G)$	$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} [xH(G, x)] _{x=1}$
(iii)	Tratch – Stankevitch – Zefirov index [27]	$TSZ(G)$	$\frac{1}{3!} \frac{d^3}{dx^3} [x^2H(G, x)] _{x=1}$
(iv)	Harary index [28]	$Har(G)$	$\int_0^1 \frac{H(G, x)}{x} dx$

**Chain hex-derived network of the third type of dimension  $n$ .** Nocetti et al. [30] introduced the  $n$ -dimensional hexagonal network in 2002 and also discussed its properties. During 2008, the  $n$ -dimensional hex-derived network of the first type ( $HDN1$ ) and the hex-derived network of the second type ( $HDN2$ ) are derived by using the hexagonal network [31]. Hex-derived networks have a wide range of applications in electronics, pharmaceutical sciences, and communication networks. Besides this, Raj et al. [32] designed some new chemical networks from the hexagonal network of dimension  $n$  in 2017, called hex-derived networks of the third type. Taking into account the chain silicate network [33] and the third type of the hex-derived network [32], a chain hex-derived network of the third type of dimension<sup>1</sup>  $n$  ( $CHDN3[n]$ ) has been constructed (for a detailed drawing algorithm of the  $CHDN3[n]$  network, please refer to [34]). An example of the third type of chain hex-derived network of dimension 5 (i. e.,  $CHDN3[5]$ ) is shown in fig. 1.

In reference [35], various degree-based topological indices of the  $CHDN3[n]$  network are calculated with the help of their direct formulas. Whereas, very recently in reference [34], the same was derived by using the  $M$ -polynomial of the  $CHDN3[n]$  network and one also plotted the topological indices and the  $M$ -polynomial to understand their mathematical characteristics. Also, in reference [36], the structure of the subdivided hex-derived network of the third type of dimension  $n$  ( $SHDN3[n]$ ) was designed and its  $M$ -polynomial and corresponding topological indices were estimated.

**An outline of our work.** In this paper, we will compute the distance-based topological indices of the  $CHDN3[n]$  network in two different ways. In the first place, we will use the direct mathematical formulas to calculate the indices of the  $CHDN3[n]$  network in section «Direct computation of distance-based topological indices of the  $CHDN3[n]$  network». Secondly, in section «Finding the Hosoya polynomial for the  $CHDN3[n]$

<sup>1</sup>Dimension  $n$  indicates the number of edges in a row line for the third type of chain hex-derived network of dimension  $n$ .

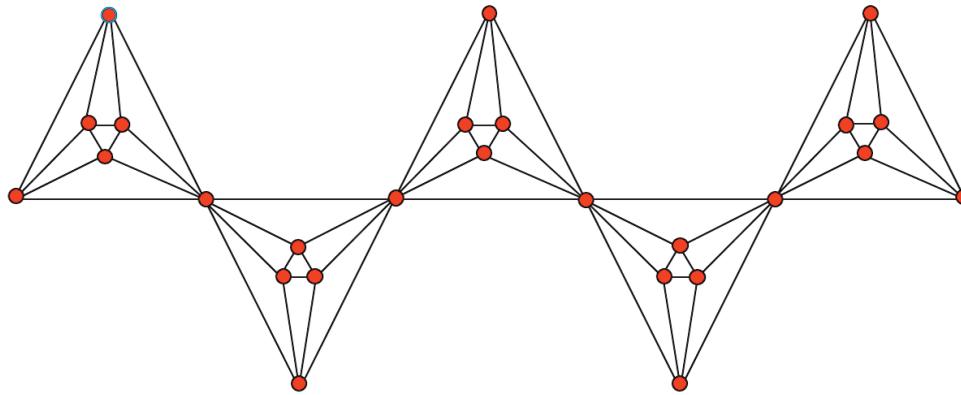


Fig. 1. The third type of chain hex-derived network of dimension 5 ( $CHDN3[5]$ )

network», we obtain an exact expression of a Hosoya polynomial for the  $CHDN3[n]$  network and thereafter derive the related distance-based topological indices of the network by using the Hosoya polynomial. Additionally, we will sketch the Hosoya polynomial and correlated distance-based topological indices of the network for different dimensions in section «Graphical illustrations of our obtained results» to understand their geometrical behaviours.

### Direct computation of distance-based topological indices of the $CHDN3[n]$ network

Let us now estimate the distance-based topological indices of the chain hex-derived network of the third type of dimension  $n$  directly by using their respective topological formulas mentioned in the previous section.

**Theorem 1.** Consider the third type of the chain hex-derived network of dimension  $n$  ( $CHDN3[n]$ ), where  $n \geq 5$ , then we have the following results:

$$(i) W(CHDN3[n]) = \frac{25}{6}n^3 + \frac{35}{2}n^2 - \frac{11}{3}n;$$

$$(ii) WW(CHDN3[n]) = \frac{25}{24}n^4 + \frac{95}{12}n^3 + \frac{527}{24}n^2 - \frac{119}{12}n;$$

$$(iii) TSZ(CHDN3[n]) = \frac{5}{24}n^5 + \frac{5}{2}n^4 + \frac{93}{8}n^3 + \frac{53}{2}n^2 - \frac{101}{6}n;$$

$$(iv) Har(CHDN3[n]) = \frac{46n^2 + 126n + 70}{n(n+1)(n+2)} + 5 \sum_{r=4}^{n-1} \frac{1}{r} (5n - 5r + 7) + \frac{59}{2}n - \frac{64}{3}.$$

**Proof.** Let us first assume that  $p$  and  $q$  are two arbitrary vertices of  $CHDN3[n]$  and  $d(p, q) = r$ . For different pairs of vertices, the following cases arise which are shown in table 2.

Table 2

Different cases of counting of pairs of vertices which are at distance  $r$  from each other

Different cases	Distances	Pairs of degree			Total number of such pairs
		$d(p) = 4,$ $d(q) = 4$	$d(p) = 4,$ $d(q) = 8$	$d(p) = 8,$ $d(q) = 8$	
Case 1	$d(p, q) = 1$	$5n + 6$	$6n - 4$	$n - 2$	$12n$
Case 2	$d(p, q) = 2$	$10n - 1$	$8n - 12$	$n - 3$	$19n - 16$
Case 3	$d(p, q) = 3$	$15n - 16$	$8n - 20$	$n - 4$	$24n - 40$
Case 4	$d(p, q) = r,$ $4 \leq r \leq n - 1$	$16(n - r + 2)$	$4(2n - 2r + 1)$	$n - r - 1$	$5(5n - 5r + 7)$
Case 5	$d(p, q) = n$	33	2	0	35

Ending table 2

Different cases	Distances	Pairs of degree			Total number of such pairs
		$d(p) = 4,$ $d(q) = 4$	$d(p) = 4,$ $d(q) = 8$	$d(p) = 8,$ $d(q) = 8$	
Case 6	$d(p, q) = n + 1$	10	0	0	10
Case 7	$d(p, q) = n + 2$	1	0	0	1

Hence, we have

(i) Wiener index:

$$\begin{aligned}
 W(CHDN3[n]) &= \sum_{\{p, q\} \subseteq V(G)} d(p, q) = \\
 &= \sum_{\substack{\{p, q\} \subseteq V(G), \\ d(p, q) = 1}} d(p, q) + \sum_{\substack{\{p, q\} \subseteq V(G), \\ d(p, q) = 2}} d(p, q) + \sum_{\substack{\{p, q\} \subseteq V(G), \\ d(p, q) = 3}} d(p, q) + \\
 &\quad + \sum_{\substack{\{p, q\} \subseteq V(G), \\ d(p, q) = r, r \in \{4, \dots, n-1\}}} d(p, q) + \sum_{\substack{\{p, q\} \subseteq V(G), \\ d(p, q) = n}} d(p, q) = \\
 &= 12n \cdot 1 + (19n - 16) \cdot 2 + (24n - 40) \cdot 3 + \sum_{r=4}^{n-1} 5(5n - 5r + 7) \cdot r + 35 \cdot n + \\
 &\quad + 10 \cdot (n + 1) + 1 \cdot (n + 2) = 168n - 140 + 5 \sum_{r=4}^{n-1} r(5n - 5r + 7) = \frac{25}{6}n^3 + \frac{35}{2}n^2 - \frac{11}{3}n;
 \end{aligned}$$

(ii) Hyper-Wiener index:

$$\begin{aligned}
 WW(CHDN3[n]) &= \frac{1}{2} \sum_{\{p, q\} \subseteq V(G)} d(p, q)^2 + \frac{1}{2} W(G) = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{\substack{\{p, q\} \subseteq V(G), \\ d(p, q) = 1}} d(p, q)^2 + \sum_{\substack{\{p, q\} \subseteq V(G), \\ d(p, q) = 2}} d(p, q)^2 + \sum_{\substack{\{p, q\} \subseteq V(G), \\ d(p, q) = 3}} d(p, q)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\substack{\{p, q\} \subseteq V(G), \\ d(p, q) = r, r \in \{4, \dots, n-1\}}} d(p, q)^2 + \sum_{\substack{\{p, q\} \subseteq V(G), \\ d(p, q) = n}} d(p, q)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\substack{\{p, q\} \subseteq V(G), \\ d(p, q) = n+1}} d(p, q)^2 + \sum_{\substack{\{p, q\} \subseteq V(G), \\ d(p, q) = n+2}} d(p, q)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{25}{6}n^3 + \frac{35}{2}n^2 - \frac{11}{3}n \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ 12n \cdot 1^2 + (19n - 16) \cdot 2^2 + (24n - 40) \cdot 3^2 + \sum_{r=4}^{n-1} 5(5n - 5r + 7) \cdot r^2 + 35 \cdot n^2 + \right. \\
 &\quad \left. + 10 \cdot (n + 1)^2 + 1 \cdot (n + 2)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{25}{6}n^3 + \frac{35}{2}n^2 - \frac{11}{3}n \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ 46n^2 + 328n - 410 + 5 \sum_{r=4}^{n-1} r^2(5n - 5r + 7) \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{25}{6}n^3 + \frac{35}{2}n^2 - \frac{11}{3}n \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{25}{12} n^4 + \frac{35}{3} n^3 + \frac{317}{12} n^2 - \frac{97}{6} n \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{25}{6} n^3 + \frac{35}{2} n^2 - \frac{11}{3} n \right] = \\
 &= \frac{25}{24} n^4 + \frac{95}{12} n^3 + \frac{527}{24} n^2 - \frac{119}{12} n;
 \end{aligned}$$

(iii) Tratch – Stankevitch – Zefirov index:

$$\begin{aligned}
 TSZ(CHDN3[n]) &= \sum_{\{p, q\} \subseteq V(G)} \left[ \frac{1}{6} d(p, q)^3 + \frac{1}{2} d(p, q)^2 + \frac{1}{3} d(p, q) \right] = \\
 &= \frac{1}{6} \left[ \sum_{\{p, q\} \subseteq V(G)} d(p, q)^3 \right] + \frac{1}{2} \left[ \sum_{\{p, q\} \subseteq V(G)} d(p, q)^2 \right] + \frac{1}{3} \left[ \sum_{\{p, q\} \subseteq V(G)} d(p, q) \right] = \\
 &= \frac{1}{6} \left[ \sum_{\substack{\{p, q\} \subseteq V(G), \\ d(p, q)=1}} d(p, q)^3 + \sum_{\substack{\{p, q\} \subseteq V(G), \\ d(p, q)=2}} d(p, q)^3 + \sum_{\substack{\{p, q\} \subseteq V(G), \\ d(p, q)=3}} d(p, q)^3 + \right. \\
 &+ \sum_{\substack{\{p, q\} \subseteq V(G), \\ d(p, q)=r, r \in \{4, \dots, n-1\}}} d(p, q)^3 + \sum_{\substack{\{p, q\} \subseteq V(G), \\ d(p, q)=n}} d(p, q)^3 + \sum_{\substack{\{p, q\} \subseteq V(G), \\ d(p, q)=n+1}} d(p, q)^3 + \\
 &+ \left. \sum_{\substack{\{p, q\} \subseteq V(G), \\ d(p, q)=n+2}} d(p, q)^3 \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{25}{12} n^4 + \frac{35}{3} n^3 + \frac{317}{12} n^2 - \frac{97}{6} n \right] + \frac{1}{3} \left[ \frac{25}{6} n^3 + \frac{35}{2} n^2 - \frac{11}{3} n \right] = \\
 &= \frac{1}{6} \left[ 12n \cdot 1^3 + (19n - 16) \cdot 2^3 + (24n - 40) \cdot 3^3 + \sum_{r=4}^{n-1} 5(5n - 5r + 7) \cdot r^3 + 35 \cdot n^3 + 10 \cdot (n + 1)^3 + \right. \\
 &+ \left. 1 \cdot (n + 2)^3 \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{25}{12} n^4 + \frac{35}{3} n^3 + \frac{317}{12} n^2 - \frac{97}{6} n \right] + \frac{1}{3} \left[ \frac{25}{6} n^3 + \frac{35}{2} n^2 - \frac{11}{3} n \right] = \\
 &= \frac{1}{6} \left[ 46n^3 + 36n^2 + 854n - 1190 + 5 \sum_{r=4}^{n-1} r^3 (5n - 5r + 7) \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{25}{12} n^4 + \frac{35}{3} n^3 + \frac{317}{12} n^2 - \frac{97}{6} n \right] + \\
 &+ \frac{1}{3} \left[ \frac{25}{6} n^3 + \frac{35}{2} n^2 - \frac{11}{3} n \right] = \frac{1}{6} \left[ 4n^5 + \frac{35}{4} n^4 + \frac{317}{12} n^3 + \frac{179}{4} n^2 - \frac{271}{6} n \right] + \\
 &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{25}{12} n^4 + \frac{35}{3} n^3 + \frac{317}{12} n^2 - \frac{97}{6} n \right] + \frac{1}{3} \left[ \frac{25}{6} n^3 + \frac{35}{2} n^2 - \frac{11}{3} n \right] = \frac{5}{24} n^5 + \frac{5}{2} n^4 + \frac{279}{24} n^3 + \frac{53}{2} n^2 - \frac{101}{6} n;
 \end{aligned}$$

(iv) Harary index:

$$\begin{aligned}
 Har(CHDN3[n]) &= \sum_{\{p, q\} \subseteq V(G)} \frac{1}{d(p, q)} = \\
 &= \sum_{\substack{\{p, q\} \subseteq V(G), \\ d(p, q)=1}} \frac{1}{d(p, q)} + \sum_{\substack{\{p, q\} \subseteq V(G), \\ d(p, q)=2}} \frac{1}{d(p, q)} + \sum_{\substack{\{p, q\} \subseteq V(G), \\ d(p, q)=3}} \frac{1}{d(p, q)} + \\
 &+ \sum_{\substack{\{p, q\} \subseteq V(G), \\ d(p, q)=r, r \in \{4, \dots, n-1\}}} \frac{1}{d(p, q)} + \sum_{\substack{\{p, q\} \subseteq V(G), \\ d(p, q)=n}} \frac{1}{d(p, q)} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\substack{\{p,q\} \subseteq V(G), \\ d(p,q)=n+1}} \frac{1}{d(p,q)} + \sum_{\substack{\{p,q\} \subseteq V(G), \\ d(p,q)=n+2}} \frac{1}{d(p,q)} = \\
 & = \frac{12n}{1} + \frac{19n-16}{2} + \frac{24n-40}{3} + \sum_{r=4}^{n-1} \frac{5(5n-5r+7)}{r} + \frac{35}{n} + \frac{10}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \\
 & = \frac{46n^2+126n+70}{n(n+1)(n+2)} + 5 \sum_{r=4}^{n-1} \frac{1}{r} (5n-5r+7) + \frac{35}{n} + \frac{59}{2}n - \frac{64}{3}.
 \end{aligned}$$

### Finding the Hosoya polynomial for the CHDN3[n] network

Here we compute an exact expression of the Hosoya polynomial for the third type of the chain hex-derived network of dimension  $n$  to derive the related distance-based topological indices which are calculated in the previous section.

**Theorem 2.** *The Hosoya polynomial of the third type of the chain hex-derived network of dimension  $n$  (CHDN3[n]), where  $n \geq 5$ , is*

$$\begin{aligned}
 H(\text{CHDN3}[n], x) &= 12nx + (19n - 16)x^2 + (24n - 40)x^3 + \\
 & + \sum_{r=4}^{n-1} 5(5n - 5r + 7)x^r + 35x^n + 10x^{n+1} + x^{n+2}.
 \end{aligned}$$

*Proof.* Let  $p$  and  $q$  be two arbitrary vertices of the third type of the chain hex-derived network of dimension  $n$ . Note that the longest distance among distances of all pairs of vertices (i. e., diameter) of the CHDN3[n] network is  $n + 2$ . Here, we use the data tabulated in table 2, which gives the counting of the number of pairs of vertices of the CHDN3[n] network which are at a distance  $r$  from each other, where  $1 \leq r \leq n + 2$ . Therefore, from definition 1 of the Hosoya polynomial, we have

$$\begin{aligned}
 H(\text{CHDN3}[n], x) &= \sum_{\{p,q\} \subseteq V(\text{CHDN3}[n])} x^{d(p,q)} = \sum_{r=1}^{n+2} d(\text{CHDN3}[n], r)x^r = \\
 & = d(\text{CHDN3}[n], 1)x^1 + d(\text{CHDN3}[n], 2)x^2 + d(\text{CHDN3}[n], 3)x^3 + \sum_{r=4}^{n-1} d(\text{CHDN3}[n], r)x^r + \\
 & + d(\text{CHDN3}[n], n)x^n + d(\text{CHDN3}[n], n+1)x^{n+1} + d(\text{CHDN3}[n], n+2)x^{n+2} = \\
 & = 12nx + (19n - 16)x^2 + (24n - 40)x^3 + \sum_{r=4}^{n-1} 5(5n - 5r + 7)x^r + 35x^n + 10x^{n+1} + x^{n+2}.
 \end{aligned}$$

Underneath we derive the distance-based topological indices of the CHDN3[n] network by using the above single closed expression of the Hosoya polynomial and the relational formulas outlined in table 1.

**Theorem 3.** *Let CHDN3[n] be the third type of the chain hex-derived network of dimension  $n$  ( $n \geq 5$ ). Then form the Hosoya polynomial  $H(\text{CHDN3}[n], x)$ :*

$$\begin{aligned}
 (i) \quad W(\text{CHDN3}[n]) &= \frac{25}{6}n^3 + \frac{35}{2}n^2 - \frac{11}{3}n; \\
 (ii) \quad WW(\text{CHDN3}[n]) &= \frac{25}{24}n^4 + \frac{95}{12}n^3 + \frac{527}{24}n^2 - \frac{119}{12}n; \\
 (iii) \quad TSZ(\text{CHDN3}[n]) &= \frac{5}{24}n^5 + \frac{5}{2}n^4 + \frac{93}{8}n^3 + \frac{53}{2}n^2 - \frac{101}{6}n; \\
 (iv) \quad Har(\text{CHDN3}[n]) &= \frac{46n^2+126n+70}{n(n+1)(n+2)} + 5 \sum_{r=4}^{n-1} \frac{1}{r} (5n-5r+7) + \frac{59}{2}n - \frac{64}{3}.
 \end{aligned}$$

*Proof.* The Hosoya polynomial for the CHDN3[n] network, as obtained in theorem 2, is

$$\begin{aligned}
 H(\text{CHDN3}[n], x) &= 12nx + (19n - 16)x^2 + (24n - 40)x^3 + \\
 & + \sum_{r=4}^{n-1} 5(5n - 5r + 7)x^r + 35x^n + 10x^{n+1} + x^{n+2}.
 \end{aligned}$$

By applying the relational formulas (listed in table 1) over the Hosoya polynomial  $H(CHDN3[n], x)$ , we derive the distance-based topological indices as follows.

(i) The Wiener index and the Hosoya polynomial are related by

$$\begin{aligned} W(CHDN3[n]) &= \frac{d}{dx} H(CHDN3[n], x) \Big|_{x=1} = \\ &= \frac{d}{dx} \left[ 12nx + (19n - 16)x^2 + (24n - 40)x^3 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=4}^{n-1} 5(5n - 5r + 7)x^r + 35x^n + 10x^{n+1} + x^{n+2} \right] \Big|_{x=1} = \frac{25}{6}n^3 + \frac{35}{2}n^2 - \frac{11}{3}n. \end{aligned}$$

(ii) The relation between the hyper-Wiener index and the Hosoya polynomial is

$$\begin{aligned} W(CHDN3[n]) &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} [x \cdot H(CHDN3[n], x)] \Big|_{x=1} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} [12nx^2 + (19n - 16)x^3 + (24n - 40)x^4 + \\ &\quad + \sum_{r=4}^{n-1} 5(5n - 5r + 7)x^{r+1} + 35x^{n+1} + 10x^{n+2} + x^{n+3}] \Big|_{x=1} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ 24n + 6(19n - 16) + 12(24n - 40) + \sum_{r=4}^{n-1} 5r(r+1)(5n - 5r + 7) + \right. \\ &\quad \left. + 35n(n+1) + 10(n+1)(n+2) + (n+2)(n+3) \right] = \\ &= 23n^2 + 248n - 275 + \frac{5}{2} \sum_{r=4}^{n-1} r(r+1)(5n - 5r + 7) = \\ &= \frac{25}{24}n^4 + \frac{95}{12}n^3 + \frac{527}{24}n^2 - \frac{119}{12}n. \end{aligned}$$

(iii) The Tratch – Stankevitch – Zefirov index and the Hosoya polynomial are connected by

$$\begin{aligned} TSZ(CHDN3[n]) &= \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dx^3} [x^2 \cdot H(CHDN3[n], x)] \Big|_{x=1} = \\ &= \frac{1}{6} \frac{d^3}{dx^3} \left[ 12nx^3 + (19n - 16)x^4 + (24n - 40)x^5 + \sum_{r=4}^{n-1} 5(5n - 5r + 7)x^{r+2} + \right. \\ &\quad \left. + 35x^{n+2} + 10x^{n+3} + x^{n+4} \right] \Big|_{x=1} = \frac{5}{24}n^5 + \frac{5}{2}n^4 + \frac{93}{8}n^3 + \frac{53}{2}n^2 - \frac{101}{6}n. \end{aligned}$$

(iv) The relation between the Harary index and the Hosoya polynomial is

$$\begin{aligned} Har(CHDN3[n]) &= \int_0^1 \frac{H(G, x)}{x} dx = \\ &= \int_0^1 \left[ 12n + (19n - 16)x + (24n - 40)x^2 + \sum_{r=4}^{n-1} 5(5n - 5r + 7)x^{r-1} + 35x^{n-1} + \right. \\ &\quad \left. + 10x^n + x^{n+1} \right] dx = \frac{46n^2 + 126n + 70}{n(n+1)(n+2)} + 5 \sum_{r=4}^{n-1} \frac{1}{r} (5n - 5r + 7) + \frac{59}{2}n - \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

Hence, the results of theorem 1 are verified. Moreover, we can see that finding the Wiener index, hyper-Wiener index, Tratch – Stankevitch – Zefirov index, and Harary index via the Hosoya polynomial of the  $CHDN3[n]$  network is more easy, feasible, and compact than computing (as shown in section «Direct computation of distance-based topological indices of the  $CHDN3[n]$  network») these indices of the network directly by their respective definitions.

### Graphical illustrations of our obtained results

A graphical model of the chain hex-derived network of the third type of dimension  $n$  is discussed in subsection «Chain hex-derived network of the third type of dimension  $n$ ». By using this model, the expression of the Hosoya polynomial and the corelated distance-based topological indices have been derived which are functions of  $n$  and  $x$  (table 3). To understand the geometrical behaviours of these expressions of the  $CHDN3[n]$  network, we draw the Hosoya polynomial for the third type of the chain hex-derived network of dimension  $n = 5$  in the domain  $0 \leq x \leq 2$  in fig. 2 and the corresponding distance-based topological indices of the network for different dimension<sup>2</sup>  $n$  ( $5 \leq n \leq 10$  is considered here) in fig. 3, with the help of *Maple-13* software. From fig. 3, it can be observed that as the dimension increases, the values of each of the topological indices are also increasing.

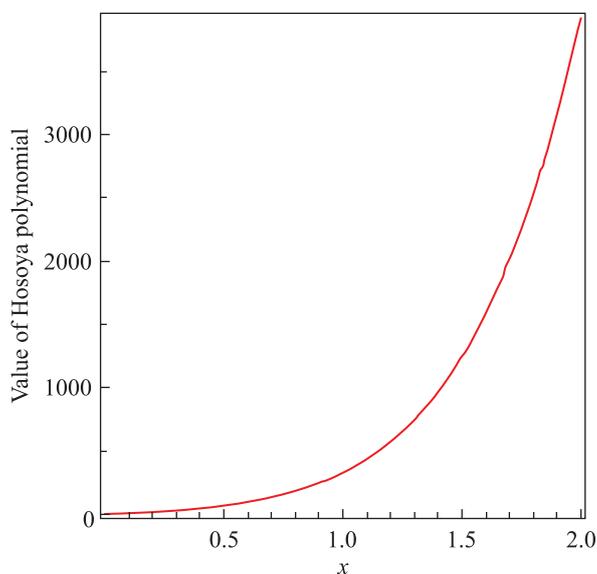


Fig. 2. The plot of the Hosoya polynomial of the  $CHDN3[5]$  for  $0 \leq x \leq 2$

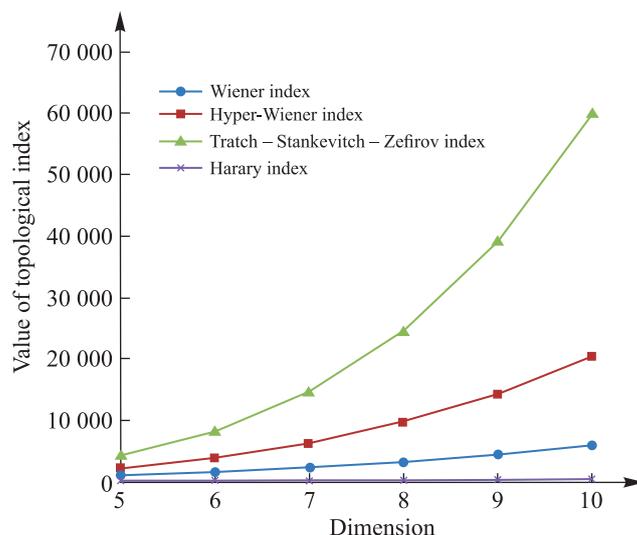


Fig. 3. The plot of the Wiener, hyper-Wiener, Tratch – Stankevitch – Zefirov, and Harary indices of the  $CHDN3[n]$  network for different values of  $n$  ( $5 \leq n \leq 10$ )

<sup>2</sup>Note that, the upper bound of the dimension  $n$  of the network has no limit.

Table 3

**Hosoya polynomials and the respective distance-based topological indices  
of the  $CHDN3[n]$  network at different values of  $n$**

No.	Topological index	Dimension					
		$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$
		Hosoya polynomial					
		$60x + 79x^2 + 80x^3 + 35x^5 + 10x^6 + x^7$	$72x + 98x^2 + 104x^3 + 60x^5 + 10x^7 + x^8$	$84x + 117x^2 + 128x^3 + 85x^5 + 60x^6 + 35x^7 + 10x^8 + x^9$	$96x + 136x^2 + 152x^3 + 110x^5 + 85x^6 + 35x^8 + 10x^9 + x^{10}$	$108x + 155x^2 + 160x^3 + 110x^6 + 85x^7 + 35x^9 + 10x^{10} + x^{11}$	$120x + 174x^2 + 185x^4 + 110x^7 + 85x^8 + 35x^{10} + 10x^{11} + x^{12}$
(i)	Wiener index	940	1508	2261	3224	4422	5880
(ii)	Hyper-Wiener index	2140	3791	6223	9646	14 295	20 430
(iii)	Tratch – Stankevitch – Zefirov index	4245	8224	14 672	24 580	39 174	59 940
(iv)	Harary index	149.9762	196.303 6	246.027 8	298.740 8	354.122 6	411.915 0

## Conclusions

In the current study, a chemical network named as the third type of the chain hex-derived network of dimension  $n$  ( $CHDN3[n]$ ) has been considered to investigate the analytical expression of some of its distance-based topological descriptors. Initially, we used the distance-dependent mathematical formulas to evaluate the distance-based topological indices, namely, Wiener, hyper-Wiener, Tratch – Stankevitch – Zefirov, and Harary indices of the  $CHDN3[n]$  network. Afterwards, we derived the same indices by using our proposed closed form of the Hosoya polynomial of the  $CHDN3[n]$  network. And hence, we concluded that calculating these indices via the Hosoya polynomial is more simple, shorter, compact, and more practical, instead of computing them directly by using their mathematical formulas. Moreover, we graphically represented the Hosoya polynomial and the distance-based topological indices of the underlying structure to realise their geometrical behaviour. The obtained results may play a key role in amplifying our understanding of the behaviour and nature of chain hex-derived networks further.

## References

1. West DB. *Introduction to graph theory*. 2<sup>nd</sup> edition. Hoboken: Prentice Hall; 2001. 588 p.
2. Balaban AT. *Chemical applications of graph theory*. London: Academic Press; 1976. 389 p.
3. García-Domenech R, Gálvez J, de Julián-Ortiz JV, Pogliani L. Some new trends in chemical graph theory. *Chemical Reviews*. 2008;108(3):1127–1169. DOI: 10.1021/cr0780006.
4. Balaban AT. Highly discriminating distance-based topological index. *Chemical Physics Letters*. 1982;89(5):399–404. DOI: 10.1016/0009-2614(82)80009-2.
5. Gutman I. Degree-based topological indices. *Croatica Chemica Acta*. 2013;86(4):351–361. DOI: 10.5562/cca2294.
6. Pattabiraman K. Degree and distance based topological indices of graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. 2017; 63:145–159. DOI: 10.1016/j.endm.2017.11.009.
7. Khadikar PV, Deshpande NV, Kale PP, Dobrynin A, Gutman I, Domotor G. The Szeged index and an analogy with the Wiener index. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*. 1995;35(3):547–550. DOI: 10.1021/ci00025a024.
8. Gutman I. The acyclic polynomial of a graph. *Publications de l'Institut Mathématique*. 1977;22(36):63–69.
9. Farrell EJ. An introduction to matching polynomials. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*. 1979;27(1):75–86. DOI: 10.1016/0095-8956(79)90070-4.
10. Hosoya Haruo. On some counting polynomials in chemistry. *Discrete Applied Mathematics*. 1988;19(1–3):239–257. DOI: 10.1016/0166-218X(88)90017-0.
11. Kauffman LH. A Tutte polynomial for signed graphs. *Discrete Applied Mathematics*. 1989;25(1–2):105–127. DOI: 10.1016/0166-218X(89)90049-8.
12. Zhang Heping, Zhang Fuji. The Clar covering polynomial of hexagonal systems I. *Discrete Applied Mathematics*. 1996;69(1–2): 147–167. DOI: 10.1016/0166-218X(95)00081-2.
13. Gutman I. Some relations between distance-based polynomials of trees. *Bulletin Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles*. 2005;131(30):1–7. DOI: 10.2298/BMAT0530001G.
14. Deutsch E, Klavžar S.  $M$ -polynomial and degree-based topological indices. *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*. 2015; 6(2):93–102. DOI: 10.22052/IJMC.2015.10106.
15. Das S, Kumar V. Investigation of closed derivation formula for GQ and QG indices of a graph via  $M$ -polynomial. *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*. 2022;13(2):129–144. DOI: 10.22052/IJMC.2022.246172.1614.
16. Gutman I, Klavžar S, Petkovšek M, Žigert Pleterssek P. On Hosoya polynomials of benzenoid graphs. *MATCH. Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*. 2001;43:49–66.
17. Ali AA, Ali AM. Hosoya polynomials of pentachains. *MATCH. Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*. 2011;65:807–819.
18. Sadeghieh A, Alikhani S, Ghanbari N, Khalaf AJM. Hosoya polynomial of some cactus chains. *Cogent Mathematics*. 2017; 4(1):1305638. DOI: 10.1080/23311835.2017.1305638.
19. Novak T, Rupnik Poklukar D, Zerovnik J. The Hosoya polynomial of double weighted graphs. *ARS Mathematica Contemporanea*. 2018;15(2):441–466. DOI: 10.26493/1855-3974.1297.c7c.
20. Xu Shoujun, He Qinghua, Zhou Shan, Chan Waihong. Hosoya polynomials of random benzenoid chains. *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*. 2016;7(1):29–38. DOI: 10.22052/IJMC.2016.11867.
21. Dejun W, Ahmad H, Nazeer W. Hosoya and Harary polynomials of  $TUC_4$  nanotube. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2020 May;Special No.:6487. DOI: 10.1002/mma.6487.
22. Numan M, Nawaz A, Aslam A, Butt SI. Hosoya polynomial for subdivided caterpillar graphs. *Combinatorial Chemistry & High Throughput Screening*. 2022;25(3):554–559. DOI: 10.2174/1386207323666201211094406.
23. Şahin B, Şahin A. The Hosoya polynomial of the Schreier graphs of the Grigorchuk group and the Basilica group. *Turkish Journal of Science*. 2020;5(3):262–267.
24. Mirajkar KG, Pooja B. On the Hosoya polynomial and Wiener index of jump graph. *Jordan Journal of Mathematics and Statistics*. 2020;13(1):37–59.
25. Wiener H. Structural determination of paraffin boiling points. *Journal of the American Chemical Society*. 1947;69(1):17–20. DOI: 10.1021/ja01193a005.
26. Randić M. Novel molecular descriptor for structure-property studies. *Chemical Physics Letters*. 1993;211(4–5):478–483. DOI: 10.1016/0009-2614(93)87094-J.
27. Tratch SS, Stankevitch MI, Zefirov NS. Combinatorial models and algorithms in chemistry. The expanded Wiener number – a novel topological index. *Journal of Computational Chemistry*. 1990;11(8):899–908. DOI: 10.1002/jcc.540110802.

28. Plavšić D, Nikolić S, Trinajstić N, Mihalić Z. On the Harary index for the characterization of chemical graphs. *Journal of Mathematical Chemistry*. 1993;12(1):235–250. DOI: 10.1007/BF01164638.
29. Brückler F-M, Došlić T, Graovac A, Gutman I. On a class of distance-based molecular structure descriptors. *Chemical Physics Letters*. 2011;503(4):336–338.
30. Garcia Nocetti F, Stojmenovic I, Zhang Jingyuan. Addressing and routing in hexagonal networks with applications for tracking mobile users and connection rerouting in cellular networks. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*. 2002;13(9):963–971. DOI: 10.1109/TPDS.2002.1036069.
31. Manuel P, Bharati R, Rajasingh I, Chris MM. On minimum metric dimension of honeycomb networks. *Journal of Discrete Algorithms*. 2008;6(1):20–27. DOI: 10.1016/j.jda.2006.09.002.
32. Raj FS, George A. On the metric dimension of HDN3 and PHDN3. In: *Institute of Electrical and Electronics Engineers. 2017 IEEE International conference on power, control, signals and instrumentation engineering; 2017 September 21–22; Chennai, India*. Piscataway: Curran Associates; 2018. p. 1333–1336. DOI: 10.1109/ICPCSI.2017.8391927.
33. Hayat S, Imran M. Computation of topological indices of certain networks. *Applied Mathematics and Computation*. 2014;240(23):213–228. DOI: 10.1016/j.amc.2014.04.091.
34. Das S, Rai S.  $M$ -polynomial and related degree-based topological indices of the third type of chain hex-derived network. *Malaya Journal of Matematik*. 2020;8(4):1842–1850. DOI: 10.26637/MJM0804/0085.
35. Wei Changcheng, Ali H, Binyamin MA, Nacem MN, Liu Jiabao. Computing degree based topological properties of third type of hex-derived networks. *Mathematics*. 2019;7(4):368. DOI: 10.3390/math7040368.
36. Rai S, Das S.  $M$ -polynomial and degree-based topological indices of subdivided chain hex-derived network of type 3. In: Isaac Woungang, Dhurandher SK, Pattanaik KK, Verma A, Verma P, editors. *Advanced network technologies and intelligent computing: 1<sup>st</sup> International conference; 2021 December 17–18; Varanasi, India*. Cham: Springer; 2022. p. 410–424 (Communications in computer and information science series).

Received 16.07.2022 / revised 10.11.2022 / accepted 10.11.2022.

---

---

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

---

## THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

---

---

УДК 532.251

### ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ КАПЛИ С ОДНОСВЯЗНОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛОСКОСТИ

Е. В. АВДЕЙЧИК<sup>1)</sup>, П. Н. КОНОН<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Исследуются формы относительного покоя ограниченных слоев жидкости на вращающейся горизонтальной плоскости в поле силы тяжести при наличии поверхностного натяжения. Рассматриваемые слои обладают односвязной свободной поверхностью и вращательной симметрией относительно линии действия угловой скорости. Математическая постановка данной задачи сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с граничными и интегральными замыкающими условиями. Предлагается новый алгоритм численного решения полученной системы, изучается влияние различных безразмерных параметров на характеристики равновесных форм капли, и определяются критерии существования таких форм. Работа представляет теоретический интерес, поскольку рассматриваемая задача является одной из фундаментальных при исследовании

---

#### Образец цитирования:

Авдейчик ЕВ, Конон ПН. Численное исследование относительного равновесия капли с односвязной свободной поверхностью на вращающейся плоскости. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;3:79–90.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-79-90>

#### For citation:

Audzeichyk YaV, Konon PN. Numerical study of the relative equilibrium of a droplet with a simply connected free surface on a rotating plane. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;3:79–90. Russian.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-79-90>

---

#### Авторы:

**Евгений Валерьевич Авдейчик** – аспирант кафедры теоретической и прикладной механики механико-математического факультета. Научный руководитель – П. Н. Конон.  
**Павел Николаевич Конон** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры теоретической и прикладной механики механико-математического факультета.

#### Authors:

**Yauheni V. Audzeichyk**, postgraduate student at the department of theoretical and applied mechanics, faculty of mechanics and mathematics.  
[zhenya\\_avdeychik@mail.ru](mailto:zhenya_avdeychik@mail.ru)  
<https://orcid.org/0000-0002-3854-5335>  
**Pavel N. Konon**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of theoretical and applied mechanics, faculty of mechanics and mathematics.  
[kononpn@mail.ru](mailto:kononpn@mail.ru)  
<https://orcid.org/0000-0003-1817-2313>



капиллярных явлений. Разработанная численная схема может также применяться в более широком классе дифференциальных уравнений. Результаты статьи могут быть использованы в практических задачах, связанных с нанесением покрытий, производством волокон и порошков центробежно-дисковым способом.

**Ключевые слова:** относительное равновесие; вращающаяся плоскость; вращательная симметрия; число Вебера; число Бонда; формула Лапласа; поверхностное натяжение; краевой угол смачивания.

**Благодарность.** Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Энергетические и ядерные процессы и технологии» (подпрограмма «Энергетические процессы и технологии», задание 2.11 «Волновые течения капиллярных струй, слоев, пленок в центробежных, постоянных и переменных температурных полях и их применение в технологических процессах»).

## NUMERICAL STUDY OF THE RELATIVE EQUILIBRIUM OF A DROPLET WITH A SIMPLY CONNECTED FREE SURFACE ON A ROTATING PLANE

Ya. V. AUDZEICHYK<sup>a</sup>, P. N. KONON<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: Ya. V. Audzeichyk (zhenya\_avdeychik@mail.ru)

The paper investigates the shapes of relative rest of limited layers of liquid on a rotating horizontal plane in the field of gravity in the presence of surface tension. The layers under consideration have a simply connected free surface and rotational symmetry with respect to the line of action of the angular velocity. The mathematical formulation of this problem is reduced to a system of first-order ordinary differential equations with boundary and integral closing conditions. A new algorithm for the numerical solution of the resulting system is proposed, the influence of various dimensionless parameters on the characteristics of equilibrium droplet shapes is studied, and criteria for the existence of such shapes are determined. The paper is of theoretical interest, since the problem under consideration is one of the fundamental ones in the research of capillary phenomena. The developed numerical scheme can also be applied in a wider class of differential equations. The results of the article can be used in practical tasks related to coating, fiber and powder production by the centrifugal-disk method.

**Keywords:** relative equilibrium; rotating plane; rotational symmetry; Weber number; Bond number; Laplace formula; surface tension; contact angle.

**Acknowledgements.** The work was carried out with the financial support of the state program of scientific research «Energy and nuclear processes and technologies» (the subprogram «Energy processes and technologies», task 2.11 «Wave flows of capillary jets, layers, films in centrifugal, constant and variable temperature fields and their application in technological processes»).

### Введение

Моделированию течения и равновесия слоев жидкости во вращающихся и неподвижных системах отсчета посвящено большое количество научной литературы. Широкий класс таких задач при различных формах твердой границы описан в монографии [1]. Стационарные вращающиеся объемы жидкости при отсутствии контакта с твердыми поверхностями в условиях невесомости и самогравитации исследуются в фундаментальном труде [2]. Покой тяжелой капли на горизонтальной плоскости рассматривается в статье [3]. В работе [4] анализируется устойчивость относительного равновесия невесомой жидкости, заключенной между двумя вращающимися параллельными пластинами. Течение внутри вращающихся слоев в однородном поле силы тяжести изучается в статьях [5–7], при этом в работах [5; 6] и [7] подложка представляет собой горизонтальный и вертикальный диски соответственно. Подобные исследования имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Они играют важную роль в усовершенствовании методов моделирования поведения жидкости в процессах, связанных с межфазным взаимодействием. Их результаты могут использоваться при производстве порошков и волокон, а также при нанесении различных покрытий центробежными способами.

В настоящей работе рассматривается ограниченный жидкий слой в однородном поле силы тяжести с ускорением свободного падения  $g$ , направленным вниз. Капля располагается на верхней стороне твердого горизонтального основания, вращающегося с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг некоторой

вертикальной оси  $l$ , и находится в состоянии покоя относительно подложки. Координату  $Z$  определим как расстояние до некоторой горизонтальной плоскости  $\Pi$ , взятое с положительным знаком, если рассматриваемая точка выше  $\Pi$ , и с отрицательным знаком – если ниже  $\Pi$ . Координату, соответствующую расстоянию до оси  $l$ , обозначим через  $R$ . На свободную поверхность капли ( $\Sigma$ ) действует равномерное атмосферное давление ( $p_a$ ). Жидкость считается несжимаемой ( $\rho$  – ее плотность;  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения на  $\Sigma$ ;  $\theta$  – статический краевой угол смачивания на границе жидкой, газообразной и твердой фаз). Исследуются формы относительного равновесия капли, обладающие вращательной симметрией по отношению к оси  $l$ , при односвязной области контакта жидкости с основанием. Такая постановка задачи имеет место также в работах [1; 8–11]. Новизна настоящего исследования состоит в используемой вычислительной схеме. В частности, она позволяет аппроксимировать точное решение в конечном наборе точек, в то время как в методологической части [1] основное внимание уделяется аналитическим приближениям. При этом предлагаемый подход основан на решении задачи Коши с дальнейшей пристрелкой, а не на изначальном учете всех краевых условий, как описано в статьях [8; 9]. Отличие настоящего исследования от работ [10; 11] заключается в отсутствии отдельного способа реализации первого шага при начале итерационного процесса на оси  $l$ , а также в проведении оценки допустимых значений входных параметров расчета. Цель статьи – описать, обосновать и проверить алгоритм численного решения определенного класса задач, а также исследовать равновесные формы капель при помощи этого алгоритма.

### Теоретические основы

По формуле Лапласа для поверхностного натяжения имеем

$$(p - p_a)|_{\Sigma} = \sigma H, \quad (1)$$

где  $p$  – давление жидкости в некоторой рассматриваемой точке поверхности  $\Sigma$ ;  $H$  – средняя кривизна поверхности  $\Sigma$  в этой точке, определяемая как сумма главных кривизн при положительном направлении векторов главных кривизн внутрь капли.

Распределение давления  $p$  во вращающейся тяжелой капле описывается формулой [10]

$$p = 0,5\rho\omega^2 R^2 - \rho gZ + p_0, \quad (2)$$

где  $p_0$  – некоторая константа, которая зависит от конкретного значения  $p_a$ . Пусть  $L$  – характеристическое расстояние. Перейдем к безразмерным величинам  $r, z, H_0$  по формулам

$$R = rL, Z = zL, H_0 = HL. \quad (3)$$

Определим кривую  $\Lambda$ , заданную в координатах  $(r, z)$  и являющуюся образующей поверхности вращения  $\Sigma$ . В качестве начала координат  $(r, z)$  выберем точку  $O$  пересечения кривой  $\Lambda$  и оси вращения. Из формул (1)–(3) получаем следующую систему для естественной параметризации кривой  $\Lambda$  [8; 10]:

$$\begin{aligned} r' &= a, z' = b, a' = (H_0(r, z) + br^{-1})b, b' = -(H_0(r, z) + br^{-1})a, \\ H_0(r, z) &= -X + 0,5We \cdot r^2 - Bo \cdot z, \end{aligned} \quad (4)$$

где штрих означает производную по натуральному параметру  $t$  кривой  $\Lambda$ , соответствующему длине участка этой кривой от ее начала до рассматриваемой точки;  $X$  – безразмерная средняя кривизна в центре капли, рассчитываемая как удвоенная кривизна  $\Lambda$  в точке на оси  $Oz$ ;  $We$  и  $Bo$  – числа Вебера и Бонда соответственно, вычисляемые по формулам

$$We = \rho\omega^2 L^3 \sigma^{-1}, Bo = \rho g L^2 \sigma^{-1}. \quad (5)$$

В настоящей работе рассматривается только случай  $Bo \geq 0$ . Положительное значение  $X$  указывает на наличие прогиба в центре капли, отрицательное значение  $X$  – на отсутствие. Положительное направление параметризации кривой  $\Lambda$  выберем так, чтобы началу кривой ( $t = 0$ ) соответствовала точка  $(r, z) = (0, 0)$ , а концу – точка пересечения кривой  $\Lambda$  с твердой поверхностью, где примем  $t = t_{\text{end}}$ .

Система (4) замыкается краевыми условиями

$$r(0) = 0, z(0) = 0, a(0) = 1, b(0) = 0, \quad (6)$$

$$a(t_{\text{end}}) = \cos\theta, b(t_{\text{end}}) = -\sin\theta. \quad (7)$$

В силу монотонности функции  $a(t)$  при  $g \geq 0$  согласно работе [10] достаточно проверки выполнения только первого равенства из условий (7). Краевой угол должен находиться в диапазоне  $0 < \theta \leq \pi$ .

Массу капли ( $M$ ) можно найти по формуле

$$M = \rho V, \quad V = L^3 v, \quad v = 2\pi \int_0^{t_{\text{end}}} r(t)(z(t) - z(t_{\text{end}}))a(t)dt, \quad (8)$$

где  $V$  и  $v$  – размерный и безразмерный объемы капли соответственно. Если необходимо определить форму капли при заданной массе, то характеристическое расстояние  $L$  можно рассчитать по формуле

$$L = \sqrt[3]{V}. \quad (9)$$

Тогда значения  $We$  и  $Bo$  вычисляются по формулам (5), а параметр  $X$  – из условия  $v = 1$ .

В связи с тем, что при  $t = 0$  согласно уравнениям (4) и условиям (6) имеет место неопределенность типа  $0 : 0$ , стандартные численные методы, такие как методы Рунге – Кутты, без дополнений не подходят для решения данной системы. Обозначим  $c = \frac{b}{r}$ . Тогда система (4) примет вид

$$r' = a, \quad z' = cr, \quad a' = (H_0(r, z) + c)cr, \quad c' = -(H_0(r, z) + 2c)\frac{a}{r}, \quad (10)$$

где  $H_0(r, z)$  определяется таким же образом, как и в системе (4). Граничные условия (6) для начала кривой  $\Lambda$  из предположения о конечности  $c'(0)$  заменятся на

$$r(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad a(0) = 1, \quad c(0) = \frac{X}{2}. \quad (11)$$

Как условие для конца кривой  $\Lambda$  примем первое равенство (7).

В работах [10; 11] первым шагом является построение многочленов Тейлора функций  $r(t)$ ,  $z(t)$ ,  $a(t)$ ,  $c(t)$  различных порядков в окрестности  $t = 0$ . Оно выполняется путем последовательного дифференцирования уравнений (10) в предположении конечности производных всех порядков  $c(t)$  при  $t = 0$ . Со второго шага итерационного процесса используются другие алгоритмы определения приближенных значений функций в узлах сетки. При этом длина первого шага должна быть достаточно большой, чтобы в ходе дальнейшего расчета исключить деление на очень маленькое значение. В настоящем исследовании будем использовать алгоритм, не требующий отдельного подхода к первой итерации. Рассмотрим следующую задачу Коши, представляющую собой более общий случай системы (10), (11):

$$x'_i(t) = f_i(x_1, \dots, x_n) + g_i(x_1, \dots, x_{n+1})x_1 = F_i(x_1, \dots, x_{n+1}), \quad i = \overline{1, n},$$

$$x'_{n+1}(t) = \frac{f_{n+1}(x_1, \dots, x_n) - f_{n+2}(x_1, \dots, x_n)x_{n+1}}{x_1}, \quad (12)$$

$$x_i(0) = X_i, \quad i = \overline{1, n+1}, \quad X_i \geq 0, \quad (13)$$

где  $f_i(x_1, \dots, x_n)$  при  $i = 1, \dots, n+2$ ,  $g_j(x_1, \dots, x_{n+1})$  при  $j = 1, \dots, n$  – достаточно гладкие функции относительно своих аргументов, чтобы решение системы (12), (13) являлось бесконечно гладким на всей области определения ( $0 \leq t \leq t_{\text{end}}$ ). При этом пусть при  $0 \leq t \leq t_{\text{end}}$  выполняется неравенство  $x_1(t) \geq X_1$  и существует значение  $\varepsilon \ll 1$  такое, что  $f_{n+2}(x_1, \dots, x_n)h + x_1 \geq (1 - \varepsilon)h$  для любого положительного  $h$ . Вторые производные функций  $x_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) определяются по формулам

$$x''_i(t) = F_1 g_i + (f_{n+1} - f_{n+2})\partial_{n+1} g_i + \sum_{j=1}^n (\partial_j f_i + x_1 \partial_j g_i) F_j = 2G_i(x_1, \dots, x_{n+1}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (14)$$

где  $f_i$ ,  $g_j$  и  $F_j$  соответствуют  $f_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $g_j(x_1, \dots, x_{n+1})$  и  $F_j(x_1, \dots, x_{n+1})$  при  $i = 1, \dots, n+2$  и  $j = 1, \dots, n$ ;  $\partial_k$  – частная производная по  $k$ -му аргументу. Для двух произвольных точек  $t = t_0$  и  $t = t_1$ , где  $0 \leq t_0 < t_1 \leq t_{\text{end}}$  и  $t_1 - t_0 = h \ll 1$ , введем обозначения  $x_i^0 = x_i(t_0)$ ,  $x_i^1 = x_i(t_1)$ ,  $x_i^{\frac{1}{2}} = x_i\left(t_0 + \frac{h}{2}\right)$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ). Пусть

$$y_i^1 = P_i(x_1^0, \dots, x_{n+1}^0; h), \quad y_i^{\frac{1}{2}} = P_i\left(x_1^0, \dots, x_{n+1}^0; \frac{h}{2}\right),$$

$$P_i(x_1^0, \dots, x_{n+1}^0; h) = x_i^0 + F_i(x_1^0, \dots, x_{n+1}^0)h + G_i(x_1^0, \dots, x_{n+1}^0)h^2, \quad i = \overline{1, n}. \quad (15)$$

С учетом формул (12), (14), (15) из теоремы Тейлора получим

$$x_i^1 = y_i^1 + O(h^3), \quad x_i^{\frac{1}{2}} = y_i^{\frac{1}{2}} + O(h^3), \quad i = \overline{1, n}, \quad (16)$$

$$x_{n+1}^0 = x_{n+1}^1 + \left( f_{n+2}(x_1^1, \dots, x_n^1) x_{n+1}^1 - f_{n+1}(x_1^1, \dots, x_n^1) \right) \frac{h}{x_1^1} + O(h^2). \quad (17)$$

Из выражений (16) и (17) с учетом ограничения, наложенного на функцию  $f_{n+2}(x_1, \dots, x_n)$ , следует:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^1 &= p_{n+1}^1 + u(t_0)h^2 + O(h^3), \quad x_{n+1}^{\frac{1}{2}} = p_{n+1}^{\frac{1}{2}} + u(t_0)\frac{h^2}{4} + O(h^3), \\ p_{n+1}^1 &= P_{n+1}(y_1^1, \dots, y_n^1, x_{n+1}^0; h), \quad p_{n+1}^{\frac{1}{2}} = P_{n+1}\left(y_1^{\frac{1}{2}}, \dots, y_n^{\frac{1}{2}}, x_{n+1}^0; \frac{h}{2}\right), \\ x_{n+1}^1 &= P_{n+1}\left(y_1^1, \dots, y_n^1, x_{n+1}^{\frac{1}{2}}; \frac{h}{2}\right) + u\left(t_0 + \frac{h}{2}\right)\frac{h^2}{4} + O(h^3), \\ P_{n+1}(y_1^1, \dots, y_n^1, x_{n+1}^0; h) &= \frac{x_{n+1}^0 y_1^1 + f_{n+1}(y_1^1, \dots, y_n^1)h}{y_1^1 + f_{n+2}(y_1^1, \dots, y_n^1)h}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $u(t_0)$  – функция ошибки второго порядка малости. Предположим, что она обладает следующим свойством:  $u(t_0 + \Delta) = u(t_0) + O(\Delta)$  для любого  $\Delta \ll 1$ . С учетом этого, а также с учетом второго равенства из (18) пятое выражение из (18) примет вид

$$\begin{aligned} x_{n+1}^1 &= P_{n+1}\left(y_1^1, \dots, y_n^1, p_{n+1}^{\frac{1}{2}}; \frac{h}{2}\right) + S(y_1^1, \dots, y_n^1; h)u(t_0)\frac{h^2}{4} + O(h^3), \\ S(y_1^1, \dots, y_n^1; h) &= 1 + \frac{y_1^1}{y_1^1 + f_{n+2}(y_1^1, \dots, y_n^1)\frac{h}{2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Сопоставив выражения для  $x_{n+1}^1$  из формул (18), (19), найдем  $u(t_0)h^2$  и получим

$$\begin{aligned} x_{n+1}^1 &= y_{n+1}^1 + O(h^3), \\ p_{n+1}^1 &= P_{n+1}\left(y_1^1, \dots, y_n^1, p_{n+1}^{\frac{1}{2}}; \frac{h}{2}\right) - p_{n+1}^1, \\ y_{n+1}^1 &= p_{n+1}^1 + 4 \frac{P_{n+1}\left(y_1^1, \dots, y_n^1, p_{n+1}^{\frac{1}{2}}; \frac{h}{2}\right) - p_{n+1}^1}{4 - S(y_1^1, \dots, y_n^1; h)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Согласно формулам (16) и (20) полученные значения  $y_i^1$  приближают точные значения  $x_i^1$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ) с погрешностью порядка  $h^3$ . Алгоритм их определения может быть использован для численного решения системы (12), (13) с ошибкой третьего порядка малости на каждом шаге. Такой итерационный процесс заключается в определении набора точек  $t = t_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots; t_0 = 0, t_k < t_{k+1} < t_{k+2}$ ) и последовательном нахождении значений  $y_i^k$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ), аппроксимирующих  $x_i(t_k)$ :  $y_i^0 = X_i$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ),  $y_i^{k+1}$  определяются из  $y_i^k$  по формулам

$$\begin{aligned} y_i^{k+1} &= P_i(y_1^k, \dots, y_{n+1}^k; h_k), \quad y_i^{k+\frac{1}{2}} = P_i\left(y_1^k, \dots, y_{n+1}^k; \frac{h_k}{2}\right), \quad i = \overline{1, n}; \\ p_{n+1}^{k+1} &= P_{n+1}(y_1^{k+1}, \dots, y_n^{k+1}, y_{n+1}^k; h_k), \quad p_{n+1}^{k+\frac{1}{2}} = P_{n+1}\left(y_1^{k+\frac{1}{2}}, \dots, y_n^{k+\frac{1}{2}}, y_{n+1}^k; \frac{h_k}{2}\right), \\ y_{n+1}^{k+1} &= p_{n+1}^{k+1} + 4 \frac{P_{n+1}\left(y_1^{k+1}, \dots, y_n^{k+1}, p_{n+1}^{k+\frac{1}{2}}; \frac{h_k}{2}\right) - p_{n+1}^{k+1}}{4 - S(y_1^{k+1}, \dots, y_n^{k+1}; h_k)}, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $h_k = t_{k+1} - t_k$ .

Системы (10), (11) представляют собой частный случай системы (12), (13). Тогда согласно формулам (15), (18) функции  $P_i$  имеют вид

$$\begin{aligned} P_r(r, z, a, c; h) &= r + ah + 0,5(H_0(r, z) + c)rch^2, \\ P_z(r, z, a, c; h) &= z + rch - 0,5(H_0(r, z) + c)ah^2, \\ P_a(r, z, a, c; h) &= a + (H_0(r, z) + c)rch + \\ &+ 0,5h^2(rc(\partial_1 H_0(r, z)a + \partial_2 H_0(r, z)rc) - a(H_0^2(r, z) + 3H_0(r, z)c + 3c^2)), \\ P_c(r, z, a, c; h) &= (rc - H_0(r, z)ah)(r + 2ah)^{-1}, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\partial_1$  и  $\partial_2$  – частные производные по первому и второму аргументам соответственно. Пусть для некоторой последовательности точек  $t = t_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots; t_0 = 0, t_k < t_{k+1} < t_{k+2}$ ) значения  $r_k, z_k, a_k, c_k$  аппроксимируют  $r(t_k), z(t_k), a(t_k)$  и  $c(t_k)$  соответственно. Величины  $r_k, z_k, a_k, c_k$  будем определять по алгоритму (21) с учетом формулы (22). Тогда итерационный процесс запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \{t_0; r_0; z_0; a_0; c_0\} &= \left\{0; 0; 0; 1; \frac{X}{2}\right\}, t_{k+1} = t_k + h_k, r_{k+1} = P_r(r_k, z_k, a_k, c_k; h_k), \\ r_{k+\frac{1}{2}} &= P_r\left(r_k, z_k, a_k, c_k; \frac{h_k}{2}\right), z_{k+1} = P_z(r_k, z_k, a_k, c_k; h_k), \\ z_{k+\frac{1}{2}} &= P_z\left(r_k, z_k, a_k, c_k; \frac{h_k}{2}\right), a_{k+1} = P_a(r_k, z_k, a_k, c_k; h_k), \\ a_{k+\frac{1}{2}} &= P_a\left(r_k, z_k, a_k, c_k; \frac{h_k}{2}\right), p_{k+1} = P_c(r_{k+1}, z_{k+1}, a_{k+1}, c_k; h_k), \\ p_{k+\frac{1}{2}} &= P_c\left(r_{k+\frac{1}{2}}, z_{k+\frac{1}{2}}, a_{k+\frac{1}{2}}, c_k; \frac{h_k}{2}\right), c_{k+\frac{1}{2}} = P_c\left(r_{k+1}, z_{k+1}, a_{k+1}, p_{k+\frac{1}{2}}; \frac{h_k}{2}\right), \\ c_{k+1} &= p_{k+1} + 4(r_{k+1} + a_{k+1}h_k)(2r_{k+1} + 3a_{k+1}h_k)^{-1}\left(c_{k+\frac{1}{2}} - p_{k+1}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Проведем сравнение описанного алгоритма со стандартным методом расчета с таким же ожидаемым порядком погрешности. Разложение решения в ряд Тейлора в окрестности  $t = 0$  при  $h \ll 1$  дает

$$\begin{aligned} r(h) &= h + O(h^3), z(h) = X \frac{h^2}{4} + O(h^3), a(h) = 1 - X^2 \frac{h^2}{8} + O(h^3), \\ c(h) &= \frac{X}{2} + \left(\text{Bo} \frac{X}{2} - \text{We}\right) \frac{h^2}{8} + O(h^3). \end{aligned} \quad (24)$$

Первый шаг вспомогательного расчета будем осуществлять исходя из формул (24). Все последующие шаги выполним с помощью исправленного метода Эйлера, который также имеет второй порядок точности на каждом шаге. Таким образом, введенные значения  $t_k, r_k, z_k, a_k, c_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) будут определяться согласно следующему алгоритму:

$$\begin{aligned} \{t_1; r_1; z_1; a_1; c_1\} &= \left\{h_0; h_0; X \frac{h_0^2}{4}; 1 - X^2 \frac{h_0^2}{8}; \frac{X}{2} + \left(\text{Bo} \frac{X}{2} - \text{We}\right) \frac{h_0^2}{8}\right\}, \\ x_k &= \{r_k; z_k; a_k; c_k\}, s_{1k} = f(x_k), s_{2k} = f(x_k + s_{1k}h_k), x_{k+1} = x_k + (s_{1k} + s_{2k}) \frac{h_k}{2}, \\ t_{k+1} &= t_k + h_k, f(\{r; z; a; c\}) = \left\{a; cr; (H_0(r, z) + c)cr; -(H_0(r, z) + 2c) \frac{a}{r}\right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

### Результаты и их обсуждение

Ошибкой вычислений ( $\Delta_{\text{err}}(t)$ ) для аппроксимации кривой  $\Lambda$  будем называть величину  $rc - r(0,5X - 0,125We r^2)$ , если  $Bo = 0$ , или величину  $a^2 + c^2 r^2 - 1$  в противном случае. Если  $r(t)$ ,  $z(t)$ ,  $a(t)$  и  $c(t)$  – точное решение, то  $\Delta_{\text{err}}(t) \equiv 0$ . Расхождением результатов, полученных двумя различными способами, назовем функцию  $\Delta_{\text{dif}}(t)$ , определенную при натуральном параметре  $t$  от 0 до минимального значения из двух рассчитанных значений  $t_{\text{end}}$  и равную для каждого конкретного  $t$  из этого промежутка расстоянию между точками  $(r(t), z(t))$  двух полученных кривых. Показатели ошибки вычислений  $\lambda(\Delta_{\text{err}}(t))$  и расхождения результатов  $\lambda(\Delta_{\text{dif}}(t))$  определим с помощью функционала  $\lambda$ , который необходим для более удобного отображения накопления погрешности на всей области определения:

$$\lambda(\Delta(t)) = \lg \left( 10^{10} \int_0^t |\Delta(t)| dt + 1 \right), \quad \int_0^t |\Delta(t)| dt = 10^{-10} (10^{\lambda(\Delta(t))} - 1).$$

На рис. 1 изображены  $\lambda(\Delta_{\text{err}}(t))$  и  $\lambda(\Delta_{\text{dif}}(t))$  при использовании различных алгоритмов и плотностей сеток. Черные линии относятся к ошибкам вычислений, красные – к расхождению полученных результатов. Все графики соответствуют  $X = 0,8$ ;  $We = 0,8$ .

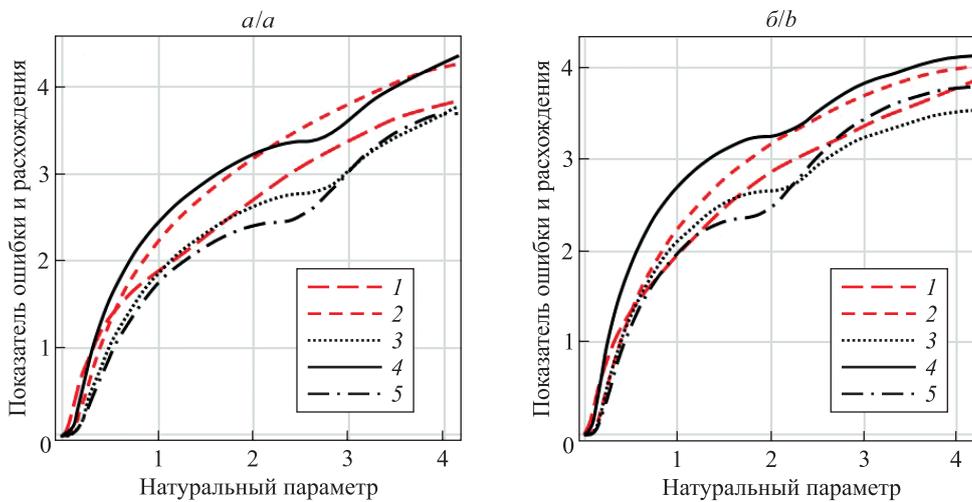


Рис. 1. Оценка накопления погрешности в ходе итерационного процесса при числах Бонда, равных 1 (а) и 0 (б). Показатели расхождения результатов, полученных с помощью алгоритма (23) с шагами 0,001 и 0,000 5 (1); алгоритмов (23) и (25) с шагом 0,001 (2). Показатель ошибки вычислений при использовании алгоритма (23) с шагом 0,000 5 (3); алгоритма (23) с шагом 0,001 (4); алгоритма (25) с шагом 0,001 (5)

Fig. 1. Estimation of error accumulation during the iterative process with Bond numbers equal to 1 (a) and 0 (b). Indicators of difference of results obtained using algorithm (23) with steps 0.001 and 0.000 5 (1); algorithms (23) and (25) with steps 0.001 (2). Calculation error indicator when using algorithm (23) with steps 0.000 5 (3); algorithm (23) with steps 0.001 (4); algorithm (25) with steps 0.001 (5)

Сравнение сплошных и пунктирных графиков показывает, что соответствующая им ошибка расчета обусловлена в первую очередь погрешностью алгоритма, а не машинным округлением, поскольку увеличение числа итераций привело к уменьшению ошибки, а не к росту. При этом сокращение длины шага в 2 раза вызвало уменьшение ошибки  $\Delta_{\text{err}}(t)$  приблизительно в 4 раза, поскольку величина  $\lambda(\Delta_{\text{err}}(t))$  на основной части кривой  $\Lambda$  уменьшилась примерно на  $\lg(4) \approx 0,6$ . Такой эффект от уменьшения шага согласуется со вторым порядком ожидаемой накапливающейся погрешности при больших значениях параметра  $t$ . Анализ сплошных и штрихпунктирных графиков позволяет сделать вывод о схожей точности методов расчета по схемам (25) и (23). При этом алгоритм (21), частным случаем которого является схема (23), не требует предварительной оценки значения  $X_1$ , за исключением проверки выполнения условия, наложенного на функции  $f_{n+2}(x_1, \dots, x_n)$  и  $x_1(t)$ , и может быть использован без изменений как при  $X_1 = 0$ , так и при  $X_1 > 0$ . В то же время использование, например, методов Рунге – Кутты подразумевает отдельные подходы к различным значениям начальных параметров  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n + 1$ ). Это выражается

в необходимости не только различать случаи  $X_1 = 0$  и  $X_1 > 0$ , но и соотносить величину шага со значением  $X_1$  или переходить к новым начальным условиям, если  $X_1 \ll 1$ . В качестве примера рассмотрим систему (10) при входных параметрах  $Bo \neq 0$ ,  $r(0) = r_0 > 0$ ,  $z(0) = 0$ ,  $a(0) = \left(1 - (r_0 c_0)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ,  $c(0) = c_0$ , где  $0 < h \ll 1$  – длина шага, используемого при численном расчете, а  $r_0$  и  $c_0$  – произвольные числа,  $|r_0 c_0| \ll 1$ . Данная задача рассматривается в отрыве от физического смысла для демонстрации особенностей использования различных численных методов и областей их применения. Ошибка  $\Delta_{\text{err}}$  при использовании схемы (21) для решения этой системы имеет порядок  $\left(c_0 - \frac{X}{2}\right)^2 h^2$ , т. е. не зависит от  $r_0$ , и для достижения оптимальной точности длину шага не нужно соотносить со значением  $r(t)$ . Кроме того, результаты моделирования демонстрируют, что такая ошибка сохраняется и при  $r_0 = 0$ , когда методы Рунге – Кутты не применимы. Использование исправленного метода Эйлера для описанной задачи при  $h \geq r_0$  дает ошибку  $\Delta_{\text{err}} \sim \left(c_0 - \frac{X}{2}\right)^2 \frac{h^4}{r_0^2}$ , что больше ожидаемой погрешности данного метода, поэтому при выборе шага необходимо учитывать не только  $\left(c(t) - \frac{X}{2}\right)$ , но и  $r(t)$ , чтобы значение  $\left(c(t) - \frac{X}{2}\right)h$  нигде не оказалось намного больше, чем  $r(t)$ . Если  $r_0$  не превышает допустимую погрешность, то более оптимальным является переход к начальным условиям (11) и алгоритму (25). Таким образом, алгоритм (21) для рассматриваемого класса систем дифференциальных уравнений является более универсальным и простым в применении, чем методы Рунге – Кутты.

В дальнейших вычислениях будем использовать переменный шаг, определяемый следующим образом. Перед началом расчета конкретной кривой задается некоторое малое число  $h_c$ , а в ходе итерационного процесса по алгоритму (23) каждой новой  $k$ -й точке в соответствие ставится приближенная кривизна  $K_k = |H_0(r_k, z_k) + c_k|$  аппроксимации  $\Lambda$  в этой точке. После этого находится значение  $h_k$ : если  $K_k \leq 1$ , то  $h_k = h_c$ , в противном случае  $h_k = h_c K_k^{-1}$ . Это число  $h_c$  в дальнейшем будем называть характерным шагом сетки.

Воспроизведение с помощью алгоритма (23) представленных в работе [9] результатов моделирования равновесных меридианных кривых и сравнение полученных характеристик слоев при  $\theta = \frac{\pi}{4}$  демонстрируют хорошее согласование используемых методов.

Из вида системы (4) следует, что при  $Bo \neq 0$ ,  $We \neq 0$  форма кривой  $\Lambda$  без учета масштаба определяется только значениями  $S_1 = \frac{Bo^3}{We^2}$  и  $S_2 = \frac{X \cdot Bo}{We}$ , которые будем называть первым и вторым параметрами формы соответственно. Таким образом, можно ввести понятия базисных кривых  $\Lambda$  и капель при  $Bo = We$ , когда  $S_1 = Bo$  и  $S_2 = X$ . Тогда кривая, подобная некоторой базисной, соответствующая другим числам  $Bo$  и  $We$ , но тем же значениям  $S_1$  и  $S_2$ , получается из данной базисной кривой путем гомотетии относительно точки  $O$  с коэффициентом  $\frac{Bo}{We} = \frac{1}{Fr}$ , где  $Fr$  – число Фруда.

На рис. 2 изображена зависимость безразмерной высоты базисной капли от  $S_2$  при различных значениях  $S_1$  и краевом угле  $\theta = \pi$ . Графики безразмерной высоты капли в центре ( $z_c$ ) изображены черными линиями, графики максимальной безразмерной высоты капли ( $z_m = z_{\text{max}} + z_c$ ) при  $S_2 > 0$  – красными. Если  $S_2 \leq 0$ , то эти высоты совпадают. Здесь  $z_{\text{max}}$  – максимальное значение  $z(t)$  при  $t$  от 0 до  $t_{\text{end}}$ . Как видно из графиков, при увеличении  $S_2$  до некоторого значения  $S_{20}(S_1, \theta) < 0$  безразмерная высота базисной капли также растет. Дальнейшее увеличение  $S_2$  приводит к падению высоты, при этом при меньших значениях  $S_1$  это падение происходит быстрее. Уменьшение  $S_1$  также приводит к росту высоты базисной капли при достаточно малых  $S_2$  и к уменьшению значений  $S_2 = S_{21}(S_1, \theta)$ , при которых происходит касание подложки и свободной поверхности капли в центре. Величину  $S_{21}(S_1, \theta)$  будем называть первой критической формой. Можно выделить и вторую критическую форму  $S_2 = S_{22}(S_1)$  – наименьшее значение  $S_2$ , при котором граничное условие (7) не выполняется, поскольку на кривой  $\Lambda$  возникает точка, где  $b = 1$ . Для таких кривых  $\Lambda$  определим  $t_{\text{end}}$  как наименьшее значение натурального параметра  $t$ , при котором  $b(t_{\text{end}}) = 1$ . На рис. 3 изображены зависимости  $S_{22}(S_1)$  (сплошной график),  $S_{21}(S_1, \pi)$  (штриховой график),  $S_{21}\left(S_1, \frac{\pi}{2}\right)$  (пунктирный график).

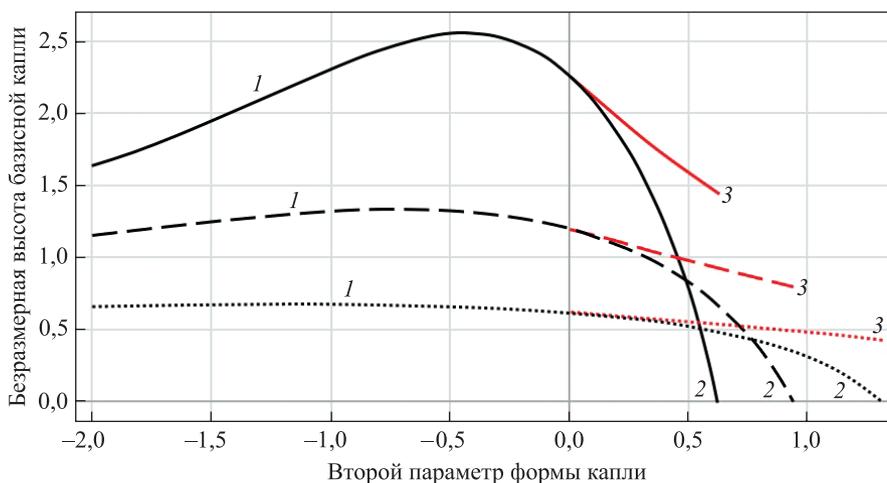


Рис. 2. Зависимость безразмерной высоты базисной капли от второго параметра формы в ее центре (1, 2), в наивысшей точке (1, 3). Сплошные линии соответствуют первому параметру формы 1/5, штриховые линии – первому параметру формы 1, пунктирные линии – первому параметру формы 5

Fig. 2. The dependence of the dimensionless height of a base drop on the second shape parameter in its center (1, 2), at the highest point (1, 3). Solid lines correspond to the first shape parameter equal to 1/5, dashed lines – to the first shape parameter equal to 1, dotted lines – to the first shape parameter equal to 5

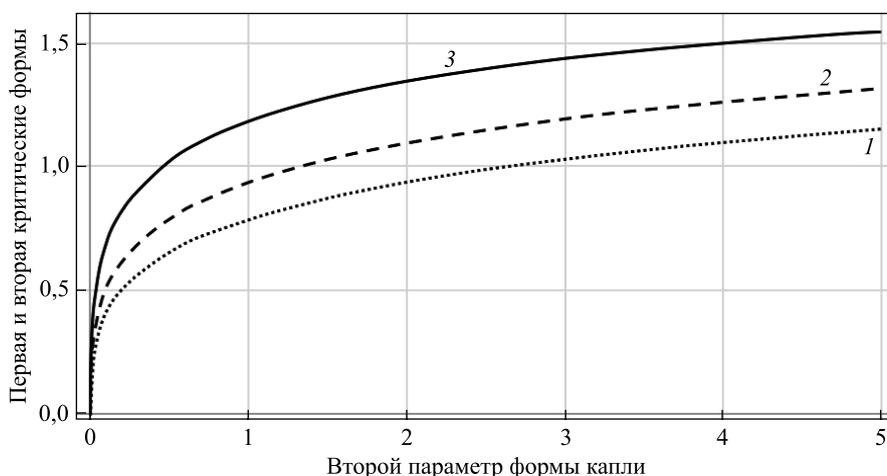


Рис. 3. Зависимость критических значений второго параметра формы капли от первого параметра: 1 – первая критическая форма при краевом угле 90°; 2 – первая критическая форма при краевом угле 180°; 3 – вторая критическая форма

Fig. 3. The dependence of the critical values of the second shape parameter of a drop on the first parameter: 1 – the first critical shape when the contact angle is 90°; 2 – the first critical shape when the contact angle is 180°; 3 – the second critical shape

Можно видеть, что по мере увеличения  $S_2$  первым достигается  $S_{21}(S_1, \theta)$ , а затем  $S_{22}(S_1)$ . Из определения  $S_{21}(S_1, \theta)$  и характера зависимости высоты  $z_c$  базисной капли от  $S_2$  следует, что если  $\theta_1 < \theta_2$ , то  $S_{21}(S_1, \theta_1) < S_{21}(S_1, \theta_2)$ . Пусть для конкретных значений  $We$ ,  $Bo$  касанию свободной поверхности и подложки в центре капли соответствует  $X = X_{01}(We, Bo, \theta)$ , а  $X_{02}(We, Bo)$  является точной нижней гранью множества значений  $X$ , при которых в одной из точек кривой  $\Lambda$  достигается равенство  $b = 1$ . Тогда при  $Bo \neq 0$ ,  $We \neq 0$   $X_{01}(We, Bo, \theta) = S_{21}\left(\frac{Bo^3}{We^2}, \theta\right) \cdot \frac{We}{Bo}$ ,  $X_{02}(We, Bo) = S_{22}\left(\frac{Bo^3}{We^2}\right) \cdot \frac{We}{Bo}$ . Кроме того, можно точно установить, что  $X_{02}(0, Bo) = 0$  и  $X_{02}(We, 0) = 3\left(\frac{We}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$  [1]. Значение  $X_{01}(0, Bo, \theta)$  не определено ввиду отсутствия прогиба. На рис. 4 изображены кривые, полученные преобразованием

$(r(t), z(t)) \rightarrow (r(t), z(t) - z(t_{\text{end}}))$  из кривых  $\Lambda$ , рассчитанных для  $X = 0,995X_{01}\left(\frac{1}{5}, 3, \pi\right)$  (штриховая линия),  $X = X_{01}\left(\frac{1}{5}, 3, \pi\right)$  (сплошная линия),  $X = 0,9995X_{02}\left(\frac{1}{5}, 3\right)$  (штрихпунктирная линия),  $X = 1,0005X_{02}\left(\frac{1}{5}, 3\right)$  (пунктирная линия). При этом  $X_{01}\left(\frac{1}{5}, 3, \pi\right) \approx 0,9982$ ,  $X_{02}\left(\frac{1}{5}, 3\right) \approx 0,1323$ .

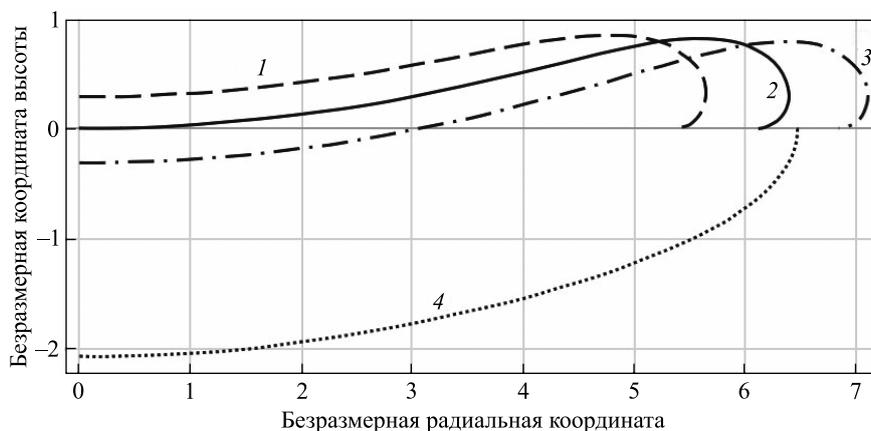


Рис. 4. Равновесные меридианные кривые при первом параметре формы, меньшем, чем первая критическая форма (1), равном ей (2), большем, чем первая критическая форма, но меньшем, чем вторая (3), большем, чем вторая критическая форма (4)

Fig. 4. Equilibrium meridian curves when the first shape parameter is smaller than the first critical shape (1), equal to it (2), larger than the first critical shape, but smaller than the second one (3), larger than the second critical shape (4)

Данные графики демонстрируют существенные различия в формах капли при малых изменениях параметра  $X$  вблизи значения  $X_{02}(We, Bo)$  при больших  $S_1$ . Таким образом, при нахождении равновесных форм, близких к критическим, путем решения задачи Коши с заданным  $X$  даже незначительная погрешность данного параметра может привести к серьезным изменениям искомых форм. В таких случаях рекомендуется применять другие методы. Для проверки точности графиков, изображенных на рис. 4, все используемые значения  $X$  увеличивались на величину 0,00001. Данное изменение почти не отразилось на формах графиков, так что полученные результаты достаточно устойчивы по  $X$  для используемого алгоритма.

Если рассматривается кривая  $\Lambda$ , заданная некоторыми значениями  $S_1, S_2$  и числом Фруда  $Fr = Fr_1$ , то подобная ей базисная имеет те же значения  $S_1, S_2$  при числе Фруда  $Fr = 1$ . Если при этом для первой кривой выполнено  $v = 1$ , т. е. характеристическое расстояние определяется по формуле (9), то согласно (8) для соответствующей базисной кривой  $v = Fr_1^3$ . Данное свойство использовалось при построении графиков на рис. 5, на котором продемонстрированы зависимости безразмерных характерных диаметров и высот капель от числа Фруда при  $v = 1, \theta = \pi$  и различных значениях  $S_1$ . Безразмерный диаметр области контакта определим как  $d_c = 2r_c$ , безразмерный диаметр прогиба при  $X > 0$  – как  $d_f = 2r(t_{\text{max}})$ , где  $t_{\text{max}}$  – точка максимума функции  $z(t)$ . Безразмерным диаметром капли  $d_m$  будем называть удвоенное максимальное значение  $r(t)$  при  $t$  от 0 до  $t_{\text{end}}$ . Диаметрам элементов капли на рис. 5 соответствуют черные линии, высотам – красные. В качестве параметра кривых на рис. 5 может быть выбран  $S_2$ . В концах всех кривых выполняется  $S_2 = S_{21}(S_1, \theta)$ . Соответствующее число Фруда обозначим  $Fr_{21}(S_1, \theta)$ . В начальных точках графиков, относящихся к величине  $d_f$ , выполняется  $S_2 = 0, d_f = 0$ . В началах остальных кривых  $S_2 = -\infty, Fr = 0, d_c = 2\kappa^{-1}\sin\theta, z_c = z_m = \kappa^{-1}(1 - \cos\theta), \kappa^3 = \frac{\pi(2 + \cos\theta)(1 - \cos\theta)^2}{3}$ , поскольку

при  $Fr = 0$  и конечных значениях  $S_1$  капля представляет собой сегмент шара радиусом  $\frac{1}{\kappa}$ . Согласно рис. 5 уменьшение  $S_1$  приводит к растяжению представленных графиков вдоль оси абсцисс, т. е. к росту числа Фруда для фиксированного характерного безразмерного диаметра или высоты. На всех изображенных графиках увеличение  $S_2$  при постоянном  $S_1$  ведет к увеличению диаметров и уменьшению высот, при этом  $Fr$  растет до некоторого максимального значения  $Fr_{\text{max}}(S_1, \theta) > Fr_{21}(S_1, \theta)$ , после чего начинает убывать. Таким образом, для любых  $S_1, \theta$  существует максимальное значение числа Фруда  $Fr_{\text{max}}(S_1, \theta)$ , при

котором возможно равновесие капли с  $\nu = 1$ , причем если  $Fr_{\max}(S_1, \theta) > Fr > Fr_{21}(S_1, \theta)$ , то имеют место сразу две возможные формы кривой  $\Lambda$  при одинаковых параметрах  $We$ ,  $Bo$ ,  $\theta$ . Это значит, что численные методы, дающие единственный ответ для каждого набора входных данных этой задачи, могут приводить к неполным решениям, если требуется найти все возможные формы равновесия, независимо от их физической устойчивости.

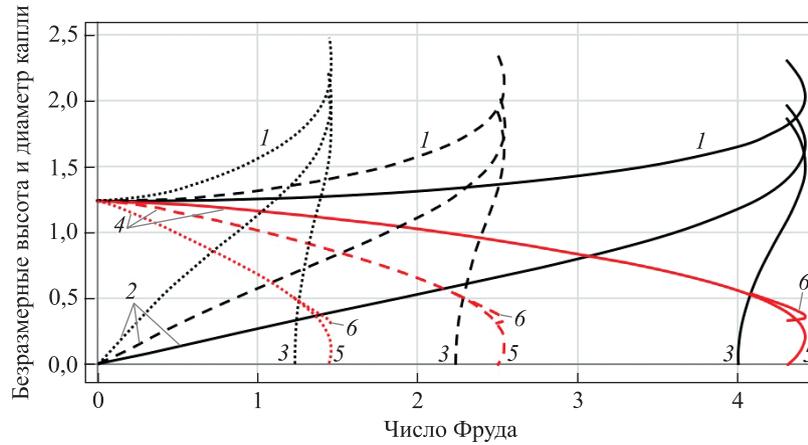


Рис. 5. Зависимость безразмерных характеристик капли от числа Фруда:  
1 – безразмерный диаметр капли; 2 – безразмерный диаметр области контакта;  
3 – безразмерный диаметр прогиба; 4, 5 – безразмерная высота капли в центре;  
4, 6 – максимальная безразмерная высота капли. Сплошные линии соответствуют  
первому параметру формы 1/5, штриховые линии – первому параметру формы 1,  
пунктирные линии – первому параметру формы 5

Fig. 5. Dependence of dimensionless characteristics of a drop on the Froude number:  
1 – the dimensionless diameter of the drop; 2 – the dimensionless diameter of the contact area;  
3 – the dimensionless diameter of the deflection; 4, 5 – the dimensionless height of the drop in the center;  
4, 6 – the maximum dimensionless height of the drop. Solid lines correspond to the first shape parameter equal to 1/5,  
dashed lines – to the first shape parameter equal to 1, dotted lines – to the first shape parameter equal to 5

Увеличение  $We$  при постоянном  $Bo > 0$  ведет к уменьшению  $S_1$  и увеличению  $Fr$ . Причем расширение диапазона допустимых чисел Фруда за счет уменьшения  $S_1$  осуществляется медленнее, чем рост  $Fr$ , в следствие чего  $Fr$  может выйти за верхнюю границу этого диапазона. Таким образом, для пары  $Bo > 0$  и  $\theta$  может существовать число Вебера  $We_{\max}(Bo, \theta)$  такое, что при  $We > We_{\max}(Bo, \theta)$  и данных  $Bo$ ,  $\theta$  невозможно определить кривую  $\Lambda$ , для которой  $\nu = 1$ . В работе [9] это значение  $We_{\max}(Bo, \theta)$  соответствовало минимальному значению  $We$ , при котором происходила аварийная остановка программы. Покажем, что данное утверждение распространяется также на случай  $Bo = 0$ . Рассмотрим каплю при  $Bo = 0$ ,  $We = 1$  и некотором  $X = X_1$ . Пусть безразмерный объем этой капли  $\nu = \nu_1$ . Тогда при  $\nu = 1$  капле, подобной описанной, будут соответствовать значения  $We = \nu_1$ ,  $X = X_1 \nu_1^{\frac{1}{3}}$ . Из численных расчетов следует, что зависимость  $X(X_1) = X_1 \nu_1^{\frac{1}{3}}(X_1)$  является монотонной, а функция  $\nu_1(X_1)$  имеет максимум, достигаемый при  $X_1 < X_{01}(1, 0, \theta)$ , т. е. до касания подложки центральным прогибом капли. Последний факт при  $\theta = \frac{\pi}{2}$  продемонстрирован также в [1]. Приведенные в [1] значение  $2^{\frac{1}{3}} X_{01}\left(1, 0, \frac{\pi}{2}\right) \approx 1,263$  и максимум  $\nu_1 \approx 9,543$  при  $2^{\frac{1}{3}} X_1 \approx 0,706$  совпадают с рассчитанным в рамках данной работы  $X_{01}\left(1, 0, \frac{\pi}{2}\right) \approx 1,0027$  и экстремумом  $\nu_1 \approx 9,526$  при  $X_1 \approx 0,558$ . Таким образом, функция  $We(X)$  для невесомых капель единичного безразмерного объема при фиксированном  $\theta$  является однозначной и имеет максимум  $We_{\max}(0, \theta)$ , достигаемый при  $X < X_{\max}(\theta) = X_{01}(1, 0, \theta) \nu_1^{\frac{1}{3}}(X_{01}(1, 0, \theta))$ . Это значит, что при  $Bo = 0$  и  $We > We_{\max}(0, \theta)$  не существует равновесных форм с  $\nu = 1$ , а при  $\nu_1(X_{01}(1, 0, \theta)) < We < We_{\max}(0, \theta)$  существуют две такие формы. Полученное значение  $We_{\max}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \approx 9,526$  хорошо согласуется с критическими числами Вебера 9,526 и 9,540, приведенными в работах [8] и [9] соответственно.

## Заклучение

В работе разработан и апробирован алгоритм определения форм относительного равновесия невесомых и тяжелых капель при круговой области контакта с вращающейся подложкой. Проведен численный анализ погрешности предлагаемого алгоритма. Данный подход может быть применен и для более широкого спектра силовых полей, что изменит только функцию  $H_0(r, z)$  в системе (10), (11), а также для иных задач вида (12), (13). Численно исследованы зависимости между различными безразмерными параметрами капли и диапазоны входных параметров, при которых существует решение поставленной задачи. Определено, что увеличение центрального прогиба вращающейся капли приводит к касанию подложки свободной поверхностью раньше, чем к невозможности удовлетворения граничного условия заданного краевого угла. Установлено, что одна и та же постановка задачи относительного равновесия капли заданной массы в размерном виде при определенных условиях может давать два различных решения или не иметь ни одного решения. При этом в сравнении с [1] данные выводы распространены на произвольные значения силы тяжести и краевого угла.

## Библиографические ссылки

1. Бабский ВГ, Копачевский НД, Мышкис АД, Слобожанин ЛА, Тюпцов АД. *Гидромеханика невесомости*. Мышкис АД, редактор. Москва: Наука; 1976. 504 с.
2. Аппель П. *Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости*. Идельсон НИ, переводчик. Москва: Объединенное научно-техническое издательство; 1936. 375 с.
3. Матюхин СИ, Фроленков КЮ. Форма капель жидкости, помещенных на твердую горизонтальную поверхность. *Конденсированные среды и межфазные границы*. 2013;15(3):292–304.
4. Бадратинова ЛГ. О запасе устойчивости цилиндрического равновесного состояния вращающейся жидкости. *Прикладная механика и техническая физика*. 1981;4:56–69.
5. Конон ПН, Кулаго АЕ, Ситко ГН, Конон НП. Экспериментальное и теоретическое исследование поведения слоя жидкости на вращающемся диске. *Теоретическая и прикладная механика*. 2016;31:87–94.
6. Sisoiev GM, Shkadov VYa. Helical waves in a liquid film on a rotating disk. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 1990;58(4):423–426. DOI: 10.1007/BF00877348.
7. Parmar NH, Tirumkudulu MS, Hinch EJ. Coating flow of viscous Newtonian liquids on a rotating vertical disk. *Physics of Fluids*. 2009;21(10):103102. DOI: 10.1063/1.3250858.
8. Polevikov VK. Methods for numerical modeling of two-dimensional capillary surfaces. *Computational Methods in Applied Mathematics*. 2004;4(1):66–93. DOI: 10.2478/cmam20040005.
9. Полевиков ВК, Денисенко ВМ. Численное исследование равновесных форм капли, вращающейся в гравитационном поле. *Вестник Белорусского государственного университета имени В. И. Ленина. Серия 1. Физика. Математика. Механика*. 1985;2:37–41.
10. Audzeichyk YV, Konon PN, Mogilevskiy EI. Analytical and numerical research of the forms of equilibrium of a liquid limited volume on a rotating horizontal base. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2020;51(2):91–96 (на англ.).
11. Конон ПН, Могилевский ЕИ, Ситко ГН, Шкадов ВЯ. Равновесие капли жидкости на вращающемся диске. *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика*. 2020;4:43–50.

## References

1. Babskii VG, Kopachevskii ND, Myshkis AD, Slobozhanin LA, Tyuptsov AD. *Hydro-mechanics of weightlessness*. Myshkis AD, editor. Moscow: Nauka; 1976. 504 p. Russian.
2. Appel P. *Figury ravnovesiya vrashchayushcheyiya odnorodnoi zhidkosti* [Equilibrium figures of a rotating homogeneous liquid]. Idel'son NI, translator. Moscow: Ob'edinennoe nauchno-tekhnicheskoe izdatel'stvo; 1936. 375 p. Russian.
3. Matyukhin SI, Frolenkov KYu. Shape of liquid drops on solid horizontal surface. *Condensed Matter and Interphases*. 2013; 15(3):292–304. Russian.
4. Badratina LG. [On the stability margin of the cylindrical equilibrium state of a rotating fluid]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 1981;4:56–69. Russian.
5. Konon PN, Kulago AE, Sitsko GN, Konon NP. [Experimental and theoretical study of the behaviour of a liquid layer on a rotating disk]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*. 2016;31:87–94. Russian.
6. Sisoiev GM, Shkadov VYa. Helical waves in a liquid film on a rotating disk. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 1990;58(4):423–426. DOI: 10.1007/BF00877348.
7. Parmar NH, Tirumkudulu MS, Hinch EJ. Coating flow of viscous Newtonian liquids on a rotating vertical disk. *Physics of Fluids*. 2009;21(10):103102. DOI: 10.1063/1.3250858.
8. Polevikov VK. Methods for numerical modeling of two-dimensional capillary surfaces. *Computational Methods in Applied Mathematics*. 2004;4(1):66–93. DOI: 10.2478/cmam20040005.
9. Polevikov VK, Denisenko VM. [Numerical study of equilibrium forms of a drop rotating in a gravitational field]. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta imeni V. I. Lenina. Seriya 1. Fizika. Matematika. Mekhanika*. 1985;2:37–41. Russian.
10. Audzeichyk YV, Konon PN, Mogilevskiy EI. Analytical and numerical research of the forms of equilibrium of a liquid limited volume on a rotating horizontal base. *Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials*. 2020;51(2):91–96.
11. Konon PN, Mogilevskii EI, Sitsko GN, Shkadov VYa. Equilibrium of a liquid drop on rotating disk. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*. 2020;4:43–50. Russian.

УДК 517.988; 519.65

## К ТЕОРИИ ОПЕРАТОРНОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

М. В. ИГНАТЕНКО<sup>1)</sup>, Л. А. ЯНОВИЧ<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

<sup>2)</sup>Институт математики НАН Беларуси, ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Беларусь

Рассматривается проблема построения и исследования определенных в пространствах прямоугольных матриц интерполяционных операторных многочленов произвольной фиксированной степени, которые являлись бы обобщениями соответствующих интерполяционных формул в случае квадратных матриц. Построены формулы линейной интерполяции различной структуры для прямоугольных матриц. Указаны матричные многочлены, относительно которых полученные интерполяционные формулы являются инвариантными. В качестве обобщения линейных формул построены формулы квадратичной интерполяции и интерполяции многочленами произвольной фиксированной степени в пространстве прямоугольных матриц. Рассмотрены частные случаи полученных формул, когда в качестве узлов выбираются квадратные матрицы либо когда значения интерполируемой функции являются квадратными матрицами, а также случай, когда выполняются оба эти условия. Для последнего варианта исследованы возможности различных и одинаковых порядков матриц для узлов и значений функции. Полученные результаты основаны на применении некоторых известных положений теории матриц и теории интерполирования скалярных функций. Изложение материала иллюстрируется рядом примеров.

**Ключевые слова:** псевдообратная матрица; скелетное разложение матрицы; функция от матрицы; матричный многочлен; операторное интерполирование.

**Благодарность.** Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.3.01).

---

### Образец цитирования:

Игнатенко МВ, Янович ЛА. К теории операторного интерполирования в пространствах прямоугольных матриц. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;3:91–106.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-91-106>

### For citation:

Ignatenko MV, Yanovich LA. On the theory of operator interpolation in spaces of rectangular matrixes. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;3: 91–106. Russian.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-91-106>

---

### Авторы:

**Марина Викторовна Игнатенко** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.

**Леонид Александрович Янович** – член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник.

### Authors:

**Marina V. Ignatenko**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of web-technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics.  
[ignatenkomv@bsu.by](mailto:ignatenkomv@bsu.by)  
<https://orcid.org/0000-0002-8029-1842>

**Leonid A. Yanovich**, corresponding member of the National Academy of Sciences, doctor of science (physics and mathematics), full professor; chief researcher.  
[yanovich@im.bas-net.by](mailto:yanovich@im.bas-net.by)

## ON THE THEORY OF OPERATOR INTERPOLATION IN SPACES OF RECTANGULAR MATRIXES

M. V. IGNATENKO<sup>a</sup>, L. A. YANOVICH<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

<sup>b</sup>Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus,  
11 Surhanava Street, Minsk 220072, Belarus

Corresponding author: M. V. Ignatenko (ignatenkomv@bsu.by)

The problem of constructing and studying interpolation operator polynomials of an arbitrary fixed degree, defined in spaces of rectangular matrices, which would be generalisations of the corresponding interpolation formulas in the case of square matrices, is considered. Linear interpolation formulas of various structures are constructed for rectangular matrices. Matrix polynomials, with respect to which the resulting interpolation formulas are invariant, are indicated. As a generalisation of linear formulas, formulas for quadratic interpolation and interpolation by polynomials of arbitrary fixed degree in the space of rectangular matrices are constructed. Particular cases of the obtained formulas are considered: when square matrices are chosen as nodes or when the values of the interpolated function are square matrices, as well as the case when both of these conditions are satisfied. For the last variant, the possibilities of different and identical matrix orders for nodes and function values are explored. The obtained results are based on the application of some well-known provisions of the theory of matrices and the theory of interpolation of scalar functions. The presentation of the material is illustrated by a number of examples.

**Keywords:** pseudo-inverse matrix; skeletal decomposition of a matrix; function of a matrix; matrix polynomial; operator interpolation.

**Acknowledgements.** This work was supported by the state program of scientific research «Convergence-2025» (sub-program «Mathematical models and methods», task 1.3.01).

### Введение

Интерполирование функций – один из классических методов приближения функций, который находит широкое применение при построении численных методов решения различных классов задач, например при построении приближенных формул численного интегрирования и дифференцирования, построении приближенного решения интегральных уравнений и в других задачах.

Одним из способов обобщения задачи интерполирования функций является задача интерполирования функций от матриц. Основные вопросы, которые здесь возникают, – это разрешимость самой задачи, построение интерполяционных формул, изучение погрешности приближения и другие вопросы.

Широко известна интерполяционная формула Лагранжа – Сильвестра. Однако для ее построения необходимо знать собственные значения матрицы, которые являются аргументами функции. Причем как эта формула, так и некоторые другие известные формулы применяются для квадратных матриц.

Цель настоящей работы – построение формул интерполяции матричными многочленами в пространстве прямоугольных матриц, которые являлись бы обобщением соответствующих формул в случае квадратных матриц.

В данной статье указаны необходимые сведения из теории прямоугольных матриц: определение обобщенной обратной (псевдообратной) матрицы, понятие скелетного разложения матрицы, доказательство существования и единственности псевдообратной матрицы, описание схемы ее вычисления и применения для решения линейных алгебраических уравнений. Введено понятие матричных многочленов для квадратных матриц, рассмотрены их виды, а также представлены некоторые обобщения этих многочленов на пространство прямоугольных матриц.

Построены формулы линейной интерполяции различной структуры для прямоугольных матриц. Рассмотрены линейные интерполяционные многочлены трех видов. Для каждого вида указаны матричные многочлены, относительно которых линейные интерполяционные многочлены являются инвариантными.

В качестве обобщения линейных формул приведены формулы квадратичной интерполяции и интерполяции произвольной фиксированной степени в пространстве прямоугольных матриц. Рассмотрены частные случаи построенных формул, когда в качестве узлов выбираются квадратные матрицы либо когда значения интерполируемой функции являются квадратными матрицами, а также случай, когда выполняются оба эти условия. Для последнего варианта исследованы возможности различных и одинаковых матричных порядков для узлов и значений функции. Изложение материала иллюстрируется рядом примеров.

### Предварительные сведения из теории обобщенных обратных матриц

Приведем общие сведения [1] о псевдообратных матрицах и некоторых их свойствах, а также вы-ясним вопросы существования и единственности псевдообратной матрицы. Для этого рассмотрим матричное уравнение  $AXA = A$ , где  $A$  – заданная матрица порядка  $m \times s$  (она может быть и квадратной),  $X$  – искомая матрица порядка  $s \times m$ .

Матрица  $A^+$  порядка  $s \times m$  называется псевдообратной для матрицы  $A$  порядка  $m \times s$ , если выполняются условия:

$$1) AA^+A = A;$$

$$2) A^+ = UA^*;$$

3)  $A^+ = A^*V$ , где  $A^*$  – матрица, эрмитово-сопряженная к матрице  $A$ , а  $U$  и  $V$  – некоторые квадратные матрицы порядков  $s$  и  $m$  соответственно.

Псевдообратную матрицу  $A^+$  называют также матрицей Мура – Пенроуза.

Отметим, что если  $A$  – квадратная невырожденная матрица, то  $A^+ = A^{-1}$ . Действительно, в этом случае при замене  $A^+$  на  $A^{-1}$  выполняются все три условия:  $AA^{-1}A = IA = A$ ,  $A^{-1} = UA^* = A^*V$ , где  $U = (A^*A)^{-1} = A^{-1}(A^*)^{-1}$ , а  $V = (AA^*)^{-1} = (A^*)^{-1}A^{-1}$ . В силу единственности матрицы  $A^+$  (это будет доказано ниже) следует, что  $A^+ = A^{-1}$ .

Покажем, что для любой матрицы  $A$  псевдообратная матрица  $A^+$  существует и она единственна. Пусть матрица  $A$  имеет ранг  $r_A$ , очевидно, что  $r_A \leq m$  и  $r_A \leq s$ . Тогда, как известно, матрицу  $A$  можно предста-вить в виде

$$A = BC = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & \dots & b_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & \dots & b_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & \dots & c_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r1} & \dots & c_{rs} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

при этом  $r_A = r_B = r_C$ , т. е. матрицы  $B$  и  $C$  имеют тот же ранг, что и матрица  $A$ . Представление (1) называют скелетным разложением матрицы  $A$ . Очевидно, что оно не однозначно.

Поскольку  $B$  и  $C$  имеют максимально возможные ранги, то  $B^*B$  и  $CC^*$  обратимы, т. е.  $\det B^*B \neq 0$ ,  $\det CC^* \neq 0$ . Покажем, что для псевдообратной матрицы  $A^+$  имеет место равенство

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*. \quad (2)$$

Используя формулу (2), проверим выполнение трех условий из определения матрицы  $A^+$ . Действительно,

$$AA^+A = BCC^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*BC = BC = A,$$

т. е. первое условие выполняется.

Построим матрицы  $U$  и  $V$ , для которых будут выполняться равенства  $A^+ = UA^* = A^*V$ . Пусть  $K = (CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}$ . Тогда  $A^+ = C^*KB^* = C^*K(CC^*)^{-1}(CC^*)B^* = UC^*B^* = UA^*$ , где  $U = C^*K(CC^*)^{-1}C$ . Ана-логично  $A^+ = C^*KB^* = C^*(B^*B)(B^*B)^{-1}KB^* = A^*V$ , где  $V = B(B^*B)^{-1}KB^*$ .

Итак, для  $A^+$ , задаваемой равенством (2), выполняются все три условия, которыми определяется матрица Мура – Пенроуза, причем в условиях 2 и 3 матрицы  $U$  и  $V$  имеют вид  $U = C^*K(CC^*)^{-1}C$  и  $V = B(B^*B)^{-1}KB^*$  соответственно.

Покажем далее, что  $A^+ = C^+B^+$ , где  $C$  и  $B$  – матрицы из скелетного разложения матрицы  $A$ . Как уже от-мечалось выше, псевдообратные матрицы  $B^+$  и  $C^+$  всегда существуют и для них имеют место равенства

$$BB^+B = B, B^+ = \tilde{U}B^*, B^+ = B^*\tilde{V}; CC^+C = C, C^+ = \tilde{U}C^*, C^+ = C^*\tilde{V}.$$

Умножая равенство  $B\tilde{U}B^*B = B$  слева на  $B^*$ , получим, что  $B^*B\tilde{U}B^*B = B^*B$ . Так как матрица  $B^*B$  обратима, то, умножая последнее равенство слева на  $(B^*B)^{-1}$ , получим соотношение  $\tilde{U}B^*B = I$ , которое, в свою очередь, после умножения справа на  $(B^*B)^{-1}$  переходит в равенство  $\tilde{U} = (B^*B)^{-1}$ , т. е.  $B^+ = (B^*B)^{-1}B^*$ .

Аналогично находим  $C^+$ . Для этого используем равенство  $CC^*\tilde{V}C = C$ . Умножая его слева на  $C^*$ , получим  $CC^*\tilde{V}CC^* = CC^*$ , затем снова умножим его справа и слева на  $(CC^*)^{-1}$  и получим, что  $\tilde{V} = (CC^*)^{-1}$ , т. е.  $C^+ = C^*(CC^*)^{-1}$ . Заменяя в произведении  $C^+B^+$  известные выражения для сомножителей, приходим к соотношению

$$C^+B^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = A^+.$$

Покажем, что построенная матрица  $A^+$  для матрицы  $A$  единственна. Пусть для матрицы  $A$  существуют две псевдообратные матрицы  $A_1^+$  и  $A_2^+$ , тогда

$$AA_1^+A = A = AA_2^+A, A_1^+ = U_1A^* = A^*V_1, A_2^+ = U_2A^* = A^*V_2.$$

Обозначим  $D = A_2^+ - A_1^+$ ,  $U = U_2 - U_1$ ,  $V = V_2 - V_1$ . Из предыдущих равенств следует, что  $ADA = A(A_2^+ - A_1^+)A = 0$ ,  $D = (U_2 - U_1)A^* = UA^*$ ,  $D = A^*(V_2 - V_1) = A^*V$ . Поскольку  $(DA)^*DA = A^*D^*DA = A^* \times (V^*A)DA^* = A^*V^*(ADA) = 0$ , то приходим к равенству  $DA = 0$ . Так как из равенств  $AA^* = 0$  или  $A^*A = 0$  для произвольных матриц  $A$  следует, что  $A = 0$ , то  $DD^* = DAU^* = 0$ . Это означает, что  $D = 0$  и, следовательно,  $A_1^+ = A_2^+$ , т. е. для матрицы  $A$  существует единственная псевдообратная матрица  $A^+$ .

**Пример 1.** Построим псевдообратную матрицу  $A^+$  для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы  $A$  равен 2. Скелетное разложение  $A = BC$ , где  $B$  и  $C$  – матрицы ранга 2, определяется неоднозначно. Например,  $A = BC$ , где

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Далее применим формулу (2). Для матриц  $B$  и  $C$  имеем

$$BB^* = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}, (BB^*)^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, CC^* = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, (CC^*)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

$$(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что, если  $A = BC$  не является скелетным разложением, равенство  $A^+ = C^+B^+$  не всегда имеет место.

Укажем также, что  $AA^+A = A$  и, следовательно,  $A^+AA^+ = A^+$ .

Среди других свойств псевдообратных матриц отметим следующие:

- 1)  $(A^*)^+ = (A^+)^*$ ;
- 2)  $(A^+)^+ = A$ ;

3)  $(AA^+)^* = AA^+$ ,  $(A^+A)^* = A^+A$  (самосопряженность матриц  $AA^+$  и  $A^+A$ );

4)  $(AA^+)^2 = AA^+$ ,  $(A^+A)^2 = A^+A$  (матрицы  $AA^+$  и  $A^+A$  идемпотентны). Действительно,  $(AA^+)^2 = AA^+AA^+ = AA^+$ ,  $(A^+A)^2 = A^+AA^+A = A^+A$ .

Заметим, что существуют различные методы вычисления псевдообратных матриц, один из которых – метод Гревилля, или метод последовательного нахождения псевдообратных матриц [1, с. 36].

### Применение псевдообратных матриц к решению систем линейных алгебраических уравнений

Использование обратных матриц Мура – Пенроуза в матричном анализе и его различных приложениях описывается во многих книгах, в том числе и в монографии [2]. Рассмотрим их применение к решению систем линейных алгебраических уравнений

$$AX = C, \quad (3)$$

где  $A$  – матрица порядка  $m \times s$ ;  $C$  – матрица порядка  $m \times p$ ;  $X$  – искомая матрица порядка  $s \times p$  [3–5]. Для того чтобы система (3) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы  $\text{rank } A = \text{rank}(A|C)$ , где  $A|C$  – расширенная матрицей  $C$  матрица  $A$ . Это равенство равносильно условию  $C = AV$ , где  $V$  – некоторая матрица подходящего порядка.

Обозначим правое ядро матрицы  $A$  через  $\mathfrak{R}(A) = \{N : AN = 0\}$ . Решение системы  $AX = C$  записывается в виде  $X = A^+C + N$ , где  $N \in \mathfrak{R}(A)$ . Действительно,

$$Ax = A(A^+C + N) = AA^+C + AN = AA^+AV = AV = C.$$

В качестве  $N$  всегда можно выбрать нулевую матрицу (в итоге получим одно из решений системы (3)) или взять  $N = (I - A^+A)B$ , где  $B$  – любая квадратная матрица порядка  $m$ .

Таким образом, общее решение однородной системы  $AX = 0$  и неоднородной линейной алгебраической системы  $AX = b$  задаются равенствами  $X = (I - A^+A)q$  и  $X = A^+b + (I - A^+A)q$  соответственно, где  $q$  – произвольный вектор подходящего порядка.

Для уравнений  $AX = 0$  и  $XA = 0$ , где искомой переменной является матрица, общее решение  $X$  записывается в аналогичном виде:  $X = (I - A^+A)Q$  и  $X = Q(I - AA^+)$ , где  $Q$  – произвольная матрица соответствующего порядка. В этом легко убедиться непосредственной подстановкой  $X$  в исходные уравнения.

**Пример 2.** Решим уравнение

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 5 & 9 & 5 \end{bmatrix}.$$

Для этого вычислим

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 5 & 9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$X \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

### Матричные многочлены и основные задачи теории операторного интерполирования

Пусть  $K_m$  – множество квадратных матриц порядка  $m$ , а оператор  $F : K_m \rightarrow K_m$ . В качестве точек множества  $K_m$  будем рассматривать матрицы  $A_0, A_1, \dots, A_n, X$  и соответствующие значения функции  $F$  от этих матриц:  $F(A_0), F(A_1), \dots, F(A_n), F(X)$ .

Лагранжева задача интерполирования операторов состоит в следующем: для заданного оператора  $F$  и известной последовательности матриц  $A_0, A_1, \dots, A_n$  построить другой оператор  $P_n : K_m \rightarrow K_m$  (например, матричный многочлен некоторой фиксированной степени) такой, что

$$P_n(A_k) = F(A_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Кроме построения  $P_n(X)$ , в теории операторного интерполирования рассматриваются задачи исследования погрешности  $r_n(X) = P_n(X) - F(X)$ , где  $r_n(A_k) = 0$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ), и применения интерполяционных формул  $F(X) \approx P_n(X)$  для разработки приближенных методов решения различных классов задач.

Матричные многочлены могут быть как с числовыми, так и с матричными коэффициентами. Матричный многочлен степени  $n$  с числовыми коэффициентами имеет вид

$$P_n(X) = a_0 I_m + a_1 X + \dots + a_n X^n,$$

где  $a_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) – некоторые числа;  $I_m$  – единичная матрица порядка  $m$ ,  $X \in K_m$ .

Матричным многочленом степени  $n$  с матричными коэффициентами называют матрицы одного из видов

$$P_n(X) = A_0 + A_1 X + \dots + A_n X^n, \quad Q_n(X) = B_0 + X B_1 + \dots + X^n B_n,$$

где  $A_k, B_k \in K_m$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) – заданные матрицы. Также рассматривают матричные многочлены

$$G_n(X) = P_n(X) + Q_n(X), \quad P_n(X) = A_0 + \sum_{k=1}^n B_k X^k C_k,$$

где  $A_0, B_k, C_k \in K_m$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) – некоторые заданные матрицы.

Если же оператор  $F : K_{m,s} \rightarrow K_m$ , где  $K_{m,s}$  – множество прямоугольных матриц порядка  $m \times s$ , а  $K_m$  – множество квадратных матриц порядка  $m$ , то можно рассматривать матричный многочлен степени  $n$  с числовыми коэффициентами

$$P_n(X) = a_0 I + a_1 X C + \dots + a_n (X C)^n,$$

где  $a_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) – некоторые числа;  $I$  – единичная матрица порядка  $m$ ;  $X \in K_{m,s}$ ;  $C$  – произвольная матрица порядка  $s \times m$ .

В случае когда оператор  $F : K_{m,s} \rightarrow K_{p,q}$ , где  $K_{p,q}$  – множество прямоугольных матриц порядка  $p \times q$ , то один из вариантов матричных многочленов степени  $n$  с матричными коэффициентами рассматривается в виде

$$P_n(X) = M + A_1 X C B_1 + \dots + A_n (X C)^n B_n,$$

где  $X \in K_{m,s}$ ;  $M$  – заданная матрица порядка  $p \times q$ ;  $A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) – заданные матрицы порядка  $p \times m$ ;  $B_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) – заданные матрицы порядка  $m \times q$ ;  $C$  – некоторая матрица порядка  $s \times m$ .

### Многочлены заданной структуры для линейной интерполяции в пространстве прямоугольных матриц

Обозначим через  $S_{lr}$  и  $S_{rl}$  матрицы порядков  $l \times r$  и  $r \times l$  соответственно ( $l, r \in \mathbb{N}; r > l$ ), которые имеют вид

$$S_{lr} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \underbrace{0 & 0 & \dots & 1}_{l} & \underbrace{0 & 0 & \dots & 0}_{r-l} & \dots & 0 \end{bmatrix} = [I_l O_{l,r-l}], \quad S_{rl} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_l \\ O_{r-l,l} \end{bmatrix},$$

где  $I_l$  – единичная матрица порядка  $l$ ;  $O_{l,r-l}$  и  $O_{r-l,l}$  – прямоугольные нулевые матрицы порядков  $l \times (r-l)$  и  $(r-l) \times l$  соответственно. Заметим, что для матриц  $S_{lr}$  и  $S_{rl}$  справедливы равенства  $S_{lr} S_{rl} = I_l$ ,

$S_{lr}I_r = S_{lr}$  и  $I_r S_{rl} = S_{rl}$ , где  $I_r$  и  $I_l$  – единичные матрицы порядков  $r$  и  $l$  соответственно. При этом произведение  $S_{rl}S_{lr} = \begin{bmatrix} I_l & O_{lr-l} \\ O_{r-l} & O_{r-lr-l} \end{bmatrix} \neq I_r$ .

Построим линейный интерполяционный многочлен вида  $M_0XQ_0 + M_1XQ_1 + K$ . Пусть  $M_i$  ( $i = 0, 1$ ),  $Q_i$  ( $i = 0, 1$ ) и  $K$  – матрицы порядков  $p \times m$ ,  $s \times q$  и  $p \times q$  соответственно,  $A_0, A_1, X \in K_{m,s}$  и определен оператор  $F: K_{m,s} \rightarrow K_{p,q}$ .

**Теорема 1.** Матричный многочлен

$$L_1(X) = F(A_0)C_0^+S_{lr}B^+(X - A_1)(A_0 - A_1)^+BS_{rl}B_0^+F(A_0) + \\ + F(A_1)C_1^+S_{lr}B^+(X - A_0)(A_1 - A_0)^+BS_{rl}B_1^+F(A_1), \quad (4)$$

где  $F(A_i) = B_iC_i$  ( $i = 0, 1$ ) и  $A_0 - A_1 = BC$  – скелетные разложения матриц  $F(A_0), F(A_1), A_0 - A_1$ ,  $a, l, t, r$  – их ранги соответственно, при условиях

$$l \leq r, t \leq r \quad (5)$$

является линейным интерполяционным многочленом вида  $M_0XQ_0 + M_1XQ_1 + K$  для функции  $F(X)$ , и для него выполняются равенства

$$L_1(A_i) = F(A_i) \quad (i = 0, 1). \quad (6)$$

Многочлен  $L_1(X)$  вида (4) инвариантен относительно матричных многочленов нулевой степени, т. е. вида  $F(X) = K$ , где  $K$  – матрица порядка  $p \times q$ , при условии, что  $\text{rank}(K) \leq r$ .

Доказательство. Очевидно, что  $L_1(X)$  – линейный многочлен заданной структуры  $M_0XQ_0 + M_1XQ_1 + K$ . Проверим справедливость интерполяционных условий (6). Действительно,

$$L_1(A_0) = F(A_0)C_0^+S_{lr}B^+(A_0 - A_1)(A_0 - A_1)^+BS_{rl}B_0^+F(A_0) = \\ = F(A_0)C_0^+S_{lr}B^+BCC^+B^+BS_{rl}B_0^+F(A_0) = F(A_0)C_0^+S_{lr}I_rS_{rl}B_0^+F(A_0) = \\ = F(A_0)C_0^+I_lB_0^+F(A_0) = F(A_0)C_0^+B_0^+F(A_0) = F(A_0)F(A_0)^+F(A_0) = F(A_0), \\ L_1(A_1) = F(A_1)C_1^+S_{lr}B^+(A_1 - A_0)(A_1 - A_0)^+BS_{rl}B_1^+F(A_1) = \\ = F(A_1)C_1^+S_{lr}B^+BCC^+B^+BS_{rl}B_1^+F(A_1) = F(A_1)C_1^+S_{lr}I_rS_{rl}B_1^+F(A_1) = \\ = F(A_1)C_1^+B_1^+F(A_1) = F(A_1)F(A_1)^+F(A_1) = F(A_1).$$

Таким образом, матричный многочлен  $L_1(X)$  вида (4) является линейным интерполяционным многочленом рассматриваемой структуры для функции  $F(X)$ .

Далее пусть  $F(X) = K$ , где  $K$  – матрица порядка  $p \times q$ , тогда  $F(A_0) = F(A_1) = K = B_0C_0$  – скелетное разложение матрицы  $K$ ,  $l = \text{rank}(K)$ . Для рассматриваемой функции  $F(X) = K$  вычислим

$$L_1(X) = KC_0^+S_{lr}B^+(X - A_1)(A_0 - A_1)^+BS_{rl}B_0^+K + \\ + KC_0^+S_{lr}B^+(X - A_0)(A_1 - A_0)^+BS_{rl}B_0^+K = \\ = KC_0^+S_{lr}B^+((X - A_1) - (X - A_0))(A_0 - A_1)^+BS_{rl}B_0^+K = \\ = KC_0^+S_{lr}B^+(A_0 - A_1)(A_0 - A_1)^+BS_{rl}B_0^+K = KC_0^+S_{lr}B^+BCC^+B^+BS_{rl}B_0^+K = \\ = KC_0^+S_{lr}I_rS_{rl}B_0^+K = KC_0^+I_lB_0^+K = KC_0^+B_0^+K = KK^+K = K \equiv F(X).$$

Заметим, что условия (5) используются при построении  $L_1(X)$  по правилу (4), в котором требуется переход от единичной матрицы  $I_r$  большего размера к единичным матрицам  $I_l, I_t$  меньшего размера, что достигается с помощью матриц  $S_{lr}, S_{rl}, S_{lr}, S_{rl}$ .

**Пример 3.** Пусть  $m = 4, s = 5, p = 3, q = 2$ ,

$$F(X) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

тогда  $r = 4$ ,  $l = 2$ ,  $t = 2$ . Скелетные разложения имеют вид

$$F(A_0) = \begin{bmatrix} 73 & 44 \\ 48 & 28 \\ 145 & 104 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 73 & 44 \\ 48 & 28 \\ 145 & 104 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B_0 C_0, \quad (9)$$

$$F(A_1) = \begin{bmatrix} 45 & 27 \\ 27 & 21 \\ 90 & 83 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 27 \\ 27 & 21 \\ 90 & 83 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B_1 C_1, \quad (10)$$

$$A_0 - A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Далее  $C_0 = C_0^+$ ,  $C_1 = C_1^+$ ,  $B = B^+$ ,

$$B_0^+ = \frac{1}{8611} \begin{bmatrix} \frac{7759}{17} & \frac{6245}{17} & -292 \\ 43 & 119 & -\frac{17513}{34} \\ -\frac{68}{4} & \frac{1959}{4} & \end{bmatrix}, \quad B_1^+ = \frac{1}{11561} \begin{bmatrix} 12 & 539 & \frac{863}{6} & -263 \\ 18 & 6 & -761 & -135 & 421 \end{bmatrix},$$

$$(A_1 - A_0)^+ = C^+ = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_{lr} = S_{rr} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{rl} = S_{rt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, согласно формуле (4) с учетом представлений (7)–(10) имеем

$$L_1(X) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -28 & -17 & 0 & 0 \\ -21 & -7 & 0 & 0 \\ -55 & -21 & 0 & 0 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 208 & -162 \\ 128 & -112 \\ 429 & -156 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Для формулы (11) справедливы интерполяционные условия (6).

Далее построим линейный интерполяционный многочлен вида  $MXQ + K$ . Пусть  $M$ ,  $Q$  и  $K$  – матрицы порядков  $p \times t$ ,  $s \times q$  и  $p \times q$  соответственно, а матрицы  $A_0, A_1, X \in K_{m, s}$ .

**Теорема 2.** Матричный многочлен

$$L_1(X) = F(A_0) + [F(A_1) - F(A_0)]C_0^+ S_{lr} B^+ (X - A_0)(A_1 - A_0)^+ B S_{rl} B_0^+ [F(A_1) - F(A_0)], \quad (12)$$

где  $F(A_1) - F(A_0) = B_0 C_0$  и  $A_1 - A_0 = BC$  – скелетные разложения матриц  $F(A_1) - F(A_0)$  и  $A_1 - A_0$  соответственно, а  $l = \text{rank}[F(A_1) - F(A_0)]$ ,  $r = \text{rank}[A_1 - A_0]$ , при условии, что  $l \leq r$ , является линейным интерполяционным многочленом вида  $MXQ_0 + K$  для функции  $F(X)$ , удовлетворяющим равенствам (6). Многочлен (12) инвариантен относительно полиномов нулевой степени, т. е. вида  $F(X) = K$ , где  $K$  – матрица порядка  $p \times q$ .

Доказательство. Очевидно, что  $L_1(X)$  является линейным многочленом заданной структуры  $MXQ_0 + K$  и  $L_1(A_0) = F(A_0)$ . Покажем, что имеет место второе равенство из интерполяционных условий (6). Поскольку

$$\begin{aligned} L_1(A_1) &= F(A_0) + [F(A_1) - F(A_0)]C_0^+ S_{lr} B^+ (A_1 - A_0)(A_1 - A_0)^+ B S_{rl} B_0^+ [F(A_1) - F(A_0)] = \\ &= F(A_0) + [F(A_1) - F(A_0)]C_0^+ S_{lr} B^+ B C C^+ B^+ B S_{rl} B_0^+ [F(A_1) - F(A_0)] = \\ &= F(A_0) + [F(A_1) - F(A_0)]C_0^+ I_l B_0^+ [F(A_1) - F(A_0)] = \\ &= F(A_0) + [F(A_1) - F(A_0)][F(A_1) - F(A_0)]^+ [F(A_1) - F(A_0)] = F(A_1), \end{aligned}$$

то матричный многочлен  $L_1(X)$  вида (12) является интерполяционным многочленом для функции  $F(X)$ .

Далее если функция  $F(X) = K$ , где  $K$  – матрица порядка  $p \times q$ , то  $F(A_1) - F(A_0) = 0$  и очевидно, что  $L_1(X) = K \equiv F(X)$ .

Заметим, что и здесь при построении  $L_1(X)$  по формуле (12) используется необходимое условие  $l \leq r$  для перехода от единичной матрицы  $I_r$  большего размера к единичной матрице  $I_l$  меньшего размера с помощью матриц  $S_{lr}$  и  $S_{rl}$ .

Далее построим линейный интерполяционный многочлен вида  $XQ + K$ . Отметим, что уравнение  $AX = C$ , где  $A$  – матрица порядка  $m \times s$ ,  $X$  – столбец порядка  $s$ , а  $C$  – столбец порядка  $m$ , имеет решение тогда и только тогда, когда расширенная матрица  $[A|C]$  порядка  $m \times (s + 1)$  имеет ранг, равный рангу матрицы  $A$ , т. е. столбец  $C$  принадлежит пространству столбцов матрицы  $A$ . Действительно, если  $X$  – решение уравнения  $AX = C$ , то  $C$  – линейная комбинация столбцов матрицы  $A$ . Следовательно, ранг матрицы  $[A|C]$  равен рангу матрицы  $A$ . Наоборот, если  $\text{rank}[A|C] = \text{rank} A$ , то  $C$  – линейная комбинация столбцов матрицы  $A$  и коэффициенты этой комбинации дадут решение  $X$  уравнения  $AX = C$ .

Пусть  $Q$  и  $K$  – матрицы порядков  $s \times q$  и  $m \times q$  соответственно, матрицы  $A_0, A_1, X \in K_{m,s}$ , а оператор  $F: K_{m,s} \rightarrow K_{m,q}$ . Через  $\mathfrak{R}(A)$  обозначим правое ядро матрицы  $A \in K_{m,s}$ , т. е.  $\mathfrak{R}(A) = \{Y: Y \in K_{s,q}, AY = 0\}$ .

Для того чтобы многочлен  $L_1(X) = XQ + K$  являлся интерполяционным многочленом для функции  $F(X)$  относительно узлов  $A_0, A_1$ , необходимо выполнение следующих условий:

$$A_0 Q + K = F(A_0), \quad A_1 Q + K = F(A_1).$$

Это система двух матричных уравнений, где  $A_0, A_1, F(A_0), F(A_1)$  – заданные матрицы, а  $Q$  и  $K$  – искомые. Отняв из второго уравнения первое, получим  $(A_1 - A_0)Q = F(A_1) - F(A_0)$  – уравнение относительно  $Q$ . Таким образом, необходимо найти все решения  $Z$  уравнения

$$(A_1 - A_0)Z = F(A_1) - F(A_0). \quad (13)$$

Как обобщение отмеченного ранее, решение этого уравнения существует тогда и только тогда, когда столбцы матрицы  $F(A_1) - F(A_0)$  принадлежат пространству столбцов матрицы  $A_1 - A_0$ . Решение  $Z_0 = (A_1 - A_0)^+ (F(A_1) - F(A_0))$  является частным решением уравнения (13), а все его решения имеют

вид  $Z = (A_1 - A_0)^+ (F(A_1) - F(A_0)) + M$ , где  $(A_1 - A_0)^+ M = O_{m,q}$  – нулевая матрица порядка  $m \times q$ . Следовательно,  $K = F(A_0) - A_0 Q$  и справедливо равенство

$$\begin{aligned} L_1(X) &= XQ + F(A_0) - A_0 Q = (X - A_0)Q + F(A_0) = \\ &= (X - A_0) \left[ (A_1 - A_0)^+ (F(A_1) - F(A_0)) + M \right] + F(A_0). \end{aligned}$$

**Теорема 3.** Матричный многочлен

$$L_1(M, X) = (X - A_0) \left[ (A_1 - A_0)^+ (F(A_1) - F(A_0)) + M \right] + F(A_0), \quad (14)$$

где  $M \in \mathfrak{R}(A_1 - A_0)$ , при условии, что  $\text{rank}[A_1 - A_0] = \text{rank}[A_1 - A_0 | F(A_1) - F(A_0)]$ , является линейным интерполяционным многочленом вида  $XQ + K$  для функции  $F(X)$ , т. е. для него справедливы равенства (6). Любой фиксированный линейный интерполяционный многочлен  $L_1(M, X)$  вида (14) инвариантен относительно матричных многочленов вида  $F(X) = XQ + K$ , если  $K$  – матрица порядка  $p \times q$ , а матрица  $Q$  порядка  $s \times q$  – элемент множества  $\{Q : Q = G + M, G \in B(A_1 - A_0)\}$ , где  $B(A)$  – совокупность всех матриц порядка  $s \times q$ , каждый столбец которых принадлежит пространству столбцов матрицы  $A^+$ ;  $M \in \mathfrak{R}(A_1 - A_0)$ .

Доказательство. Очевидно, что  $L_1(X)$  является линейным многочленом заданной структуры  $XQ + K$  и верно соотношение  $L_1(A_0) = F(A_0)$ . Покажем справедливость второго равенства из интерполяционных условий (6). Действительно,

$$\begin{aligned} L_1(M, A_1) &= (A_1 - A_0) \left[ (A_1 - A_0)^+ (F(A_1) - F(A_0)) + M \right] + F(A_0) = \\ &= (A_1 - A_0) (A_1 - A_0)^+ (F(A_1) - F(A_0)) + (A_1 - A_0) M + F(A_0) = \\ &= (F(A_1) - F(A_0)) + F(A_0) = F(A_1). \end{aligned}$$

Итак, матричный многочлен  $L_1(X)$ , заданный формулой (14), является интерполяционным многочленом для функции  $F(X)$ .

Если  $F(X) = XQ + K$ , то  $F(A_i) = A_i Q + K$  ( $i = 0, 1$ ) и справедливо тождество

$$\begin{aligned} L_1(M, X) &= (X - A_0) \left[ (A_1 - A_0)^+ (A_1 - A_0) Q + M \right] + A_0 Q + K = \\ &= (X - A_0) \left[ (A_1 - A_0)^+ (A_1 - A_0) G + (A_1 - A_0)^+ (A_1 - A_0) M + M \right] + A_0 Q + K = \\ &= (X - A_0) [G + M] + A_0 Q + K = (X - A_0) Q + A_0 Q + K = XQ + K \equiv F(X). \end{aligned}$$

### Формулы квадратичной интерполяции в пространстве прямоугольных матриц

Пусть

$$(A_0 - A_1)(A_0 - A_1)^+ (A_0 - A_2)(A_0 - A_1)^+ = B_0 C_0,$$

$$(A_1 - A_0)(A_1 - A_0)^+ (A_1 - A_2)(A_1 - A_2)^+ = B_1 C_1,$$

$$(A_2 - A_0)(A_2 - A_0)^+ (A_2 - A_1)(A_2 - A_1)^+ = B_2 C_2$$

– скелетные разложения, а  $r_i$  – ранги матриц  $\prod_{\substack{k=0, \\ k \neq i}}^2 (A_i - A_k)(A_i - A_k)^+$  ( $i = 0, 1, 2$ ) соответственно и оператор  $F : K_{m,s} \rightarrow K_{p,q}$ .

**Теорема 4.** Пусть  $F(A_k) = M_k N_k$  – скелетные разложения,  $l_k$  – ранги матриц  $F(A_k)$  ( $k = 0, 1, 2$ ) и справедливы неравенства  $l_k \leq r_k$  ( $k = 0, 1, 2$ ), тогда матричный многочлен

$$\begin{aligned} L_2(X) = & F(A_0) N_0^+ S_{l_0 r_0} B_0^+ (X - A_1) (A_0 - A_1)^+ (X - A_2) (A_0 - A_2)^+ C_0^+ S_{r_0 l_0} M_0^+ F(A_0) + \\ & + F(A_1) N_1^+ S_{l_1 r_1} B_1^+ (X - A_0) (A_1 - A_0)^+ (X - A_2) (A_1 - A_2)^+ C_1^+ S_{r_1 l_1} M_1^+ F(A_0) + \\ & + F(A_2) N_2^+ S_{l_2 r_2} B_2^+ (X - A_0) (A_2 - A_0)^+ (X - A_1) (A_2 - A_1)^+ C_2^+ S_{r_2 l_2} M_2^+ F(A_2) \end{aligned} \quad (15)$$

является квадратичным интерполяционным многочленом для функции  $F(X)$ , т. е. удовлетворяет условиям

$$L_2(A_v) = F(A_v) \quad (v = 0, 1, 2). \quad (16)$$

**Доказательство.** Действительно, для любого узла  $A_v$  ( $v = 0, 1, 2$ ) имеем

$$\begin{aligned} L_2(A_v) = & F(A_v) N_v^+ S_{l_v r_v} B_v^+ \left( \prod_{\substack{k=0, \\ k \neq v}}^2 (A_v - A_k) (A_v - A_k)^+ \right) C_v^+ S_{r_v l_v} M_v^+ F(A_v) = \\ = & F(A_v) N_v^+ S_{l_v r_v} B_v^+ B_v C_v C_v^+ S_{r_v l_v} M_v^+ F(A_v) = F(A_v) N_v^+ S_{l_v r_v} I_{r_v} S_{r_v l_v} M_v^+ F(A_v) = \\ = & F(A_v) N_v^+ I_{l_v} M_v^+ F(A_v) = F(A_v) N_v^+ M_v^+ F(A_v) = F(A_v) F(A_v)^+ F(A_v) = F(A_v), \end{aligned}$$

т. е. квадратичный многочлен  $L_2(A_v)$ , заданный по правилу (15), удовлетворяет интерполяционным условиям (16).

**Пример 4.** Пусть  $m = 3, s = 2, q = 1$ ,

$$F(X) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 17 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 8 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

тогда

$$F(A_0) = \begin{bmatrix} -51 \\ -20 \\ 41 \end{bmatrix}, \quad F(A_1) = \begin{bmatrix} -5 \\ -47 \\ 30 \end{bmatrix}, \quad F(A_2) = \begin{bmatrix} 66 \\ 42 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad l_k = 1, r_k = 2 \quad (k = 0, 1, 2).$$

Далее

$$(A_0 - A_1)^+ = -(A_1 - A_0)^+ = \frac{1}{97} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{9}{2} & 2 \\ \frac{97}{7} & \frac{9}{14} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix},$$

$$(A_0 - A_2)^+ = -(A_2 - A_0)^+ = \frac{1}{271} \begin{bmatrix} -\frac{17}{13} & -23 & \frac{163}{13} \\ \frac{213}{13} & -\frac{11}{4} & -\frac{87}{52} \end{bmatrix},$$

$$(A_1 - A_2)^+ = -(A_2 - A_1)^+ = \frac{1}{3733} \begin{bmatrix} 46 & \frac{741}{2} & -\frac{327}{2} \\ 393 & 41 & -139 \end{bmatrix}, \quad N_0^+ = N_1^+ = N_2^+ = 1,$$

$$B_0^+ = \frac{1}{19\,783} \begin{bmatrix} 20\,371 & 1638 & -728 \\ \frac{826}{3} & 20\,550 & -\frac{27\,400}{3} \end{bmatrix}, C_0^+ = \frac{1}{271} \begin{bmatrix} \frac{3425}{13} & -21 \\ -21 & \frac{425}{2} \\ -\frac{511}{13} & -\frac{219}{2} \end{bmatrix},$$

$$B_1^+ = \frac{1}{62\,909} \begin{bmatrix} 68\,093 & 6696 & -2976 \\ -696 & 62\,010 & -27\,560 \end{bmatrix}, C_1^+ = \frac{1}{3733} \begin{bmatrix} 3445 & -372 \\ -372 & \frac{6505}{2} \\ -924 & -\frac{2387}{2} \end{bmatrix},$$

$$B_2^+ = \frac{1}{275\,891} \begin{bmatrix} 283\,979 & 10\,447 & -60\,043 \\ -8880 & 264\,421 & -139\,563 \end{bmatrix}, C_2^+ = C_1^+,$$

$$M_0^+ = \frac{1}{4682} [-51 \quad -20 \quad 41], M_1^+ = \frac{1}{3134} [-5 \quad -47 \quad 30], M_2^+ = \frac{1}{3062} [33 \quad 21 \quad 1].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} L_2(X) = & \frac{1}{19\,783} \begin{bmatrix} -1\,038\,921 & -83\,538 & 37\,128 \\ -407\,420 & -32\,760 & 14\,560 \\ 835\,211 & 67\,158 & -29\,848 \end{bmatrix} (X - A_1)(A_0 - A_1)^+ (X - A_2) \frac{1}{3523} \begin{bmatrix} -17 \\ 213 \end{bmatrix} + \\ & + \frac{1}{62\,909} \begin{bmatrix} -340\,465 & -33\,480 & 14\,880 \\ -3\,200\,371 & -314\,712 & 139\,872 \\ 2\,042\,790 & 200\,880 & -89\,280 \end{bmatrix} (X - A_0)(A_1 - A_0)^+ (X - A_2) \frac{1}{3733} \begin{bmatrix} 46 \\ 393 \end{bmatrix} + \\ & + \frac{1}{275\,891} \begin{bmatrix} 18\,742\,614 & 689\,502 & -3\,962\,838 \\ 11\,927\,118 & 438\,774 & -2\,521\,806 \\ 567\,958 & 20\,894 & -120\,086 \end{bmatrix} (X - A_0)(A_2 - A_0)^+ (X - A_1) \frac{1}{3733} \begin{bmatrix} -46 \\ -393 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для формулы (17) выполняются интерполяционные условия (16).

### Интерполяционные матричные многочлены произвольных фиксированных степеней в пространстве прямоугольных матриц

Далее приведем обобщение [4; 5] формул (4) и (15) для линейной и квадратичной интерполяции соответственно на случай матричных интерполяционных многочленов произвольных фиксированных степеней. Пусть оператор  $F: K_{m,s} \rightarrow K_{p,q}$ , узлы  $A_0, A_1, \dots, A_n$  – различные прямоугольные матрицы порядка  $m \times s$ ,  $l_{nk}(X) = \prod_{\substack{i=0, \\ i \neq k}}^n (X - A_i)(A_k - A_i)^+$  ( $X \in K_{m,s}$ ), а  $r_k$  и  $l_k$  – ранги матриц  $l_{nk}(A_k)$  и  $F(A_k)$  соответственно,  $l_k \leq r_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ).

**Теорема 5.** Пусть  $l_{nk}(A_k) = B_k C_k$  и  $F(A_k) = M_k N_k$  – скелетные разложения матриц  $l_{nk}(A_k)$  и  $F(A_k)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ). Тогда для матричного многочлена

$$L_n(X) = \sum_{k=0}^n F(A_k) N_k^+ S_{l_k r_k} B_k^+ l_{nk}(X) C_k^+ S_{r_k l_k} M_k^+ F(A_k) \quad (18)$$

выполняются равенства

$$L_n(A_v) = F(A_v) \quad (v = 0, 1, \dots, n). \quad (19)$$

Доказательство. Заметим сначала, что  $l_{nk}(A_v) = \delta_{kv} B_k C_k$ , где  $\delta_{kv}$  – символ Кронекера. Матрицы  $B_k$  и  $C_k$  имеют максимальный ранг  $r_k$ . В этом случае

$$B_k^+ = (B_k^* B_k)^{-1} B_k^*, \quad C_k^+ = C_k^* (C_k C_k^*)^{-1},$$

т. е.  $B_k^+ B_k = I_{r_k}$ ,  $C_k C_k^+ = I_{r_k}$ . С учетом предыдущих равенств имеем

$$\begin{aligned} L_n(A_v) &= F(A_v) N_v^+ S_{l_v r_v} B_v^+ l_{nv}(A_v) C_v^+ S_{r_v l_v} M_v^+ F(A_v) = \\ &= F(A_v) N_v^+ S_{l_v r_v} B_v^+ B_v C_v C_v^+ S_{r_v l_v} M_v^+ F(A_v) + F(A_v) F^+(A_v) F(A_v) = F(A_v), \end{aligned}$$

т. е. для матричного многочлена (18) интерполяционные условия (19) выполняются.

В частном случае при  $n = 1$  приходим к формуле линейной интерполяции

$$\begin{aligned} L_1(X) &= F(A_0) N_0^+ S_{lr} B^+(X - A_1) C^+ S_{rt} M_0^+ F(A_0) - F(A_1) \times \\ &\quad \times N_1^+ S_{lr} B^+(X - A_0) C^+ S_{rt} M_1^+ F(A_1). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь  $F(A_i) = M_i N_i$  – скелетные разложения матриц  $F(A_i)$  ( $i = 0, 1$ ),  $l$  – ранг матрицы  $F(A_0)$ ,  $t$  – ранг матрицы  $F(A_1)$ ,  $A_0 - A_1 = BC$  – скелетное разложение матрицы  $A_0 - A_1$  и  $r$  – ее ранг ( $l, t \leq r$ ).

Отметим, что формула (20) совпадает с построенной ранее формулой линейной интерполяции (4), а матричный многочлен (18) при значении  $n = 2$  – с квадратичным интерполяционным многочленом  $L_2(X)$  вида (15).

### Частные случаи интерполяционных формул с узлами, являющимися квадратными матрицами

Из определения псевдообратной матрицы и способа ее построения через скелетное разложение следует, что если  $A$  – невырожденная квадратная матрица порядка  $m$ , то для нее существует обратная  $A^{-1}$ , и если  $A = BC$  – ее скелетное разложение, то  $B = A$ , а  $C = I_m$  – единичная матрица порядка  $m$ , при этом  $A^{-1}B = BA^{-1} = I_m$ ,  $AC = CA = A$ .

Рассмотрим формулы интерполирования матричными многочленами первой степени. Пусть  $A_0, A_1$  – квадратные матрицы порядка  $s$ , для которых существует обратная матрица  $(A_0 - A_1)^{-1}$ , а оператор  $F: K_s \rightarrow K_{p,q}$ , где, как и ранее,  $K_s$  – пространство квадратных матриц порядка  $s$ .

При сделанных предположениях матричный многочлен (4) примет вид

$$\begin{aligned} L_1(X) &= F(A_0) C_0^+ S_{ls} (A_0 - A_1)^{-1} (X - A_1) S_{st} B_0^+ F(A_0) + \\ &\quad + F(A_1) C_1^+ S_{ls} (A_1 - A_0)^{-1} (X - A_0) S_{st} B_1^+ F(A_1), \end{aligned} \quad (21)$$

где  $F(A_k) = B_k C_k$  – скелетные разложения матриц  $F(A_k)$  ( $k = 0, 1$ );  $l$  – ранг матрицы  $F(A_0)$ ;  $t$  – ранг матрицы  $F(A_1)$ . Многочлен (21) является интерполяционным для  $F(X)$ , если справедливы неравенства  $l \leq s$  и  $t \leq s$ .

Аналогично матричный многочлен (12) при предположениях, сделанных выше, запишется в виде

$$L_1(X) = F(A_0) + [F(A_1) - F(A_0)] C_0^+ S_{ls} (A_1 - A_0)^{-1} (X - A_0) S_{st} B_0^+ [F(A_1) - F(A_0)], \quad (22)$$

где  $F(A_1) - F(A_0) = B_0 C_0$  – скелетное разложение матрицы  $F(A_1) - F(A_0)$ ;  $l$  – ее ранг. Условие того, что многочлен (22) является интерполяционным, имеет вид  $l \leq s$ .

Далее рассмотрим формулы интерполирования матричными многочленами произвольной фиксированной  $n$ -й степени. Пусть  $A_0, A_1, \dots, A_n$  – квадратные матрицы порядка  $s$ , для которых существуют обратные матрицы  $(A_i - A_k)^{-1}$  ( $i, k = 0, 1, \dots, n; i \neq k$ ), а  $F: K_s \rightarrow K_{p,q}$  – оператор, где  $K_s$  и  $K_{p,q}$  – пространства матриц порядков  $s$  и  $p \times q$  соответственно.

Матричный многочлен (18) при сделанных предположениях примет вид

$$L_n(X) = \sum_{k=0}^n F(A_k) N_k^+ S_{l_k s} \left( \prod_{\substack{i=0, \\ i \neq k}}^n (X - A_i)(A_k - A_i)^{-1} \right) S_{s l_k} M_k^+ F(A_k), \quad (23)$$

где  $l_k$  – ранги матриц  $F(A_k)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ );  $F(A_k) = M_k N_k$  – скелетные разложения матриц  $F(A_k)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ). Если  $l_k \leq s$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ), то многочлен (23) является интерполяционным для функции  $F(X)$ .

### Частные случаи интерполяционных формул для значений функции, являющихся квадратными матрицами

Сначала рассмотрим случай линейного интерполирования. Пусть определен оператор  $F: K_{m,s} \rightarrow K_p$  и заданы узлы  $A_0, A_1 \in K_{m,s}$ .

В случае когда существуют обратные матрицы  $[F(A_0)]^{-1}, [F(A_1)]^{-1}$ , матричный многочлен (4) примет вид

$$L_1(X) = F(A_0) S_{pr} B^+ (X - A_1)(A_0 - A_1)^+ B S_{rp} + F(A_1) S_{pr} B^+ (x - A_0)(A_1 - A_0)^+ B S_{rp}, \quad (24)$$

где  $A_0 - A_1 = BC$  – скелетное разложение;  $r$  – ранг матрицы  $A_0 - A_1$ . Многочлен (24) является интерполяционным, если справедливо неравенство  $p \leq r$ .

Если же существует обратная матрица  $[F(A_1) - F(A_0)]^{-1}$ , то матричный многочлен  $L_1(x)$ , заданный формулой (12), запишется в виде

$$L_1(X) = F(A_0) + [F(A_1) - F(A_0)] S_{pr} B^+ (X - A_0)(A_1 - A_0)^+ B S_{rp}, \quad (25)$$

где  $A_1 - A_0 = BC$  – скелетное разложение;  $r$  – ранг матрицы  $A_1 - A_0$ . Необходимое условие того, что многочлен (25) является интерполяционным, имеет вид  $p \leq r$ .

Далее рассмотрим случай интерполирования матричными многочленами произвольной фиксированной  $n$ -й степени. Пусть  $A_0, A_1, \dots, A_n$  – матрицы порядка  $m \times s$ ,  $F: K_{m,s} \rightarrow K_p$  – оператор, где  $K_{m,s}$

и  $K_p$  – пространства матриц порядков  $m \times s$  и  $p$  соответственно. Через  $\prod_{\substack{i=0, \\ i \neq k}}^n (A_k - A_i)(A_k - A_i)^+ = B_k C_k$

( $k = 0, 1, \dots, n$ ) обозначим скелетные разложения матриц  $\prod_{\substack{i=0, \\ i \neq k}}^n (A_k - A_i)(A_k - A_i)^+$ , а через  $r_k$  – их ранги ( $k = 0, 1, \dots, n$ ).

Если существуют обратные матрицы  $[F(A_k)]^{-1}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ), то матричный многочлен  $L_n(X)$ , заданный по правилу (18), примет вид

$$L_n(X) = \sum_{k=0}^n F(A_k) S_{p r_k} B_k^+ \left( \prod_{\substack{i=0, \\ i \neq k}}^n (X - A_i)(A_k - A_i)^+ \right) C_k^+ S_{r_k p}, \quad (26)$$

где  $p$  – ранги матриц  $F(A_k)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ). Если  $p \leq r_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ), то многочлен (26) является интерполяционным для  $F(X)$ .

### Частный случай интерполяционных формул для узлов и значений функции, одновременно являющихся квадратными матрицами

Рассмотрим случай интерполяционных формул, когда узлы и значения матричной функции одновременно являются квадратными матрицами различного порядка.

Сначала построим формулы линейного интерполирования. Пусть  $F: K_s \rightarrow K_p$  – оператор, где, как и ранее,  $K_s$  и  $K_p$  – пространства квадратных матриц порядков  $s$  и  $p$  соответственно, а узлы  $A_0, A_1 \in K_s$ .

При условии существования обратных матриц  $(A_0 - A_1)^{-1}, [F(A_0)]^{-1}, [F(A_1)]^{-1}$  формула (4) примет вид

$$L_1(X) = F(A_0)S_{ps}(A_0 - A_1)^{-1}(X - A_1)S_{sp} + F(A_1)S_{ps}(A_1 - A_0)^{-1}(X - A_0)S_{sp}. \quad (27)$$

Матричный многочлен (27) является интерполяционным, если справедливо неравенство  $p \leq s$ .

Если же существуют обратные матрицы  $(A_0 - A_1)^{-1}$ ,  $[F(A_1) - F(A_0)]^{-1}$ , то матричный многочлен (12) запишется в виде

$$L_1(X) = F(A_0) + [F(A_1) - F(A_0)]S_{ps}(A_1 - A_0)^{-1}(X - A_0)S_{sp}, \quad (28)$$

где  $F(A_1) - F(A_0) = B_0C_0$  – скелетное разложение;  $p$  – ранг матрицы  $F(A_1) - F(A_0)$ . Когда  $p \leq s$ , многочлен (28) является интерполяционным.

Далее перейдем к случаю интерполирования матричными многочленами произвольной фиксированной  $n$ -й степени. Пусть определен оператор  $F: K_s \rightarrow K_p$  и заданы узлы  $A_0, A_1, \dots, A_n \in K_s$ .

Если существуют обратные матрицы  $(A_k - A_i)^{-1}$ ,  $[F(A_k)]^{-1}$  ( $k, i = 0, 1, \dots, n$ ), то формула (4) примет вид

$$L_n(X) = \sum_{k=0}^n F(A_k)S_{ps} \left( \prod_{\substack{i=0, \\ i \neq k}}^n (X - A_i)(A_k - A_i)^{-1} \right) S_{sp}. \quad (29)$$

Матричный многочлен (29) является интерполяционным, если  $p \leq s$ .

Далее рассмотрим случай интерполяционных формул, когда узлы и значения матричной функции одновременно являются квадратными матрицами одинакового порядка.

Сначала построим формулы линейного интерполирования. Пусть оператор  $F: K_s \rightarrow K_s$  и узлы  $A_0, A_1 \in K_s$ .

Если существуют обратные матрицы  $(A_0 - A_1)^{-1}$ ,  $[F(A_0)]^{-1}$ ,  $[F(A_1)]^{-1}$ , то многочлен (4) примет вид интерполяционного многочлена в форме Лагранжа:

$$L_1(X) = F(A_0)(A_0 - A_1)^{-1}(X - A_1) + F(A_1)(A_1 - A_0)^{-1}(X - A_0).$$

При условии существования обратных матриц  $(A_0 - A_1)^{-1}$ ,  $[F(A_1) - F(A_0)]^{-1}$  многочлен (12) принимает вид линейного интерполяционного многочлена в форме Ньютона:

$$L_1(X) = F(A_0) + [F(A_1) - F(A_0)](A_1 - A_0)^{-1}(X - A_0).$$

Перейдем к случаю интерполирования матричными многочленами произвольной степени. Пусть  $F: K_s \rightarrow K_s$  – оператор, а узлы  $A_0, A_1, \dots, A_n \in K_s$ .

Если существуют обратные матрицы  $(A_k - A_i)^{-1}$  и  $[F(A_k)]^{-1}$  ( $k, i = 0, 1, \dots, n$ ), то матричный многочлен (18) для интерполяции матричными многочленами произвольной фиксированной  $n$ -й степени запишется в виде

$$L_n(X) = \sum_{k=0}^n F(A_k) \left( \prod_{\substack{i=0, \\ i \neq k}}^n (X - A_i)(A_k - A_i)^{-1} \right).$$

В заключение отметим, что монография [4] посвящена вопросам теории интерполирования функций от квадратных и прямоугольных стационарных и функциональных матричных переменных с умножением в обычном смысле, по Йордану, Адамару, Фробениусу и др. Достаточно полная теория интерполирования операторов, заданных на множествах функций и матриц, изложена в монографии [5].

### Библиографические ссылки

1. Гантмахер ФР. *Теория матриц*. Москва: Наука; 1967. 575 с.
2. Магнус ЯР, Нейдеккер Х. *Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике*. Москва: Физматлит; 2002. 496 с.

3. Makarov VL, Khlobystov VV, Yanovich LA. *Methods of operator interpolation*. Київ: Інститут математики НАН України; 2010. 517 с. (Праці інституту математики НАН України; випуск 83).
4. Янович ЛА, Игнатенко МВ. *Основы теории интерполирования функций матричных переменных*. Минск: Беларуская навука; 2016. 281 с.
5. Янович ЛА, Игнатенко МВ. *Интерполяционные методы аппроксимации операторов, заданных на функциональных пространствах и множествах матриц*. Минск: Беларуская навука; 2020. 476 с.

## References

1. Gantmakher FR. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow: Nauka; 1967. 575 p. Russian.
2. Magnus YaR, Neidekker Kh. *Matrichnoe differentsial'noe ischislenie s prilozheniyami k statistike i ekonometrike* [Matrix differential calculus with applications to statistics and econometrics]. Moscow: Fizmatlit; 2002. 496 p. Russian.
3. Makarov VL, Khlobystov VV, Yanovich LA. *Methods of operator interpolation*. Kyiv: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine; 2010. 517 p. (Praci instytutu matematyky NAN Ukrai'ny; volume 83).
4. Yanovich LA, Ignatenko MV. *Osnovy teorii interpolirovaniya funktsii matrichnykh peremennykh* [Bases of the theory of interpolation of functions of matrix variables]. Minsk: Belaruskaja navuka; 2016. 281 p. Russian.
5. Yanovich LA, Ignatenko MV. *Interpolyatsionnye metody approksimatsii operatorov, zadannykh na funktsional'nykh prostranstvakh i mnozhestvakh matrits* [Interpolation methods for approximation of operators defined on function spaces and sets of matrices]. Minsk: Belaruskaja navuka; 2020. 476 p. Russian.

Получена 25.07.2022 / исправлена 30.08.2022 / принята 30.09.2022.  
Received 25.07.2022 / revised 30.08.2022 / accepted 30.09.2022.

## АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ В БГУ РАБОТ INDICATIVE ABSTRACTS OF THE PAPERS DEPOSITED IN BSU

*УДК 531.011(075.8)*

*Вярьвильская О. Н. Теоретическая механика* [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 02 «Механика и математическое моделирование» / О. Н. Вярьвильская ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2022. 228 с. : ил. Библиогр.: с. 225–227. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/288128>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 31.10.2022, № 009931102022.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Теоретическая механика» предназначен для студентов специальности 1-31 03 02 «Механика и математическое моделирование». ЭУМК включает пояснительную записку и теоретический раздел, содержащий лекционный материал. В практическом разделе приведены темы заданий для управляемой самостоятельной работы студентов и тестовые задания. Раздел контроля знаний и вспомогательный раздел включают содержание учебного материала, учебно-методические карты по трем семестрам и список рекомендуемой литературы.

*УДК 517.958(075.8)*

*Егоров А. А. Уравнения математической физики* [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 1-31 03 07 «Прикладная информатика (по направлениям)», направление спец. 1-31 03 07-02 «Прикладная информатика (информационные технологии телекоммуникационных систем)»; 1-98 01 01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)», направление спец. 1-98 01 01-02 «Компьютерная безопасность (радиофизические методы и программно-технические средства)» / А. А. Егоров ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2022. 256 с. Библиогр.: с. 254–256. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/288021>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 27.10.2022, № 009827102022.

В электронном учебно-методическом комплексе (ЭУМК) по учебной дисциплине «Уравнения математической физики» даются базовые понятия и краткие теоретические сведения, приводится решение большого числа типовых задач и предлагаются задачи различной степени сложности для самостоятельного решения. ЭУМК предназначен для студентов факультета радиофизики и компьютерных технологий БГУ. Может быть полезен преподавателям учреждений высшего образования при подготовке и проведении практических занятий по дисциплинам «Уравнения математической физики» и «Методы математической физики».

## СОДЕРЖАНИЕ

### ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

- Шилин А. П.* Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с рекуррентными соотношениями в коэффициентах ..... 6
- Мардвилко Т. С., Пекарский А. А.* Применение действительного пространства Харди – Соболева на прямой для исследования скорости равномерных рациональных приближений функций..... 16

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

- Довгодилин В. В.* Алгебраические уравнения и полиномы над кольцом  $p$ -комплексных чисел..... 37

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

- Калитин Б. С.* Псевдопродолжения в качественной теории динамических систем..... 45

### ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

- Чебаков С. В., Серебряная Л. В.* Алгоритм решения задачи о ранце при определенных свойствах паретовских слоев..... 54
- Дас Ш., Рай Ш.* О многочлене Хосоя цепной шестнадцатеричной сети третьего типа ..... 67

### ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

- Авдейчик Е. В., Конон П. Н.* Численное исследование относительного равновесия капли с односвязной свободной поверхностью на вращающейся плоскости..... 79

### ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

- Игнатенко М. В., Янович Л. А.* К теории операторного интерполирования в пространствах прямоугольных матриц..... 91

- Аннотации депонированных в БГУ работ..... 107

## CONTENTS

### REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

<i>Shilin A. P.</i> Hypersingular integro-differential equation with recurrent relations in coefficients .....	6
<i>Mardvilko T. S., Pekarskii A. A.</i> Application of the real Hardy – Sobolev space on the line to study the order of uniform rational approximations of functions .....	16

### MATHEMATICAL LOGIC, ALGEBRA AND NUMBER THEORY

<i>Dovgodilin V. V.</i> Algebraic equations and polynomials over the ring of $p$ -complex numbers .....	37
---	----

### DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

<i>Kalitine B. S.</i> Pseudo-prolongations in the qualitative theory of dynamical systems .....	45
---	----

### DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

<i>Chebakov S. V., Serebryanaya L. V.</i> Algorithm for solving the knapsack problem with certain properties of Pareto layers .....	54
<i>Das S., Rai S.</i> On the Hosoya polynomial of the third type of the chain hex-derived network ....	67

### THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

<i>Audzeichyk Ya. V., Konon P. N.</i> Numerical study of the relative equilibrium of a droplet with a simply connected free surface on a rotating plane .....	79
---	----

### COMPUTATIONAL MATHEMATICS

<i>Ignatenko M. V., Yanovich L. A.</i> On the theory of operator interpolation in spaces of rectangular matrixes .....	91
--	----

Indicative abstracts of the papers deposited in BSU .....	107
---	-----

*Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области математики и информатики), техническим наукам (в области информатики).*

*Журнал включен в наукометрические базы данных Scopus, Mathematical Reviews, Ulrichsweb, Google Scholar, zbMath, Russian Science Citation Index, РИНЦ.*

**Журнал Белорусского  
государственного университета.  
Математика. Информатика.  
№ 3. 2022**

Учредитель:  
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4,  
220030, г. Минск.

Почтовый адрес: пр. Независимости, 4,  
220030, г. Минск.

Тел. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: [jmathinf@bsu.by](mailto:jmathinf@bsu.by)

URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Журнал Белорусского государственного  
университета. Математика. Информатика»  
издается с января 1969 г.  
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ.  
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»  
(ISSN 1561-834X).

Редактор *М. А. Подголина*  
Технический редактор *В. В. Пишкова*  
Корректоры *Л. А. Меркуль, М. А. Подголина*

Подписано в печать 30.11.2022.  
Тираж 100 экз. Заказ 11108.

Издательско-полиграфическое частное  
унитарное предприятие «Донарит».  
Свидетельство о государственной регистрации  
издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий № 1/289 от 17.04.2014.  
Ул. Октябрьская, 25, 220030,  
г. Минск, Республика Беларусь.

© БГУ, 2022

**Journal  
of the Belarusian State University.  
Mathematics and Informatics.  
No. 3. 2022**

Founder:  
Belarusian State University

Registered address: 4 Niezaliežnasci Ave.,  
Minsk 220030.

Correspondence address: 4 Niezaliežnasci Ave.,  
Minsk 220030.

Tel. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: [jmathinf@bsu.by](mailto:jmathinf@bsu.by)

URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Journal of the Belarusian State University.  
Mathematics and Informatics»  
published since January, 1969.  
Until 2017 named «Vestnik BGU.  
Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika»  
(ISSN 1561-834X).

Editor *M. A. Podgolina*  
Technical editor *V. V. Pishkova*  
Proofreaders *L. A. Merkul', M. A. Podgolina*

Signed print 30.11.2022.  
Edition 100 copies. Order number 11108.

Publishing and printing private  
unitary enterprise «Donarit».  
Certificate of state registration of the publisher,  
manufacturer, distributor of printed publications  
No. 1/289 dated 17.04.2014.  
25 Kastyryčnickaja Str.,  
Minsk 220030, Republic of Belarus.

© BSU, 2022