



ЖУРНАЛ  
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

# МАТЕМАТИКА ИНФОРМАТИКА

---

JOURNAL  
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

# MATHEMATICS and INFORMATICS

Издается с января 1969 г.  
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.  
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)

Выходит три раза в год

---

# 1

# 2023

---

МИНСК  
БГУ

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Главный редактор** ХАРИН Ю. С. – академик НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор; директор Научно-исследовательского института прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.  
E-mail: kharin@bsu.by

**Заместители  
главного редактора** КРОТОВ В. Г. – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.  
E-mail: krotov@bsu.by

ДУДИН А. Н. – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий лабораторией прикладного вероятностного анализа факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.  
E-mail: dudin@bsu.by

**Ответственный  
секретарь** МАТЕЙКО О. М. – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.  
E-mail: matseika@bsu.by

- Абламейко С. В.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Альтенбах Х.* Магдебургский университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия.  
*Антоневич А. Б.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Бауэр С. М.* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.  
*Беняш-Кривец В. В.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Берник В. И.* Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
*Бухштабер В. М.* Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.  
*Вабищевич П. Н.* Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук, Москва, Россия.  
*Волков В. М.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Гладков А. Л.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Го В.* Китайский университет науки и технологий, Хэфэй, провинция Аньхой, Китай.  
*Гогинава У.* Тбилисский государственный университет им. Иванэ Джавахишвили, Тбилиси, Грузия.  
*Головко В. А.* Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь.  
*Гороховик В. В.* Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
*Громак В. И.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Демидо Г.* Институт математики и информатики Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва.  
*Донской В. И.* Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия.  
*Егоров А. Д.* Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
*Еремеев В. А.* Гданьский политехнический университет, Гданьск, Польша.  
*Жоландек Х.* Институт математики Варшавского университета, Варшава, Польша.  
*Журавков М. А.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Залесский П. А.* Бразильский университет, Бразилиа, Бразилия.  
*Зубков А. М.* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.  
*Каплунов Ю. Д.* Университет Кииле, Кииле, Великобритания.  
*Кашиш Б. С.* Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.  
*Келлерер Х.* Грацский университет им. Карла и Франца, Грац, Австрия.  
*Кожанов А. И.* Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.

- Котов В. М.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Краснопрошин В. В.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Лауринчикас А. П.** Вильнюсский университет, Вильнюс, Литва.
- Мадани К.** Университет Париж-Эст Марн-ла-Валле, Марн-ла-Валле, Франция.
- Макаров Е. К.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Матус П. П.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Медведев Д. Г.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Михасев Г. И.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Нестеренко Ю. В.** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
- Никопоров Ю. Г.** Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук, Владикавказ, Россия.
- Освальд П.** Боннский университет, Бонн, Германия.
- Романовский В. Г.** Мариборский университет, Марибор, Словения.
- Рязанов В. В.** Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук, Москва, Россия.
- Сафонов В. Г.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Скиба А. Н.** Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель, Беларусь.
- Сотсков Ю. Н.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Трофимов В. А.** Южно-Китайский университет технологий, Гуанчжоу, Китай.
- Тузиков А. В.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Фильцмозер П.** Венский технический университет, Вена, Австрия.
- Черноусов В. И.** Альбертский университет, Эдмонтон, Канада.
- Чижик С. А.** Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Шешок Д.** Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса, Вильнюс, Литва.
- Шубэ А. С.** Институт математики и информатики Академии наук Республики Молдова, Кишинев, Молдова.
- Янчевский В. И.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

## EDITORIAL BOARD

- Editor-in-chief** **KHARIN Y. S.**, academician of the National Academy of Sciences of Belarus, doctor of science (physics and mathematics), full professor; director of the Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
E-mail: kharin@bsu.by
- Deputy editors-in-chief** **KROTOV V. G.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
E-mail: krotov@bsu.by
- DUDIN A. N.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the laboratory of applied probabilistic analysis, faculty of applied mathematics and computer science, Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
E-mail: dudin@bsu.by
- Executive secretary** **MATEIKO O. M.**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of general mathematics and computer science, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
E-mail: matseika@bsu.by
- Ablameyko S. V.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Altenbach H.** Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany.  
**Antonevich A. B.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Bauer S. M.** Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia.  
**Beniash-Kryvets V. V.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Bernik V. I.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
**Buchstaber V. M.** Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.  
**Chernousov V. I.** University of Alberta, Edmonton, Canada.  
**Chizhik S. A.** National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
**Donskoy V. I.** V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia.  
**Dzemyda G.** Institute of Mathematics and Informatics of the Vilnius University, Vilnius, Lithuania.  
**Egorov A. D.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
**Eremeyev V. A.** Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland.  
**Filzmoser P.** Vienna University of Technology, Vienna, Austria.  
**Gladkov A. L.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Goginava U.** Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia.  
**Golovko V. A.** Brest State Technical University, Brest, Belarus.  
**Gorokhovich V. V.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
**Gromak V. I.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Guo W.** University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, China.  
**Kaplunov J. D.** Keele University, Keele, United Kingdom.  
**Kashin B. S.** Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.  
**Kellerer H.** University of Graz, Graz, Austria.  
**Kotov V. M.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Kozhanov A. I.** Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia.  
**Krasnoproshin V. V.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Laurinchikas A. P.** Vilnius University, Vilnius, Lithuania.  
**Madani K.** Université Paris-Est, Marne-la-Vallée, France.  
**Makarov E. K.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
**Matus P. P.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
**Medvedev D. G.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Mikhasev G. I.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Nesterenko Y. V.** Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.

- Nikonorov Y. G.** Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia.
- Oswald P.** University of Bonn, Bonn, Germany.
- Romanovskij V. G.** University of Maribor, Maribor, Slovenia.
- Ryazanov V. V.** Dorođnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
- Safonov V. G.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Šešok D.** Vilnius Gediminas Technical University, Vilnius, Lithuania.
- Skiba A. N.** Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus.
- Sotskov Y. N.** United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Suba A. S.** Institute of Mathematics and Computer Science of the Academy of Sciences of Moldova, Kishinev, Moldova.
- Trofimov V. A.** South China University of Technology, Guangzhou, China.
- Tuzikov A. V.** Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Vabishchevich P. N.** Institute for the Safe Development of Atomic Energy of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
- Volkov V. M.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Yanchevskii V. I.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Zalesskii P. A.** University of Brazilia, Brazilia, Brazil.
- Zhuravkov M. A.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Zoladek H.** Mathematics Institute of the University of Warsaw, Warsaw, Poland.
- Zubkov A. M.** Lomonosov Moscow State University, Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

---

---

# Вещественный, комплексный и функциональный анализ

---

## REAL, COMPLEX ANALYSIS

---

---

---

### Образец цитирования:

Медведева ВЮ, Ровба ЕА. Рациональная интерполяция функции  $|x|^\alpha$  с узлами Чебышева – Маркова первого рода. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2023;1:6–19.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-6-19>

### For citation:

Medvedeva VYu, Rouba YA. Rational interpolation of a function  $|x|^\alpha$  with Chebyshev – Markov nodes of the first kind. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2023;1:6–19. Russian.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-6-19>

---

### Авторы:

**Виктория Юрьевна Медведева** – аспирантка кафедры фундаментальной и прикладной математики факультета математики и информатики. Научный руководитель – Е. А. Ровба.  
**Евгений Алексеевич Ровба** – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной математики факультета математики и информатики.

### Authors:

**Victoria Yu. Medvedeva**, postgraduate student at the department of fundamental and applied mathematics, faculty of mathematics and informatics.  
[medvedeva\\_vj\\_97@mail.ru](mailto:medvedeva_vj_97@mail.ru)  
<https://orcid.org/0000-0003-2548-7540>  
**Yauheni A. Rouba**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of fundamental and applied mathematics, faculty of mathematics and informatics.  
[rovba.e@gmail.com](mailto:rovba.e@gmail.com)  
<https://orcid.org/0000-0002-1265-1965>

**Ключевые слова:** рациональная дробь Чебышева – Маркова; рациональная интерполяция; функция со степенной особенностью.

**Благодарность.** Авторы выражают признательность профессору А. А. Пекарскому за полезное обсуждение результатов работы.

## RATIONAL INTERPOLATION OF A FUNCTION $|x|^\alpha$ WITH CHEBYSHEV – MARKOV NODES OF THE FIRST KIND

V. Yu. MEDVEDEVA<sup>a</sup>, Y. A. ROUBA<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Yanka Kupala State University of Grodno, 22 Ažėška Street, Hrodna 230023, Belarus

Corresponding author: V. Yu. Medvedeva (medvedeva\_yj\_97@mail.ru)

This paper considers the approximations of the function  $|x|^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , by interpolation rational Lagrange functions on the interval  $[-1, 1]$ . Zeros of the rational Chebyshev – Markov function of the first kind are chosen as interpolation nodes. An integral representation of the interpolation remainder and an upper estimation for the considered uniform approximations are obtained. The polynomial and general rational cases are studied in detail. In the polynomial case, an asymptotic estimate for uniform approximations is found. When approximating by interpolation rational Lagrange functions with Chebyshev – Markov nodes of the first kind, the upper and lower estimations are found. These estimations are close to that of the best uniform approximations of the function under consideration on the interval  $[-1, 1]$ .

**Keywords:** rational Chebyshev – Markov fraction; rational interpolation; function with power singularity.

**Acknowledgements.** The authors are grateful to professor A. A. Pekarsky for a useful discussion of the results of this work.

### Введение

Многие результаты в теории аппроксимации восходят к приближениям простейших функций. Весьма важной в этом смысле является роль функций  $|x|$ ,  $|x|^\alpha$ ,  $e^x$  и т. п. Наилучшей полиномиальной аппроксимации функции  $|x|^\alpha$  в различных метриках посвящены работы С. Н. Бернштейна [1], С. М. Никольского [2], Р. А. Райцина [3], А. Дж. Карпентера и Р. С. Варги [4] и др. Рациональная аппроксимация этой функции также вызывает интерес исследователей (см., например, [5, p. 106; 6–9]).

Некоторые математики обратились к полиномиальной аппроксимации функций со степенной особенностью конкретными методами приближений. Так, Р. А. Райцин [10] проанализировал приближения таких функций частичными суммами рядов Фурье – Чебышева. М. И. Ганзбург [11] исследовал полиномиальные аппроксимации функции  $|x|^\alpha$  на отрезке  $[-1, 1]$  по расширенным системам узлов Чебышева. М. Реверс [12] получил подобные результаты в случае нечетного числа узлов Чебышева первого рода.

В статье [13] рассматривалась аппроксимация функций со степенной особенностью по расширенной системе узлов Чебышева – Маркова.

В настоящей работе изучаются аппроксимационные свойства интерполяционных рациональных функций с узлами Чебышева – Маркова первого рода, построенных для функции  $f(x) = |x|^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

Цель работы – исследование приближений функции  $|x|^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , на отрезке  $[-1, 1]$  интерполяционными рациональными функциями Лагранжа с узлами в нулях рациональных функций Чебышева – Маркова первого рода, а также получение интегрального представления остатка интерполирования, асимптотических и двусторонних оценок рассматриваемых равномерных приближений.

### Результаты и их обсуждение

**Общий случай.** Пусть  $a_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2n$ , – комплексные числа ( $\operatorname{Re} a_k = 0$ ), удовлетворяющие следующим условиям:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0, \quad r = 2 \left[ \frac{\alpha}{4} \right] + 4, \quad n > r, \quad (1)$$

$$a_{n+k} = -a_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где  $[\alpha]$  означает целую часть числа  $\alpha$ .

Тогда рассмотрим функцию

$$\mu_{2n}(x) = \sum_{k=1}^{2n} \arccos \frac{x + a_k}{1 + a_k x}$$

и введем рациональную косинус-дробь Чебышева – Маркова [14, с. 47]

$$m_{2n}(x) = \cos \mu_{2n}(x).$$

Рациональная функция  $m_{2n}(x)$  имеет вид

$$m_{2n}(x) = \frac{p_{2n}(x)}{\prod_{k=1}^n (1 + |a_k|^2 x^2)},$$

где  $p_{2n}(x)$  – некоторый четный алгебраический полином порядка не выше  $2n$ . Обозначим через  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2n$ , нули функции  $m_{2n}(x)$ . Они являются простыми, симметричными и принадлежат интервалу  $(-1, 1)$ :

$$\begin{aligned} -1 < x_{2n} < x_{2n-1} < \dots < x_{n+1} < 0 < x_n < \dots < x_2 < x_1 < 1, \\ x_{n+k} &= -x_{n-k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2)$$

Построим интерполяционную рациональную функцию Лагранжа с узлами (2) для функции  $f(x) = |x|^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ :

$$L_{2n-2}(x, f) = \sum_{k=1}^{2n} |x_k|^\alpha l_k(x), \quad (3)$$

где  $l_k(x) = \frac{m_{2n}(x)}{(x - x_k)m'_{2n}(x_k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2n$ .

Везде далее будем называть точки  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2n$ , узлами Чебышева – Маркова первого рода.

Нетрудно видеть, что в случае, когда параметры  $a_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2n$ , удовлетворяют условиям (1), рациональная функция  $L_{2n-2}(x, f)$  является четной и имеет порядок не выше  $2n - 2$ .

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2n-2}(x, a) &= |x|^\alpha - L_{2n-2}(x, f), \quad x \in [-1, 1], \\ \varepsilon_{2n-2}(a) &= \|\varepsilon_{2n-2}(x, a)\|_{C[-1,1]}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $a = (a_1, a_2, \dots, a_{2n})$ .

Аппроксимационные свойства величин (4) описывает следующая теорема.

**Теорема 1.** Для приближений функции  $f(x) = |x|^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , на отрезке  $[-1, 1]$  интерполяционными рациональными функциями Лагранжа (3) с узлами Чебышева – Маркова (2) справедливы соотношения

$$\varepsilon_{2n-2}(x, a) = \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi\alpha}{2} m_{2n}(x) \int_0^1 \frac{u^{\alpha+1}}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \frac{1}{x^2(1-u^2) + u^2} \frac{du}{\Psi_n(u) + \Psi_n^{-1}(u)}, \quad (5)$$

$$\varepsilon_{2n-2}(a) \leq \frac{4}{\pi} \left| \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right| \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \frac{du}{|\Psi_n(u)| + |\Psi_n^{-1}(u)|}, \quad (6)$$

где

$$\Psi_n(u) = \prod_{k=1}^n \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}, \quad \beta_k = \frac{1}{\sqrt{1 + |a_k|^2}}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad x \in [-1, 1], \quad n > r.$$

Если полюсы рациональной функции  $m_{2n}(x)$  имеют четную кратность, то оценка (6) является точной.

Доказательство. Обратившись к формуле (3), получим

$$L_{2n-2}(x, f) = \sum_{k=1}^n (x_k)^\alpha l_k(x) + \sum_{k=n+1}^{2n} (-x_k)^\alpha l_k(x).$$

Будем полагать, что  $x \in (0, 1]$ , и исходя из тождества

$$\sum_{k=1}^{2n} l_k(x) \equiv 1$$

найдем

$$\varepsilon_{2n-2}(x, a) = m_{2n}(x)(S_1(x) + S_2(x)), \quad (7)$$

где

$$S_1(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^\alpha - x_k^\alpha}{(x - x_k)m'_{2n}(x_k)}, \quad S_2(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x^\alpha - (-x_k)^\alpha}{(x - x_k)m'_{2n}(x_k)}.$$

Выберем однозначную ветвь функции  $f(z) = z^\alpha$  в плоскости с разрезом по промежутку  $\{z : z = iy, -\infty < y < 0\}$  так, что  $f(1) = 1$ . Тогда для функций  $S_1(x)$  и  $S_2(x)$  легко получить интегральные представления:

$$S_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta^-} \frac{x^\alpha - z^\alpha}{(x - z)m_{2n}(z)} dz, \quad S_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta^+} \frac{x^\alpha - (-z)^\alpha}{(x - z)m_{2n}(z)} dz, \quad (8)$$

где контур  $\Gamma_\delta = \Gamma_{1,\delta}^- \cup \Gamma_{2,\delta}^- \cup \Gamma_{3,\delta}^-$ ,

$$\Gamma_{1,\delta}^+ = \{z : z = iy, \delta < y < +\infty\},$$

$$\Gamma_{2,\delta}^+ = \left\{ z : |z| = \delta, -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

$$\Gamma_{3,\delta}^+ = \{z : z = iy, -\infty < y < -\delta\},$$

а контур  $\Gamma_\delta' = \Gamma_{3,\delta}^+ \cup \Gamma_{4,\delta}^- \cup \Gamma_{1,\delta}^+$ ,

$$\Gamma_{4,\delta}^+ = \left\{ z : |z| = \delta, \frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{2} \right\},$$

$\delta, 0 < \delta < x_n$ , — достаточно малое положительное число.

Так как  $x \in (0, 1]$ ,  $\alpha > 0$  и  $|m_{2n}(0)| = 1$ , то нетрудно проверить, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{2,\delta}^+} \frac{x^\alpha - z^\alpha}{(x - z)m_{2n}(z)} dz = 0,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{4,\delta}^+} \frac{x^\alpha - (-z)^\alpha}{(x - z)m_{2n}(z)} dz = 0.$$

Следовательно, из равенств (8) имеем

$$S_1(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{x^\alpha - z^\alpha}{(x - z)m_{2n}(z)} dz, \quad (9)$$

$$S_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{x^\alpha - (-z)^\alpha}{(x - z)m_{2n}(z)} dz. \quad (10)$$

Займемся интегралом (9). Разобьем его на два интеграла по промежуткам  $(-i\infty, 0]$  и  $[0, +i\infty)$  и в первом интеграле сделаем замену  $z = it$ , а во втором интеграле — замену  $z = -it$ . Получим

$$S_1(x) = -\frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha - (it)^\alpha}{(x-it)m_{2n}(it)} dt + \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha - (-it)^\alpha}{(x+it)m_{2n}(it)} dt \right).$$

Здесь также воспользовались четностью функции  $m_{2n}(t)$ .

Таким образом,

$$S_1(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left( \frac{x^\alpha - (it)^\alpha}{x-it} + \frac{x^\alpha - (-it)^\alpha}{x+it} \right) m_{2n}(it) dt.$$

Аналогично из интеграла (10) можно получить

$$S_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left( \frac{x^\alpha - (-it)^\alpha}{x-it} + \frac{x^\alpha - (it)^\alpha}{x+it} \right) m_{2n}(it) dt.$$

Из найденных интегральных представлений для функций  $S_1(x)$  и  $S_2(x)$  имеем

$$\begin{aligned} H_n(x) &= S_1(x) + S_2(x) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left( \frac{x^\alpha - (-it)^\alpha}{x-it} + \frac{x^\alpha - (it)^\alpha}{x+it} - \frac{x^\alpha - (it)^\alpha}{x-it} - \frac{x^\alpha - (-it)^\alpha}{x+it} \right) m_{2n}(it) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{it^{\alpha+1} (i^\alpha - (-i)^\alpha)}{x^2 + t^2} m_{2n}(it) dt. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$i^\alpha - (-i)^\alpha = 2i \sin \frac{\pi\alpha}{2},$$

отсюда получим

$$H_n(x) = -\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi\alpha}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{x^2 + t^2} m_{2n}(it) dt$$

и, следовательно (см. формулу (7)),

$$\varepsilon_{2n-2}(x, a) = -\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi\alpha}{2} m_{2n}(x) \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{x^2 + t^2} m_{2n}(it) dt, \quad x \in [-1, 1]. \quad (11)$$

Обозначим через  $J_n(x)$  интеграл в правой части равенства (11):

$$J_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{x^2 + t^2} m_{2n}(it) dt.$$

Сделаем в нем замену  $t = -i \frac{1+z^2}{1-z^2}$ ,  $dt = -\frac{4iz}{(1-z^2)^2} dz$ .

Тогда

$$J_n(x) = -4i \int_{\Gamma} \left( -i \frac{1+z^2}{1-z^2} \right)^{\alpha+1} \frac{z}{(1+z^2)^2 - x^2 (1-z^2)^2} M_{2n}(iz) dz, \quad (12)$$

где  $M_{2n}(y)$  – рациональная косинус-дробь Бернштейна [14, с. 49] с полюсами в точках  $z_k$  и  $\bar{z}_k$ ,

$$z_k = i \frac{1+a_k}{\sqrt{1+|a_k|^2}}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n;$$

$$\Gamma = \left\{ z : z = e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Заметим, что

$$M_{2n}(y) = \frac{1}{2}(\chi_{2n}(y) + \chi_{2n}^{-1}(y)), \quad \chi_{2n}(y) = \prod_{k=1}^{2n} \frac{y - z_k}{y - \bar{z}_k}.$$

В интеграле (12) сделаем еще одну замену:

$$z = u + i\sqrt{1-u^2}, \quad u = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad dz = i \frac{u + i\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-u^2}} du.$$

Получим

$$J_n(x) = \int_0^1 \frac{u^{\alpha+1}}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \frac{1}{x^2(1-u^2) + u^2} \frac{du}{M_{2n}(iu - \sqrt{1-u^2})}. \quad (13)$$

Преобразовывая выражение для  $M_{2n}(iu - \sqrt{1-u^2})$ , приходим к следующей формуле:

$$M_{2n}(iu - \sqrt{1-u^2}) = \frac{1}{2}(\Psi_n(u) + \Psi_n^{-1}(u)),$$

где  $\Psi_n(u) = \prod_{k=1}^n \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}$ ,  $\beta_k = \frac{1}{\sqrt{1+|a_k|^2}}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Тогда из представления (13) имеем

$$J_n(x) = -2 \int_0^1 \frac{u^{\alpha+1}}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \frac{1}{x^2(1-u^2) + u^2} \frac{du}{\Psi_n(u) + \Psi_n^{-1}(u)}.$$

Подставив данное выражение в равенство (11), получим формулу (5).

Теперь рассмотрим функцию

$$\Phi_u(x) = \frac{u^2}{x^2(1-u^2) + u^2}, \quad x \in [0, 1].$$

Очевидно, что функция  $\Phi_u(x)$  является убывающей на отрезке  $[0, 1]$  и  $\Phi_u(0) = 1$  при каждом фиксированном  $u$ ,  $u \in (0, 1)$ .

Если учесть, что и  $|m_{2n}(0)| = 1$ , то из равенства (5) следует неравенство (6), причем знак равенства имеет место в случае, когда функция  $\Psi_n(x)$  не меняет знак на отрезке  $[0, 1]$ .

Теорема 1 доказана.

**Полиномиальный случай.** Если положить все  $a_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , равными 0, то  $m_{2n}(x) = \cos 2n \arccos x$ , т. е. является полиномом Чебышева, а узлы  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2n$ , есть узлы Чебышева.

В этом случае введем обозначение (см. формулу (4))

$$\varepsilon_{2n-2}(0) = \varepsilon_{2n-2,0}.$$

**Теорема 2.** Для приближений функции  $f(x) = |x|^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , на отрезке  $[-1, 1]$  интерполяционными полиномами Лагранжа с узлами Чебышева первого рода справедливо асимптотическое равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n)^\alpha \varepsilon_{2n-2,0} = \frac{4}{\pi} \left| \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right| \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{e^t + e^{-t}} dt. \quad (14)$$

*Замечание.* Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{2} \Gamma(\alpha) \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{e^t + e^{-t}} dt \leq \Gamma(\alpha),$$

т. е.

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{e^t + e^{-t}} dt = \theta \Gamma(\alpha),$$

где  $\Gamma(\alpha)$  – гамма-функция Эйлера;  $\theta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ .

Доказательство. Рассмотрим следующее равенство, полученное из оценки (6):

$$\varepsilon_{2n-2}(0) = \frac{4}{\pi} \left| \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right| \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \frac{du}{\Psi_n(u) + \Psi_n^{-1}(u)}, \quad \Psi_n(u) = \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n. \quad (15)$$

Найдем асимптотическое выражение интеграла в правой части равенства (15). С этой целью рассмотрим интеграл

$$I_n = \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1} du}{\Psi_n(u) + \Psi_n^{-1}(u)}. \quad (16)$$

Введем обозначение

$$\delta_n = \frac{1}{\sqrt[3]{(2n)^2}}.$$

Разобьем интеграл (16) на два интеграла:

$$I_n = \int_0^{\delta_n} \frac{u^{\alpha-1} du}{\Psi_n(u) + \Psi_n^{-1}(u)} + \int_{\delta_n}^1 \frac{u^{\alpha-1} du}{\Psi_n(u) + \Psi_n^{-1}(u)} = I_n^{(1)} + I_n^{(2)}. \quad (17)$$

Вначале оценим второй интеграл:

$$I_n^{(2)} = \int_{\delta_n}^1 \frac{u^{\alpha-1} \Psi_n(u)}{1 + \Psi_n^2(u)} du.$$

Воспользовавшись неравенством

$$\frac{1-u}{1+u} \leq e^{-2u}, \quad u \in [0, 1], \quad (18)$$

найдем

$$I_n^{(2)} \leq \int_{\delta_n}^1 \frac{u^{\alpha-1} e^{-2nu}}{1 + e^{-4nu}} du.$$

Сделаем в этом интеграле замену  $v = 2nu$  и получим

$$I_n^{(2)} \leq \frac{1}{(2n)^\alpha} \int_{2n\delta_n}^{2n} \frac{v^{\alpha-1} e^{-v}}{1 + e^{-2v}} dv.$$

Заметим, что  $\delta_n n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ , отсюда

$$I_n^{(2)} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Теперь займемся интегралом  $I_n^{(1)}$  в формуле (17). Нетрудно проверить, что справедливо следующее неравенство:

$$\frac{1-u}{1+u} \geq e^{-2u\left(1+\frac{u}{2}\right)}, \quad u \in [0, \delta_n].$$

Для этого достаточно показать, что функция  $\varphi(u) = (1-u)e^{2u} - (1+u)e^{-u^2}$  является возрастающей на отрезке  $[0, \delta_n]$ , и учесть равенство  $\varphi(0) = 0$ .

Следовательно,

$$\Psi_n(u) \geq e^{-2nu\left(1+\frac{u}{2}\right)} > e^{-2nu} e^{-\frac{\sqrt{\delta_n}}{2}} > \left(1 - \frac{\sqrt{\delta_n}}{2}\right) e^{-2nu}, \quad u \in [0, \delta_n].$$

Тогда, учитывая эти неравенства и формулу (18), находим

$$\left(1 - \frac{\sqrt{\delta_n}}{2}\right) e^{-2nu} + e^{2nu} \leq \Psi_n(u) + \Psi_n^{-1}(u) \leq e^{-2nu} + (1 + \sqrt{\delta_n}) e^{2nu}, \quad u \in [0, \delta_n].$$

Таким образом, получаем

$$\int_0^{\delta_n} \frac{u^{\alpha-1} du}{e^{-2nu} + (1 + \sqrt{\delta_n}) e^{2nu}} \leq I_n^{(1)} \leq \int_0^{\delta_n} \frac{u^{\alpha-1} du}{\left(1 - \frac{\sqrt{\delta_n}}{2}\right) e^{-2nu} + e^{2nu}}.$$

Теперь рассмотрим следующую разность:

$$\begin{aligned} \Lambda_n &= \int_0^{\delta_n} \frac{u^{\alpha-1} du}{\left(1 - \frac{\sqrt{\delta_n}}{2}\right) e^{-2nu} + e^{2nu}} - \int_0^{\delta_n} \frac{u^{\alpha-1} du}{e^{-2nu} + (1 + \sqrt{\delta_n}) e^{2nu}} = \\ &= \int_0^{\delta_n} \frac{u^{\alpha-1} \left( e^{-2nu} + (1 + \sqrt{\delta_n}) e^{2nu} \right) - u^{\alpha-1} \left( \left(1 - \frac{\sqrt{\delta_n}}{2}\right) e^{-2nu} + e^{2nu} \right)}{\left( \left(1 - \frac{\sqrt{\delta_n}}{2}\right) e^{-2nu} + e^{2nu} \right) \left( e^{-2nu} + (1 + \sqrt{\delta_n}) e^{2nu} \right)} du = \\ &= \int_0^{\delta_n} \frac{u^{\alpha-1} \sqrt{\delta_n} (2^{-1} e^{-2nu} + e^{2nu}) du}{\left( \left(1 - \frac{\sqrt{\delta_n}}{2}\right) e^{-2nu} + e^{2nu} \right) \left( e^{-2nu} + (1 + \sqrt{\delta_n}) e^{2nu} \right)} \leq \\ &\leq \sqrt{\delta_n} \int_0^{\delta_n} \frac{u^{\alpha-1} du}{\left( e^{-2nu} + (1 + \sqrt{\delta_n}) e^{2nu} \right)} = \sqrt{\delta_n} \int_0^{\delta_n} \frac{u^{\alpha-1} du}{e^{2nu} (1 + \sqrt{\delta_n} + e^{-4nu})} \leq \\ &\leq \sqrt{\delta_n} \int_0^{\delta_n} u^{\alpha-1} e^{-2nu} du. \end{aligned}$$

В последнем интеграле произведем замену  $2nu = v$  и получим

$$\Lambda_n \leq \frac{\sqrt{\delta_n}}{(2n)^\alpha} \int_0^{2n\delta_n} v^{\alpha-1} e^{-v} dv = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (20)$$

С учетом соотношения (20) имеем

$$I_n^{(1)} = \int_0^{\delta_n} \frac{u^{\alpha-1} du}{\left(1 - \frac{\sqrt{\delta_n}}{2}\right) e^{-2nu} + e^{2nu}} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

В полученном интеграле сделаем уже известную замену  $2nu = v$ :

$$\begin{aligned} I_n^{(1)} &= \frac{1}{(2n)^\alpha} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta_n}}} \frac{v^{\alpha-1} dv}{\left(1 - \frac{\sqrt{\delta_n}}{2}\right) e^{-v} + e^v} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = \\ &= \frac{1}{(2n)^\alpha} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta_n}}} \frac{v^{\alpha-1} dv}{e^v + e^{-v}} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta_n}}}^{+\infty} \frac{v^{\alpha-1} dv}{e^v + e^{-v}} = o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad \alpha > 0,$$

и в итоге получим

$$I_n^{(1)} = \frac{1}{(2n)^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{v^{\alpha-1} dv}{e^v + e^{-v}} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Если теперь учесть соотношение (19), то из формулы (17) имеем (см. интеграл (16))

$$I_n = \frac{1}{(2n)^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{v^{\alpha-1} dv}{e^v + e^{-v}} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Обратимся к интегралу в равенстве (15):

$$J_n = \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \frac{du}{\Psi_n(u) + \Psi_n^{-1}(u)}.$$

Нетрудно видеть, что справедливы следующие неравенства:

$$J_n \leq \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1} du}{\Psi_{n-r}(u) + \Psi_{n-r}^{-1}(u)} = I_{n-r},$$

с одной стороны (см. интеграл (16)),

$$J_n \geq \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1} du}{\Psi_{n+r}(u) + \Psi_{n+r}^{-1}(u)} = I_{n+r},$$

с другой стороны.

Тогда на основании равенства (21) имеем

$$J_n = \frac{1}{(2n)^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{v^{\alpha-1} dv}{e^v + e^{-v}} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

В итоге приходим к равенству (14). Теорема 2 доказана.

В точности такой же результат получен М. И. Ганзбургом [11], но только для случая, когда интерполирование ведется по расширенной системе узлов Чебышева первого рода, т. е. к узлам Чебышева  $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$  добавляется точка  $x_0 = 0$ . Таким образом, добавление одного узла интерполирования не влияет на точность приближений.

**Рациональный случай.** Введем обозначение

$$\varepsilon_{2n-2} = \inf_{\{a_1, a_2, \dots, a_{2n}\}} \varepsilon_{2n-2}(a).$$

Параметры  $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$  здесь удовлетворяют условиям (1).

**Теорема 3.** Для равномерных приближений функции  $|x|^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , интерполяционными рациональными функциями Лагранжа (3) с узлами Чебышева – Маркова (2) справедливы неравенства

$$C(\alpha) \left| \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right| \exp(-\pi\sqrt{2n\alpha}) \leq \varepsilon_{2n-2} \leq C_0(\alpha) \left| \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right| \sqrt{n} \exp(-\pi\sqrt{2n\alpha}), \quad n > r,$$

где  $C(\alpha), C_0(\alpha)$  – некоторые положительные постоянные, зависящие только от параметра  $\alpha$ .

В этом случае обратимся к равенству (5). Введем обозначение для интеграла, стоящего в правой части:

$$J_n(x) = \int_0^1 \frac{u^{\alpha+1}}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \frac{1}{x^2(1-u^2)+u^2} \frac{du}{\Psi_n(u) + \Psi_n^{-1}(u)}. \quad (22)$$

Так как функция  $\varphi_x(u) = \frac{u^2}{x^2(1-u^2)+u^2}$  переменной  $u$  является возрастающей на отрезке  $[0, 1]$  и  $\varphi_x(1) = 1$  при каждом фиксированном  $x, x \in (0, 1]$ , то по формуле Бонне [15, с. 119]

$$J_n(x) = \int_{\xi}^1 \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \frac{du}{\Psi_n(u) + \Psi_n^{-1}(u)}, \quad \xi \in [0, 1).$$

Отсюда следует, что

$$J_n(x) = \int_{\xi}^1 \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \frac{\Psi_n(u)}{1 + \Psi_n^2(u)} du = J_n^{(1)} - J_n^{(2)}, \quad (23)$$

где

$$J_n^{(1)} = \int_{\xi}^1 \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \Psi_n(u) du,$$

$$J_n^{(2)} = \int_{\xi}^1 \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \frac{\Psi_n^3(u)}{1 + \Psi_n^2(u)} du.$$

Исследуем первый интеграл. Так как параметры  $a_k, k = 1, 2, \dots, 2n$ , удовлетворяют условиям (1), рассматриваемый интеграл можно представить в виде

$$J_n^{(1)} = \int_{\xi}^1 a(u) u^{\alpha-1} \prod_{k=1}^{n_1} \frac{u - \beta_{r+k}}{u + \beta_{r+k}} du,$$

где

$$a(u) = \frac{1}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \left( \frac{u-1}{u+1} \right)^r, \quad r = 2 \left[ \frac{\alpha}{4} \right] + 4, \quad n = n_1 + r, \quad n > r.$$

Пусть

$$\prod_{k=1}^{n_1} \frac{u - \beta_{r+k}}{u + \beta_{r+k}} = \varphi_n(u),$$

тогда

$$J_n^{(1)} = \int_{\xi}^1 a(u) u^{\alpha-1} \varphi_n(u) du. \quad (24)$$

Теперь рассмотрим функцию

$$\Phi(\beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \dots, \beta_n) = \int_{\xi}^1 a(u) u^{\alpha-1} \varphi_n^2(u) du$$

переменных  $\beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \dots, \beta_n$ .

Эта функция является непрерывной на  $(n-r)$ -мерном кубе  $[0, 1]^{n-r}$ , и нетрудно показать, что в некоторой точке  $(\beta_{r+1}^*, \beta_{r+2}^*, \dots, \beta_n^*) \in (0, 1)^{n-r}$  она достигает минимума, причем числа  $\beta_{r+1}^*, \beta_{r+2}^*, \dots, \beta_n^*$  попарно различны [16]. Заметим также, что в дальнейших рассуждениях мы следуем методу, предложенному в работе [16].

Значит, в указанной точке

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta_m} = 0, \quad m = r+1, r+2, \dots, n.$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_m} &= \int_{\xi}^1 2a(u)u^{\alpha-1}\varphi_n(u) \prod_{\substack{k=r+1, \\ k \neq m}}^n \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \frac{-2u}{(u + \beta_m)^2} du = \\ &= 2 \int_{\xi}^1 a(u)u^{\alpha}\varphi_n^2(u) \frac{1}{\beta_m} \left( \frac{1}{u + \beta_m} - \frac{1}{u - \beta_m} \right) du, \end{aligned}$$

то

$$\int_{\xi}^1 a(u)u^{\alpha}\varphi_n^{*2}(u) \frac{du}{u + \beta_m^*} = \int_{\xi}^1 a(u)u^{\alpha}\varphi_n^{*2}(u) \frac{du}{u - \beta_m^*}, \quad (25)$$

где

$$\varphi_n^*(u) = \prod_{k=r+1}^n \frac{u - \beta_k^*}{u + \beta_k^*}, \quad m = r+1, r+2, \dots, n.$$

Имеет место следующее равенство:

$$\frac{\varphi_n^*(u) - \varphi_n^*(0)}{u} = \sum_{m=r+1}^n \frac{A_m}{u + \beta_m^*}, \quad (26)$$

где  $A_m, m = r+1, r+2, \dots, n$ , – некоторые числа.

Отсюда получим, что

$$\frac{\varphi_n^*(-u) - \varphi_n^*(0)}{-u} = \sum_{m=r+1}^n \frac{A_m}{-u + \beta_m^*},$$

и так как

$$\varphi_n^*(-u) = (\varphi_n^*(u))^{-1},$$

то

$$\frac{1 - \varphi_n^*(u)\varphi_n^*(0)}{u\varphi_n^*(u)} = \sum_{m=r+1}^n \frac{A_m}{u - \beta_m^*}. \quad (27)$$

На основании равенств (26), (27) и формулы (25) заключаем, что

$$\int_{\xi}^1 a(u)u^{\alpha}\varphi_n^{*2}(u) \frac{\varphi_n^*(u) - \varphi_n^*(0)}{u} du = \int_{\xi}^1 a(u)u^{\alpha}\varphi_n^{*2}(u) \frac{1 - \varphi_n^*(u)\varphi_n^*(0)}{u\varphi_n^*(u)} du.$$

После несложных преобразований получаем

$$\int_{\xi}^1 a(u)u^{\alpha-1}\varphi_n^*(u) du = \int_{\xi}^1 a(u)u^{\alpha-1}\varphi_n^{*3}(u) du.$$

Следовательно, при значениях  $\beta_{r+1}^*, \beta_{r+2}^*, \dots, \beta_n^*$  для интеграла  $J_n^{(1)}$  (см. формулы (23) и (24)) справедливы соотношения

$$\left| J_n^{(1)} \right| \leq \int_{\xi}^1 a(u)u^{\alpha-1} \left| \varphi_n^*(u) \right|^3 du \leq \int_{\xi}^1 a(u)u^{\alpha-1} \varphi_n^{*2}(u) du.$$

Заметим, что  $0 \leq |a(u)| \leq 1$ ,  $u \in [0, 1]$ ,

$$|J_n^{(1)}| \leq \int_{\xi}^1 u^{\alpha-1} \Phi_n^{*2}(u) du. \quad (28)$$

Теперь обратимся к одному из результатов работы [17], в соответствии с которым при любых  $\gamma > 0$  и  $n \in \mathbb{N}$  существуют числа  $\beta_k$ ,  $k = r+1, r+2, \dots, n$ ,  $n > r$ , такие, что

$$u^\gamma \left| \prod_{k=1}^n \frac{u - \beta_{r+k}}{u + \beta_{r+k}} \right| \leq C(\gamma) e^{-\pi\sqrt{n\gamma}}, \quad u \in [0, 1],$$

где  $C(\gamma)$  – некоторая положительная постоянная, зависящая лишь от параметра  $\gamma$ . Тогда при таких  $\beta_k$ ,  $k = r+1, r+2, \dots, r+n_1$ , из неравенства (28) имеем

$$\begin{aligned} J_n^{(1)} &\leq \int_{\xi}^1 u^{\alpha-1} \Phi_n^{*2}(u) du \leq \int_{\xi}^1 u^{-1+\frac{1}{\sqrt{n_1}}} \left| u^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2\sqrt{n_1}}} \prod_{k=1}^{n_1} \frac{u - \beta_{r+k}}{u + \beta_{r+k}} \right|^2 du \leq \\ &\leq C \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n_1}} \right) \exp \left( -\pi \sqrt{2n_1 \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{\sqrt{n_1}} \right)} \right) \int_{\xi}^1 u^{-1+\frac{1}{\sqrt{n_1}}} du. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что

$$\sqrt{n_1\alpha - \sqrt{n_1}} > \sqrt{n_1\alpha} - \frac{1}{\alpha}, \quad n_1 > \frac{1}{\alpha^2}.$$

Если проследить вывод указанного выше результата в работе [17], то можно увидеть, что постоянная  $C(\gamma)$  непрерывно зависит от параметра  $\gamma$ , следовательно,

$$C \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n_1}} \right) \leq C_1(\alpha), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Здесь и далее через  $C_k(\alpha)$  будем обозначать различные положительные постоянные, зависящие лишь от параметра  $\alpha$ .

В итоге получим, что

$$J_n^{(1)} \leq C_2(\alpha) \sqrt{n_1} \exp(-\pi\sqrt{2n_1\alpha}) \leq C_3(\alpha) \sqrt{n} \exp(-\pi\sqrt{2n\alpha}).$$

В последнем неравенстве учтено, что  $n = n_1 + r$ ,  $r = 2 \left\lfloor \frac{\alpha}{4} \right\rfloor + 4$ .

Легко видеть, что и для интеграла  $J_n^{(2)}$  (см. формулу (23)) справедлива такая же оценка:

$$|J_n^{(2)}| = \left| \int_{\xi}^1 \frac{u^{\alpha-1} \left( \left( \frac{u-1}{u+1} \right)^r \Phi_n^*(u) \right)^3}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}+1} \left( 1 + \left( \frac{u-1}{u+1} \right)^r \Phi_n^*(u) \right)^2} du \right| \leq C_3(\alpha) \sqrt{n} \exp(-\pi\sqrt{2n\alpha}), \quad n > r.$$

Из последних двух соотношений и формулы (23) следует, что при некоторых значениях параметров  $a_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2n$ ,

$$|J_n(x)| \leq C_4(\alpha) \sqrt{n} \exp(-\pi\sqrt{2n\alpha}), \quad n > r, \quad x \in [0, 1].$$

Тогда из соотношений (5) и (22) получим верхнюю оценку в теореме 3.

Нижняя оценка следует, например, из результата Г. Шталя [7].

Теорема 3 доказана.

## Заключение

В работе исследованы приближения функции  $|x|^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , интерполяционными рациональными функциями Лагранжа с узлами Чебышева – Маркова первого рода. Получены интегральное представление остатка интерполирования и оценка сверху соответствующих равномерных рациональных приближений, которая при определенных условиях является точной. В полиномиальном случае найдена асимптотическая оценка равномерных приближений. В случае приближений рациональными функциями оценка сверху отличается от известной наилучшей оценки лишь множителем  $\sqrt{n}$ .

## Библиографические ссылки

1. Бернштейн СН. О наилучшем приближении  $|x|^p$  при помощи многочленов весьма высокой степени = Sur la meilleure approximation de  $|x|^p$  par des polynômes de degrés très élevés. *Известия Академии наук СССР. Отделение математических и естественных наук.* 1938;2(2):169–190.
2. Никольский СМ. О наилучшем приближении многочленами в среднем функции  $|a - x|^s$ . *Известия Академии наук СССР. Серия математическая.* 1947;11(2):139–180.
3. Райцин РА. О наилучшем среднеквадратическом приближении многочленами и целыми функциями конечной степени функций, имеющих алгебраическую особую точку. *Известия высших учебных заведений. Математика.* 1969;4:59–61.
4. Carpenter AJ, Varga RS. Some numerical results on best uniform polynomial approximation of  $x^\alpha$  on  $[0, 1]$ . In: Gonchar AA, Saff EB, editors. *Methods of approximation theory in complex analysis and mathematical physics; 1991 May 13–24; Leningrad, Russia.* Berlin: Springer-Verlag; 1993. p. 192–222 (Lecture notes in mathematics; volume 1550). DOI: 10.1007/BFb0117488.
5. Petrushev PP, Popov VA. *Rational approximation of real functions.* Cambridge: Cambridge University Press; 1987. X, 371 p. (Encyclopedia of mathematics and its applications; volume 28).
6. Шталь Г. Наилучшие равномерные рациональные аппроксимации  $|x|$  на  $[-1, 1]$ . *Математический сборник.* 1992;183(8):85–118.
7. Stahl H. Best uniform rational approximation of  $x^\alpha$  on  $[0, 1]$ . *Bulletin of the American Mathematical Society.* 1993;28(1):116–122. DOI: 10.1090/S0273-0979-1993-00351-3.
8. Andersson J-E. Rational approximation to functions like  $x^\alpha$  in integral norms. *Analysis Mathematica.* 1988;14(1):11–25. DOI: 10.1007/BF02350637.
9. Пекарский АА. Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова. *Алгебра и анализ.* 1995;7(2):121–132.
10. Райцин РА. Асимптотические свойства равномерных приближений функций с алгебраическими особенностями частичными суммами ряда Фурье – Чебышева. *Известия высших учебных заведений. Математика.* 1980;3:45–49.
11. Ganzburg MI. The Bernstein constant and polynomial interpolation at the Chebyshev nodes. *Journal of Approximation Theory.* 2002;119(2):193–213. DOI: 10.1006/jath.2002.3729.
12. Revers M. On the asymptotics of polynomial interpolation to  $|x|^\alpha$  at the Chebyshev nodes. *Journal of Approximation Theory.* 2013;165:70–82. DOI: 10.1016/j.jat.2012.09.005.
13. Ровба ЕА, Медведева ВЮ. О рациональной интерполяции функции  $|x|^\alpha$  по расширенной системе узлов Чебышева – Маркова. *Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 2019;55(4):391–405. DOI: 0.29235/1561-2430-2019-55-4-391-405.
14. Русак ВН. *Рациональные функции как аппарат приближения.* Минск: Издательство БГУ; 1979. 176 с.
15. Фихтенгольц ГМ. *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2.* Санкт-Петербург: Лань; 1997. 800 с.
16. Пекарский АА, Ровба ЕА. Равномерные приближения функций Стилтгеса посредством ортопроекции на множество рациональных функций. *Математические заметки.* 1999;65(3):362–368.
17. Ковалевская ЕВ, Пекарский АА. Построение экстремальных произведений Бляшке. *Вестні Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне.* 2017;7(1):6–14.

## References

1. Bernstein SN. Sur la meilleure approximation de  $|x|^p$  par des polynômes de degrés très élevés. *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS. Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles.* 1938;2(2):169–190. Russian, French.
2. Nikolsky SM. On the best approximation in the mean to the function  $|a - x|^s$  by polynomials. *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS. Série Mathématique.* 1947;11(2):139–180. Russian.
3. Raitsin RA. [On the best approximation in the mean by polynomials and entire functions of finite degree of functions having an algebraic singularity]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika.* 1969;4:59–61. Russian.
4. Carpenter AJ, Varga RS. Some numerical results on best uniform polynomial approximation of  $x^\alpha$  on  $[0, 1]$ . In: Gonchar AA, Saff EB, editors. *Methods of approximation theory in complex analysis and mathematical physics; 1991 May 13–24; Leningrad, Russia.* Berlin: Springer-Verlag; 1993. p. 192–222 (Lecture notes in mathematics; volume 1550). DOI: 10.1007/BFb0117488.
5. Petrushev PP, Popov VA. *Rational approximation of real functions.* Cambridge: Cambridge University Press; 1987. X, 371 p. (Encyclopedia of mathematics and its applications; volume 28).
6. Stahl H. [Best uniform rational approximation of  $|x|$  on  $[-1, 1]$ ]. *Matematicheskii sbornik.* 1992;183(8):85–118. Russian.
7. Stahl H. Best uniform rational approximation of  $x^\alpha$  on  $[0, 1]$ . *Bulletin of the American Mathematical Society.* 1993;28(1):116–122. DOI: 10.1090/S0273-0979-1993-00351-3.
8. Andersson J-E. Rational approximation to functions like  $x^\alpha$  in integral norms. *Analysis Mathematica.* 1988;14(1):11–25. DOI: 10.1007/BF02350637.

9. Pekarsky AA. [The best uniform rational approximations of Markov functions]. *Algebra i analiz.* 1995;7(2):121–132. Russian.
10. Raitsin RA. [Asymptotic properties of uniform approximations of functions with algebraic singularities by partial sums of the Fourier – Chebyshev series]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika.* 1980;3:45–49. Russian.
11. Ganzburg MI. The Bernstein constant and polynomial interpolation at the Chebyshev nodes. *Journal of Approximation Theory.* 2002;119(2):193–213. DOI: 10.1006/jath.2002.3729.
12. Revers M. On the asymptotics of polynomial interpolation to  $|x|^\alpha$  at the Chebyshev nodes. *Journal of Approximation Theory.* 2013;165:70–82. DOI: 10.1016/j.jat.2012.09.005.
13. Rouba YA, Medvedeva VYu. Rational interpolation of the function  $|x|^\alpha$  by an extended system of Chebyshev – Markov nodes. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2019;55(4):391–405. Russian. DOI: 0.29235/1561-2430-2019-55-4-391-405.
14. Rusak VN. *Ratsional'nye funktsii kak apparat priblizheniya* [Rational functions as an approximation apparatus]. Minsk: Publishing House of the Belarusian State University; 1979. 176 p. Russian.
15. Fikhtengol'ts GM. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. Tom 2* [Course of differential and integral calculus. Volume 2]. Saint Petersburg: Lan'; 1997. 800 p. Russian.
16. Pekarsky AA, Rouba YA. [Uniform approximations of Stieltjes functions via orthoprojection onto the set of rational functions]. *Matematicheskie zametki.* 1999;65(3):362–368. Russian.
17. Kovalevskaya EV, Pekarsky AA. Construction of extreme Blaschke products. *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2, Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control.* 2017;7(1):6–14. Russian.

Получена 10.10.2022 / исправлена 24.01.2023 / принята 24.01.2023.  
Received 10.10.2022 / revised 24.01.2023 / accepted 24.01.2023.

---

---

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

---

## DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

---

---

УДК 517.925

### ИССЛЕДОВАНИЕ В ЦЕЛОМ ПОВЕДЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ СИСТЕМЫ ХИЩНИК – ЖЕРТВА

А. Д. УШХО<sup>1)</sup>, Д. С. УШХО<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Адыгейский государственный университет,  
ул. Первомайская, 208, 385000, г. Майкоп, Россия

Методами классической качественной теории динамических систем на плоскости решена в целом задача построения фазового портрета системы хищник – жертва Колмогорова. Рассмотрены возможные топологические структуры данной модели для шести случаев коэффициентных условий при положительных значениях трех параметров. За счет разбиения множества значений одного из параметров на промежутки построены фазовые портреты в круге Пуанкаре. Найдены значения этого параметра, при которых в системе возможен режим автоколебаний. Показано, что негрубый однократный сложный фокус не окружают замкнутые траектории. На основе анализа расположения главных изоклин системы на всей фазовой плоскости исключительно геометрически установлена топологическая структура сложного состояния равновесия на бесконечности без опоры на известные аналитические (более трудоемкие) методы.

**Ключевые слова:** А. Н. Колмогоров; система хищник – жертва; глобальный фазовый портрет; круг Пуанкаре; состояния равновесия; предельный цикл.

**Благодарность.** Авторы выражают благодарность профессору В. Б. Тлячеву за полезные замечания, а также Физическому обществу Республики Адыгея за частичную финансовую поддержку (грант № 2022/01).

---

#### Образец цитирования:

Ушхо АД, Ушхо ДС. Исследование в целом поведения траекторий системы хищник – жертва. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;1:20–30.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-20-30>

#### For citation:

Ushkho AD, Ushkho DS. Investigation in general of the behaviour of the trajectories of a predator – prey system. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;1:20–30. Russian.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-20-30>

---

#### Авторы:

**Адам Дамирович Ушхо** – кандидат физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой теоретической физики инженерно-физического факультета.

**Дамир Салихович Ушхо** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук.

#### Authors:

**Adam D. Ushkho**, PhD (physics and mathematics), docent; head of the department of theoretical physics, faculty of engineering and physics.

[uschho76@rambler.ru](mailto:uschho76@rambler.ru)

<https://orcid.org/0000-0002-0453-7513>

**Damir S. Ushkho**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of mathematical analysis and methods of teaching mathematics, faculty of mathematics and computer science.

[uschho76@rambler.ru](mailto:uschho76@rambler.ru)

<https://orcid.org/0000-0002-1311-5785>

## INVESTIGATION IN GENERAL OF THE BEHAVIOUR OF THE TRAJECTORIES OF A PREDATOR – PREY SYSTEM

A. D. USHKHO<sup>a</sup>, D. S. USHKHO<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Adyghe State University, 208 Pervomayskaya Street, Maykop 385000, Russia

Corresponding author: A. D. Ushkho (uschho76@rambler.ru)

By the methods of the classical qualitative theory of dynamical systems on the plane, the problem of constructing a phase portrait of Kolmogorov's predator – prey system has been solved in general. Possible topological structures of this model are considered for six cases of coefficient conditions with positive values of three parameters. The phase portraits in the Poincare disk are constructed by dividing the set of values of one of the parameters into intervals. The values of this parameter are found at which the self-oscillation mode is possible in the system. It is shown that a weak focus of order 1 (multiplicity 1) is not surrounded by closed trajectories. Based on the analysis of the location of the main isoclines of the system on the entire phase plane, exclusively geometrically, the topological structure of a complex equilibrium state at infinity is established without relying on known analytical (more time-consuming) methods.

**Keywords:** A. N. Kolmogorov; predator – prey system; global phase portrait; Poincare disk; equilibrium states; limit cycle.

**Acknowledgements.** The authors are grateful to professor V. B. Tlyachev for useful comments, as well as to the Adygheya Republic Physical Society for partial financial support (grant No. 2022/01).

### Введение

В недавней работе [1] исследовано поведение траекторий системы хищник – жертва Колмогорова вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[b + (1-b)x - y - x^2] \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = y[-\delta b + (c - \delta)x] \equiv Q(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

где в первом квадранте выполняются неравенства

$$\delta > 0, b > 0, c > 0. \quad (2)$$

При этом дана классификация глобальной динамики по трем параметрам ( $\delta, b, c$ ), имеющим определенный экологический смысл. Все топологически отличающиеся глобальные фазовые портреты построены в положительном квадранте круга Пуанкаре. Однако несомненный математический интерес представляет решение задачи построения фазового портрета системы (1) на всей плоскости. В настоящей статье приведены результаты решения поставленной задачи на основе использования инструментария качественной теории дифференциальных уравнений.

Заметим, что в работе [1] имеются некоторые неточности, которые отмечены в дальнейшем тексте.

### Необходимые предварительные утверждения

**Лемма 1.** Если  $b \geq 1$ , то система (1) не имеет замкнутых траекторий в первом квадранте.

**Доказательство.** Так как  $x = 0$  и  $y = 0$  – инвариантные прямые, то их не пересекают замкнутые траектории системы (1), поэтому рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \frac{b + (1-b)x - y - x^2}{y} \equiv F(x, y), \\ \frac{dy}{d\tau} = \frac{-\delta b + (c - \delta)x}{x} \equiv G(x, y), \end{cases} \quad (3)$$

где  $d\tau = xydt$ .

Согласно работе [2] замкнутые траектории систем (1) и (3) совпадают, но параметризации на них могут быть различными.

Выражение  $F'_x(x, y) + G'_y(x, y) = \frac{1-b-2x}{y}$  строго отрицательно в первом квадранте, и согласно признаку Бендиксона [2] очевидно отсутствие замкнутых траекторий. Лемма доказана.

*Замечание 1.* В силу леммы 1 предельные циклы в первом квадранте можно ожидать только при выполнении условия  $0 < b < 1$ .

**Лемма 2.** Если  $\delta > 0$ ,  $0 < b < 1$ ,  $c = \frac{(b+1)\delta}{1-b}$ , то система (1) или не имеет предельных циклов, или имеет только простые предельные циклы.

*Доказательство.* Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что функции

$$\alpha(x, y) = \frac{(b-1)x}{\delta by}, \quad \beta(x, y) = -\frac{1}{x}$$

удовлетворяют функциональному уравнению  $\alpha Q - \beta P = P'_x + Q'_y$ , при этом справедливо неравенство

$$\alpha'_x + \beta'_y = \frac{b-1}{\delta by} \neq 0.$$

Таким образом, выполняются условия теоремы 4.4, представленной в работе [3]. Лемма доказана.

### Основные результаты

**Теорема 1.** Если  $\delta > 0$ ,  $0 < b < 1$ ,  $c = \frac{(b+1)\delta}{1-b}$ , то система (1) имеет в ограниченной части фазовой плоскости четыре состояния равновесия:  $O(0, 0)$  – простое седло,  $D(-b, 0)$  – простой устойчивый узел,  $A(1, 0)$  – простое седло,  $E\left(\frac{\delta b}{c-\delta}, \frac{bc[c-(b+1)\delta]}{(c-\delta)^2}\right)$  – негрубый устойчивый фокус. На экваторе сферы Пуанкаре расположены два состояния равновесия:  $W_1 (u = z = 0)$  – простой неустойчивый узел,  $W_2 (v = z = 0)$  – сложное состояние равновесия, к которому примыкают три гиперболических сектора и один эллиптический сектор. Система не имеет замкнутых траекторий.

*Доказательство.* Решениями системы

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0 \end{cases}$$

являются координаты точек  $O(0, 0)$ ,  $D(-b, 0)$ ,  $A(1, 0)$ ,  $E\left(\frac{\delta b}{c-\delta}, \frac{bc[c-(b+1)\delta]}{(c-\delta)^2}\right)$ . Следуя работам [2; 4],

введем обозначения величин  $\sigma$  и  $\Delta$ .

Пусть в результате переноса начала координат в точку покоя  $H(x_0, y_0)$  из системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = R(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = S(x, y) \end{cases}$$

получена система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = mx + ny + \varphi(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = px + qy + \psi(x, y), \end{cases}$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  – аналитические функции, разложения которых не содержат свободных и линейных членов. Тогда

$$\sigma(H) = m + q, \quad \Delta(H) = mq - np.$$

Так как  $\Delta(O) = -\delta b^2 < 0$ , то  $O$  – простое седло при выполнении условий (2).

В результате преобразования

$$\begin{cases} x = \bar{x} + 1, \\ y = \bar{y} \end{cases}$$

система (1) трансформируется в систему (обозначения фазовых переменных оставляем неизменными)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(b+1)x - y - (b+2)x^2 - xy - x^3, \\ \frac{dy}{dt} = [c - (b+1)\delta]y + (c - \delta)xy. \end{cases} \quad (4)$$

Из системы (4) получаем величины

$$\sigma(A) = -(b+1) + c - (b+1)\delta, \quad \Delta(A) = -(b+1)[c - (b+1)\delta]. \quad (5)$$

Из выражений (5) в силу условий теоремы следует, что  $\Delta(A) < 0$ , т. е.  $A$  – простое седло.

В результате переноса начала координат в точку  $D(-b, 0)$  система (1) принимает вид (обозначения фазовых переменных оставляем неизменными)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -b(b+1)x + by + (2b+1)x^2 - xy - x^3, \\ \frac{dy}{dt} = -bcy + (c - \delta)xy. \end{cases} \quad (6)$$

Из системы (6) видно, что  $\Delta(D) = b^2c(b+1) > 0$  при выполнении условий (2). Учитывая тот факт, что точка  $D$  лежит на инвариантной прямой  $y = 0$ , делаем вывод: точка  $D(-b, 0)$  есть простой узел, причем устойчивый, так как  $\sigma(D) = -[b(b+1) + bc] < 0$ .

Для установления типа точки покоя  $E$  преобразуем систему (1) по формулам

$$\begin{cases} x = \bar{x} + \frac{\delta b}{c - \delta}, \\ y = \bar{y} + \frac{bc[c - (b+1)\delta]}{(c - \delta)^2} \end{cases}$$

и запишем результат в старых переменных:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\delta b[c - \delta - b(c + \delta)]}{(c - \delta)^2}x - \frac{\delta b}{c - \delta}y + \frac{[c - \delta - b(c + \delta) - \delta b]}{c - \delta}x^2 - xy - x^3, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{bc[c - (b+1)\delta]}{c - \delta}x + (c - \delta)xy. \end{cases} \quad (7)$$

Из системы (7) получаем выражения  $\sigma(E) = \frac{\delta b[c - \delta - b(c + \delta)]}{(c - \delta)^2}$  и  $\Delta(E) = \frac{\delta b^2c[c - (b+1)\delta]}{(c - \delta)^2}$ . Так как  $\sigma(E) = 0$ ,  $\Delta(E) > 0$ , то для точки покоя  $(0, 0)$  системы (7) имеет место проблема отличия центра от фокуса.

С учетом условия  $c = \frac{(b+1)\delta}{1-b}$  перепишем систему (7):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{(b-1)}{2}y + \frac{(b+1)}{2}x^2 - xy - x^3, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\delta b(1+b)}{2(1-b)}x + \frac{2\delta b}{1-b}xy. \end{cases} \quad (8)$$

Первая ляпуновская величина начала координат системы (8) определяется равенством  $\alpha_3 = -\frac{\pi\delta b(1+b)^2}{8\omega^3}$ , поэтому  $\alpha_3 < 0$ . Следовательно, точка  $E$  представляет собой негрубый устойчивый фокус [2; 5].

Для исследования поведения траекторий системы в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости воспользуемся преобразованиями Пуанкаре.

Первое преобразование Пуанкаре

$$\begin{cases} x = \frac{1}{z}, \\ y = \frac{u}{z} \end{cases}$$

трансформирует систему (1) в систему

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u + (b + c - \delta - 1)uz + u^2z - (b + \delta b)uz^2, \\ \frac{dz}{dt} = z + (b - 1)z^2 + uz^2 - bz^3. \end{cases} \quad (9)$$

Второе преобразование Пуанкаре

$$\begin{cases} x = \frac{v}{z}, \\ y = \frac{1}{z} \end{cases}$$

приводит систему (1) к системе

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -vz - v^3 + (\delta - b - c + 1)v^2z + (b + \delta b)vz^2, \\ \frac{dz}{dt} = (\delta - c)vz^2 + \delta bz^3. \end{cases} \quad (10)$$

Как видно из систем (9) и (10), прямая  $z = 0$  состоит из траекторий данных систем. Единственным состоянием равновесия системы (9) при  $z = 0$  является точка  $W_1$  ( $u = z = 0$ ), которая представляет собой простой неустойчивый узел, так как  $\Delta(W_1) = 1$ ,  $\sigma(W_1) = 2$ , т. е.  $\Delta(W_1) > 0$ ,  $\sigma(W_1) > 0$ .

Поскольку в системе (10) в правых частях уравнений нет линейных членов, то состояние равновесия  $W_2$  ( $v = z = 0$ ) сложное.

Известно [6], что сумма индексов Пуанкаре всех состояний равновесия динамической системы, включая бесконечно удаленные, равна 1. Так как сумма индексов точек  $O, A, D, E, W_1$  равна 1, то индекс состояния равновесия  $W_2$  равен 0. Согласно формуле Бендиксона [4]  $I = 1 + \frac{e - h}{2}$  получаем  $h = e + 2$ , где  $h$  и  $e$  – количество гиперболических и эллиптических секторов, примыкающих к точке  $W_2$ , соответственно. Покажем, что  $e = 1$  и, следовательно,  $h = 3$ .

Расположение траекторий системы (10) в окрестности точки  $W_2$  можно установить методом Фроммера [7]. Однако во избежание громоздких аналитических вычислений, связанных с этим методом, воспользуемся графическим представлением главных изоклин системы (1) в круге Пуанкаре (рис. 1) и упростим доказательство. Цифрами I–II обозначены области, на которые разбит круг Пуанкаре главными изоклинами системы (1).

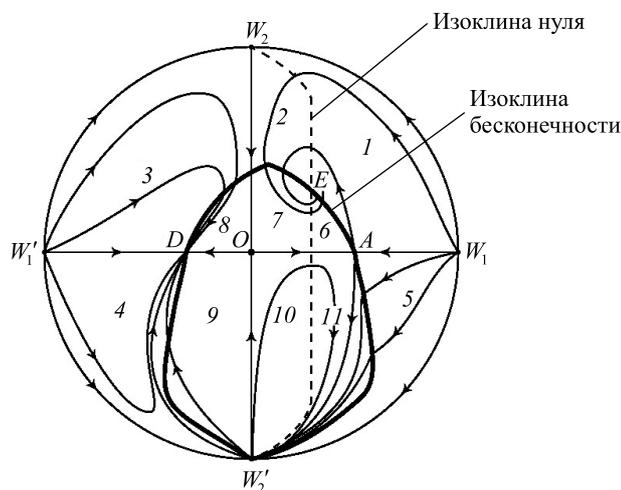


Рис. 1. Главные изоклины системы (1) в круге Пуанкаре  
 Fig. 1. The main isoclines of the system (1) in the Poincaré disk

Непосредственной проверкой установлено, что  $\frac{dy}{dt} > 0$  ( $\frac{dy}{dt} < 0$ ) в областях 1, 4, 6, 9, 10 (2, 3, 5, 7, 8, 11),  $\frac{dx}{dt} > 0$  ( $\frac{dx}{dt} < 0$ ) в областях 3, 4, 6, 7, 10, 11 (1, 2, 5, 8, 9). Согласно указанному распределению знаков производных  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{dx}{dt}$  в областях делаем вывод: за исключением единственной траектории, которая одним

концом примыкает к точке  $W_2'$ , а другим концом – к узлу  $D$ , все остальные траектории, расположенные в области 4, одним концом примыкают к точке  $W_1'$ , а другим концом – к узлу  $D$ . Таким образом, к точке  $W_2'$  примыкает гиперболический сектор, расположенный в области 4. Очевидно, что гиперболический сектор имеется в области 3, и он примыкает к точке  $W_2$ . К этой точке примыкает еще один гиперболический сектор, расположенный в областях 1 и 2. Следует отметить, что любая траектория, исходящая из точки  $W_2'$ , при  $t \rightarrow +\infty$  возвращается в эту же точку, не выходя из областей 10 и 11. Тем самым мы утверждаем, что к точке  $W_2'$  примыкает эллиптический сектор. Согласно работе [4] точки  $W_2$  и  $W_2'$  соответствуют одной и той же бесконечно удаленной точке покоя  $W_2$  ( $v = z = 0$ ), а точки  $W_1$  и  $W_1'$  – одной и той же точке покоя  $W_1$  ( $u = z = 0$ ).

Таким образом, установлено, что к сложной точке покоя  $W_2$  ( $v = z = 0$ ) примыкают три гиперболических сектора и один эллиптический сектор.

Предельный цикл не окружает негрубый устойчивый фокус  $E$ . Действительно, в силу леммы 2 выражение  $\alpha'_x + \beta'_y = \frac{b-1}{\delta by}$  меньше нуля в первом квадранте. Согласно теореме 4.4, представленной в работе [3],

если существует предельный цикл, то он должен быть устойчивым. Предположение о существовании устойчивого предельного цикла, окружающего устойчивый фокус, допускает по принципу кольца [4] существование хотя бы одного неустойчивого предельного цикла вокруг фокуса  $E$ . Данное противоречие доказывает, что система (1) не имеет замкнутой траектории в первом квадранте. Теорема доказана.

Фазовый портрет системы (1) в условиях теоремы 1 изображен на рис. 2.

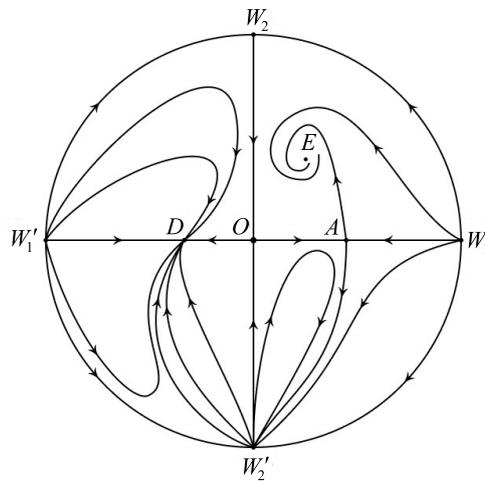


Рис. 2. Фазовый портрет системы (1) в условиях теоремы 1

Fig. 2. The phase portrait of the system (1) under the conditions of the theorem 1

*Замечание 2.* Схема расположения траекторий в окрестности точки  $W_2$  в работе [1] установлена не полностью. Согласно рис. 4.1, с, приведенному в указанной работе, окрестность точки  $W_2$  содержит четыре гиперболических сектора, что не соответствует картине, изображенной на рис. 2.

В этом можно убедиться на конкретном примере следующей системы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(3 - 2x - y - x^2), \\ \frac{dy}{dt} = y(-3 + 4x). \end{cases} \quad (11)$$

Фазовый портрет данной системы в круге Пуанкаре, представленный на рис. 3, показывает, что окрестность точки равновесия  $W_2$  состоит из трех гиперболических секторов и одного эллиптического сектора.

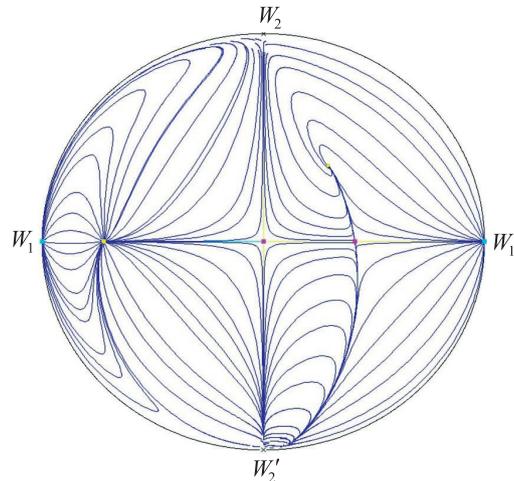


Рис. 3. Фазовый портрет системы (11)  
 ( $W_2$  – состояние равновесия на экваторе сферы Пуанкаре, к которому примыкают три гиперболических сектора и один эллиптический сектор)

Fig. 3. The phase portrait of the system (11)  
 ( $W_2$  – the state of equilibrium at the equator of the Poincaré sphere, to which three hyperbolic and one elliptical sectors adjoin)

**Теорема 2.** Если  $\delta > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c = \delta$ , то система (1) имеет в ограниченной части фазовой плоскости три состояния равновесия:  $O(0, 0)$  – простое седло,  $D(-b, 0)$ ,  $A(1, 0)$  – простые устойчивые узлы. На экваторе сферы Пуанкаре расположены простой неустойчивый узел  $W_1$  ( $u = z = 0$ ) и сложное состояние равновесия  $W_2$  ( $v = z = 0$ ), к которому примыкают четыре гиперболических сектора.

Согласно упомянутой выше формуле Бендиксона  $I = 1 + \frac{e-h}{2}$  индекс точки покоя  $W_2$  равен  $-1$ , поэтому  $h = e + 4$ . Об отсутствии эллиптических секторов в окрестности точки  $W_2$  свидетельствует тот факт, что  $\frac{dy}{dt} > 0$  ( $\frac{dy}{dt} < 0$ ) в третьем и четвертом (первом и втором) квадрантах в силу системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = bx + (1-b)x^2 - xy - x^3, \\ \frac{dy}{dt} = -\delta by. \end{cases}$$

Действительно, в указанных парах квадрантов изображающая точка движется вдоль фазовых траекторий либо только в направлении возрастания  $y$ , либо только в направлении убывания  $y$ .

Фазовый портрет системы (1) в условиях теоремы 2 изображен на рис. 4.

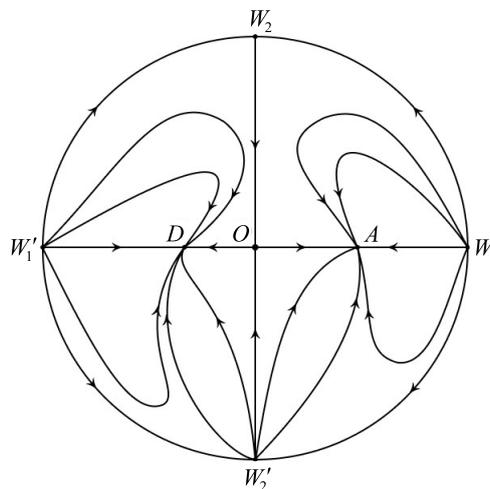


Рис. 4. Фазовый портрет системы (1) в условиях теоремы 2

Fig. 4. The phase portrait of the system (1) under the conditions of the theorem 2

**Теорема 3.** Если  $\delta > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c = (b + 1)\delta$ , то система (1) имеет в ограниченной части фазовой плоскости три состояния равновесия:  $O(0, 0)$  – простое седло,  $D(-b, 0)$  – простой устойчивый узел,  $A(1, 0)$  – седлоузел. На экваторе сферы Пуанкаре расположены простой неустойчивый узел  $W_1$  ( $u = z = 0$ ) и сложное состояние равновесия  $W_2$  ( $v = z = 0$ ), к которому примыкают три гиперболических сектора и один эллиптический сектор.

*Замечание 3.* При  $c = (b + 1)\delta$  седло  $A$  и топологический узел  $E$  сливаются в одно состояние равновесия – двукратный седлоузел.

*Замечание 4.* Топологическим узлом в терминологии работы [2] называется состояние равновесия, являющееся узлом или фокусом.

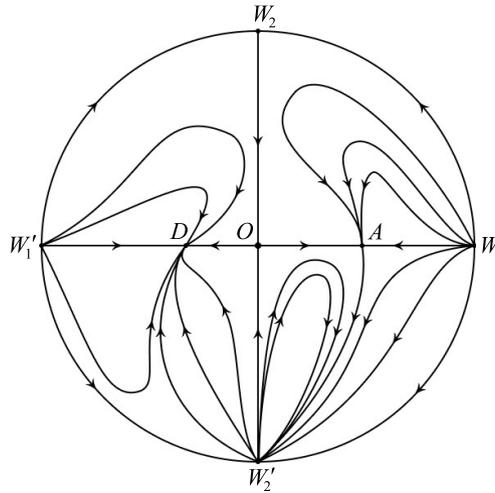


Рис. 5. Фазовый портрет системы (1) в условиях теоремы 3

Fig. 5. The phase portrait of the system (1) under the conditions of the theorem 3

Фазовый портрет системы (1) в условиях теоремы 3 изображен на рис. 5.

**Теорема 4.** Если  $\delta > 0$ ,  $0 < b < 1$ ,  $c > \frac{(b + 1)\delta}{1 - b}$ , то система (1) имеет в ограниченной части фазовой плоскости четыре состояния равновесия:  $O(0, 0)$  – простое седло,  $D(-b, 0)$  – простой устойчивый узел,  $A(1, 0)$  – простое седло,  $E\left(\frac{\delta b}{c - \delta}, \frac{bc[c - (b + 1)\delta]}{(c - \delta)^2}\right)$  – простой неустойчивый узел или фокус, окруженный устойчивым предельным циклом. На экваторе сферы Пуанкаре расположены простой неустойчивый узел  $W_1$  ( $u = z = 0$ ) и сложное состояние равновесия  $W_2$  ( $v = z = 0$ ), к которому примыкают три гиперболических сектора и один эллиптический сектор.

*Доказательство.* Из неравенств  $\delta > 0$ ,  $0 < b < 1$ ,  $c > \frac{(b + 1)\delta}{1 - b}$  следует неравенство  $\Delta(A) < 0$ , согласно которому  $A$  является простым седлом. Также выполняются неравенства  $\sigma(E) > 0$ ,  $\Delta(E) > 0$ , из которых следует, что  $E$  представляет собой неустойчивый топологический узел. Вместе с тем  $W_1$  ( $u = z = 0$ ) есть неустойчивый узел. Так как  $E$  – единственное состояние равновесия в первом квадранте, то по теореме Пуанкаре – Бендиксона точку  $E$  окружает хотя бы один устойчивый предельный цикл. Единственность предельного цикла, окружающего точку  $E$ , гарантирована в соответствии с результатами работы [8].

Фазовый портрет системы (1) в условиях теоремы 4 изображен на рис. 6.

**Теорема 5.** Если  $\delta > 0$ ,  $0 < b < 1$ ,  $(b + 1)\delta < c < \frac{(b + 1)\delta}{1 - b}$ , то система (1) имеет в ограниченной части фазовой плоскости четыре состояния равновесия:  $O(0, 0)$  – простое седло,  $D(-b, 0)$  – простой устойчивый узел,  $A(1, 0)$  – простое седло,  $E\left(\frac{\delta b}{c - \delta}, \frac{bc[c - (b + 1)\delta]}{(c - \delta)^2}\right)$  – простой устойчивый тополо-

гический узел. На экваторе сферы Пуанкаре расположены простой неустойчивый узел  $W_1$  ( $u = z = 0$ ) и сложное состояние равновесия  $W_2$  ( $v = z = 0$ ), к которому примыкают три гиперболических сектора и один эллиптический сектор.

Фазовый портрет системы (1) в условиях теоремы 5 изображен на рис. 7.

Замечание 5. Система (1) в условиях теоремы 5 ациклична в силу работы [8].

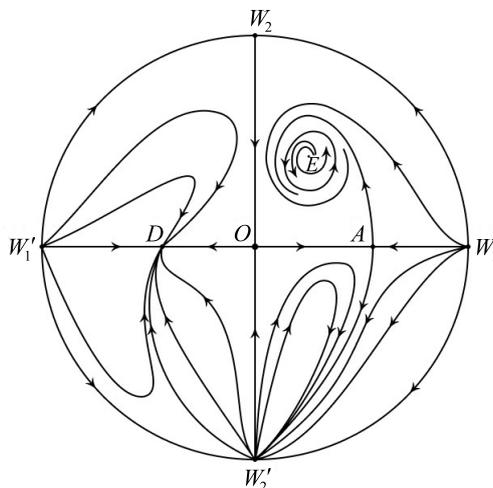


Рис. 6. Фазовый портрет системы (1) в условиях теоремы 4

Fig. 6. The phase portrait of the system (1) under the conditions of the theorem 4

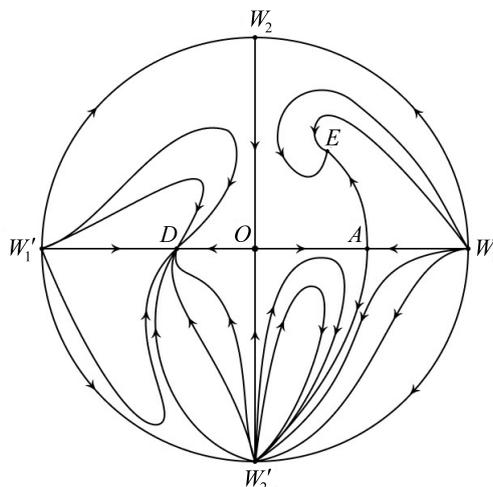


Рис. 7. Фазовый портрет системы (1) в условиях теоремы 5 ( $E$  – устойчивый узел)

Fig. 7. The phase portrait of the system (1) under the conditions of the theorem 5 ( $E$  – the stable node)

**Теорема 6.** Если  $\delta > 0$ ,  $b > 0$ ,  $\delta < c < (b + 1)\delta$ , то система (1) имеет в ограниченной части фазовой плоскости четыре состояния равновесия:  $O(0, 0)$  – простое седло,  $D(-b, 0)$ ,  $A(1, 0)$  – простые устойчивые узлы,  $E\left(\frac{\delta b}{c - \delta}, \frac{bc[c - (b + 1)\delta]}{(c - \delta)^2}\right)$  – простое седло. На экваторе сферы Пуанкаре расположены

простой неустойчивый узел  $W_1$  ( $u = z = 0$ ) и сложное состояние равновесия  $W_2$  ( $v = z = 0$ ), к которому примыкают три гиперболических сектора и один эллиптический сектор.

Фазовый портрет системы (1) в условиях теоремы 6 изображен на рис. 8.

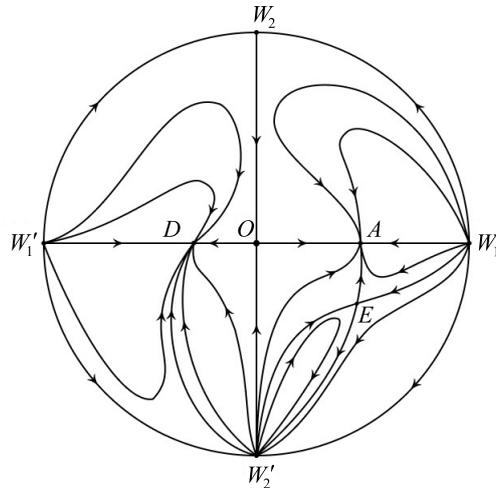


Рис. 8. Фазовый портрет системы (1) в условиях теоремы 6

Fig. 8. The phase portrait of the system (1) under the conditions of the theorem 6

*Замечание 6.* Так как единственное состояние равновесия, не принадлежащее инвариантной прямой, есть седло  $E$ , то система (1) ациклична.

### Заключение

Проведенное исследование дает возможность проследить изменение фазового портрета системы в зависимости от параметра  $c$ :

- 1) если  $\delta > 0, b > 0, c = \delta$ , то  $O$  – простое седло,  $D, A$  – простые устойчивые узлы (см. рис. 4);
- 2) если  $\delta > 0, b > 0, \delta < c < (b + 1)\delta$ , то  $O$  – простое седло,  $D, A$  – простые устойчивые узлы,  $E$  – простое седло (см. рис. 8);
- 3) если  $\delta > 0, b > 0, c = (b + 1)\delta$ , то  $O$  – простое седло,  $D$  – простой устойчивый узел,  $A \equiv E$  – седлоузел (см. рис. 5);
- 4) если  $\delta > 0, 0 < b < 1, (b + 1)\delta < c < \frac{(b + 1)\delta}{1 - b}$ , то  $O$  – простое седло,  $D$  – простой устойчивый узел,  $A$  – простое седло,  $E$  – простой устойчивый топологический узел (см. рис. 7);
- 5) если  $\delta > 0, 0 < b < 1, c = \frac{(b + 1)\delta}{1 - b}$ , то  $O$  – простое седло,  $D$  – простой устойчивый узел,  $A$  – простое седло,  $E$  – негрубый устойчивый фокус (см. рис. 2);
- 6) если  $\delta > 0, 0 < b < 1, c > \frac{(b + 1)\delta}{1 - b}$ , то  $O$  – простое седло,  $D$  – простой устойчивый узел,  $A$  – простое седло,  $E$  – простой неустойчивый топологический узел, окруженный устойчивым предельным циклом (см. рис. 6).

Результаты исследования еще раз подтверждают тезис о том, что процессы, протекающие в многочисленных реальных динамических системах, удовлетворительно моделируются автономными системами дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями. Установление схемы поведения траекторий таких систем на всей фазовой плоскости возможно только на основе использования сведений из классической качественной теории, связанных с решением труднейших проблем: центра и фокуса, существования или отсутствия предельных циклов, их взаимного расположения и т. п. Со времен создателя качественной теории дифференциальных уравнений А. Пуанкаре и по настоящий момент усилиями ученых создаются различные методы решения данных проблем для отдельных классов полиномиальных дифференциальных систем. Так, в работе [9], посвященной проблеме центра и фокуса кубической системы, для проведения больших аналитических выкладок уже привлекаются системы компьютерной алгебры типа *Maple* или *Mathematica*. В статье [10] изучается квадратичная система, имеющая четыре предельных цикла, три из которых окружают один фокус. При этом обсуждается важный вопрос о предельных циклах нормального размера, т. е. таких предельных циклах, которые могут быть обнаружены численными методами.

## Библиографические ссылки

1. Diz-Pita É, Llibre J, Otero-Espinar MV. Global phase portraits of a predator – prey system. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*. 2022;16:1–13. DOI: 10.14232/ejqtde.2022.1.16.
2. Баутин НН, Леонтович ЕА. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости*. Москва: Наука; 1976. 496 с. (Справочная математическая библиотека).
3. Отроков НФ. *Аналитические интегралы и предельные циклы*. Горький: Волго-Вятское книжное издательство; 1972. 216 с.
4. Андронов АА, Леонтович ЕА, Гордон ИИ, Майер АГ. *Качественная теория динамических систем второго порядка*. Москва: Наука; 1966. 568 с.
5. Андронов АА, Леонтович ЕА, Гордон ИИ, Майер АГ. *Теория бифуркаций динамических систем на плоскости*. Москва: Наука; 1967. 488 с.
6. Пуанкаре А. *О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями*. Леонтович Е, Майер А, переводчики; Андронов АА, редактор. Москва: ОГИЗ; 1947. 392 с. Совместно с Государственным издательством технико-теоретической литературы (Классики естествознания. Математика. Механика. Физика. Астрономия).
7. Фроммер М. Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер. *Успехи математических наук*. 1941;9:212–253.
8. Liou Lii-Perng, Cheng Kuo-Shung. On the uniqueness of a limit cycle for a predator – prey system. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 1988;19(4):867–878. DOI: 10.1137/0519060.
9. Садовский АП, Щеглова ТВ. Центры кубической системы с одиннадцатью параметрами. *Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика*. 2011;1:71–75.
10. Сидоренко ИН. Предельные циклы нормального размера некоторых классов квадратичных систем на плоскости. *Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика*. 2008;3:63–68.

## References

1. Diz-Pita É, Llibre J, Otero-Espinar MV. Global phase portraits of a predator – prey system. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*. 2022;16:1–13. DOI: 10.14232/ejqtde.2022.1.16.
2. Bautin NN, Leontovich EA. *Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti* [Methods and techniques of the qualitative study of dynamical systems on the plane]. Moscow: Nauka; 1976. 496 p. (Spravochnaya matematicheskaya biblioteka). Russian.
3. Otrokov NF. *Analiticheskie integraly i predel'nye tsikly* [Analytical integrals and limit cycles]. Gorky: Volgo-Vyatskoe knizhnoe izdatel'stvo; 1972. 216 p. Russian.
4. Andronov AA, Leontovich EA, Gordon II, Mayer AG. *Kachestvennaya teoriya dinamicheskikh sistem vtorogo poryadka* [Qualitative theory of dynamical systems of the second order]. Moscow: Nauka; 1966. 568 p. Russian.
5. Andronov AA, Leontovich EA, Gordon II, Mayer AG. *Teoriya bifurkatsii dinamicheskikh sistem na ploskosti* [Theory of bifurcations of dynamical systems on a plane]. Moscow: Nauka; 1967. 488 p. Russian.
6. Poincare A. *O krivykh, opredelyaemykh differentsial'nymi uravneniyami* [On curves defined by differential equations]. Leontovich E, Mayer A, translators; Andronov AA, editor. Moscow: OGIz; 1947. 392 p. Co-published by the Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury (Klassiki estestvoznaniya. Matematika. Mekhanika. Fizika. Astronomiya). Russian.
7. Frommer M. [Integral curves of an ordinary differential equation of the first order in the vicinity of a singular point having a rational character]. *Uspekhi matematicheskikh nauk*. 1941;9:212–253. Russian.
8. Liou Lii-Perng, Cheng Kuo-Shung. On the uniqueness of a limit cycle for a predator – prey system. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 1988;19(4):867–878. DOI: 10.1137/0519060.
9. Sadvskii AP, Shcheglova TV. [Centers of a cubic system with eleven parameters]. *Vestnik BGU. Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika*. 2011;1:71–75. Russian.
10. Sidorenko IN. [Limit cycles of normal size of some classes of quadratic systems on the plane]. *Vestnik BGU. Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika*. 2008;3:63–68. Russian.

Получена 30.11.2022 / исправлена 06.02.2023 / принята 13.02.2023.  
Received 30.11.2022 / revised 06.02.2023 / accepted 13.02.2023.

УДК 515.12

## ФУНКТОРИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА $\Omega$ -НАСЫЩЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

А. С. БЕДРИЦКИЙ<sup>1)</sup>, В. Л. ТИМОХОВИЧ<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассматриваются насыщения типа  $\Omega$  топологического пространства  $X$ , которые канонически вкладываются в волмэновское расширение  $\omega X$  и являются ослаблением понятия счетнокомпактификации в смысле Мориты. Находятся необходимые и достаточные условия существования непрерывного продолжения отображения  $X \xrightarrow{f} Y$  на  $\Omega$ -насыщения пространств  $X$  и  $Y$ , а также довольно обширные категории, на которых определены возникающие при этом ковариантные функторы.

**Ключевые слова:** насыщение топологического пространства; счетнокомпактификация в смысле Мориты; компактификация Волмэна.

## FUNCTOR PROPERTIES OF THE $\Omega$ -SATURATION OF A TOPOLOGICAL SPACE

A. S. BIADRYTSKI<sup>a</sup>, V. L. TIMOKHOVICH<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Herein, we consider the  $\Omega$ -saturations of a topological space  $X$ , which are canonically embedded in the Wallman extension  $\omega X$  and are a weakening of the concept of the countably-compactification in the Morita sense. We find necessary and sufficient conditions of the continuous extension of a map  $X \xrightarrow{f} Y$  to  $\Omega$ -saturations of the spaces  $X$  and  $Y$ , as well as sufficiently wide categories on which the covariant functors arising in this case are defined.

**Keywords:** saturation of a topological space; countably-compactification in the Morita sense; Wallman compactification.

### Образец цитирования:

Бедрицкий АС, Тимохович ВЛ. Функториальные свойства  $\Omega$ -насыщения топологического пространства. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;1:31–37.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-31-37>

### For citation:

Biadrytski AS, Timokhovich VL. Functor properties of the  $\Omega$ -saturation of a topological space. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;1:31–37. Russian.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-31-37>

### Авторы:

**Александр Сергеевич Бедрицкий** – магистрант кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета. Научный руководитель – В. Л. Тимохович.

**Владимир Леонидович Тимохович** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета.

### Authors:

**Aliaksandr S. Biadrytski**, master's degree student at the department of geometry, topology and mathematics teaching methodology, faculty of mechanics and mathematics.  
[abedr@vk.com](mailto:abedr@vk.com)

**Vladimir L. Timokhovich**, PhD (physics and mathematics), doцент; associate professor at the department of geometry, topology and mathematics teaching methodology, faculty of mechanics and mathematics.  
[timvlleo@gmail.com](mailto:timvlleo@gmail.com)

## Введение

Понятие насыщения топологического пространства, представляющее собой некое ослабление понятия счетнокомпактификации в смысле Мориты, появилось в работе [1]. Известно, что гипотеза о счетнокомпактифируемости  $M$ -пространства Мориты [2] (счетно-компактное расширение  $Y$  пространства  $X$  называется его счетнокомпактификацией, если в  $Y$  замкнуто любое замкнутое в  $X$  счетно-компактное множество [3]) не оправдалась (даже не все нормальные локально компактные  $M$ -пространства счетно-компактифицируемы [4]). Тем не менее исследование расширений топологического пространства, являющихся счетнокомпактификациями, либо близких к ним расширений, в частности насыщений с теми или иными свойствами, представляет определенный интерес. Предлагаемая работа примыкает непосредственно к публикации [5], где исследуются насыщения конкретного типа ( $\Omega$ ), для которых находятся необходимые и достаточные условия их счетнокомпактности (т. е. решается задача о счетнокомпактифируемости). В настоящей статье для непрерывного отображения  $X \xrightarrow{f} Y$  (пространство  $Y$  регулярно) устанавливаются необходимые и достаточные условия существования непрерывного продолжения  $S \xrightarrow{f} E$ , где  $S$  и  $E$  –  $\Omega$ -насыщения (см. определение 1) пространств  $X$  и  $Y$  соответственно (см. теоремы 2 и 3). Далее показывается, что  $\Omega$ -насыщения и непрерывные продолжения отображений определяют ковариантные функторы из некоторых топологических категорий в категорию ТОР всех топологических пространств и непрерывных отображений (см. теорему 4). В части использования в основных построениях конструкции волмэновского расширения  $\omega X$ , а также определения рассмотренных классов отображений данная работа примыкает к статье Д. Харриса [6].

## Понятия и обозначения

Под пространством понимается произвольное топологическое  $T_1$ -пространство, если это не оговорено особо. Пусть  $X$  и  $S$  – пространства,  $A \subset X$ . Введем следующие обозначения:  $[A]_X$  – замыкание множества  $A$  в пространстве  $X$ ;  $Cov(A, X)$  – семейство всех покрытий множества  $A$  открытыми в  $X$  множествами,  $Cov(X) = Cov(X, X)$ ;  $\mathbb{N}$  – натуральный ряд. Будем писать  $A \subset_{op} X$  ( $A \subset_{cl} X$ ), если  $A$  открыто (замкнуто соответственно) в  $X$ . Множество  $A$  назовем дискретом в пространстве  $X$ , если  $A$  счетно, дискретно (как подпространство) и замкнуто в  $X$ . Семейство всех дискретов в пространстве  $X$  обозначим через  $\Delta$  ( $\Delta_X$  при необходимости уточнения). Подсемейство  $\beta \subset \Delta$  назовем  $\Delta$ -базой в пространстве  $X$ , если для любого  $A \in \Delta$  можно выбрать  $B \in \beta$  так, чтобы  $B \subset A$ . Через  $\delta$  ( $\delta_X$  при необходимости уточнения) обозначим семейство всех дискретов  $A \in \Delta$ , допускающих раздутие до дискретного семейства окрестностей своих точек,  $\Delta$ -базу  $\beta$  будем именовать  $\delta$ -базой, если  $\beta \subset \delta$ . Пространство  $X$  называется  $\delta$ -хаусдорфовым [7], если оно хаусдорфово и семейство  $\delta$  является  $\Delta$ -базой.

Пусть  $X \subset S$  (т. е.  $X$  – подпространство в  $S$ ). Если  $U \subset_{op} X$  и  $\alpha$  – семейство некоторых открытых в  $X$  множеств, то положим, что  $\hat{U} = \cup_{op} \{G \subset S \mid G \cap X = U\}$  и  $\hat{\alpha} = \{\hat{U} \mid U \in \alpha\}$ . Пространство  $S$  называется насыщением пространства  $X$  [1], если  $S$  – расширение для  $X$  (т. е.  $[X]_S = S$ ), любое бесконечное множество  $A \subset X$  имеет в  $S$  предельную точку и любое замкнутое в  $X$  счетно-компактное множество замкнуто и в  $S$ .

В волмэновском компактном расширении  $\omega X$  на рост  $[F]_{\omega X} \setminus F$  множества  $F \subset_{cl} X$  обозначим через  $F^*$ . Напомним, что на рост  $X^* = \omega X \setminus X$  образуют замкнутые (т. е. состоящие из замкнутых в  $X$  множеств) свободные (т. е. имеющие пустое пересечение) ультрафильтры, а базу топологии в  $\omega X$  – множества вида  $W(U) = U \cup \{\xi \in X^* \mid U \supset F \text{ для некоторого } F \in \xi\}$ , где  $U \subset_{op} X$ . Если  $F \subset_{cl} X$  и  $F \subset U \subset_{op} X$ , то  $[F]_{\omega X} \subset W(U)$  и  $W(U) = \hat{U}$  (т. е.  $W(U) = \cup_{op} \{G \subset \omega X \mid G \cap X = U\}$ );  $W(U_1 \cup \dots \cup U_n) = W(U_1) \cup \dots \cup W(U_n)$ , где  $U_i \subset_{op} X$ ,  $1 \leq i \leq n$  (подробнее см. [8, с. 270–272]).

## Предварительные рассмотрения

Рассмотрим волмэновское расширение  $\omega X$  пространства  $X$ , при этом  $X$  не счетно-компактно,  $\beta$  –  $\Delta$ -база в  $X$ . Положим, что

$$s_\beta X = X \cup \{\xi \in X^* \mid \xi \cap \beta \neq \emptyset\}.$$

Ясно, что  $s_\beta X$  – расширение для  $X$ ,  $X \subset s_\beta X \subset \omega X$ ,

$$s_\beta X = X \cup \left( \cup \{A^* \mid A \in \beta\} \right).$$

Расширение  $s_\beta X$  определено в работе [5] (там оно обозначено через  $Y_\beta$ ). В ней же указаны основные свойства этого расширения.

**Предложение 1** [5]. Пусть  $S = s_\beta X$ . Тогда  $S$  – насыщение пространства  $X$ , причем выполняются условия: 1) множества  $\hat{U}$ , где  $U \subset X$ , образуют базу топологии пространства  $S$ ; 2) если  $A \in \beta$ , то  $[A]_S = [A]_{\omega X}$  и  $[A]_S$  компактно; 3) если  $F \subset_{cl} X$  и  $F \subset U \subset X$ , то  $[F]_S \subset \hat{U}$ ; 4)  $\overline{U_1 \cup \dots \cup U_n} = \hat{U}_1 \cup \dots \cup \hat{U}_n$  и  $[F_1 \cap \dots \cap F_n]_S = [F_1]_S \cap \dots \cap [F_n]_S$ , где  $U_i \subset X$ ,  $F_i \subset_{cl} X$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ; 5) если пространство  $X$  регулярно, то пространство  $S$  хаусдорфово.

Условие 5) предложения 1 дополняют предложения 2 и 3.

**Предложение 2** [5]. Если насыщение  $s_\beta X$  регулярно (для некоторой  $\Delta$ -базы  $\beta$ ), то пространство  $X$   $\delta$ -хаусдорфово и  $\beta$  является  $\delta$ -базой. Обратно, если пространство  $X$  регулярно и  $\delta$ -хаусдорфово, то насыщение  $s_\beta X$  регулярно для любой  $\delta$ -базы  $\beta$ .

**Предложение 3** [5]. Пусть пространство  $X$  вполне регулярно и  $\delta$ -хаусдорфово. Тогда насыщение  $s_\beta X$  вполне регулярно для любой  $\delta$ -базы  $\beta$ .

**Определение 1** [5]. Пусть  $S$  – некоторое расширение пространства  $X$  и выполняются условия: 1) для любой точки  $z \in S \setminus X$  найдется дискрет  $A \in \beta$  такой, что  $z \in [A]_S$ , и обратно,  $[A]_S \cap (S \setminus X) \neq \emptyset$  для любого  $A \in \beta$ ; 2) если  $B \subset A \in \beta$  и  $B \subset U \subset X$ , то  $[B]_S \subset \hat{U}$  (или, другими словами, если  $A \in \beta$  и  $F \subset_{cl} X$ , то  $[F]_S \cap [A \setminus F]_S = \emptyset$ ); 3) множества  $\hat{U}$ , где  $U \subset X$ , образуют базу топологии пространства  $S$ . Тогда  $S$  называется  $\omega$ -насыщением (или насыщением типа  $\omega$ ) пространства  $X$ , а  $\Delta$ -база  $\beta$  –  $\omega$ -допустимой для  $S$ . Если, кроме того, компактны все множества  $[A]_S$ , где  $A \in \beta$ , то  $S$  называется  $\Omega$ -насыщением (или насыщением типа  $\Omega$ ) пространства  $X$ , а  $\Delta$ -база  $\beta$  –  $\Omega$ -допустимой для  $S$ .

Любое  $\omega$ -насыщение действительно является насыщением, и если оно регулярно, то условие 3) определения 1 выполняется автоматически (см. [5]).

Ясно, что все насыщения вида  $s_\beta X$  представляют собой  $\Omega$ -насыщения и любая  $\Delta$ -база  $\beta$   $\Omega$ -допустима для  $s_\beta X$ . Обратно, любое  $\omega$ -насыщение  $S$  пространства  $X$  реализуется в некотором  $\Omega$ -насыщении  $s_\beta X$  следующим образом.

**Теорема 1** [5]. Для любого  $\omega$ -насыщения  $S$  пространства  $X$  с  $\omega$ -допустимой  $\Delta$ -базой  $\beta$  существует каноническое (т. е. тождественное на  $X$ ) вложение пространства  $S$  в  $s_\beta X$  (т. е.  $X \subset S \subset s_\beta X$ ), причем если  $S$  –  $\Omega$ -насыщение, а  $\Delta$ -база  $\beta$   $\Omega$ -допустима, то  $S$  и  $s_\beta X$  канонически гомеоморфны (т. е.  $S = s_\beta X$ ).

Таким образом, можно считать, что  $\omega$ -насыщение  $S$  получается в результате некоторой «порчи» нароста  $s_\beta X \setminus X$ , а именно «выкалывания» отдельных ультрафильтров из наростов  $A^* = [A]_{\omega X} \setminus A$  для определенных дискретов  $A \in \beta$  (см. пример в работе [5]).

**Следствие.** Для любого  $\omega$ -насыщения выполняются условия 3)–5) из предложения 1.

Понятие  $\omega$ -насыщения позволяет уточнить предложение 2.

**Предложение 4.** Если некоторое  $\omega$ -насыщение  $S$  пространства  $X$  регулярно, то пространство  $X$   $\delta$ -хаусдорфово и для  $S$  существует  $\omega$ -допустимая  $\delta$ -база.

**Доказательство.** Пусть  $\beta$  – некоторая  $\omega$ -допустимая  $\Delta$ -база для  $S$ . Считаем, что  $S \subset s_\beta X$  (см. теорему 1). Произвольному ультрафильтру  $\xi \in S \setminus X$  поставим в соответствие дискрет  $A_\xi \in \xi \cap \beta$ , который раздуем до дизъюнктного семейства  $\{V_a \mid a \in A_\xi\}$ , где  $a \in V_a \subset X$ ,  $a \in A_\xi$  (что возможно в силу регулярности  $X$ ). Исходя из регулярности  $S$  и соотношений  $\xi \in [A_\xi]_S \subset \hat{V}$ , где  $V = \cup \{V_a \mid a \in A_\xi\}$ , найдется  $W \subset_{op} X$ , для которого  $\xi \in \hat{W}$  и  $[W]_S \subset \hat{V}$  (отсюда следует, что  $[W]_X \subset V$ ). Введем обозначение  $B_\xi = A_\xi \cap W$ . Заметим, что  $B_\xi \in \xi$  и дискрет  $B_\xi$  раздувается до дискретного семейства  $\{W_b \mid b \in B_\xi\}$ , где  $W_b = W \cap V_b$ ,  $b \in B_\xi$  (в силу указанного выше соотношения  $[W]_X \subset V$ ). Далее положим, что  $\beta' = \{B \in \Delta \mid B \subset B_\xi \text{ для некоторого } \xi \in S \setminus X\}$ . Легко проверить, что  $\beta'$  –  $\delta$ -база,  $\omega$ -допустимая для  $S$ , а ее наличие очевидно влечет  $\delta$ -хаусдорфовость пространства  $X$ . Предложение доказано.

Пусть далее  $F \subset_{cl} X$ ,  $S = s_\beta X$ .

**Определение 2** [5]. Покрытие  $\alpha \in Cov(X)$  называется  $\beta$ -крупным, если любой дискрет  $A \in \beta$  покрывается конечным число элементов  $\alpha$ .

Множество всех  $\beta$ -крупных покрытий пространства  $X$  обозначим (как и в работе [5]) через  $BCov_\beta(X)$ .

**Определение 3.** Покрытие  $\alpha \in \text{Cov}(F, X)$  назовем  $F$ - $\beta$ -крупным, если для каждого дискрета  $A \in \beta$  пересечение  $F \cap A$  покрывается конечным числом элементов  $\alpha$ .

Совокупность всех  $F$ - $\beta$ -крупных покрытий множества  $F$  обозначим через  $BCov_\beta(F, X)$ .

**Определение 4.** Множество  $F$  назовем  $\beta$ -компактным, если из любого покрытия  $\alpha \in BCov_\beta(F, X)$  выделяется конечное подсемейство, покрывающее  $F$ .

*Замечание 1.* Очевидно, что если множество  $F$   $\beta$ -компактно и счетно-компактно, то оно компактно.

**Лемма 1.** Пусть  $\alpha \in \text{Cov}(F, X)$ ,  $\hat{\alpha} = \{\hat{U} \mid U \in \alpha\}$ . Семейство  $\hat{\alpha}$  покрывает  $[F]_S$  тогда и только тогда, когда  $\alpha \in BCov_\beta(F, X)$ .

*Доказательство.* Сначала докажем достаточность. Покажем, что  $\cup \hat{\alpha} \supset [F]_S$ . Соотношение  $\cup \hat{\alpha} \supset F$  очевидно. Пусть  $\xi \in [F]_S \setminus F$  и  $A \in \xi \cap \beta$ . Тогда  $F \cap A \in \xi$ . Но по условию  $F \cap A$  покрывается некоторыми множествами  $U_1, \dots, U_n \in \alpha$ , откуда  $\xi \in [F \cap A]_S \subset \overline{U_1 \cup \dots \cup U_n} = \hat{U}_1 \cup \dots \cup \hat{U}_n$  и, следовательно,  $\xi \in \hat{U}_i$  для некоторого  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Достаточность доказана.

Теперь докажем необходимость. Пусть  $A \in \beta$ . Поскольку  $[F \cap A]_S \subset [A]_S = [A]_{\omega X}$ , то  $[F \cap A]_S$  компактно и, следовательно, покрывается некоторыми множествами  $\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n \in \hat{\alpha}$ . Но тогда и  $F \cap A \subset \cup U_1 \cup \dots \cup U_n$ . Итак,  $\alpha \in BCov_\beta(F, X)$ . Лемма доказана.

*Замечание 2.* Если покрытие  $\alpha \in \text{Cov}(F, X)$  является  $F$ - $\beta$ -крупным для некоторой  $\Delta$ -базы  $\beta$ ,  $\Omega$ -допустимой для  $S$ , то оно является  $F$ - $\beta$ -крупным и для любой такой  $\Delta$ -базы  $\beta$ .

**Предложение 5.** Множество  $[F]_S$  компактно тогда и только тогда, когда множество  $F$   $\beta$ -компактно.

*Доказательство.* В силу леммы 1 необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть семейство  $\hat{\alpha} = \{\hat{U} \mid U \in \alpha\}$  покрывает  $[F]_S$  ( $U \subset X$  для всех  $U \in \alpha$ ). Согласно лемме 1  $\alpha \in BCov_\beta(F, X)$ , и по условию  $F$  покрывается некоторыми множествами  $U_1, \dots, U_n \in \alpha$ . Но тогда  $[F]_S \subset \overline{U_1 \cup \dots \cup U_n} = \hat{U}_1 \cup \dots \cup \hat{U}_n$ . Предложение доказано.

*Замечание 3* (аналогичное замечанию 2). Если множество  $F$   $\beta$ -компактно для некоторой  $\Delta$ -базы  $\beta$ ,  $\Omega$ -допустимой для  $S$ , то оно  $\beta$ -компактно и для любой такой  $\Delta$ -базы  $\beta$ .

### Продолжение отображения на $\Omega$ -насыщения

Далее рассмотрим дополнительно пространства  $Y$  и  $Z$  и непрерывные отображения  $X \xrightarrow{f} Y$  и  $X \xrightarrow{g} Z$ , при этом  $Y$  не счетно-компактно,  $\nu$  –  $\Delta$ -база в  $Y$ ,  $E = s_\nu Y$ . По-прежнему  $S = s_\beta X$ .

**Определение 5.** Скажем, что отображение  $f$   $\beta$ - $\nu$ -согласованно, если множество  $[f(A)]_Y$   $\nu$ -компактно для любого  $A \in \beta$ . Если отображение  $f$   $\Delta_X$ - $\Delta_Y$ -согласованно ( $\delta_X$ - $\delta_Y$ -согласованно), то назовем его  $\Delta$ -согласованным ( $\delta$ -согласованным соответственно).

**Определение 6.** Скажем, что отображение  $g$  удовлетворяет условию  $(H_\beta)$ , если для любых дискрета  $A \in \beta$  и конечного покрытия  $\vartheta \in \text{Cov}([g(A)]_Z, Z)$  можно выбрать конечное покрытие  $u \in \text{Cov}(A, X)$  и каждому  $U \in u$  поставить в соответствие  $V_U \in \vartheta$  таким образом, что  $g(U) \subset V_U$  и  $[g(A' \cap U)]_Z \subset V_U$  при  $A' \in \beta$  и  $U \in u$ .

**Теорема 2.** Пусть пространство  $Y$  регулярно. Если  $f$  допускает непрерывное продолжение  $S \xrightarrow{\tilde{f}} E$  (т. е.  $\tilde{f}|_X = f$ ), то  $\tilde{f}$  единственно, отображение  $f$   $\beta$ - $\nu$ -согласованно и удовлетворяет условию  $(H_\beta)$ . Обратно, если отображение  $f$   $\beta$ - $\nu$ -согласованно и удовлетворяет условию  $(H_\beta)$ , то  $f$  допускает непрерывное продолжение  $S \xrightarrow{\tilde{f}} E$ .

*Доказательство.* Сначала докажем первую часть теоремы. Поскольку множество  $[A]_S$  компактно при  $A \in \beta$ , а пространство  $E$  хаусдорфово (см. предложение 1), то  $[f(A)]_E = \tilde{f}([A]_S)$  и  $[f(A)]_E$  компактно, откуда следует  $\nu$ -компактность  $[f(A)]_Y$  (см. предложение 5). Итак,  $\beta$ - $\nu$ -согласованность отображения  $f$  доказана. Пусть далее  $A \in \beta$ ,  $\vartheta \in \text{Cov}([f(A)]_Y, Y)$  и  $\vartheta$  конечно. Рассмотрим компактное множество  $[A]_S$ , его образ  $\tilde{f}([A]_S) = [f(A)]_E$  и семейство  $\hat{\vartheta} = \{\hat{V} \mid V \in \vartheta\}$ . Отметим, что  $\hat{\vartheta}$  покрывает  $[f(A)]_E$ . Компактность  $[A]_S$  позволяет выбрать множества  $U_1 \subset X, \dots, U_n \subset X$  и  $V_1, \dots, V_n \in \vartheta$  так, чтобы  $\hat{U}_1 \cup \dots \cup \hat{U}_n \supset [A]_S$  и  $\tilde{f}(\hat{U}_i) \subset \hat{V}_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Пусть  $A' \in \beta$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Поскольку  $A' \cap U_i = [A' \cap U_i]_X \subset U_i$ ,

то  $[A' \cap U_i]_S \subset \hat{U}_i$  и, следовательно,  $\tilde{f}([A' \cap U_i]_S) \subset \tilde{f}(\hat{U}_i) \subset \hat{V}_i$ . А так как множество  $[A' \cap U_i]_S$  компактно, то  $\tilde{f}([A' \cap U_i]_S) = [f(A' \cap U_i)]_E$ . Таким образом,  $[f(A' \cap U_i)]_E \subset \hat{V}_i$ , что влечет соотношение  $[f(A' \cap U_i)]_Y \subset V_i$ . Условие  $(H_\beta)$  выполняется. Единственность продолжения  $\tilde{f}$  следует из хаусдорфовости пространства  $E$  (см., например, [8, с. 118]). Первая часть доказана.

Теперь докажем вторую часть теоремы. Зафиксируем произвольные ультрафильтр  $\xi \in S \setminus X$  и дискрет  $A \in \xi \cap \beta$  и введем обозначение  $F(\xi, A) = \bigcap \{ [f(A \cap F)]_E \mid F \in \xi \}$ . Ясно, что семейство  $\{ [f(A \cap F)]_E \mid F \in \xi \}$  центрированное, а в силу условия  $\beta$ - $v$ -согласованности и предложения 5 каждое множество  $[f(A \cap F)]_E$  компактно, откуда  $F(\xi, A) \neq \emptyset$ . Если  $\xi \cap \beta \ni A'$ , то  $[f(A \cap F)]_E \supset [f(A' \cap A \cap F)]_E \supset F(\xi, A')$ , где  $F \in \xi$ , и, следовательно,  $F(\xi, A) \supset F(\xi, A')$ . И наоборот,  $F(\xi, A') \supset F(\xi, A)$ , откуда  $F(\xi, A) = F(\xi, A')$ , т. е.

$F(\xi, A)$  не зависит от выбора  $A \in \xi \cap \beta$ . Пусть  $z \in F(\xi, A)$ . Тогда при любых  $F \in \xi$  и окрестности  $\hat{V}$  точки  $z$  ( $V \subset Y$ ) имеем  $\hat{V} \cap f(A \cap F) = V \cap f(A \cap F) \neq \emptyset$ , откуда следует, что  $A \cap f^{-1}(V) \in \xi$ . Но тогда в силу хаусдорфовости пространства  $E$   $F(\xi, A) = \{z\}$ . Положим, что  $\tilde{f}(\xi) = z$ . Далее проверим непрерывность  $\tilde{f}$ .

Пусть  $x \in X$ ,  $f(x) = y \in V \subset Y$ . Выберем множества  $W \subset Y$  и  $U \subset X$  так, чтобы  $y \in W$ ,  $[W]_Y \subset V$ ,  $x \in U$  и  $f(U) \subset W$ . Покажем, что  $\tilde{f}(\hat{U}) \subset \hat{V}$ . Пусть  $\xi \in \hat{U} \setminus U$  и  $A \in \xi \cap \beta$ . Тогда  $\tilde{f}(\xi) \in [f(A \cap U)]_E \subset [W]_E \subset \hat{V}$ .

Соотношение  $\tilde{f}(\hat{U}) \subset \hat{V}$  доказано, тем самым установлена непрерывность в точках  $x \in X$ . Пусть теперь  $\xi \in S \setminus X$ ,  $\tilde{f}(\xi) = z \in \hat{V}$ , где  $V \subset Y$ . По определению  $\{z\} = \bigcap_{F \in \xi} [f(A \cap F)]_E$ , где  $A \in \xi \cap \beta$  (см. выше).

Но тогда для некоторых  $F_1, \dots, F_n \in \xi$  выполняется включение  $\bigcap_{i=1}^n [f(A \cap F_i)]_E \subset \hat{V}$  (см. [8, с. 197]). Полагаем, что  $F = \bigcap_{i=1}^n F_i$ . Имеем  $F \in \xi$  и  $[f(A \cap F)]_E \subset \bigcap_{i=1}^n [f(A \cap F_i)]_E$ , откуда  $[f(A \cap F)]_E \subset \hat{V}$  и, следовательно,  $[f(A \cap F)]_Y \subset V$ . В силу условия  $(H_\beta)$  для покрытия  $\vartheta \in \text{Cov}([f(A)]_Y, Y)$ ,  $\vartheta = \{V, W\}$ , где  $W = Y \setminus [f(A \cap F)]_Y$ , можно подобрать конечное покрытие  $u \in \text{Cov}(A, X)$  с указанными в определении 6 свойствами. Будем считать, что  $u = \{U_1, \dots, U_n\} \cup \{U'_1 \cup \dots \cup U'_k\}$ , где  $V_{U_i} = V$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $V_{U'_j} = W$ ,  $1 \leq j \leq k$ .

Введем обозначение  $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$ . Легко проверить, что  $A \cap F \cap U'_j = \emptyset$  для любого  $j \leq k$ , откуда  $A \cap F \subset U$  и, следовательно,  $\xi \in \hat{U}$ . Очевидно также, что  $f(U) \subset V$ . Покажем, что  $\tilde{f}(\hat{U}) \subset \hat{V}$ . Если  $\psi \in \hat{U} \setminus U$ , то из соотношения  $\hat{U} = \hat{U}_1 \cup \dots \cup \hat{U}_n$  следует, что  $B \cap U_i \in \psi$  для некоторых  $B \in \psi \cap \beta$  и  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Но по условию  $(H_\beta)$  имеем  $[f(B \cap U_i)]_Y \subset V$ , что влечет соотношение  $\tilde{f}(\psi) \in [f(B \cap U_i)]_E \subset \hat{V}$ . Непрерывность  $\tilde{f}$  проверена. Теорема доказана.

Далее рассмотрим случай, когда одно из пространств счетно-компактно.

**Определение 7.** Отображение  $X \xrightarrow{\xi} Z$  назовем  $\beta$ -*сотр*-согласованным, если множество  $[g(A)]_Z$  компактно для любого дискрета  $A \in \beta$ .

**Теорема 3.** Пусть пространство  $Z$  счетно-компактно и регулярно. Если  $g$  допускает непрерывное продолжение  $S \xrightarrow{\tilde{g}} Z$ , то  $\tilde{g}$  единственно, отображение  $g$   $\beta$ -*сотр*-согласованно и удовлетворяет условию  $(H_\beta)$ . Обратно, если отображение  $g$   $\beta$ -*сотр*-согласованно и удовлетворяет условию  $(H_\beta)$ , то  $g$  допускает непрерывное продолжение  $S \xrightarrow{\tilde{g}} Z$ .

Доказательство теоремы 3 почти дословно повторяет доказательство теоремы 2 (с учетом замены  $Y$ ,  $f$  и условия  $\beta$ - $v$ -согласованности на  $Z$ ,  $g$  и условие  $\beta$ -*сотр*-согласованности соответственно).

## Функториальные свойства конструкции $\Omega$ -насыщения

Теоремы 2 и 3 позволяют обосновать следующее построение, которое дает взгляд на конструкцию  $\Omega$ -насыщения с категорной точки зрения.

Определим категории  $\Pi$ ,  $K_\Delta$ ,  $K_\delta$  и их отображения  $s$ ,  $s_\Delta$ ,  $s_\delta$  соответственно в категорию  $\text{TOP}$  всех топологических пространств и непрерывных отображений.

Объектами категории  $\Pi$  назовем любую пару  $(X, \beta)$ , где  $X$  – регулярное не счетно-компактное пространство,  $\beta$  –  $\Delta$ -база в  $X$ , а также любое счетно-компактное регулярное пространство  $Z$ . Морфизмами пары  $(X, \beta)$  в пару  $(Y, \nu)$ , пары  $(X, \beta)$  в пространство  $Z$ , пространства  $Z$  в пару  $(X, \beta)$  и пространства  $Z$  в пространство  $Z'$  будем считать непрерывные отображения  $X \xrightarrow{f} Y$ ,  $X \xrightarrow{g} Z$ ,  $Z \xrightarrow{h} X$  и  $Z \xrightarrow{h'} Z'$  соответственно, где  $h$  и  $h'$  есть произвольные отображения,  $f$  и  $g$  удовлетворяют условию  $(H_\beta)$  и  $f$   $\beta$ - $\nu$ -согласованно, а  $g$   $\beta$ - $\text{comp}$ -согласованно. Образы указанных объектов и морфизмов при отображении  $s$  – это  $\Omega$ -насыщение  $s_\beta X$ , само пространство  $Z$ , непрерывные продолжения  $s_\beta X \xrightarrow{\tilde{f}} s_\nu Y$  и  $s_\beta X \xrightarrow{\tilde{g}} Z$  и сами отображения  $h$  и  $h'$  соответственно (т. е.  $\tilde{h} = h$ ,  $\tilde{h}' = h'$ ).

Объектом категории  $K_\Delta$  назовем любое регулярное пространство. Если  $X$  и  $Y$  не счетно-компактны, а  $Z$  и  $Z'$  счетно-компактны, то морфизмами в  $K_\Delta$  будем считать непрерывные отображения  $X \xrightarrow{f} Y$ ,  $X \xrightarrow{g} Z$ ,  $Z \xrightarrow{h} X$  и  $Z \xrightarrow{h'} Z'$ , где  $h$  и  $h'$  есть произвольные отображения,  $f$  и  $g$  удовлетворяют условию  $(H_\Delta)$  и  $f$   $\Delta$ -согласованно, а  $g$   $\Delta$ - $\text{comp}$ -согласованно. Образы объектов  $X$  и  $Z$  и указанных морфизмов при отображении  $s_\Delta$  – это  $\Omega$ -насыщение  $s_\Delta X$ , само пространство  $Z$ , непрерывные продолжения  $s_\Delta X \xrightarrow{\tilde{f}} s_\Delta Y$  и  $s_\Delta X \xrightarrow{\tilde{g}} Z$  и сами отображения  $h$  и  $h'$  соответственно (т. е.  $\tilde{h} = h$ ,  $\tilde{h}' = h'$ ).

Категорию  $K_\delta$  определяем, объявляя ее объектами все не счетно-компактные регулярные  $\delta$ -хаусдорфовы пространства и все счетно-компактные регулярные пространства. Далее повторяем то же, что и для категории  $K_\Delta$ , заменяя  $\Delta$  на  $\delta$ .

Замкнутость категорий  $\Pi$ ,  $K_\Delta$ ,  $K_\delta$  относительно операции композиции морфизмов, а также выполнение соотношений вида  $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$  следуют непосредственно из теорем 2 и 3 (в частности, из единственности непрерывных продолжений). Таким образом, справедлива нижеприведенная теорема.

**Теорема 4.** *Отображения  $s$ ,  $s_\Delta$  и  $s_\delta$  являются ковариантными функторами из категорий  $\Pi$ ,  $K_\Delta$  и  $K_\delta$  соответственно в категорию  $\text{TOP}$ .*

*Замечание 4.* Отождествив каждое не счетно-компактное пространство  $X$  категории  $K_\Delta$  с парой  $(X, \Delta)$ , мы можем считать категорию  $K_\Delta$  полной подкатегорией в  $\Pi$ , а функтор  $s_\Delta$  – сужением на  $K_\Delta$  функтора  $s$ . Аналогичное утверждение справедливо для категории  $K_\delta$  (с учетом замены  $\Delta$  на  $\delta$ ).

## Библиографические ссылки

1. Голдовт ИЮ, Тимохович ВЛ. Насыщения топологических пространств и проблема Мориты. *Доклады Академии наук БССР*. 1977;21(9):777–780.
2. Morita K. Products of normal spaces with metric spaces. *Mathematische Annalen*. 1964;154(4):365–382. DOI: 10.1007/BF01362570.
3. Morita K. Countably-compactifiable spaces. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku. Section A*. 1973;12(313/328):7–15.
4. Burke DK, van Douwen EK. On countably compact extensions of normal locally compact  $M$ -spaces. In: Reed GM, editor. *Set-theoretic topology*. New York: Academic Press; 1977. p. 81–89. DOI: 10.1016/B978-0-12-584950-0.50012-2.
5. Кукрак ГО, Тимохович ВЛ. О счетнокомпактифицируемости в смысле Мориты. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2021;1:46–53. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-1-46-53.
6. Harris D. The Wallman compactification as a functor. *General Topology and its Applications*. 1971;1(3):273–281. DOI: 10.1016/0016-660X(71)90098-5.
7. Кукрак ГО, Тимохович ВЛ. О пределе обратного спектра экспоненциальных пространств. *Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика*. 2001;1:51–55.
8. Энгелькинг Р. *Общая топология*. Антоновский МЯ, Архангельский АВ, переводчики. Москва: Мир; 1986. 752 с.

## References

1. Goldovt IYu, Timokhovich VL. [Saturation of topological spaces and the Morita problem]. *Doklady Akademii nauk BSSR*. 1977;21(9):777–780. Russian.
2. Morita K. Products of normal spaces with metric spaces. *Mathematische Annalen*. 1964;154(4):365–382. DOI: 10.1007/BF01362570.
3. Morita K. Countably-compactifiable spaces. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku. Section A*. 1973;12(313/328):7–15.
4. Burke DK, van Douwen EK. On countably compact extensions of normal locally compact  $M$ -spaces. In: Reed GM, editor. *Set-theoretic topology*. New York: Academic Press; 1977. p. 81–89. DOI: 10.1016/B978-0-12-584950-0.50012-2.

5. Kukrak HO, Timokhovich VL. On the countably-compactifiability in the sense of Morita. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2021;1:46–53. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-1-46-53.
6. Harris D. The Wallman compactification as a functor. *General Topology and its Applications*. 1971;1(3):273–281. DOI: 10.1016/0016-660X(71)90098-5.
7. Kukrak HO, Timokhovich VL. [On the limit of the inverse spectrum of exponential spaces]. *Vestnik BGU. Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika*. 2001;1:51–55. Russian.
8. Engelking R. *General topology*. Warszawa: PWN; 1977. 626 p. (Monografie matematyczne; tom 60).  
Russian edition: Engelking R. *Obshchaya topologiya*. Antonovskii MYa, Arkhangel'skii AV, translators. Moscow: Mir; 1986. 752 p.

Получена 18.12.2021 / исправлена 09.11.2022 / принята 09.03.2023.  
Received 18.12.2021 / revised 09.11.2022 / accepted 09.03.2023.

---

---

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

---

## THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

---

---

УДК 539.3:534

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ ОКОЛО СЛУЧАЙНО-ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

*А. В. ЧИГАРЕВ<sup>1)</sup>, М. Г. БОТОГОВА<sup>1)</sup>, Г. И. МИХАСЕВ<sup>1)</sup>*

<sup>1)</sup>*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Рассматривается обобщение задачи о распространении поверхностной упругой волны Рэлея около свободной поверхности, получаемой математическим деформированием свободной плоскости. Множество возможных реализаций поверхности в среднем эквивалентно плоскости, а дисперсия является постоянной величиной. Предполагается малость безразмерного параметра – градиента к поверхности, что обуславливает наличие малых флуктуаций у всех полевых величин. Определяются эффективные граничные условия на эффективной плоской границе. Из условия существования ненулевых решений задачи о собственных колебаниях полупространства с неровной границей выводится обобщенное уравнение Рэлея, содержащее дополнительный параметр безразмерной дисперсии градиента к поверхности. Численно находятся корни уравнения в зависимости от коэффициента Пуассона

---

#### Образец цитирования:

Чигарев АВ, Ботогова МГ, Михасев ГИ. Распространение поверхностной волны около случайно-шероховатой поверхности. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;1:38–48. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-38-48>

#### For citation:

Chigarev AV, Botogova MG, Mikhasev GI. Propagation of a surface wave near a randomly rough surface. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;1:38–48. Russian. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-38-48>

---

#### Авторы:

*Анатолий Власович Чигарев* – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета.

*Марина Георгиевна Ботогова* – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета.

*Геннадий Иванович Михасев* – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой био- и наномеханики механико-математического факультета.

#### Authors:

*Anatoly V. Chigarev*, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.

*chigarev@rambler.ru*

*Marina G. Botogova*, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.

*batahova@bsu.by*

*Gennadi I. Mikhasev*, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.

*mikhasev@bsu.by*

и дисперсии. Влияние дисперсии градиента к неровной поверхности проявляется в трансформации нулевого корня в ненулевой при условии, что отношение скорости рэлеевской волны к скорости поперечной волны меньше единицы. Второму корню, получаемому из нулевого, соответствует появление более медленной, чем рэлеевская, волны, амплитуда которой также уменьшается с глубиной. Физически допустимые решения могут существовать только для величины дисперсии градиента меньше 0,09 в диапазоне изменения свойств материалов от твердых до резиноподобных.

**Ключевые слова:** упругая волна Рэлея; дисперсия неровности поверхности; малый безразмерный параметр.

**Благодарность.** Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (задание 1.7.01.2).

## PROPAGATION OF A SURFACE WAVE NEAR A RANDOMLY ROUGH SURFACE

A. V. CHIGAREV<sup>a</sup>, M. G. BOTOGOVA<sup>a</sup>, G. I. MIKHASEV<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: A. V. Chigarev (chigarev@rambler.ru)

A generalisation of the problem on the propagation of a surface elastic Rayleigh wave near a free surface obtained by continuous deformation of the initial plane is considered. The set of possible realisations of the surface is, on average, equivalent to a plane, and the dispersion is a constant. The smallness of a dimensionless parameter, the gradient to a surface, is assumed, which causes the presence of small fluctuations in all field quantities. The effective boundary conditions on a plane boundary are obtained. From the condition for the existence of non-zero solutions, the generalised Rayleigh equation is found for the case of an uneven boundary containing a parameter of a dimensionless dispersion of the gradient to a surface. Roots of the dispersion equation are numerically found depending on the Poisson's ratio and dispersion. The influence of the dispersion of surface roughness is manifested in the appearance of an additional root under the condition that the ratio of the Rayleigh wave velocity to the transverse velocity is less than unity. The second root corresponds to the appearance of a wave slower than the Rayleigh one, the amplitude of which also decreases with depth. Physically acceptable solutions can only exist for a dispersion value of less than 0.09 in the range of varying of material properties from solid to rubbery.

**Keywords:** elastic Rayleigh wave; dispersion of surface roughness; small dimensionless parameter.

**Acknowledgements.** This work was supported by the state program of scientific research «Convergence-2025» (task 1.7.01.2).

### Введение

Цель исследования – разработать подход к решению задачи о распространении поверхностной волны в окрестности свободной случайно-шероховатой поверхности на основе получения обобщенного уравнения Рэлея.

Обобщение задачи о распространении поверхностных волн Рэлея рассматривается во многих работах в связи с их практическим применением в разных областях геофизики, акустики, электроники и др. [1–4]. Большое количество публикаций посвящено различным аспектам распространения поверхностных волн вблизи свободной границы в неоднородных средах, однородных и неоднородных телах с криволинейной границей [5–14], в том числе с учетом поверхностного натяжения [15; 16] и при наличии поверхностного покрытия [17].

Как известно, поверхностная волна Рэлея, распространяющаяся вдоль свободной поверхности, является суперпозицией падающей и отраженной неоднородных волн, поэтому проблема дифракции волн на неровных поверхностях представляет интерес и в случае распространения поверхностных волн вблизи шероховатых поверхностей [18–21].

Многообразие различных топографий поверхностей обуславливает многообразие методов решения задач в зависимости от соотношения между длиной волны и масштабом неровности. Наиболее известные метод малых возмущений рельефа поверхности (далее – метод малых возмущений) и метод Кирхгофа [18; 19]. Метод малых возмущений применяется для исследования распространения волн в случае, когда величина флуктуации поверхности, характеризуемая модулем градиента функции, описывающей

поверхность рельефа, значительно меньше единицы. Это позволяет ввести малый безразмерный параметр, по которому проводится разложение всех полевых величин. Для эффективной среды с плоской в среднем границей формулируются преобразованные граничные условия. Для случая статистически однородной квазиплоской поверхности выводится обобщенное уравнение Рэлея.

Метод Кирхгофа [19] позволяет получить приближенные решения для поверхностей, у которых радиусы кривизны неровностей значительно больше длины волны.

Отметим, что метод малых возмущений использовался Дж. У. Рэлеем и в дальнейшем совершенствовался в разных исследованиях. Метод Кирхгофа широко применялся в задачах рассеяния волн на шероховатых поверхностях. В случае слабошероховатой поверхности приближение Кирхгофа дает такой же результат, как и метод малых возмущений [19].

### Материалы и методы исследования

Рассмотрим упругое полупространство такое, что в системе координат  $Oxz$  (рис. 1) свободная граница описывается выражением

$$z = h(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad h_{\min} \leq z \leq h_{\max}. \quad (1)$$

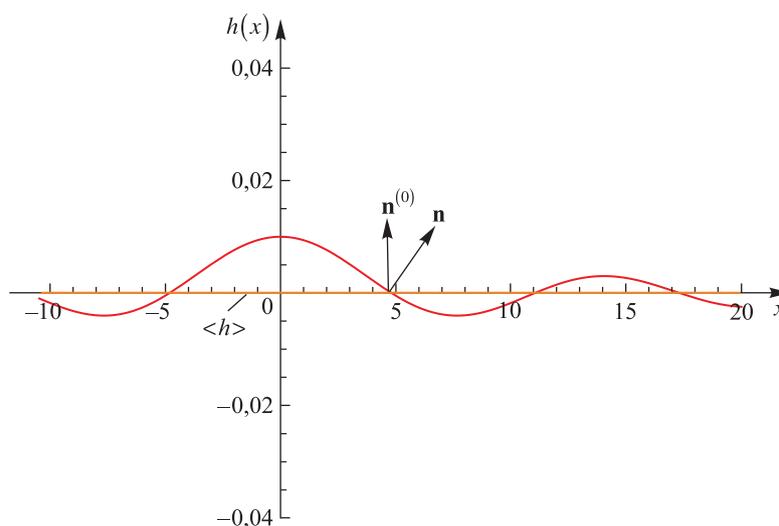


Рис. 1. Упругое полупространство со свободной шероховатой поверхностью (профилограмма в плоскости  $Oxz$ )  
 ( $\mathbf{n}$  – нормаль к неровной поверхности;  $\mathbf{n}^{(0)}$  – нормаль к плоскости  $z = 0$ )  
 Fig. 1. Elastic half-space with free rough surface (profilogram in the  $Oxz$  plane)  
 ( $\mathbf{n}$  – normal to rough surface;  $\mathbf{n}^{(0)}$  – normal to surface  $z = 0$ )

Это означает, что распространение поверхностной волны происходит в упругой полуплоскости  $xOz$ , свободный край которой согласно выражению (1) является неровным. Как обычно, вводятся потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$ , через которые по известным формулам находятся все полевые величины.

В области  $z < h(x)$  имеют место следующие уравнения для потенциалов  $\varphi(x, z)$  и  $\psi(x, z)$  [2; 4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k_l^2 \varphi &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_t^2 \psi &= 0, \\ k_l^2 &= \frac{\omega^2}{c_l^2}, \quad k_t^2 = \frac{\omega^2}{c_t^2}, \\ c_l^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_t^2 = \frac{\mu}{\rho}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\lambda, \mu$  – коэффициенты Ламе;  $k_l$  – волновое число продольной волны;  $c_l$  – скорость продольной волны;  $k_t$  – волновое число поперечной волны;  $c_t$  – скорость поперечной волны;  $\omega$  – частота;  $\rho$  – плотность.

В уравнениях (2) учтено, что зависимость полевых величин от времени, как правило, определяется множителем  $\exp(i\omega t)$ . Обычно это означает рассмотрение гармонической волны. Напряжения выражаются через  $\varphi(x, z)$  и  $\psi(x, z)$  по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= \mu \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right), \\ \sigma_{zz} &= 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) + \lambda \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right), \\ \sigma_{xx} &= 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) + \lambda \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right).\end{aligned}\quad (3)$$

Условия на граничной поверхности  $z = h(x)$  имеют вид

$$\sigma_{ij} n_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4)$$

где  $\bar{n}$  – вектор нормали к свободной поверхности;  $\sigma_{11} = \sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{22} = \sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{33} = \sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{12} = \sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{13} = \sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{23} = \sigma_{yz}$ .

Из уравнений (2) и (4) следует, что в случае задачи Рэлея для плоской свободной границы обобщение для неровной свободной границы является задачей о свободных колебаниях полупространства.

Рассмотрим случай, когда  $h(x)$  – случайная функция, представимая в виде

$$h(x) = \langle h \rangle + \tilde{h},$$

где  $\langle h \rangle$  – средняя поверхность;  $\tilde{h}$  – случайная флуктуация от  $\langle h \rangle$ . Положим, что  $\langle h \rangle = 0$  (плоскость  $z = 0$ ), тогда двухточечная корреляционная функция для  $h(x)$  имеет вид (в корреляционном приближении)

$$R(x_1, x_2) = \langle \tilde{h}(x_1) \tilde{h}(x_2) \rangle, \quad (5)$$

где  $x_1, x_2$  – произвольные точки на оси  $x$ .

Предположим, что шероховатая поверхность описывается статистически однородной случайной функцией, тогда в формуле (5) имеем

$$R(x_1, x_2) = R(x_2 - x_1),$$

где  $R(0)$  – дисперсия (среднеквадратичная амплитуда шероховатости), являющаяся постоянной величиной. Геометрически эти условия задают квазиплоскую поверхность, т. е.  $h(x)$  – статистически однородная функция, характеризующая изменение  $h(x)$  в направлении оси  $z$ .

Представим вектор  $\mathbf{n}$  в следующем виде [22]:

$$\mathbf{n} = \frac{-\frac{dh}{dx} \mathbf{i} + \mathbf{k}}{\left[ 1 + \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \approx \left( -\frac{dh}{dx}, 0, 1 \right) \quad (6)$$

в предположении, что  $\left( \frac{dh}{dx} \right)^2 \ll 1$ .

В рассматриваемом случае граничные условия (4) записываются в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xz} n_z &= 0, \\ \sigma_{zx} n_x + \sigma_{zz} n_z &= 0.\end{aligned}\quad (7)$$

Представим все величины в уравнениях (7) следующим образом:

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}^{(0)} + \mathbf{n}^{(1)}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}, \quad i, j = 1, 2. \quad (8)$$

Выпишем уравнения (7) для приближений по параметру  $\frac{dh}{dx}$ . Для нулевого приближения из уравнений (7) с учетом выражений (8) получаем

$$\sigma_{xx}^{(0)} n_x^{(0)} + \sigma_{xz}^{(0)} n_z^{(0)} = 0,$$

$$\sigma_{zx}^{(0)} n_x^{(0)} + \sigma_{zz}^{(0)} n_z^{(0)} = 0.$$

Для первого приближения имеем

$$\sigma_{xx}^{(0)} n_x^{(1)} + \sigma_{xx}^{(1)} n_x^{(0)} + \sigma_{xz}^{(0)} n_z^{(1)} + \sigma_{xz}^{(1)} n_z^{(0)} = 0, \quad (9)$$

$$\sigma_{zx}^{(0)} n_x^{(1)} + \sigma_{zx}^{(1)} n_x^{(0)} + \sigma_{zz}^{(0)} n_z^{(1)} + \sigma_{zz}^{(1)} n_z^{(0)} = 0.$$

С учетом формулы (6) из уравнений (9) следуют уравнения

$$-\sigma_{xx}^{(0)} \frac{dh}{dx} + \sigma_{xz}^{(1)} = 0, \quad (10)$$

$$-\sigma_{zx}^{(0)} \frac{dh}{dx} + \sigma_{zz}^{(1)} = 0.$$

Из уравнений (10) выражаем приближения первого порядка для  $\sigma_{ij}^{(1)}$  через  $\sigma_{ij}^{(0)}$  при малой величине параметра  $\frac{dh}{dx}$ :

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xx}^{(0)} \frac{dh}{dx}, \quad (11)$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zx}^{(0)} \frac{dh}{dx}.$$

С учетом приближений (11) граничные условия (7) имеют вид эффективных граничных условий на плоскости  $z = 0$ :

$$\sigma_{xz}^{(0)} + \sigma_{xx}^{(0)} \frac{dh}{dx} = 0 \text{ при } z = 0, \quad (12)$$

$$\sigma_{zz}^{(0)} + \sigma_{zx}^{(0)} \frac{dh}{dx} = 0 \text{ при } z = 0.$$

Граничные условия (12) представляют собой приближение действительных граничных условий  $\sigma_{ij} n_j = 0$  на границе  $z = h(x)$ , перенесенных на среднюю границу  $z = 0$ . Это приближение имеет место при выполнении условия  $\left| \frac{dh}{dx} \right| \ll 1$ .

В силу линейности уравнений (2) для приближений  $\varphi^{(0)}$ ,  $\psi^{(0)}$ ,  $\varphi^{(1)}$ ,  $\psi^{(1)}$  записываются несвязанные системы уравнений

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial z^2} + k_l^2 \varphi^{(i)} = 0, \quad i = 0, 1, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial z^2} + k_l^2 \psi^{(i)} = 0,$$

а также соответствующие напряжения (3) для приближений, уравнения для которых будут несвязанными:

$$\sigma_{xz}^{(i)} = \mu \left( \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial z^2} \right), \quad i = 0, 1,$$

$$\sigma_{zz}^{(i)} = 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial x \partial z} \right) + \lambda \left( \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial z^2} \right), \quad (14)$$

$$\sigma_{xx}^{(i)} = 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial x \partial z} \right) + \lambda \left( \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial z^2} \right).$$

Решение уравнений (13) для нулевого приближения ищем в виде

$$\begin{aligned}\varphi^{(0)} &= A^{(0)} \exp(ikx + v_1 z), \\ \psi^{(0)} &= B^{(0)} \exp(ikx + v_2 z), \\ v_1 &= (k^2 - k_l^2)^{\frac{1}{2}}, \quad v_2 = (k^2 - k_t^2)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}\tag{15}$$

где  $A^{(0)}$ ,  $B^{(0)}$  – постоянные амплитуды;  $k = \frac{\Omega}{c}$  – волновое число поверхностной волны;  $c$  – скорость поверхностной волны.

Подставляя уравнения (14) в граничные условия (12), получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= \mu \left( \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial z^2} \right) + \\ &+ \frac{dh}{dx} \left[ 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial x \partial z} \right) + \lambda \left( \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial z^2} \right) \right] = 0 \quad \text{при } z = 0,\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial x \partial z} \right) + \lambda \left( \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial z^2} \right) + \\ &+ \frac{dh}{dx} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial z^2} \right) \right] = 0 \quad \text{при } z = 0.\end{aligned}\tag{17}$$

После подстановки выражений (15) в формулы (16) и (17) имеем систему алгебраических уравнений относительно  $A^{(0)}$ ,  $B^{(0)}$  вида

$$\begin{aligned}2\mu(ik)v_1 A^{(0)} + \frac{dh}{dx} \left[ 2\mu(ik)^2 + \lambda((ik)^2 + v^2) \right] A^{(0)} + \left[ \mu((ik)^2 - v_2^2) + \frac{dh}{dx} 2\mu(ik)v_2 \right] B^{(0)} &= 0, \\ \left[ 2\mu v_1^2 + \lambda((ik)^2 + v_1^2) + \frac{dh}{dx} 2\mu(ik)v_1 \right] A^{(0)} + \left[ 2\mu(ik)v_2 + \frac{dh}{dx} \mu((ik)^2 - v^2) \right] B^{(0)} &= 0.\end{aligned}\tag{18}$$

Система (18) является результатом применения метода характеристического уравнения к уравнениям (13), (14) и граничным условиям (12).

Условия существования ненулевых решений уравнений (18) приводят к обобщенному уравнению Рэлея, которое в случае шероховатой границы содержит малые безразмерные параметры  $\frac{dh}{dx}$ ,  $\left(\frac{dh}{dx}\right)^2$ , представляющие собой случайные функции. Осредняя определитель системы уравнений (18) с учетом условий

$$\langle h \rangle = 0, \quad \left\langle \frac{dh}{dx} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 \right\rangle = D,$$

находим осредненное уравнение Рэлея для множества возможных реализаций шероховатости поверхности, получаемых геометрическим или топологическим деформированием:

$$\begin{aligned}F(\eta, v, D) &= (2 - \eta)^2 - 4\sqrt{(1 - \eta)(1 - \theta\eta)} + \\ &+ D \left\{ (2 - \eta)^2 + 2\eta(2 - \eta) + 4\sqrt{(1 - \eta)(1 - \theta\eta)} \right\} = 0,\end{aligned}\tag{19}$$

где безразмерные параметр  $\theta$  и искомая величина  $\eta$  определяются по формулам

$$\eta = \left( \frac{c}{c_t} \right)^2, \quad \theta = \left( \frac{c_l}{c_t} \right)^2,$$

здесь  $c$  – искомая скорость волны Рэлея;  $c_l$  – скорость продольной волны;  $c_t$  – скорость поперечной волны. При  $D = 0$  уравнение (19) преобразуется в классическое уравнение Рэлея.

Отметим, что если не проводить осреднение определителя системы уравнений (18), а выписать его в явном виде, то получим уравнение

$$R^{(0)} + \frac{dh}{dx} R^{(1)} + \left(\frac{dh}{dx}\right)^2 R^{(2)} = 0, \quad (20)$$

где

$$R^{(0)} = -4\mu k^2 v_l v_t + \left[ 2\mu v_1^2 + \lambda((ik)^2 + v_1^2) \right] \mu((ik)^2 - v_2^2),$$

$$R^{(1)} = \left[ 2\mu(ik)^2 + \lambda((ik)^2 + v^2) \right] 2\mu(ik)v_2 - \left[ 2\mu v_1^2 + \lambda((ik)^2 + v_1^2) \right] (2\mu(ik)v_2),$$

$$R^{(2)} = \left[ 2\mu(ik)^2 + \lambda((ik)^2 + v^2) \right] \left[ \mu(ik)^2 - v^2 \right] - 2\mu(ik)v_2 \cdot 2\mu(ik)v_1.$$

Уравнение (20) устанавливает связь между  $\eta$  и  $h(x)$ , которая имеет место, если возможна функциональная зависимость  $c_b, c_t$  от  $x$ . Это можно реализовать, если решать уравнение (20) относительно  $\frac{dh}{dx}$ .

Осреднение целесообразно осуществлять на множестве возможных реализаций случайной функции  $h(x)$ , что дает уравнение (19), в котором все величины не зависят от  $x$ .

Отметим, что выбор малого безразмерного параметра  $\frac{dh}{dx}$  не единствен.

### Результаты и их обсуждение

Уравнение (19) решалось численно при различных значениях параметров  $v$  и  $D$ . Результаты представлены в таблице.

Корни обобщенного уравнения Рэлея в зависимости от значений параметров  $v$  и  $D$   
 Roots of the generalised Rayleigh equation depending on the values of the parameters  $v$  and  $D$

$D$	$v = 0$ ( $\theta = 0,5$ )	$v = 0,1$ ( $\theta = 0,444$ )	$v = 0,3$ ( $\theta = 0,286$ )	$v = 0,4$ ( $\theta = 0,1667$ )	$v = 0,5$ ( $\theta = 0$ )
0	$\eta_1 = 0$ $\eta_2 = 0,764$	$\eta_1 = 0$ $\eta_2 = 0,798$	$\eta_1 = 0$ $\eta_2 = 0,86$	$\eta_1 = 0$ $\eta_2 = 0,888$	$\eta_1 = 0$ $\eta_2 = 0,913$
0,01	$\eta_1 = 0,086$ $\eta_2 = 0,723$	$\eta_1 = 0,076$ $\eta_2 = 0,765$	$\eta_1 = 0,058$ $\eta_2 = 0,841$	$\eta_1 = 0,049$ $\eta_2 = 0,874$	$\eta_1 = 0,041$ $\eta_2 = 0,903$
0,05	$\eta_1 = 2$ $\eta_2 = 5,425$	$\eta_1 = 2,25$ $\eta_2 = 5,148$	$\eta_1 = 0,366$ $\eta_2 = 0,695$	$\eta_1 = 0,286$ $\eta_2 = 0,783$	$\eta_1 = 0,227$ $\eta_2 = 0,844$
0,06	$\eta_1 = 2$ $\eta_2 = 5,466$	$\eta = 5,189$	Нет вещественных корней	$\eta_1 = 0,367$ $\eta_2 = 0,74$	$\eta_1 = 0,283$ $\eta_2 = 0,822$
0,08	$\eta_1 = 2$ $\eta_2 = 5,55$	$\eta = 5,276$	Нет вещественных корней	Нет вещественных корней	$\eta_1 = 0,42$ $\eta_2 = 0,753$
0,09	$\eta_1 = 2$ $\eta_2 = 5,593$	$\eta = 5,321$	Нет вещественных корней	Нет вещественных корней	$\eta_1 = 0,53$ $\eta_2 = 0,676$

Примечание. Линия синего цвета отделяет множество действительных корней от корней, не имеющих физического смысла.

Из таблицы видно, что нулевой корень уравнения Рэлея при  $D = 0$  трансформируется в ненулевой, который перемещается влево вдоль оси  $\eta$  при росте  $D$ .

Действительные корни существуют для значений коэффициента Пуассона  $0 \leq v \leq 0,5$  и дисперсии  $0 \leq D \leq 0,09$ . Таким образом, при  $D \leq 0,01$  существуют два физически допустимых корня. Это свидетельствует о возможности существования двух поверхностных волн, скорости которых при  $v = 0$

различаются на порядок. Скорость более быстрой волны на порядок больше скорости медленной волны и на порядок меньше скорости поверхностной волны, распространяющейся около свободной поверхности без шероховатости. Из таблицы следует, что существование поверхностных волн зависит от величины дисперсии  $D$ , рост которой до 0,09 совместно с ростом  $\nu$  до 0,5 свидетельствует о наличии двух поверхностных волн. Таким образом, около шероховатой границы распространяются две волны (быстрая и медленная), которые затухают с глубиной.

На рис. 2 представлена зависимость функции  $F = F(\eta, \nu, D)$  в плоскости  $O\eta F$  от величины  $0 \leq \eta \leq 1$  при  $\nu = 0,1$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\nu = 0,4$ ,  $\nu = 0,5$  и  $D = 0,01$ , демонстрирующая сближение корней с ростом  $\nu$  при  $D = 0,01$ . На рис. 3 изображена та же зависимость при  $D = 0,05$ .

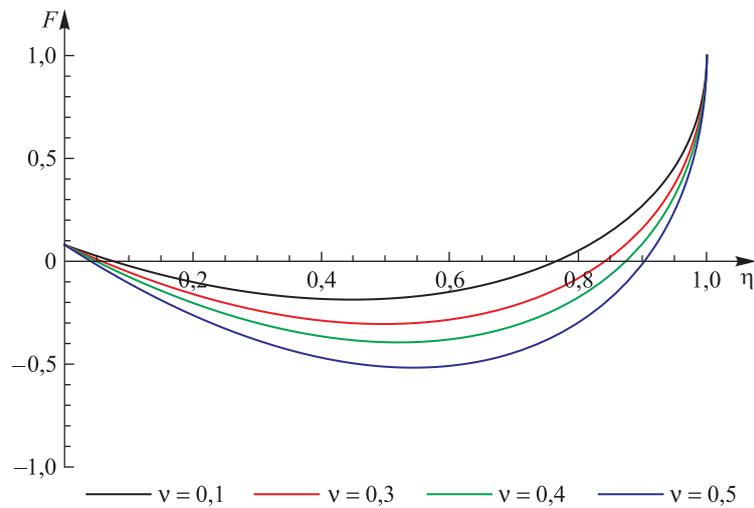


Рис. 2. Зависимость функции  $F(\eta, \nu, D)$  от  $\eta$  при  $D = 0,01$  и различных значениях коэффициента Пуассона

Fig. 2. Function  $F(\eta, \nu, D)$  versus  $\eta$  for  $D = 0.01$  and different values of Poisson's ratio

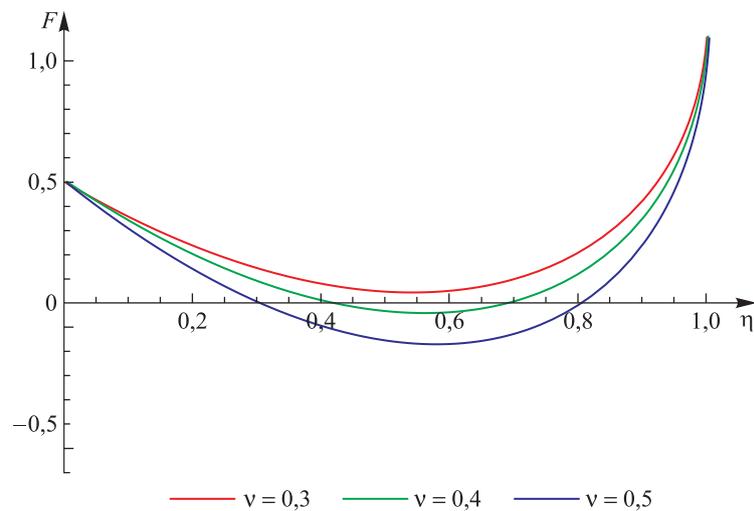


Рис. 3. Зависимость функции  $F(\eta, \nu, D)$  от  $\eta$  при  $D = 0,05$  и различных значениях коэффициента Пуассона

Fig. 3. Function  $F(\eta, \nu, D)$  versus  $\eta$  for  $D = 0.05$  and different values of Poisson's ratio

При  $D = 0,09$  и  $\nu = 0,5$  существуют две поверхностные волны с близкими скоростями. При дальнейшем росте  $D$ , начиная с  $D = 0,1$ , действительных и физически допустимых корней не существует. Точки пересечения кривых с осью  $\eta$  определяют корни обобщенного уравнения Рэлея.

На рис. 4 изображена зависимость  $\eta$  от  $\nu$  при  $D = 0$ ,  $D = 0,01$ ,  $D = 0,05$ .

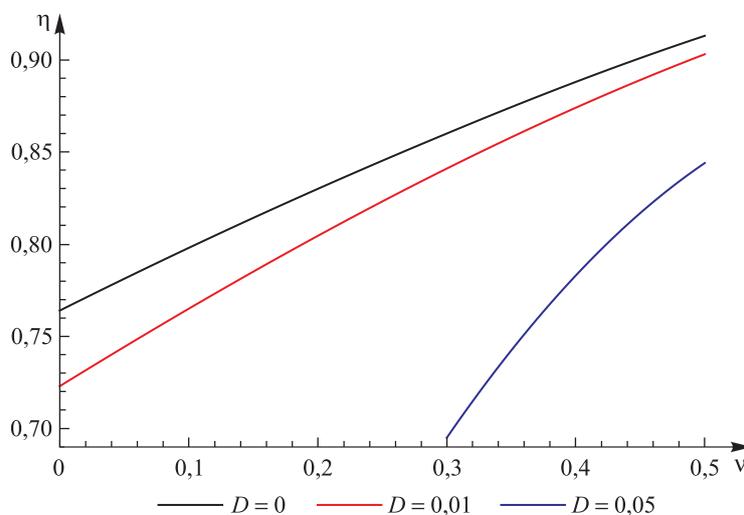


Рис. 4. Функция  $\eta(v)$  при различных значениях параметра  $D$

Fig. 4. Function  $\eta(v)$  for different values of parameter  $D$

Видно, что с ростом  $D$  зависимость  $\eta$  от  $v$  при конкретном  $v$  уменьшается. При  $D = 0,05$  зависимость  $\eta$  от  $v$  начинается с  $v = 0,3$ , что свидетельствует о существовании зоны нечувствительности, когда корни не имеют физического смысла.

### Заключение

В ходе исследования получены следующие результаты.

1. Разработан подход к решению задачи о распространении поверхностных волн рэлеевского типа около свободной шероховатой границы, основанный на использовании эффективных граничных условий в сочетании с методом последовательных приближений по абсолютной величине градиента к поверхности. Существуют и другие подходы к исследованию волн Рэлея, использующие иные методы последовательных приближений.

2. Обобщен подход Рэлея к получению уравнения для скорости поверхностной волны, в которое входят безразмерный параметр  $D$  (дисперсия случайной функции  $\frac{dh}{dx}$  эффективной поверхности, описывающей неровность поверхности) и параметр материала  $v$  (коэффициент Пуассона).

3. Исследовано влияние свойств материала и геометрии поверхности на вид решения уравнения Рэлея, что выражается в появлении двух ненулевых корней обобщенного уравнения Рэлея, удовлетворяющих физическим требованиям. Большой корень соответствует скорости быстрой волны за счет неровности свободной поверхности, а меньший корень в случае материалов с коэффициентом Пуассона  $0 \leq v \leq 0,5$  и границы с дисперсией  $0,01 \leq D \leq 0,09$  определяет скорость медленной волны, которая отличается на порядок. При росте  $D$  до  $0,09$  корни (скорости) сближаются. Меньший корень трансформируется из нулевого корня уравнения Рэлея.

4. Получено решение задачи о собственных колебаниях упругого полупространства с неровной свободной границей методом последовательных приближений.

### Библиографические ссылки

1. Oliner AA, editor. *Acoustic surface waves*. Berlin: Springer-Verlag; 1978. XI, 334 p. (Topics in applied physics; volume 24). DOI: 10.1007/3-540-08575-0.
2. Дьелесан Э, Руайе Д. *Упругие волны в твердых телах: применение для обработки сигналов*. Леманов ВВ, редактор. Москва: Наука; 1982. 424 с.
3. Викторов ИА. *Звуковые поверхностные волны в твердых телах*. Красильников ВА, редактор. Москва: Наука; 1981. 287 с.
4. Красильников ВА, Крылов ВВ. *Введение в физическую акустику*. Москва: Наука; 1984. 400 с.
5. Huang X, Maradudin AA. Propagation of surface acoustic waves across random gratings. *Physical Review B*. 1987;36(15): 7827–7839. DOI: 10.1103/physrevb.36.7827.
6. Бреховских ЛМ. О поверхностных волнах в твердом теле, удерживаемых кривизной границы. *Акустический журнал*. 1967;13(4):541–555.

7. Чигарев АВ. Распространение волн в стохастически неоднородной упругой среде. *Известия Академии наук СССР. Механика твёрдого тела*. 1970;4:87–92.
8. Бестужева НП, Чигарев АВ. Распространение поверхностных волн в стохастически неоднородной упругой среде (марковское приближение). *Прикладная математика и механика*. 1979;43(4):746–752.
9. Бабич ВМ, Кирпичникова НЯ. *Метод пограничного слоя в задачах дифракции*. Ленинград: Издательство Ленинградского университета; 1974. 124 с.
10. Бабич ВМ, Молотков ИА. Применение асимптотических методов в теории поверхностных волн. В: *Труды V Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн; 13–17 июля 1970 г.; Ленинград, СССР*. Ленинград: Наука; 1971. с. 4–13.
11. Косачёв ВВ, Гандурин ЮН, Барсуков КВ. Дисперсия и затухание сдвиговых поверхностных акустических волн горизонтальной поляризации на свободной статистически шероховатой поверхности гексагонального кристалла. *Физика твёрдого тела*. 2004;46(10):1886–1892.
12. Толипов ХБ. Точное решение задачи взаимодействия неоднородных волн с плоской границей. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Физика. Химия*. 2006;7:144–149.
13. Бабич ВМ. О распространении волн Рэлея вдоль поверхности однородного упругого тела произвольной формы. *Доклады Академии наук СССР*. 1961;137(6):1263–1266.
14. Babich VM, Rusakova NYa. The propagation of Rayleigh waves over the surface of a non-homogeneous elastic body with an arbitrary form. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1963;2(4):719–735. DOI: 10.1016/0041-5553(63)90536-6.
15. Krylov VV. Effect of surface phenomena in solids on surface acoustic waves. *Progress in Surface Science*. 1989;32(1):39–110. DOI: 10.1016/0079-6816(89)90019-1.
16. Крылов ВВ, Смирнова ЗА. Экспериментальное исследование дисперсии рэлеевской волны на шероховатой поверхности. *Акустический журнал*. 1990;36(6):1044–1048.
17. Mikhasev GI, Botogova MG, Eremeyev VA. On the influence of a surface roughness on propagation of anti-plane short-length localized waves in a medium with surface coating. *International Journal of Engineering Science*. 2021;158:103428. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2020.103428.
18. Bass FG, Fuks IM. *Wave scattering from statistically rough surfaces*. Oxford: Pergamon Press; 1979. XI, 527 p. (International series in natural philosophy; volume 93).
19. Ishimaru A. *Wave propagation and scattering in random media. Volume 2. Multiple scattering, turbulence, rough surfaces, and remote sensing*. New York: Academic Press; 1978. [339 p.].
20. Лысанов ЮП. Об одном приближенном решении задачи о рассеянии звуковых волн на неровной поверхности. *Акустический журнал*. 1956;2(2):182–187.
21. Исакович МА. О рассеянии и излучении волн статистически неоднородными и статистически колеблющимися поверхностями. *Акустический журнал*. 1956;2(2):146–149.
22. Хусу АП, Витенберг ЮР, Пальмов ВА. *Шероховатость поверхностей: теоретико-вероятностный подход*. Первоуральский АА, редактор. Москва: Наука; 1975. 343 с. (Физико-математическая библиотека инженера).

## References

1. Oliner AA, editor. *Acoustic surface waves*. Berlin: Springer-Verlag; 1978. XI, 334 p. (Topics in applied physics; volume 24). DOI: 10.1007/3-540-08575-0.
2. Dieulesaint E, Royer D. *Ondes élastiques dans les solides: applications au traitement du signal*. Paris: Masson et C<sup>ie</sup>; 1974. XVI, 407 p.  
Russian edition: Dieulesaint E, Royer D. *Упругие волны в твёрдых телах: применение для обработки сигналов*. Леманов ВВ, редактор. Москва: Наука; 1982. 424 p.
3. Viktorov IA. *Zvukovye poverkhnostnye volny v tverdykh telakh* [Sound surface waves in solids]. Krasil'nikov VA, editor. Moscow: Nauka; 1981. 287 p. Russian.
4. Krasil'nikov VA, Krylov VV. *Vvedenie v fizicheskuyu akustiku* [Introduction to physical acoustics]. Moscow: Nauka; 1984. 400 p. Russian.
5. Huang X, Maradudin AA. Propagation of surface acoustic waves across random gratings. *Physical Review B*. 1987;36(15):7827–7839. DOI: 10.1103/physrevb.36.7827.
6. Brekhovskikh LM. [About surface waves in a solid held by the curvature of the boundary]. *Akusticheskii zhurnal*. 1967;13(4):541–555. Russian.
7. Chigarev AV. [Wave propagation in a stochastically inhomogeneous elastic medium]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*. 1970;4:87–92. Russian.
8. Bestuzheva NP, Chigarev AV. [Propagation of surface waves through a stochastic inhomogeneous elastic medium (the Markovian approximation)]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1979;43(4):746–752. Russian.
9. Babich VM, Kirpichnikova NYa. *Metod pogrannichnogo sloya v zadachakh difraktsii* [The boundary-layer method in diffraction problems]. Ленинград: Izdatel'stvo Leningradskogo universiteta; 1974. 124 p. Russian.
10. Babich VM, Molotkov IA. [Asymptotic methods application in the theory of surface waves]. In: *Trudy V Vsesoyuznogo simpoziuma po difraktsii i rasprostraneniyu voln; 13–17 iyulya 1970 g.; Leningrad, SSSR* [Proceedings of the 5<sup>th</sup> All-Union symposium on diffraction and wave propagation; 1970 July 13–17; Ленинград, СССР]. Ленинград: Наука; 1971. p. 4–13. Russian.
11. Kosachev VV, Gandurin YuN, Barsukov KV. [Dispersion and attenuation of surface shear acoustic waves of horizontal polarization on the free statistically rough surface of the hexagonal crystal]. *Fizika tverdogo tela*. 2004;46(10):1886–1892. Russian.
12. Tolipov KhB. [Exact solution of the problem of inhomogeneous waves interaction with a flat boundary]. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Physics. Chemistry*. 2006;7:144–149. Russian.
13. Babich VM. [On the propagation of Rayleigh waves along the surface of a homogeneous elastic body of arbitrary shape]. *Doklady Akademii nauk SSSR*. 1961;137(6):1263–1266. Russian.
14. Babich VM, Rusakova NYa. The propagation of Rayleigh waves over the surface of a non-homogeneous elastic body with an arbitrary form. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1963;2(4):719–735. DOI: 10.1016/0041-5553(63)90536-6.

15. Krylov VV. Effect of surface phenomena in solids on surface acoustic waves. *Progress in Surface Science*. 1989;32(1):39–110. DOI: 10.1016/0079-6816(89)90019-1.
16. Krylov VV, Smirnova ZA. Experimental investigation of Rayleigh wave dispersion on a rough surface. *Akusticheskii zhurnal*. 1990;36(6):1044–1048. Russian.
17. Mikhasev GI, Botogova MG, Eremeyev VA. On the influence of a surface roughness on propagation of anti-plane short-length localized waves in a medium with surface coating. *International Journal of Engineering Science*. 2021;158:103428. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2020.103428.
18. Bass FG, Fuks IM. *Wave scattering from statistically rough surfaces*. Oxford: Pergamon Press; 1979. XI, 527 p. (International series in natural philosophy; volume 93).
19. Ishimaru A. *Wave propagation and scattering in random media. Volume 2. Multiple scattering, turbulence, rough surfaces, and remote sensing*. New York: Academic Press; 1978. [339 p.].
20. Lysanov YuP. [One approximate solution for the problem of the scattering of acoustic waves by an uneven surface]. *Akusticheskii zhurnal*. 1956;2(2):182–187. Russian.
21. Isakovich MA. [On scattering and radiation of waves by statistically inhomogeneous and statistically vibrating surfaces]. *Akusticheskii zhurnal*. 1956;2(2):146–149. Russian.
22. Khusu AP, Vitenberg YuR, Pal'mov VA. *Sherokhovatost' poverkhnostei: teoretiko-veroyatnostnyi podkhod* [Surface roughness: a probabilistic approach]. Pervozvanskii AA, editor. Moscow: Nauka; 1975. 343 p. (Fiziko-matematicheskaya biblioteka inzhenera). Russian.

Получена 02.02.2022 / исправлена 23.05.2022 / принята 17.01.2023.  
Received 02.02.2022 / revised 23.05.2022 / accepted 17.01.2023.

УДК 539.3

## КОЛЕБАНИЯ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛИНЕЙНОЙ ВО ВРЕМЕНИ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ

Д. В. ЛЕОНЕНКО<sup>1)</sup>, М. В. МАРКОВА<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет транспорта,  
ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель, Беларусь

Рассмотрена задача о динамическом деформировании круговой трехслойной пластины со ступенчатым изменением толщины внешних слоев. Модель деформирования пластины построена на основе гипотезы ломаной линии. Подход к рассмотрению поставленной задачи базируется на методе декомпозиции геометрии пластины, в соответствии с чем представлены уравнения движения для каждого участка постоянной толщины, вывод которых выполнен с помощью вариационного принципа Гамильтона. Получено частное аналитическое решение для вынужденных колебаний пластины, возбуждаемых линейным во времени внешним воздействием. Представленное решение основано на суперпозиции квазистатических и динамических составляющих перемещений, возникающих в пластине при колебаниях. Для апробации решения выполнены численные исследования для различных пакетов материалов.

**Ключевые слова:** динамическое деформирование трехслойной пластины; квазистатическое деформирование трехслойной пластины; круговая трехслойная ступенчатая пластина.

**Благодарность.** Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект T22M-072).

## OSCILLATIONS OF A CIRCULAR THREE-LAYER PLATE UNDER EXTERNAL LINEAR IN TIME LOAD

D. V. LEONENKO<sup>a</sup>, M. V. MARKOVA<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University of Transport, 34 Kirava Street, Homiel 246653, Belarus  
Corresponding author: M. V. Markova (1987marinamarkova@gmail.com)

The problem of dynamic deformation of a circular three-layer plate with a step-variable thickness of the outer layers is considered. The plate deformation model is based on the zig-zag theory. The approach to the consideration of the problem relies on the method of decomposition of the plate geometry. According to this, we represent the equations of motion for each section of the plate with a constant thickness. The derivation of these equations predicated on Hamilton's variational principle. A particular analytical solution is obtained for forced plate vibration induced by linear in time external action.

### Образец цитирования:

Леоненко ДВ, Маркова МВ. Колебания круговой трехслойной пластины под действием линейной во времени внешней нагрузки. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;1:49–63.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-49-63>

### For citation:

Leonenko DV, Markova MV. Oscillations of a circular three-layer plate under external linear in time load. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;1: 49–63. Russian.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-49-63>

### Авторы:

**Денис Владимирович Леоненко** – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой строительной механики, геотехники и строительных конструкций факультета промышленного и гражданского строительства. **Марина Владимировна Маркова** – аспирантка кафедры строительной механики, геотехники и строительных конструкций факультета промышленного и гражданского строительства. Научный руководитель – Д. В. Леоненко.

### Authors:

**Denis V. Leonenko**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of structural mechanics, geotechnical engineering and building structures, faculty of industrial and civil engineering.  
[leoden@tut.by](mailto:leoden@tut.by)  
<https://orcid.org/0000-0001-8003-9279>  
**Marina V. Markova**, postgraduate student at the department of structural mechanics, geotechnical engineering and building structures, faculty of industrial and civil engineering.  
[1987marinamarkova@gmail.com](mailto:1987marinamarkova@gmail.com)  
<https://orcid.org/0000-0002-7628-9491>

The represented solution is based on a superposition of quasi-static and dynamic components of the displacement appearing in the plate during vibrations. To test the obtained solution, numerical studies were performed for various materials.

**Keywords:** dynamic deformation of a three-layer plate; quasi-static deformation of a three-layer plate; circular three-layer stepped plate.

**Acknowledgements.** This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project T22M-072).

## Введение

Композитные элементы не являются новым инженерным решением в проектной практике. Однако с каждым годом их применение при проектировании зданий и сооружений, деталей машин и механизмов только растет ввиду явных преимуществ композитных конструкций перед конструкциями, выполненными из одного материала. Сочетание разнородных свойств нескольких материалов позволяет наделять композитный элемент требуемыми физико-механическими характеристиками. Применение такого рода конструкций в проектной практике обуславливает необходимость создания расчетных механико-математических моделей, учитывающих неоднородность их структуры и особенности работы под нагрузкой.

Рассмотренный в данной статье дискретно-структурный подход [1] к моделированию деформирования трехслойной пластины в литературе получил название гипотезы ломаной линии (*zig-zag theory* [2; 3]).

Особенностью исследуемого в работе пакета является ступенчатое изменение толщины внешних слоев. Подобного рода локальные утолщения в наиболее напряженных местах конструкций позволяют улучшить работу элемента под нагрузкой без существенного изменения его собственного веса.

В исследованиях последних лет работа круговых элементов ступенчато-переменной толщины рассматривалась с позиции однослойной конструкции. Так, с опорой на теорию сдвига первого порядка Миндлина в публикациях [4–7] проведен анализ свободных колебаний круговых однослойных пластин с многократным ступенчатым изменением толщины. В статье [8] рассмотрена плавучая конструкция понтонного типа, колебания в которой возбуждаются воздействием ветра и волн. Конструкция моделируется как круговая пластина со свободными краями. Для улучшения использования материалов при сопротивлении напряжениям и деформациям толщина пластины ступенчато изменяется вдоль радиуса. В работе [9] предложен способ изменения формы колебаний круговой пластины со свободным краем с  $n = 2$  на  $n = 0$  путем ступенчатого увеличения толщины от середины к внешнему контуру. Авторы подчеркивают, что возможность приведения колебаний к форме  $n = 0$  имеет весомое значение для измерительных и пусковых устройств, а также больших плавучих конструкций понтонного типа. С опорой на метод декомпозиции и применение дискретной свертки в статье [10] представлен новый подход к анализу свободных колебаний круговой ступенчатой пластины, который не требует условий регуляризации (ограниченности) решения в центральной точке. Точность описанного метода проверена путем сравнения полученных результатов с имеющимися данными. В работе [11] рассмотрена задача вращения круговой пластины переменной толщины, нагруженной по внешнему контуру. В публикации [12] исследовано тепловое нагружение профилированной кольцевой пластины с учетом теплообмена с окружающей средой.

Работа трехслойных конструкций ступенчато-переменной толщины рассмотрена в рамках прямоугольных пластин [13–15] и стержней [16]. В статье [13] изучено напряженно-деформированное состояние прямоугольной изгибаемой пластины со ступенчатым увеличением толщины растянутого лицевого слоя пакета. Решение поставленной задачи построено на гипотезе ломаной линии и вариационном принципе Лагранжа. В публикациях [14; 15] рассмотрена статическая (изгиб и устойчивость) и динамическая (собственные колебания) работа прямоугольной пластины с утолщениями в зоне как растянутого, так и сжатого слоя. В статье [16] проанализирован изгиб трехслойного стержня со ступенчато-переменной толщиной одного из несущих слоев при его частичном опирании на упругое основание.

Статическое деформирование круговой трехслойной пластины со ступенчатым изменением толщины наружных слоев изучено в работах [17–20]. В настоящей статье рассмотрено построение решения для динамического деформирования схожей круговой пластины, представленной трехслойным пакетом, толщина внешних слоев которого ступенчато изменяется вдоль радиуса, а также проанализировано влияние физико-механических характеристик слагающих пакет материалов и геометрических параметров ступенчатого профиля на величину прогибов при вынужденных колебаниях, вызванных постоянной во времени нагрузкой, и квазистатическом деформировании.

## Постановка задачи

В цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  рассмотрим круговую трехслойную пластину со ступенчатым изменением толщины внешних слоев. Относительно толщины срединного слоя 3 внешние слои 1 и 2 имеют небольшую толщину, которая задается с помощью кусочно-постоянной функции Хевисайда  $H_0(r)$  [21]:

$$h_1(r) = h_{1(I)} + (h_{1(II)} - h_{1(I)}) \cdot H_0(r - R_1), \quad h_2(r) = h_{2(I)} + (h_{2(II)} - h_{2(I)}) \cdot H_0(r - R_1),$$

где римскими цифрами I и II нумеруются соответственно центральный и наружный участки, имеющие различную толщину;  $R_1$  – радиус центрального участка. Тогда общий радиус пластины, совпадающий с внешним контуром наружного участка, обозначим как  $R_{II}$  (рис. 1).

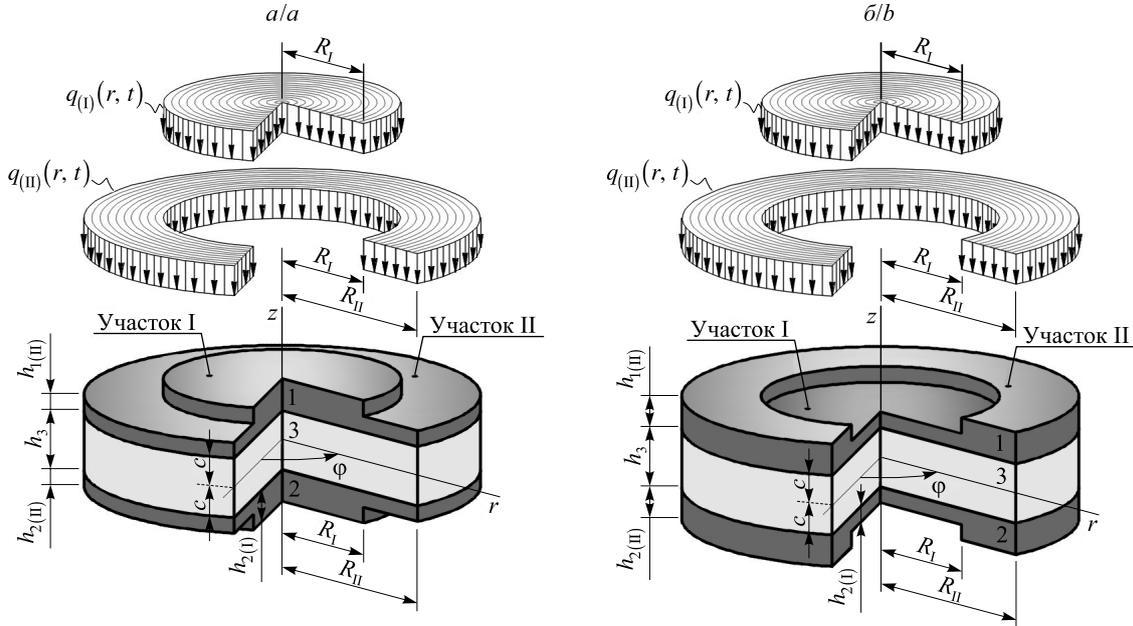


Рис. 1. Круговая трехслойная ступенчатая пластина с уширением (а) и сужением (б) в центральной части

Fig. 1. Circular three-layer stepped plate with widening (a) and narrowing (b) in the center

Срединный заполнитель, обеспечивающий монолитность всей конструкции трехслойного пакета и служащий для перераспределения усилий между внешними несущими слоями, имеет постоянную вдоль радиуса толщину  $h_3 = 2c = \text{const}$ . Координатная плоскость пластины  $r, \phi$  совпадает со срединной плоскостью заполнителя.

Кинематика пакета описывается с помощью гипотезы ломаной линии, согласно которой деформирование тонких внешних слоев подчиняется классическим гипотезам Кирхгофа [22], а деформирование относительно толстого срединного заполнителя – сдвиговой теории Тимошенко [23].

Рассматриваемая пластина находится в покое и не имеет первоначальной деформации. В момент времени  $t_0$  она воспринимает осесимметричное вертикальное внешнее воздействие  $q = q_{(I, II)}(r, t)$ , выводящее ее из состояния равновесия. В результате в пластине возникают прогиб  $w(r, t)$ , относительный сдвиг в заполнителе  $\psi(r, t)$  и радиальное смещение координатной поверхности  $u(r, t)$ .

С использованием метода декомпозиции геометрии в работе [24] была представлена система дифференциальных уравнений движения для каждого участка рассматриваемой пластины, вывод которой основан на вариационном принципе Гамильтона [25]:

$$\Delta \Delta w_{(I, II)} + D_{(I, II)} m_{(I, II)} \Delta \dot{w}_{(I, II)} + D_{(I, II)} M_{1(I, II)} \dot{w}_{(I, II)} = D_{(I, II)} q_{(I, II)},$$

$$u_{(I, II)} = b_{1(I, II)} w_{(I, II)'} + C_{1(I, II)} r + \frac{C_{2(I, II)}}{r} - \frac{m_{1(I, II)}}{r} \int r \dot{w}_{(I, II)} dr, \quad (1)$$

$$\psi_{(I, II)} = b_{2(I, II)} w_{(I, II)'} + C_{3(I, II)} r + \frac{C_{4(I, II)}}{r} - \frac{m_{2(I, II)}}{r} \int r \dot{w}_{(I, II)} dr,$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $D, b_i, m, m_i$  и  $M_1$  – коэффициенты, зависящие от плотности, упругих свойств материалов и толщины слоев пластины;  $C_n$  – константы интегрирования, определяемые из граничных условий;  $w_r$  – угол поворота нормали при изгибе пластины (штрих в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ним координате).

Решение для пластины в целом может быть записано с помощью функции Хевисайда:

$$w = w_{(I)} + (w_{(II)} - w_{(I)}) \cdot H_0(r - R_1),$$

$$u = u_{(I)} + (u_{(II)} - u_{(I)}) \cdot H_0(r - R_1), \quad \Psi = \Psi_{(I)} + (\Psi_{(II)} - \Psi_{(I)}) \cdot H_0(r - R_1).$$

Метод декомпозиции, применяемый при построении решения, предполагает необходимость наложения условий равенства перемещений и внутренних усилий в точке сопряжения участков различной толщины (при  $r = R_1$ ):

$$w_{(I)} = w_{(II)}, \quad u_{(I)} = u_{(II)}, \quad \Psi_{(I)} = \Psi_{(II)}, \quad w_{(I)r} = w_{(II)r},$$

$$T_{r(I)} = T_{r(II)}, \quad M_{r(I)} = M_{r(II)}, \quad H_{r(I)} = H_{r(II)}, \quad Q_{(I)} = Q_{(II)},$$
(2)

где  $T_r$  – продольная сила;  $M_r$  – изгибающий момент;  $H_r$  – момент на границе контакта слоев;  $Q$  – поперечная сила. Выражения для определения внутренних усилий представлены в статье [26].

Условия опирания внешнего контура формируют оставшиеся выражения граничных условий, необходимые для определения констант интегрирования. Так, при жестком защемлении внешнего контура линейные ( $w_{(II)}$ ,  $u_{(II)}$ ) и угловые ( $\Psi_{(II)}$ ,  $w_{(II)r}$ ) перемещения в точке  $r = R_{II}$  будут отсутствовать [27]:

$$w_{(II)} = 0, \quad u_{(II)} = 0, \quad \Psi_{(II)} = 0, \quad w_{(II)r} = 0.$$
(3)

При шарнирном опирании для пакетов с жесткой диафрагмой по внешнему контуру, препятствующей взаимному сдвигу слоев, необходимо потребовать на опоре равенства нулю изгибающего момента, прогиба, относительного сдвига в заполнителе и радиального смещения координатной поверхности:

$$w_{(II)} = 0, \quad u_{(II)} = 0, \quad \Psi_{(II)} = 0, \quad M_{r(II)} = 0.$$
(4)

Для решения системы (1) искомые функции перемещений  $w(r, t)$ ,  $u(r, t)$ ,  $\Psi(r, t)$ , возникающих в пластине при вынужденных колебаниях, представим в виде суперпозиции квазистатических ( $w_s(r)$ ,  $u_s(r)$ ,  $\Psi_s(r)$ ) и динамических ( $w_d(r, t)$ ,  $u_d(r, t)$ ,  $\Psi_d(r, t)$ ) составляющих [28]:

$$w_{(I, II)} = w_{s(I, II)} + w_{d(I, II)}, \quad u_{(I, II)} = u_{s(I, II)} + u_{d(I, II)}, \quad \Psi_{(I, II)} = \Psi_{s(I, II)} + \Psi_{d(I, II)}.$$
(5)

Начальные условия принимаем однородными:

$$w(r, 0) = w_s(r, 0) + w_d(r, 0) = 0, \quad \dot{w}(r, 0) = \dot{w}_s(r, 0) + \dot{w}_d(r, 0) = 0,$$

$$w_d(r, 0) = -w_s(r, 0), \quad \dot{w}_d(r, 0) = -\dot{w}_s(r, 0).$$
(6)

С учетом решения (5) система (1) преобразуется к виду

$$\Delta \Delta w_{d(I, II)} + D_{(I, II)} m_{(I, II)} (\Delta \ddot{w}_{s(I, II)} + \Delta \ddot{w}_{d(I, II)}) +$$

$$+ D_{(I, II)} M_{1(I, II)} (\ddot{w}_{s(I, II)} + \ddot{w}_{d(I, II)}) = D_{(I, II)} q_{(I, II)} - \Delta \Delta w_{s(I, II)},$$

$$u_{s(I, II)} + u_{d(I, II)} = b_{1(I, II)} (w_{s(I, II)r} + w_{d(I, II)r}) +$$

$$+ C_{1(I, II)} r + \frac{C_{2(I, II)}}{r} - \frac{m_{1(I, II)}}{r} \int r (\ddot{w}_{s(I, II)} + \ddot{w}_{d(I, II)}) dr,$$

$$\Psi_{s(I, II)} + \Psi_{d(I, II)} = b_{2(I, II)} (w_{s(I, II)r} + w_{d(I, II)r}) +$$

$$+ C_{3(I, II)} r + \frac{C_{4(I, II)}}{r} - \frac{m_{2(I, II)}}{r} \int r (\ddot{w}_{s(I, II)} + \ddot{w}_{d(I, II)}) dr.$$
(7)

Система, описывающая квазистатическое деформирование пластины, может быть получена из системы (1) путем обнуления инерционных слагаемых:

$$\Delta \Delta w_{s(I, II)} = D_{(I, II)} q_{(I, II)},$$
(8)

$$u_{s(I, II)} = b_{1(I, II)} w_{s(I, II)'} r + C_{s1(I, II)} r + \frac{C_{s2(I, II)}}{r},$$

$$\Psi_{s(I, II)} = b_{2(I, II)} w_{s(I, II)'} r + C_{s3(I, II)} r + \frac{C_{s4(I, II)}}{r}.$$

Решить систему (8) можно посредством четырехкратного интегрирования первого выражения с последующей подстановкой полученного результата в последние два уравнения:

$$w_{s(I, II)} = C_{s5(I, II)} + C_{s6(I, II)} r^2 + C_{s7(I, II)} \ln r +$$

$$+ C_{s8(I, II)} r^2 \ln r + D_{(I, II)} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (r q_{(I, II)}) dr dr dr dr,$$

$$u_{s(I, II)} = C_{s1(I, II)} r + \frac{C_{s2(I, II)}}{r} + 2C_{s6(I, II)} b_{1(I, II)} r + C_{s7(I, II)} \frac{b_{1(I, II)}}{r} +$$

$$+ C_{s8(I, II)} b_{1(I, II)} r (2 \ln r + 1) + \frac{D_{(I, II)} b_{1(I, II)}}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (r q_{(I, II)}) dr dr dr, \quad (9)$$

$$\Psi_{s(I, II)} = C_{s3(I, II)} r + \frac{C_{s4(I, II)}}{r} + 2C_{s6(I, II)} b_{2(I, II)} r + C_{s7(I, II)} \frac{b_{2(I, II)}}{r} +$$

$$+ C_{s8(I, II)} b_{2(I, II)} r (2 \ln r + 1) + \frac{D_{(I, II)} b_{2(I, II)}}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (r q_{(I, II)}) dr dr dr,$$

где  $C_{sn}$  – константы интегрирования квазистатического деформирования, определяемые из граничных условий (2)–(4).

Для линейной во времени внешней нагрузки  $\dot{w}_{s(I, II)} = 0$ , тогда с учетом уравнений (8) система (7) преобразуется к виду

$$\Delta \Delta w_{d(I, II)} + D_{(I, II)} m_{(I, II)} \Delta \ddot{w}_{d(I, II)} + D_{(I, II)} M_{1(I, II)} \ddot{w}_{d(I, II)} = 0,$$

$$u_{d(I, II)} = b_{1(I, II)} w_{d(I, II)'} r + C_{d1(I, II)} r + \frac{C_{d2(I, II)}}{r} - \frac{m_{1(I, II)}}{r} \int r \ddot{w}_{d(I, II)} dr, \quad (10)$$

$$\Psi_{d(I, II)} = b_{2(I, II)} w_{d(I, II)'} r + C_{d3(I, II)} r + \frac{C_{d4(I, II)}}{r} - \frac{m_{2(I, II)}}{r} \int r \ddot{w}_{d(I, II)} dr.$$

Система (10) представляет собой уравнения движения, описывающие собственные колебания пластины. Решение данной системы можно получить с помощью метода Фурье [29], представив функцию прогиба пластины в виде произведения двух функций:

$$w_{d(I, II)}(r, t) = W_{(I, II)}(r) \zeta(t), \quad (11)$$

где  $W_{(I, II)}(r)$  – функция, зависящая только от координаты  $r$ ;  $\zeta(t)$  – функция, зависящая только от времени  $t$ .

После подстановки выражения (11) в первое уравнение системы (10) получаем

$$\Delta \Delta [W_{(I, II)}(r)] - 2\alpha_{(I, II)}^2 \Delta [W_{(I, II)}(r)] - \beta_{(I, II)}^4 [W_{(I, II)}(r)] = 0, \quad \ddot{\zeta}(t) + \omega^2 \zeta(t) = 0,$$

где  $\alpha_{(I, II)}$  и  $\beta_{(I, II)}$  – коэффициенты, зависящие от частоты колебаний пластины  $\omega$ , при этом

$$\alpha_{(I, II)} = \sqrt{0,5\omega^2 D_{(I, II)} m_{(I, II)}}, \quad \beta_{(I, II)} = \sqrt[4]{\omega^2 D_{(I, II)} M_{1(I, II)}}.$$

Частоты собственных колебаний ступенчатой пластины  $\omega$  определяются из трансцендентного уравнения, полученного из граничных условий.

Таким образом, решение для функции  $w_{d(I, II)}$  и остальных динамических составляющих перемещений представляется в виде ряда [30]:

$$\begin{aligned}
 w_{d(I, II)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ C_{d5n(I, II)} J_0(r\gamma_n^+) + C_{d6n(I, II)} K_0(r\gamma_n^+) + C_{d7n(I, II)} J_0(r\gamma_n^-) + \right. \\
 &\quad \left. + C_{d8n(I, II)} Y_0(r\gamma_n^-) \right] (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)), \\
 u_{d(I, II)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ C_{d1n(I, II)} r + \frac{C_{d2n(I, II)}}{r} + C_{d5n(I, II)} I_1(r\gamma_n^+) \right] \left( \gamma_n^+ b_{1(I, II)} + \frac{\omega_n^2 m_{1(I, II)}}{\gamma_n^+} \right) - \\
 &\quad - C_{d6n(I, II)} K_1(r\gamma_n^+) \left( \gamma_n^+ b_{1(I, II)} + \frac{\omega_n^2 m_{1(I, II)}}{\gamma_n^+} \right) - \\
 &\quad - C_{d7n(I, II)} J_1(r\gamma_n^-) \left( \gamma_n^- b_{1(I, II)} - \frac{\omega_n^2 m_{1(I, II)}}{\gamma_n^-} \right) - \\
 &\quad - C_{d8n(I, II)} Y_1(r\gamma_n^-) \left( \gamma_n^- b_{1(I, II)} - \frac{\omega_n^2 m_{1(I, II)}}{\gamma_n^-} \right) \right] (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)), \\
 \psi_{d(I, II)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ C_{d3n(I, II)} r + \frac{C_{d4n(I, II)}}{r} + C_{d5n(I, II)} I_1(r\gamma_n^+) \right] \left( \gamma_n^+ b_{2(I, II)} + \frac{\omega_n^2 m_{2(I, II)}}{\gamma_n^+} \right) - \\
 &\quad - C_{d6n(I, II)} K_1(r\gamma_n^+) \left( \gamma_n^+ b_{2(I, II)} + \frac{\omega_n^2 m_{2(I, II)}}{\gamma_n^+} \right) - C_{d7n(I, II)} J_1(r\gamma_n^-) \left( \gamma_n^- b_{2(I, II)} - \frac{\omega_n^2 m_{2(I, II)}}{\gamma_n^-} \right) - \\
 &\quad - C_{d8n(I, II)} Y_1(r\gamma_n^-) \left( \gamma_n^- b_{2(I, II)} - \frac{\omega_n^2 m_{2(I, II)}}{\gamma_n^-} \right) \right] (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)),
 \end{aligned} \tag{12}$$

где  $\gamma_n^\pm$  – коэффициенты, зависящие от частоты собственных колебаний пластины  $\omega_n$ ;  $J_0(r\gamma_n^-)$  – функция Бесселя нулевого порядка первого рода;  $Y_0(r\gamma_n^-)$  – функция Бесселя нулевого порядка второго рода (функция Неймана);  $I_0(r\gamma_n^+)$  – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка первого рода (функция Инфельда);  $K_0(r\gamma_n^+)$  – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка второго рода (функция Макдональда) [31; 32];  $C_{dn}$  – константы интегрирования, определяемые из граничных условий;  $A_n$  и  $B_n$  – константы, определяемые из начальных условий колебаний пластины (6).

Константы интегрирования  $C_{s2(1)}$ ,  $C_{s4(1)}$ ,  $C_{s7(1)}$ ,  $C_{s8(1)}$ ,  $C_{d2n(1)}$ ,  $C_{d4n(1)}$ ,  $C_{d6n(1)}$ ,  $C_{d8n(1)}$  требуется принять равными нулю исходя из условий регулярности функций перемещений, обусловленных сингулярностью в центральной точке пластины (при  $r = 0$ ):

$$C_{s2(1)} = C_{s4(1)} = C_{s7(1)} = C_{s8(1)} = C_{d2n(1)} = C_{d4n(1)} = C_{d6n(1)} = C_{d8n(1)} = 0. \tag{13}$$

Система уравнений, сформированная из граничных условий (2)–(4), служит для определения констант интегрирования как при квазистатическом, так и при динамическом деформировании.

Временные константы интегрирования  $A_n$  и  $B_n$  могут быть определены из начальных условий (6). Опираясь на свойство ортогональности координатных функций динамических составляющих прогибов  $W_n(r)$ , получим выражения для  $A_n$  и  $B_n$ :

$$\begin{aligned}
 A_n &= \int_0^{R_{II}} r W_n(r) w_d(r, 0) dr = - \int_0^{R_I} r W_{n(I)}(r) w_{s(I)}(r, 0) dr - \int_{R_I}^{R_{II}} r W_{n(II)}(r) w_{s(II)}(r, 0) dr = \\
 &= - \int_0^{R_I} \left( r \left[ C_{d5n(I)} I_0(r \gamma_{n(I)}^+) + C_{d7n(I)} J_0(r \gamma_{n(I)}^-) \right] \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left[ C_{s5(I)} + C_{s6(I)} r^2 + D_{(I)} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (r q_{(I)}(r, 0)) dr dr dr dr \right] \right) dr - \\
 &- \int_{R_I}^{R_{II}} \left( r \left[ C_{d5n(II)} I_0(r \gamma_{n(II)}^+) + C_{d6n(II)} K_0(r \gamma_{n(II)}^+) + C_{d7n(II)} J_0(r \gamma_{n(II)}^-) + C_{d8n(II)} Y_0(r \gamma_{n(II)}^-) \right] \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left[ C_{s5(II)} + C_{s6(II)} r^2 + C_{s7(II)} \ln r + C_{s8(II)} r^2 \ln r + D_{(II)} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (r q_{(II)}(r, 0)) dr dr dr dr \right] \right) dr, \quad (14) \\
 B_n &= \frac{1}{\omega_n} \int_0^{R_{II}} r W_n(r) \dot{w}_d(r, 0) dr = \frac{-1}{\omega_n} \left( \int_0^{R_I} r W_{n(I)}(r) \dot{w}_{s(I)}(r, 0) dr + \int_{R_I}^{R_{II}} r W_{n(II)}(r) \dot{w}_{s(II)}(r, 0) dr \right) = \\
 &= \frac{-1}{\omega_n} \int_0^{R_I} \left( r \left[ C_{d5n(I)} I_0(r \gamma_{n(I)}^+) + C_{d7n(I)} J_0(r \gamma_{n(I)}^-) \right] D_{(I)} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (r \dot{q}_{(I)}(r, 0)) dr dr dr dr \right) dr + \\
 &+ \int_{R_I}^{R_{II}} \left( r \left[ C_{d5n(II)} I_0(r \gamma_{n(II)}^+) + C_{d6n(II)} K_0(r \gamma_{n(II)}^+) + C_{d7n(II)} J_0(r \gamma_{n(II)}^-) + C_{d8n(II)} Y_0(r \gamma_{n(II)}^-) \right] \times \right. \\
 &\quad \left. \times D_{(II)} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (r \dot{q}_{(II)}(r, 0)) dr dr dr dr \right) dr \Big].
 \end{aligned}$$

Таким образом, решение (5) с учетом выражений (9) и (12), а также констант (13) и (14) является решением задачи о вынужденных колебаниях трехслойной ступенчатой пластины.

### Численные исследования

Для апробации полученного решения рассмотрим деформирование следующих пакетов трехслойных ступенчатых пластин: Д16Т – фторопласт-4 – Д16Т, сталь – фторопласт-4 – сталь, сталь – ПС-1 – сталь (Д16Т – дюралюминий, ПС-1 – полистирольный пенопласт). Физико-механические характеристики рассматриваемых материалов [33–35]: Д16Т –  $\rho_{1,2} = 2700 \text{ кг/м}^3$ ,  $K_{1,2} = 0,8 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $G_{1,2} = 0,267 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ; фторопласта-4 –  $\rho_3 = 2150 \text{ кг/м}^3$ ,  $K_3 = 3,45 \cdot 10^7 \text{ Па}$ ,  $G_3 = 9,0 \cdot 10^7 \text{ Па}$ ; стали –  $\rho_{1,2} = 7850 \text{ кг/м}^3$ ,  $K_{1,2} = 1,913 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $G_{1,2} = 0,78 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ; ПС-1 –  $\rho_3 = 60 \text{ кг/м}^3$ ,  $K_3 = 1,0 \cdot 10^7 \text{ Па}$ ,  $G_3 = 1,5 \cdot 10^7 \text{ Па}$  ( $\rho$  – плотность материала,  $K$  – модуль объемной деформации материала,  $G$  – модуль сдвига материала). Радиус внешнего контура рассматриваемых пластин  $R_{II}$  равен 1 м. Значения толщин наружных слоев:  $h_{1(I)} = h_{2(I)} = 0,04 \text{ м}$ ,  $h_{1(II)} = h_{2(II)} = 0,02 \text{ м}$  (для пластин с уширением в центральной части);  $h_{1(I)} = h_{2(I)} = 0,02 \text{ м}$ ,  $h_{1(II)} = h_{2(II)} = 0,04 \text{ м}$  (для пластин с сужением в центральной части). Толщина срединного заполнителя  $h_3$  составляет 0,3 м. На пластину действует постоянная во времени динамическая нагрузка  $q(t) = \text{const}$ . Во всех численных расчетах ограничение длины суммируемых рядов (12) в каждом случае исследовалось отдельно.

На рис. 2–4 представлены графики изменения величины прогиба  $w$  в центральной точке пластины ( $r = 0$ ) с течением времени  $t$  вынужденных колебаний, вызванных равномерно распределенной по всей площади нагрузкой интенсивностью  $q_{(I)} = q_{(II)} = -100 \text{ кПа}$ .

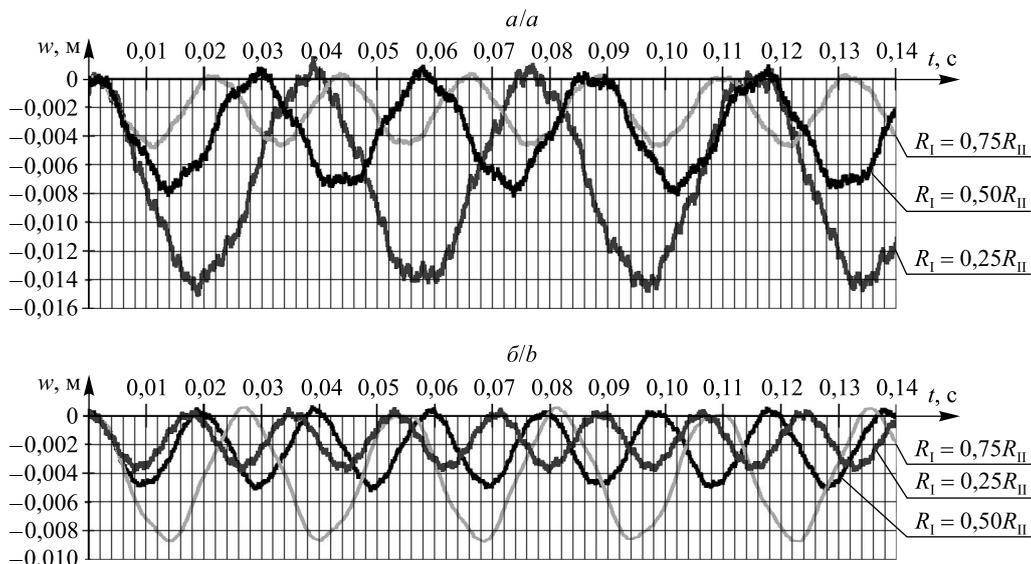


Рис. 2. Изменение величины прогиба в центральной точке пакета Д16Т – фторопласт-4 – Д16Т с уширением (а) и сужением (б) в центральной части  
 Fig. 2. Change of deflection at the central point of the package D16T – PTFE – D16T with widening (a) and narrowing (b) in the center

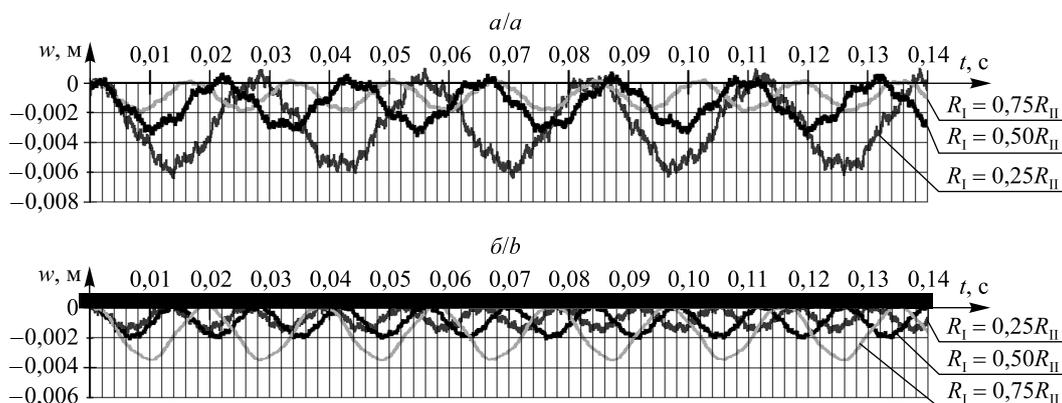


Рис. 3. Изменение величины прогиба в центральной точке пакета сталь – фторопласт-4 – сталь с уширением (а) и сужением (б) в центральной части  
 Fig. 3. Change of deflection at the central point of the package steel – PTFE – steel with widening (a) and narrowing (b) in the center

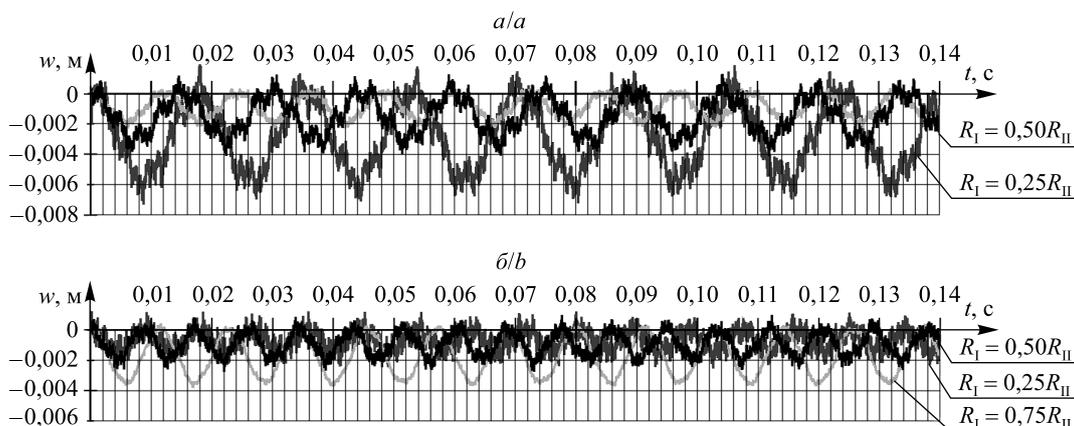


Рис. 4. Изменение величины прогиба в центральной точке пакета сталь – ПС-1 – сталь с уширением (а) и сужением (б) в центральной части  
 Fig. 4. Change of deflection at the central point of the package steel – PS-1 – steel with widening (a) and narrowing (b) in the center

Изменение величины максимального прогиба и периода колебаний обусловлено изменением жесткости элемента при варьировании его геометрических параметров и физико-механических свойств. Из рис. 2–4 видно, что деформативность трехслойных элементов при динамическом нагружении в большей степени зависит от механических характеристик внешних слоев, чем от механических характеристик срединного заполнителя. Так, при увеличении модуля объемной деформации внешних слоев в 2,4 раза прогиб пластин рассматриваемой геометрии в среднем уменьшился в 2,35 раза. При уменьшении модуля объемной деформации срединного заполнителя в 34,5 раза прогиб пластины увеличился в 1,1 раза.

Рассмотрим первый максимальный прогиб пластины, возникающий в процессе колебаний, и проследим за изменением его величины при изменении радиуса центрального участка указанных выше пакетов пластин. На рис. 5 представлены графики изменения прогиба при квазистатическом и динамическом деформировании.

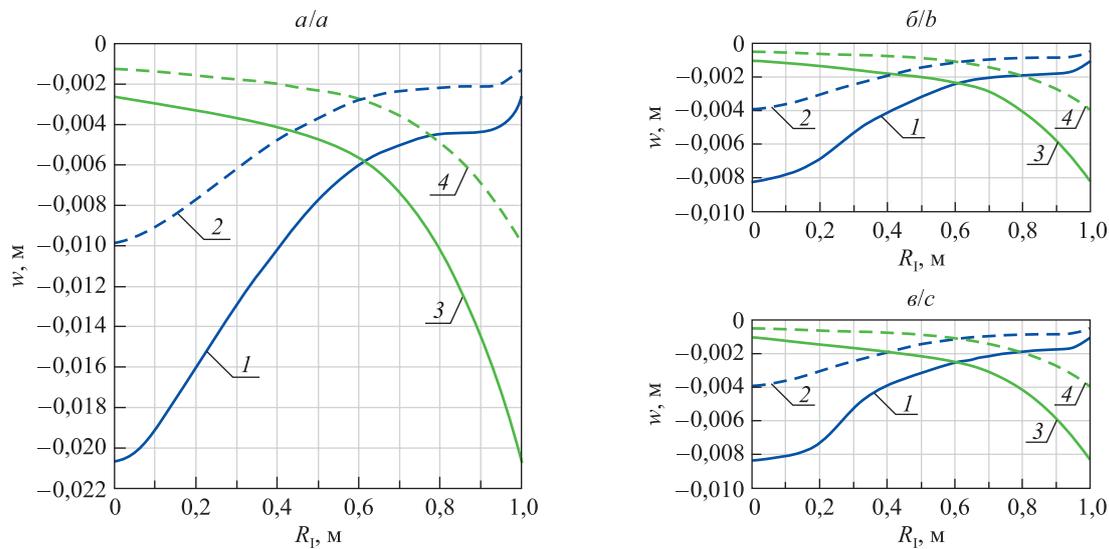


Рис. 5. Изменение величины прогиба в центральной точке пакетов Д16Т – фторопласт-4 – Д16Т (а), сталь – фторопласт-4 – сталь (б), сталь – ПС-1 – сталь (в): 1, 2 – динамическое (в момент первого максимального прогиба) и квазистатическое деформирование пластины с уширением в центральной части соответственно; 3, 4 – динамическое (в момент первого максимального прогиба) и квазистатическое деформирование пластины с сужением в центральной части соответственно

Fig. 5. Change of deflection at the central point of the packages D16T – PTFE – D16T (a), steel – PTFE – steel (b), steel – PS-1 – steel (c): 1, 2 – dynamic (at the moment of the first maximum deflection) and quasi-static deformation of the plate with widening in the center respectively; 3, 4 – dynamic (at the moment of the first maximum deflection) and quasi-static deformation of the plate with narrowing in the center respectively

Из рис. 5 видно, что для рассмотренных пакетов при  $R_1 = 0,615R_{II}$  как при квазистатическом (кривые 2 и 4), так и при динамическом (кривые 1 и 3) деформировании пластины с уширением (кривые 1 и 2) и пластины с сужением (кривые 3 и 4) в центральной части имеют одинаковый прогиб. При этом объем материала, требуемый для изготовления внешних слоев пластины с сужением в центральной части, на 18 % превышает объем материала, требуемый для изготовления внешних слоев пластины с уширением в центральной части. Из этого можно сделать вывод, что при равной деформативности двух видов пластин пластина с уширением в центральной части менее материалоемка.

Равная материалоемкость пластин с уширением и сужением в центральной части достигается при  $R_1 = 0,707R_{II}$ , что видно из рис. 6.

Рассмотрим деформативность ступенчатых пластин под действием равномерно распределенной лишь вдоль одного участка нагрузки (рис. 7–9). Равнодействующая нагрузки, воспринимаемой пластиной, составляет величину  $F = -100$  кН. Для давления, действующего по площади центрального участка,  $q_{(I)} = \frac{F}{\pi R_1^2}$ ;

для давления, действующего по площади наружного участка,  $q_{(II)} = \frac{F}{\pi(R_{II}^2 - R_1^2)}$ .

При нагружении центрального участка кривые прогибов для пластин с уширением (кривые 1) и сужением (кривые 2) пересекаются в точке  $A$  при  $R_I = 0,54R_{II}$  (для пакета Д16Т – фторопласт-4 – Д16Т) (см. рис. 7) и  $R_I = 0,55R_{II}$  (для пакетов сталь – фторопласт-4 – сталь и сталь – ПС-1 – сталь) (см. рис. 8 и 9). В этом случае объем материала, требуемый для изготовления внешних слоев пластины с сужением в центральной части при рассматриваемых геометрических параметрах, на 32 % (для пакета Д16Т – фторопласт-4 – Д16Т) и 30 % (для пакетов сталь – фторопласт-4 – сталь и сталь – ПС-1 – сталь) превышает объем материала, требуемый для изготовления внешних слоев пластины с уширением в центральной части. Таким образом, в случае приложения внешнего воздействия лишь в зоне участка I пластина с уширением в центральной части также является менее материалоемкой при условии равной деформативности.

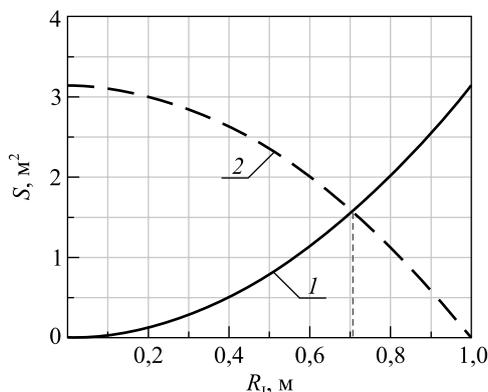


Рис. 6. Зависимость площади участков ступенчатой пластины от радиуса границы перепада толщины внешних несущих слоев:  
 1 – участок I; 2 – участок II

Fig. 6. Dependence of the area of the stepped plate sections on the radius of the thickness difference in the outer bearing layers:  
 1 – section I; 2 – section II

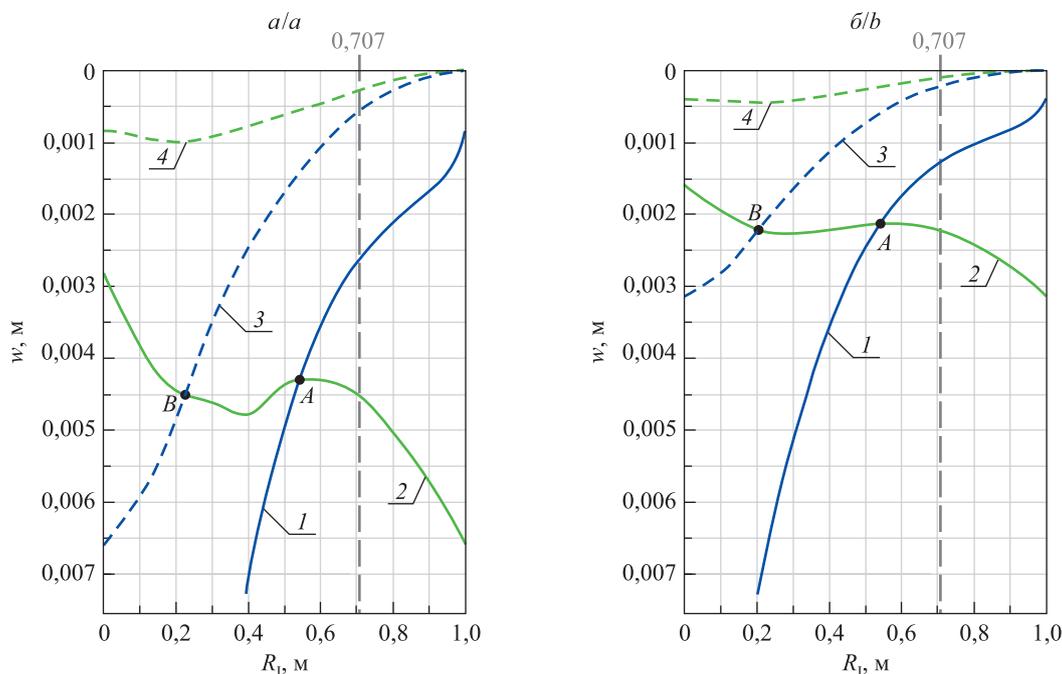


Рис. 7. Изменение прогиба в центральной точке пакета Д16Т – фторопласт-4 – Д16Т при динамическом (а) и квазистатическом (б) деформировании:  
 1, 2 – нагружение участка I в пластине с уширением и сужением в центральной части соответственно;  
 3, 4 – нагружение участка II в пластине с уширением и сужением в центральной части соответственно

Fig. 7. Change of deflection at the central point of the package D16T – PTFE – D16T during dynamic (a) and quasi-static (b) deformation:  
 1, 2 – loading of section I in the plate with widening and narrowing in the center respectively;  
 3, 4 – loading of section II in the plate with widening and narrowing in the center respectively

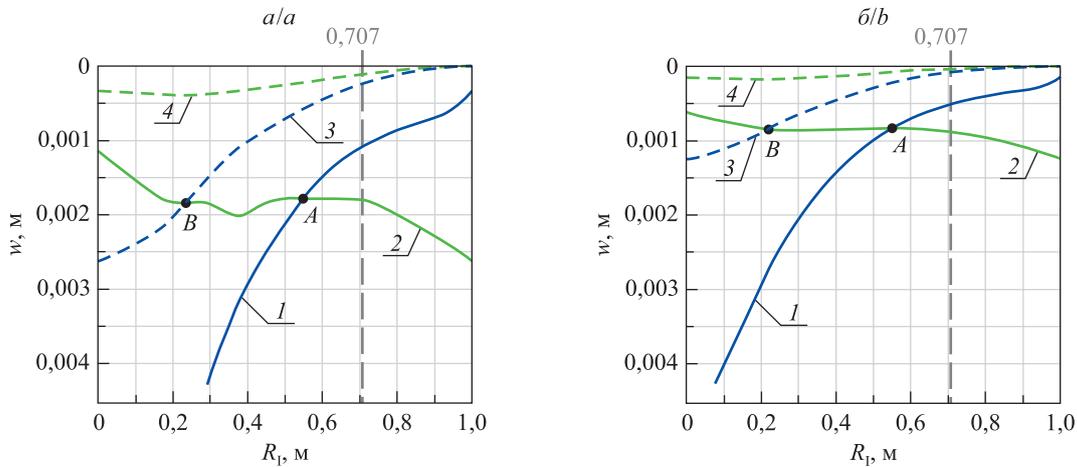


Рис. 8. Изменение прогиба в центральной точке пакета сталь – фторопласт-4 – сталь при динамическом (а) и квазистатическом (б) деформировании: 1, 2 – нагружение участка I в пластине с уширением и сужением в центральной части соответственно; 3, 4 – нагружение участка II в пластине с уширением и сужением в центральной части соответственно

Fig. 8. Change of deflection at the central point of the package steel – PTFE – steel during dynamic (a) and quasi-static (b) deformation: 1, 2 – loading of section I in the plate with widening and narrowing in the center respectively; 3, 4 – loading of section II in the plate with widening and narrowing in the center respectively

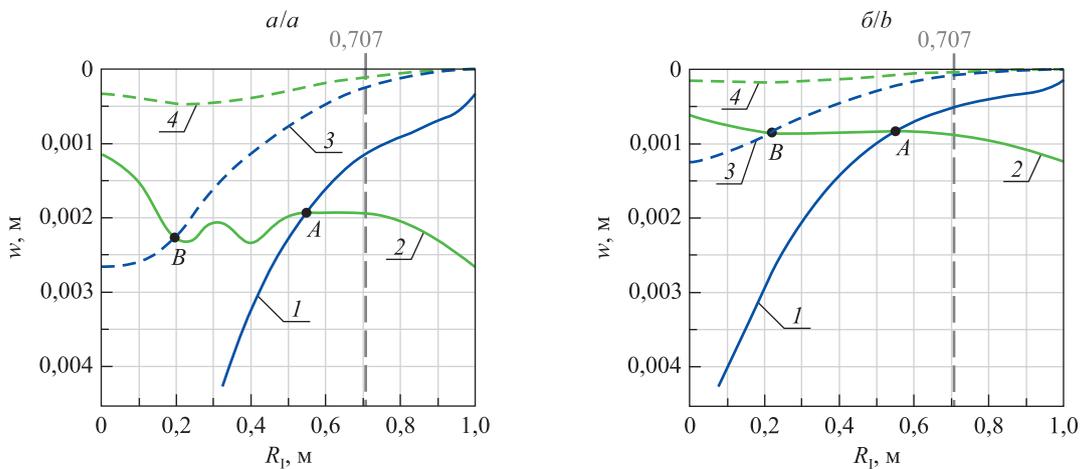


Рис. 9. Изменение прогиба в центральной точке пакета сталь – PS-1 – сталь при динамическом (а) и квазистатическом (б) деформировании: 1, 2 – нагружение участка I в пластине с уширением и сужением в центральной части соответственно; 3, 4 – нагружение участка II в пластине с уширением и сужением в центральной части соответственно

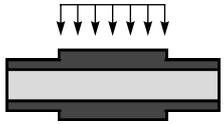
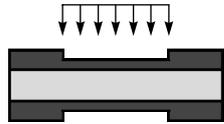
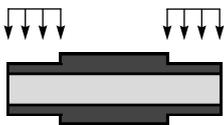
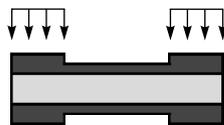
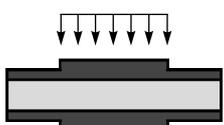
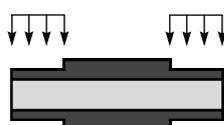
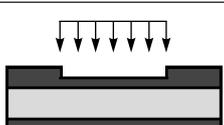
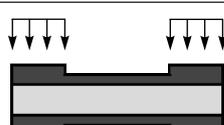
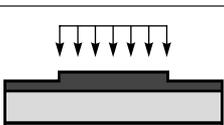
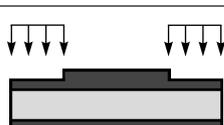
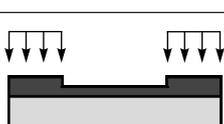
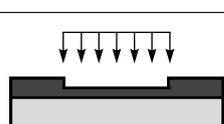
Fig. 9. Change of deflection at the central point of the package steel – PS-1 – steel during dynamic (a) and quasi-static (b) deformation: 1, 2 – loading of section I in the plate with widening and narrowing in the center respectively; 3, 4 – loading of section II in the plate with widening and narrowing in the center respectively

Рассмотрев радиус центрального участка  $R_I = 0,707R_{II}$ , при котором материалоемкость пластин различной формы будет одинакова, видим, что при нагружении участка I (кривые 1 и 2) прогиб, возникающий в пластине с уширением в центральной части, для всех исследованных пакетов составляет 58 % от прогиба, возникающего в пластине с сужением в центральной части.

В случае приложения внешней нагрузки к участкам, имеющим минимальную толщину (наружному участку для пластины с уширением в центральной части (кривые 3) и центральному участку для пластины с сужением в центральной части (кривые 2)), пластины обеих форм получают равный прогиб при радиусе центрального участка от  $R_I = 0,20R_{II}$  до  $R_I = 0,23R_{II}$  (точки B на рис. 7–9). При этом материалоемкость пластины с сужением в центральной части будет выше на 85–88 %.

Результаты исследования по определению приоритетного варианта передачи внешней нагрузки на участки ступенчатых пластин, основанные на сравнении параметров деформативность – материалоемкость, сведены в таблицу.

Оптимальный способ нагружения пластины при сравнении возможных вариантов  
 The optimal way to load the plate when comparing possible options

Сравниваемые пластины	Нагружение с наименьшей деформативностью при равной материалоемкости	Сравниваемые пластины	Нагружение с наименьшей деформативностью при равной материалоемкости
<i>Вариант 1</i>		<i>Вариант 4</i>	
	–		–
	+		+
<i>Вариант 2</i>		<i>Вариант 5</i>	
	+		–
	–		+
<i>Вариант 3</i>		<i>Вариант 6</i>	
	–		+
	+		–

Примечание. Оптимальный способ нагружения для каждого из вариантов отмечен знаком «плюс».

### Заключение

В работе получено аналитическое решение, которое позволяет определить перемещения, возникающие при вынужденных колебаниях круговой трехслойной пластины со ступенчатым изменением толщины внешних несущих слоев. Полученное решение справедливо для пакетов, собранных из любых материалов, которые воспринимают линейное во времени осесимметричное вертикальное внешнее воздействие, имеющее произвольную локализацию на участках пластины. Составной частью представленного решения является решение, позволяющее определить перемещения при квазистатическом деформировании трехслойной ступенчатой пластины, что дает возможность параллельно рассматривать сразу две задачи.

В рамках численных исследований проанализированы пакеты из различных материалов и выявлено, что динамическое внешнее воздействие приводит к увеличению прогиба в среднем в 2 раза по сравнению с прогибом при восприятии квазистатического воздействия такой же интенсивности. Пластины со ступенчатым изменением толщины внешних несущих слоев, имеющие утолщение в центральной части, обладают меньшей материалоемкостью при условии равной деформативности, чем пластины, имеющие утолщение по периферии.

## Библиографические ссылки

1. Григлюк ЭИ, Коган ФА. Современное состояние теории многослойных оболочек. *Прикладная механика*. 1972;8(6):3–17.
2. Carrera E. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*. 2003;56(3): 287–308. DOI: 10.1115/1.1557614.
3. Carrera E. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered, orthotropic plates. *Composite Structures*. 2000;50(2):183–198. DOI: 10.1016/S0263-8223(00)00099-4.
4. Xiang Y, Zhang L. Free vibration analysis of stepped circular Mindlin plates. *Journal of Sound and Vibration*. 2005;280(3–5): 633–655. DOI: 10.1016/j.jsv.2003.12.017.
5. Gupta US, Lal R, Sharma S. Vibration of non-homogeneous circular Mindlin plates with variable thickness. *Journal of Sound and Vibration*. 2007;302(1–2):1–17. DOI: 10.1016/j.jsv.2006.07.005.
6. Gao C, Pang F, Li H, Jia D, Tang Y. Steady and transient vibration analysis of uniform and stepped annular/circular plates based on FSDT. *Acta Mechanica*. 2022;233(3):1061–1082. DOI: 10.1007/s00707-022-03157-y.
7. Hao Q, Chen Z, Zhai W. Free transverse vibration of circular plate of stepped thickness with general boundary conditions by an improved Fourier – Ritz method. *Shock and Vibration*. 2022;1643050. DOI: 10.1155/2022/1643050.
8. Hang LTT, Wang CM, Wu TY. Exact vibration results for stepped circular plates with free edges. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2005;47(8):1224–1248. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2005.04.002.
9. Duan WH, Wang CM, Wang CY. Modification of fundamental vibration modes of circular plates with free edges. *Journal of Sound and Vibration*. 2008;317(3–5):709–715. DOI: 10.1016/j.jsv.2008.03.065.
10. Duan G, Wang X, Jin C. Free vibration analysis of circular thin plates with stepped thickness by the DSC element method. *Thin-Walled Structures*. 2014;85:25–33. DOI: 10.1016/j.tws.2014.07.010.
11. Королевич ВВ. Поле напряжений вращающегося анизотропного диска переменной толщины, нагруженного сосредоточенными силами по внешнему контуру. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2019;2:40–51. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-2-40-51.
12. Королевич ВВ, Медведев ДГ. Влияние протяженности источников тепла на внешней границе на распределение температуры в профилированных полярно-ортотропных кольцевых пластинах с учетом теплообмена с окружающей средой. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2020;3:86–91. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-3-86-91.
13. Старовойтов ЭИ, Тарлаковский ДВ. Деформирование трехслойной ортотропной пластины ступенчато-переменной толщины. *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. 2014;2:38–43.
14. Nguyen CH, Butukuri RR, Chandrashekhara K, Birman V. Dynamics and buckling of sandwich panels with stepped facings. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2011;11(4):697–716. DOI: 10.1142/S0219455411004300.
15. Nguyen CH, Chandrashekhara K, Birman V. Enhanced static response of sandwich panels with honeycomb cores through the use of stepped facings. *Journal of Sandwich Structures & Materials*. 2011;13(2):237–260. DOI: 10.1177/1099636210369615.
16. Старовойтов ЭИ, Поддубный АА. Изгиб трехслойного стержня со ступенчато-переменной границей, частично опертого на упругое основание. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2011;1:51–55.
17. Леоненко ДВ. Поперечный изгиб круговой сэндвич-пластины ступенчатой толщины. *Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины*. 2020;6:151–155.
18. Леоненко ДВ. Локальное нагружение ступенчатой круговой сэндвич-пластины. В: Шимановский АО, редактор. *Механика. Исследования и инновации. Выпуск 14 = Mechanics. Researches and Innovations. Volume 14*. Гомель: [б. и.]; 2021. с. 126–130.
19. Леоненко ДВ. Упругий изгиб круговой трехслойной пластины ступенчато-переменной толщины (на англ.). *Механика машин, механизмов и материалов*. 2021;1:25–29. DOI: 10.46864/1995-0470-2020-1-54-25-29.
20. Парфенова ВС. Деформирование круглой упругой трехслойной пластины со ступенчато-переменной границей. В: Шимановский АО, редактор. *Механика. Исследования и инновации. Выпуск 10 = Mechanics. Researches and Innovations. Volume 10*. Гомель: [б. и.]; 2017. с. 157–163.
21. Зорич ВА. *Математический анализ. Часть 1*. 6-е издание. Москва: Издательство МЦНМО; 2012. XVIII, 702 с.
22. Bauchau OA, Craig JI. *Structural analysis. With applications to aerospace structures*. Dordrecht: Springer; 2009. Chapter 16, Kirchhoff plate theory; p. 819–914 (Gladwell GML, editor. *Solid mechanics and its applications*; volume 163). DOI: [https://doi.org/10.1007/978-90-481-2516-6\\_16](https://doi.org/10.1007/978-90-481-2516-6_16).
23. Timoshenko SP. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Series 6*. 1921;41(245):744–746. DOI: 10.1080/14786442108636264.
24. Леоненко ДВ, Маркова МВ. Колебания круговой трехслойной ступенчатой пластины при ударном периодическом воздействии. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2022;3:68–76. DOI: 10.46864/1995-0470-2022-3-60-68-76.
25. Новацкий В. *Теория упругости*. Победра БЕ, переводчик. Москва: Мир; 1975. 872 с.
26. Маркова МВ, Леоненко ДВ. Постановка начально-краевой задачи об осесимметричных колебаниях круговой трехслойной пластины переменной толщины. В: Василевич ЮВ, Чигарев ВА, Микулик ТН, Савицкая АВ, редакторы. *Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 36*. Минск: БНТУ; 2022. с. 3–10.
27. Старовойтов ЭИ, Нестерович АВ. Неосесимметричное нагружение упругопластической трехслойной пластины в своей плоскости. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2022;2:57–69. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-2-57-69.
28. Тонг КН. *Теория механических колебаний*. Лужин ОВ, переводчик; Сеницын АП, редактор. Москва: Машгиз; 1963. 351 с.
29. Араманович ИГ, Левин ВИ. *Уравнения математической физики*. 2-е издание. Москва: Наука; 1969. 288 с. (Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов вузов).
30. Власов ВЗ, Леонтьев НН. *Балки, плиты и оболочки на упругом основании*. Москва: Физматгиз; 1960. 491 с.
31. Бейтмен Г, Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Том 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*. Виленкин НЯ, переводчик. 2-е издание. Москва: Наука; 1974. 296 с. (Справочная математическая библиотека).

32. Ватсон ГН. *Теория бесселевых функций. Часть 1*. Берман ВС, переводчик. Москва: Издательство иностранной литературы; 1949. 799 с.
33. Плескачевский ЮМ, Старовойтов ЭИ, Леоненко ДВ. *Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием*. Москва: Физматлит; 2011. 560 с.
34. Министерство архитектуры и строительства Республики Беларусь. *СП 5.04.01-2021. Стальные конструкции*. Минск: [б. и.]; 2021. 147 с.
35. Иванов АМ, Алгазинов КЯ, Мартинец ДВ, Мартемьянов ВИ. *Строительные конструкции с применением пластмасс. Примеры проектирования и расчета*. Иванов АМ, редактор. Москва: Высшая школа; 1968. 220 с.

## References

1. Grigolyuk EI, Kogan FA. [The current state of the theory of multilayer shells]. *Prikladnaya mekhanika*. 1972;8(6):3–17. Russian.
2. Carrera E. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*. 2003;56(3):287–308. DOI: 10.1115/1.1557614.
3. Carrera E. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered, orthotropic plates. *Composite Structures*. 2000;50(2):183–198. DOI: 10.1016/S0263-8223(00)00099-4.
4. Xiang Y, Zhang L. Free vibration analysis of stepped circular Mindlin plates. *Journal of Sound and Vibration*. 2005;280(3–5):633–655. DOI: 10.1016/j.jsv.2003.12.017.
5. Gupta US, Lal R, Sharma S. Vibration of non-homogeneous circular Mindlin plates with variable thickness. *Journal of Sound and Vibration*. 2007;302(1–2):1–17. DOI: 10.1016/j.jsv.2006.07.005.
6. Gao C, Pang F, Li H, Jia D, Tang Y. Steady and transient vibration analysis of uniform and stepped annular/circular plates based on FSDT. *Acta Mechanica*. 2022;233(3):1061–1082. DOI: 10.1007/s00707-022-03157-y.
7. Hao Q, Chen Z, Zhai W. Free transverse vibration of circular plate of stepped thickness with general boundary conditions by an improved Fourier – Ritz method. *Shock and Vibration*. 2022;1643050. DOI: 10.1155/2022/1643050.
8. Hang LTT, Wang CM, Wu TY. Exact vibration results for stepped circular plates with free edges. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2005;47(8):1224–1248. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2005.04.002.
9. Duan WH, Wang CM, Wang CY. Modification of fundamental vibration modes of circular plates with free edges. *Journal of Sound and Vibration*. 2008;317(3–5):709–715. DOI: 10.1016/j.jsv.2008.03.065.
10. Duan G, Wang X, Jin C. Free vibration analysis of circular thin plates with stepped thickness by the DSC element method. *Thin-Walled Structures*. 2014;85:25–33. DOI: 10.1016/j.tws.2014.07.010.
11. Karalevich UV. The field of tensions of a rotating anisotropic disc of a variable thickness loaded with undistracted forces on the outer contour. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;2:40–51. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-2-40-51.
12. Karalevich UV, Medvedev DG. The influence of the length of heat sources on the external border on the temperature distribution in profiled polar-orthotropic ring plates taking into account their heat exchange with the external environment. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2020;3:86–91. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-3-86-91.
13. Starovoitov EI, Tarlakovsky DV. Stress-strain condition of a three-layer orthotropic plate with the strengthening onlay. *Fundamental and Applied Problems of Engineering and Technology*. 2014;2:38–43. Russian.
14. Nguyen CH, Butukuri RR, Chandrashekhara K, Birman V. Dynamics and buckling of sandwich panels with stepped facings. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2011;11(4):697–716. DOI: 10.1142/S0219455411004300.
15. Nguyen CH, Chandrashekhara K, Birman V. Enhanced static response of sandwich panels with honeycomb cores through the use of stepped facings. *Journal of Sandwich Structures & Materials*. 2011;13(2):237–260. DOI: 10.1177/1099636210369615.
16. Starovoitov EI, Poddubny AA. The bending of three-layer beam with variable border laying on the elastic basis. *Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials*. 2011;1:51–55. Russian.
17. Leonenko DV. Transverse bending of a circular sandwich plate of stepped thickness. *Proceedings of Francisk Scorina Gomel State University*. 2020;6:151–155. Russian.
18. Leonenko DV. Local loading of a stepped circular sandwich plate. In: Shimanovskii AO, editor. *Mechanics. Researches and Innovations. Volume 14*. Homiel: [s. n.]; 2021. p. 126–130. Russian.
19. Leonenko DV. Elastic bending of a three-layer circular plate with step-variable thickness. *Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials*. 2021;1:25–29. Russian. DOI: 10.46864/1995-0470-2020-1-54-25-29.
20. Parfenava VS. The deformation of the elastic three-layered plate with a step-varied border. In: Shimanovskii AO, editor. *Mechanics. Researches and Innovations. Volume 10*. Homiel: [s. n.]; 2017. p. 157–163. Russian.
21. Zorich VA. *Matematicheskii analiz. Chast' 1* [Mathematical analysis. Part 1]. 6<sup>th</sup> edition. Moscow: Izdatel'stvo MTsNMO; 2012. XVIII, 702 p. Russian.
22. Bauchau OA, Craig JL. *Structural analysis. With applications to aerospace structures*. Dordrecht: Springer; 2009. Chapter 16, Kirchhoff plate theory; p. 819–914 (Gladwell GML, editor. Solid mechanics and its applications; volume 163). DOI: [https://doi.org/10.1007/978-90-481-2516-6\\_16](https://doi.org/10.1007/978-90-481-2516-6_16).
23. Timoshenko SP. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Series 6*. 1921;41(245):744–746. DOI: 10.1080/14786442108636264.
24. Leonenko DV, Markova MV. Vibrations of a three-layer circular step plate under periodic impact. *Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials*. 2022;3:68–76. Russian. DOI: 10.46864/1995-0470-2022-3-60-68-76.
25. Nowacki W. *Teoria sprężystości*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe; 1970. 770 s.  
Russian edition: Nowacki W. *Teoriya uprugosti*. Pobedrya BE, translator. Moscow: Mir; 1975. 872 p.
26. Markova MV, Leonenko DV. [Definition of the initial-boundary value problem for axisymmetric vibrations of a circular three-layer plate with variable thickness]. In: Vasilevich YuV, Chigarev VA, Mikulik TN, Savitskaya AV, editors. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika. Vypusk 36* [Theoretical and applied mechanics. Issue 36]. Minsk: Belarusian National Technical University; 2022. p. 3–10. Russian.

27. Starovoitov EI, Nesterovich AV. The non-axisymmetric loading of an elastoplastic three-layer plate in its plane. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2022;2:57–69. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-2-57-69.
28. Tong KN. *Theory of mechanical vibration*. New York: Wiley; 1960. XII, 348 p.  
Russian edition: Tong KN. *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy*. Luzhin OV, translator; Sinitsyn AP, editor. Moscow: Mashgiz; 1963. 351 p.
29. Aramanovich IG, Levin VI. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. 2<sup>nd</sup> edition. Moscow: Nauka; 1969. 288 p. (Izbrannye glavy vysshei matematiki dlya inzhenerov i studentov vtuzov). Russian.
30. Vlasov VZ, Leont'ev NN. *Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii* [Beams, plates and shells on an elastic foundation]. Moscow: Fizmatgiz; 1960. 491 p. Russian.
31. Bateman H, Erdélyi A. *Higher transcendental functions. Volume 2*. New York: McGraw-Hill Book Company; 1953. XVI, 396 p.  
Russian edition: Bateman H, Erdélyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii. Tom 2. Funktsii Besselya, funktsii parabolicheskogo tsilindra, ortogonal'nye mnogochleny*. Vilenkin NYa, translator. 2<sup>nd</sup> edition. Moscow: Nauka; 1974. 296 p. (Spravochnaya matematicheskaya biblioteka).
32. Watson GN. *A treatise on the theory of Bessel functions*. 2<sup>nd</sup> edition. Cambridge: Cambridge University Press; 1944. VIII, 804 p.  
Russian edition: Watson GN. *Teoriya besselevykh funktsii. Chast' 1*. Berman VS, translator. Moscow: Izdatel'stvo inostranoi literatury; 1949. 799 p.
33. Pleskachevskii YuM, Starovoitov EI, Leonenko DV. *Mekhanika trekhsloinykh sterzhnei i plastin, svyazannykh s uprugim osnovaniem* [Mechanics of three-layer bars and plates connected to an elastic foundation]. Moscow: Fizmatlit; 2011. 560 p. Russian.
34. Ministry of Architecture and Construction of the Republic of Belarus. *SP 5.04.01-2021. Stal'nye konstruksii* [CR 5.04.01-2021. Steel construction]. Minsk: [s. n.]; 2021. 147 p. Russian.
35. Ivanov AM, Algazinov KYa, Martinets DV, Martem'yanov VI. *Stroitel'nye konstruksii s primeneniem plastmass. Primery proektirovaniya i rascheta* [Building structures using plastics. Design and calculation examples]. Ivanov AM, editor. Moscow: Vysshaya shkola; 1968. 220 p. Russian.

Получена 31.10.2022 / исправлена 22.02.2023 / принята 22.02.2023.  
Received 31.10.2022 / revised 22.02.2023 / accepted 22.02.2023.

УДК 519.62

### СТАБИЛИЗИРОВАННЫЕ ЯВНЫЕ МЕТОДЫ ТИПА АДАМСА ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ С ДЕМПФИРОВАНИЕМ

А. В. МОЙСА<sup>1)</sup>, Б. В. ФАЛЕЙЧИК<sup>1)</sup>, В. И. РЕПНИКОВ<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Продолжается исследование явных методов типа Адамса с расширенным интервалом устойчивости, впервые представленных в предыдущей статье авторов в издании «Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика» (2021, № 2). Такие методы требуют только одного вычисления  $f$  на каждом шаге, но при этом имеют гораздо более длинные интервалы устойчивости, чем классические аналоги. Целью работы является построение демпфированных модификаций методов с расширенным интервалом устойчивости второго порядка и выше, а также тестирование их пригодности для решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для расширения области устойчивости вблизи действительной оси предлагается общая процедура оптимизации, основанная на поиске по сетке с последовательным увеличением демпфирующего параметра. Строятся ряд методов второго, третьего и четвертого порядков, описывается реализация адаптивного выбора шага интегрирования и приводятся результаты сравнительных численных экспериментов.

**Ключевые слова:** жесткие системы; линейные многошаговые методы; методы типа Адамса; явные методы.

---

#### Образец цитирования:

Мойса АВ, Фалейчик БВ, Репников ВИ. Стабилизированные явные методы типа Адамса высоких порядков с демпфированием. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;1:64–75 (на англ.). <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-64-75>

#### For citation:

Moisa AV, Faleichik BV, Repnikov VI. Higher order stabilised explicit Adams-type methods with damping. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;1:64–75. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-64-75>

---

#### Авторы:

**Андрей Владимирович Мойса** – аспирант кафедры вычислительной математики факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – Б. В. Фалейчик.  
**Борис Викторович Фалейчик** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры вычислительной математики факультета прикладной математики и информатики.  
**Василий Иванович Репников** – кандидат физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой вычислительной математики факультета прикладной математики и информатики.

#### Authors:

**Andrew V. Moisa**, postgraduate student at the department of computational mathematics, faculty of applied mathematics and computer science. [moysa@bsu.by](mailto:moysa@bsu.by)  
**Boris V. Faleichik**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of computational mathematics, faculty of applied mathematics and computer science. [faleichik@bsu.by](mailto:faleichik@bsu.by)  
**Vasily I. Repnikov**, PhD (physics and mathematics), docent; head of the department of computational mathematics, faculty of applied mathematics and computer science. [repnikov@bsu.by](mailto:repnikov@bsu.by)

## HIGHER ORDER STABILISED EXPLICIT ADAMS-TYPE METHODS WITH DAMPING

A. V. MOISA<sup>a</sup>, B. V. FALEICHIK<sup>a</sup>, V. I. REPNIKOV<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: A. V. Moisa (moysa@bsu.by)

In this paper we continue the study of explicit Adams-type methods with an extended stability interval represented for the first time in the previous article of the authors in «Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics» (2021, No. 2). Such methods require only one calculation of  $f$  at each step, but at the same time, they have much longer stability intervals than their classical counterparts. The aim of this work is to construct damped modifications of the methods with an extended stability interval of second order and higher and to test their ability to solve stiff systems of ordinary differential equations. In order to extend the stability regions along the real axis, we propose a general optimisation procedure based on grid search with a progressive increase in the damping parameter. We construct several methods of second, third and fourth orders, describe the realisation of the adaptive choice of the integration step, and represent the results of the comparative numerical experiments.

**Keywords:** stiff systems; linear multistep methods; Adams-type methods; explicit methods.

### Introduction

Let us consider a system of ordinary differential equations

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0, y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Methods of the form

$$y_{m+k} = y_{m+k-1} + \tau(\beta_0 f_m + \dots + \beta_{k-1} f_{m+k-1}) \quad (2)$$

with an increased length of the stability interval were considered in work [1]. Let  $p$  be the order of the method (2). The root locus curves [2, p. 241] of these methods have the form

$$\mathcal{C} = \left\{ \mu_\beta(e^{i\varphi}) \mid \varphi \in [0, 2\pi) \right\}, \mu_\beta(\zeta) = \frac{\rho(\zeta)}{\sigma(\zeta)} = \frac{\zeta^k - \zeta^{k-1}}{\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \zeta^j}. \quad (3)$$

These curves for a sufficiently large  $k$  touch the real axis at several points (fig. 1). Damping of the method for the numerical solution of the initial value problem (1) [2, p. 32–33] is a qualitative modification of the method in order to increase the distance between the boundary of the stability region and the real axis (see also [3; 4]). This is necessary for the stability of the method in the case of slight deviations of the eigenvalues of the Jacobian matrix from the real axis. When constructing a damped method, we need to introduce a minimal change to the stability interval length while keeping an acceptable distance of the root locus curve from the real axis.

The paper is organised as follows. In section «Damped methods construction» we describe the approach which was used to construct the damped stabilised Adams-type methods of higher orders. The implementation details and the results of numerical experiments are presented in section «Implementation».

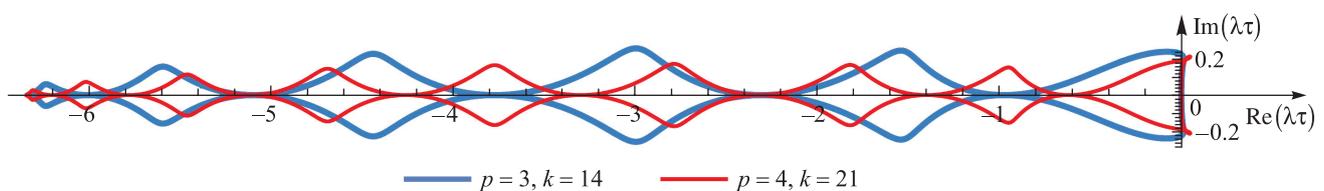


Fig. 1. Root locus curves (3) of the methods with an extended stability interval

### Damped methods construction

**Problem statement.** The optimisation problem for the unknown coefficients of the damped method can be stated as

$$\beta^* = \arg \min_{\beta \in \mathcal{F} \cap \mathcal{P}_p} \mu_\beta(-1),$$

$$\mathcal{F} = \left\{ \beta \in \mathbb{R}^k \mid \operatorname{Im} \mu_\beta(e^{i\varphi}) \geq \varepsilon \quad \forall \varphi \in [\gamma, \pi - \gamma] \right\},$$

$$\mathcal{P}_p = \left\{ \beta \in \mathbb{R}^k \mid \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j = 1, \sum_{j=0}^{k-1} (1-k+j)^{q-1} \beta_j = \frac{1}{q}, q = \overline{2, p} \right\},$$
(4)

where  $\varepsilon$  is a parameter which determines a shift from the real axis, and  $\gamma$  is a small constant which eliminates inequalities in the conditions where  $\sin \varphi$  is small. However, it is not possible to solve it in this form for a sufficiently large  $k$ , so let's try to get a simpler problem.

It was shown in work [1] that the imaginary part of root locus curve (3) of the method (2) has the form

$$\operatorname{Im} \mu_\beta(e^{i\varphi}) = Q(\varphi) \sin \varphi, \quad Q(\varphi) = \frac{\sum_{j=0}^{k-1} a_j \cos j\varphi}{\sum_{j=0}^{k-1} \delta_j \cos j\varphi},$$

where

$$a_{k-1} = 2\beta_0, \quad a_{k-j-1} = 2\beta_j - a_{k-j}, \quad a_0 = \beta_{k-1} - \frac{a_1}{2}, \quad j = \overline{1, k-2},$$

$$\delta_0 = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^2, \quad \delta_j = 2 \sum_{l=0}^j \beta_l \beta_{j+1}, \quad j = \overline{1, k-1}.$$
(5)

A way of damping of the first order methods was proposed in work [1]. It is based on the representation of  $\hat{Q}(\varphi)$  of the damped method as

$$\hat{Q}(\varphi) = \frac{\sum_{j=0}^{k-1} \hat{a}_j \cos j\varphi}{\sum_{j=0}^{k-1} \hat{\delta}_j \cos j\varphi}, \quad \hat{a}_j = C(a_j + \varepsilon \delta_j),$$

where  $C$  is a scaling constant to be determined from only one order condition. The coefficients  $\hat{\beta}_j$  and  $\hat{\delta}_j$  are related to  $\hat{a}_j$  in the same way as  $\beta_j$  and  $\delta_j$  relate to  $a_j$  in formula (5). Thus,  $\hat{\beta}_j$  can be found from  $\hat{a}_j$  as

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\hat{a}_{k-1}}{2}, \quad \hat{\beta}_j = \frac{\hat{a}_{k-j-1} + \hat{a}_{k-j}}{2}, \quad \hat{\beta}_{k-1} = \hat{a}_0 + \frac{\hat{a}_1}{2}, \quad j = \overline{1, k-2}.$$
(6)

This approach is not applicable in the case when there are more than one order condition ( $p > 1$ ), therefore to construct a higher order damped method we put

$$\hat{a}_j = C(a_j + \varepsilon \delta_j + v_j),$$
(7)

where  $v_j$  are constants,  $p-1$  of which are determined from the order conditions, and the rest can be set in such a way that the stability interval of the obtained method is the largest possible, but at the same time the imaginary part of the root locus curve is greater than  $\varepsilon$  on the segment  $[\gamma, \pi - \gamma]$ . Let's write the corresponding optimisation problem as

$$C, v = \arg \min_{\substack{(C, v) \in \mathcal{F}, \\ \beta \in \mathcal{P}_p}} \mu_\beta(-1),$$

$$\mathcal{F} = \left\{ C \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^k \mid \hat{Q}(\varphi) \sin \varphi \geq \varepsilon \quad \forall \varphi \in [\gamma, \pi - \gamma] \right\}.$$
(8)

Problem (8) is much easier to handle than problem (4) because, firstly, the functions from the admissible set directly depend on the sought coefficients, and, secondly, it turns out that to obtain an acceptable result, it is enough to immediately fix  $v_q = v_{q+1} = \dots = v_k = 0$ ,  $p-1 \leq q \leq k$ , thus reducing the dimension of the problem. We chose  $\varepsilon = 0.05$ ,  $\gamma = 0.15$  in our implementation.

**The damped methods construction algorithm.** The algorithm below is based on a combination of a brute-force grid search with a successive increase of  $\varepsilon$ .

The required input values are:

- the coefficients  $\{\beta_j\}$  of an original stabilised Adams-type method constructed in work [1];
- the search grid step  $h$ , the empirically defined range of values is  $h \in [10^{-4}, 10^{-3}]$ ;
- the required root locus curve shift from the real axis  $\varepsilon > 0$ .

The output of the algorithm is the scalar variable  $sc$  and the vector variable  $nu$  which store the computed values of  $C$  and  $\mathbf{v} = \{v_j\}$  respectively. The sought coefficients of the damped method  $\{\hat{\beta}_j\}$  are then derived from  $C$  and  $\mathbf{v}$  using formulas (7) and (6).

**Algorithm:** damping of the higher order stabilised explicit Adams-type method.

**Require:**  $\beta_j, j = \overline{0, k-1}, h > 0, \varepsilon > 0$ .

```

1: Calculate  $a_j, \delta_j, j = \overline{0, k-1}$ , from  $\beta_j$  by (5)
2:  $q \leftarrow \min\{2 + p, k - p\}$ 
3:  $o \leftarrow \{o_j = 0, j = \overline{0, q-p}\}$ 
4:  $nu \leftarrow \{nu_j = 0, j = \overline{0, k-1}\}$ 
5:  $eps \leftarrow \frac{h}{5}$ 
6: while  $eps \leq \varepsilon$  do
7:    $\ell \leftarrow 0$ 
8:    $N \leftarrow [o_0 - h, o_0, o_0 + h] \times [o_1 - h, o_1, o_1 + h] \times \dots \times [o_{q-p} - h, o_{q-p}, o_{q-p} + h]$ 
9:   for every unique node  $n$  in  $N$  do
10:     $\{v_0, \dots, v_{q-p}\} \leftarrow \{n_0, \dots, n_{q-p}\}$ 
11:     $\{v_q, \dots, v_{k-1}\} \leftarrow \{0, \dots, 0\}$ 
12:    Express  $\hat{a}_j \leftarrow C(a_j + eps \cdot \delta_j + v_j)$ , see (7)
13:    Express  $\hat{\beta}_j$  from  $\hat{a}_j$  as in (6)
14:    Find  $C, v_j, j = \overline{q-p+1, q-1}$  from the order conditions  $\mathcal{P}_p$  (4)
15:    Calculate values of  $\hat{\beta}_j$ 
16:    if  $\text{Im}\mu_{\hat{\beta}}(e^{i\varphi}) \geq eps \ \forall \varphi \in [\gamma, \pi - \gamma]$ 
17:      and  $\text{Im}\mu_{\hat{\beta}}(e^{i\varphi}) \geq 0 \ \forall \varphi \in [\pi - \gamma, \pi]$ 
18:      and  $|\mu_{\hat{\beta}}(e^{i\pi})| > \ell$  then
19:         $sc \leftarrow C$ 
20:         $nu \leftarrow \mathbf{v}$ 
21:         $\ell \leftarrow |\mu_{\hat{\beta}}(e^{i\pi})|$ 
22:      else
23:        continue
24:      end if
25:    end for
26:    if  $\ell > 0$  then
27:       $o \leftarrow nu$ 
28:      if  $eps = \varepsilon$  then
29:        break
30:      else
31:         $eps \leftarrow \min\left\{eps + \frac{h}{5}, \varepsilon\right\}$ 
32:      end if
33:    else
34:       $q \leftarrow q + 1$ 
35:      Append  $nu_{q-p+1}$  to vector  $o$ 
36:    end if
37: end while
38: return  $sc, nu$ 

```

The non-linear system of equations which needs to be solved in row 14 is transformed to a linear one by replacing  $C \cdot v_j$  with  $x_{j-q+p}$ .

The inequalities in rows 16 and 17 can be checked for every local minimum of function  $\text{Im} \mu_{\hat{\beta}}(e^{i\varphi})$ , taking into account the specific shape of this function (fig. 2).

It is necessary to manually check the shape of the root locus curve of the damped method, because sometimes the algorithm can produce an unsatisfactory result (although it formally satisfies all the requirements). In order for the root locus curve to have a more regular shape, it is necessary to increase the parameter  $q$  in row 2 and repeat the algorithm.

Examples of the root locus curves of the damped method for  $p = 4, k = 21$  and different values of  $\varepsilon$  are presented in fig. 3, graphs of  $Q(\varphi)$  and  $\hat{Q}(\varphi)$  of these methods are given in fig. 2. Stability regions of the second order methods with an extended stability interval and their damped versions ( $\varepsilon = 0.05$ ) for  $k = 4, \dots, 13$  are presented in fig. 4.

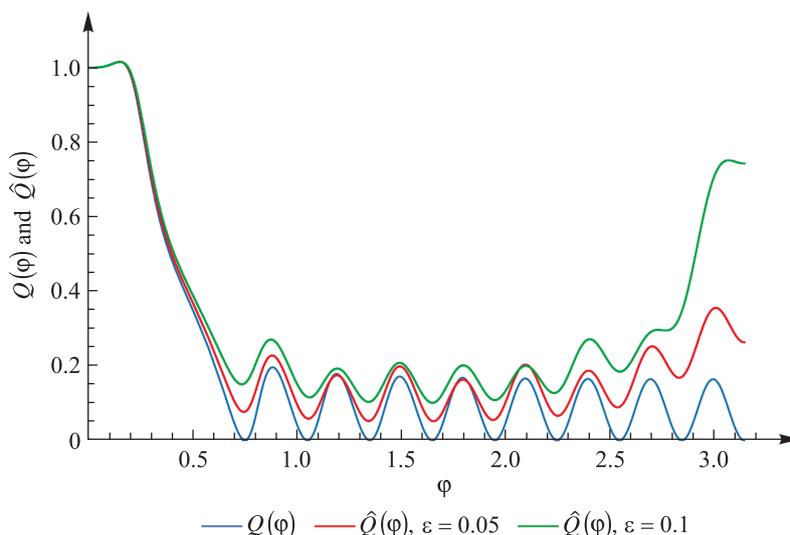


Fig. 2. Graphs of  $Q(\varphi)$  and  $\hat{Q}(\varphi)$  of the damped methods with  $p = 4, k = 21$

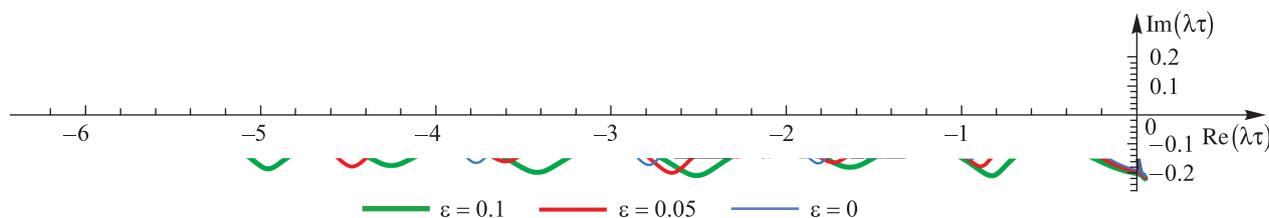


Fig. 3. Root locus curves (3) of the damped methods with  $p = 4, k = 21$

### Implementation

Implementation of methods (2) with a constant step size is straightforward. To implement a variable step size, it is necessary to solve the following main tasks:

- 1) error estimation;
- 2) increasing the grid step size;
- 3) decreasing the grid step size.

**Error estimation.** We use two methods of orders  $p$  (main method) and  $p - 1$  (assistant method) to estimate the error. The values  $y_{m+1}$  calculated by these methods in formula (2) we denote as  $y_{m+k}^{[p]}$  and  $y_{m+k}^{[p-1]}$  respectively. Then the absolute error estimate of the  $y_{m+k}^{[p]}$  can be found from the well-known formula

$$aerr = \left\| y_{m+k}^{[p]} - y_{m+k}^{[p-1]} \right\|_{\infty}. \quad (9)$$

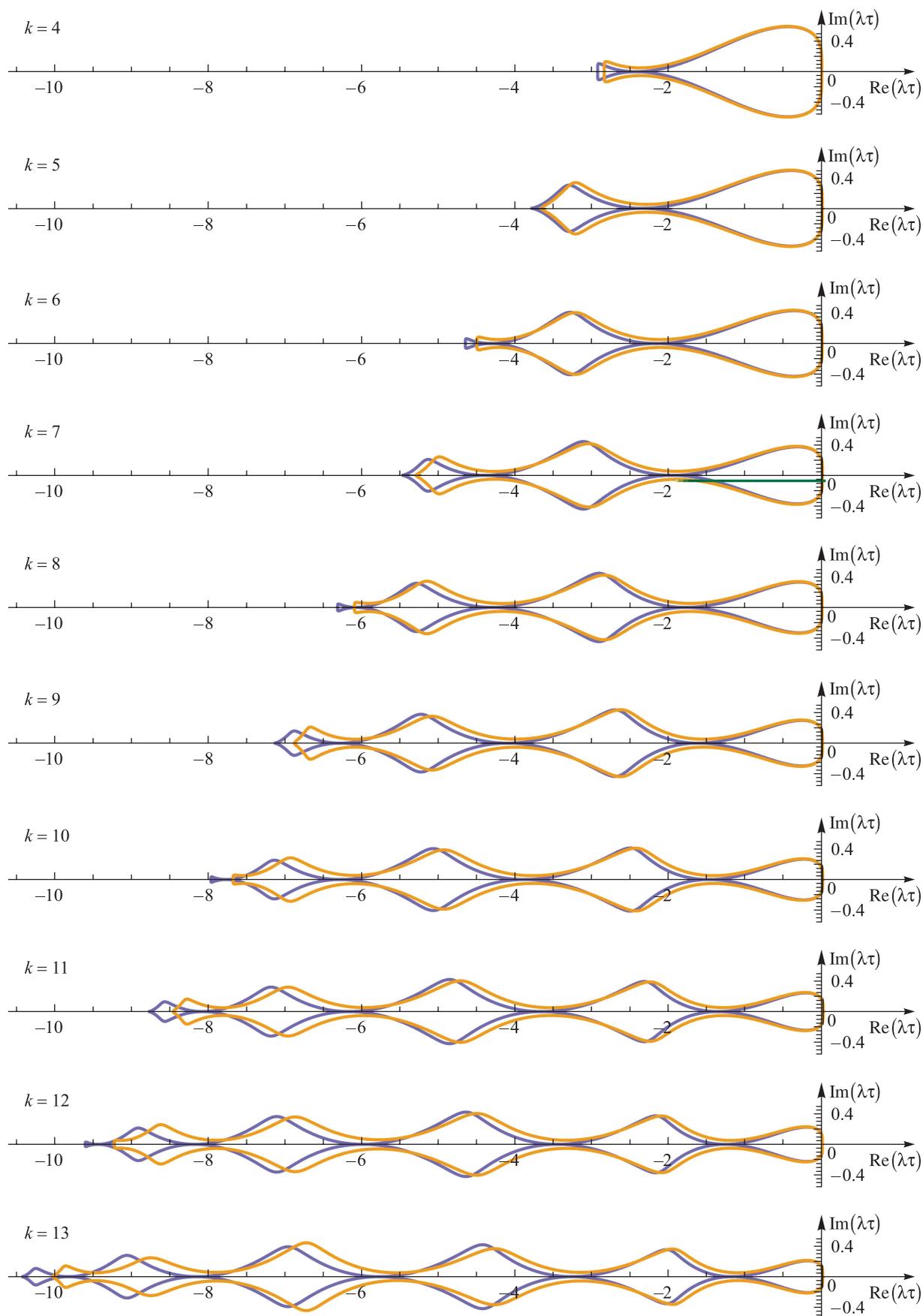


Fig. 4. Stability regions of the second order methods with an extended stability interval and their damped versions ( $\varepsilon = 0.05$ ) for  $k = 4, \dots, 13$

The relative error estimation is defined as

$$rerr = \|r\|_{\infty}, r_j = \frac{\left\{ y_{m+k}^{[p]} \right\}_j - \left\{ y_{m+k}^{[p-1]} \right\}_j}{\left| \left\{ y_{m+k}^{[p]} \right\}_j \right| + atol}, \quad (10)$$

where *atol* is the value of the required absolute error. It is added to the absolute value of the vector components to avoid close to zero values in the denominator.

If the inequalities

$$aerr \leq atol, rerr \leq rtol, \quad (11)$$

where *rtol* is the required relative error, are satisfied, then the value  $y_{m+k}^{[p]}$  is considered as accurate enough.

Formulas (9)–(11) can be easily generalised for the case when *atol* and *rtol* are vector values. To do this, in expressions (9) and (10) it is necessary to replace the norm by the vector of the absolute values of the components, and the inequalities (11) should be generalised to the case of the vector values.

We mainly used the damped version of the method with  $p = 4, k = 21$  as the main method in our implementation (see fig. 2 and 3). This method is quite simple to obtain and damp and it has 20 times larger stability interval than the classical fourth order Adams method. If it is necessary to get a larger stability interval, it might be better to reduce the order  $p$  instead of increasing  $k$ . The coefficients of this method are presented in table 1. The error constants of some fourth order methods are given in table 2.

Initially, it seems natural to choose an assistant method with approximately the same stability interval as the main method, for example,  $p = 3, k = 14$  (see fig. 1). But in practice, better results were obtained using the classical explicit Adams method of order  $p - 1$  as an assistant one. This can be explained by the fact that the result of the assistant method is not used in the next step, so its instability does not affect the process too much.

Table 1

Coefficients of method with an extended stability interval and its damped version with  $p = 4, k = 21$

$\beta$		C; v
Initial method	Damped method	
-0.014 543 302 409 352 176	-0.012 505 757 070 276 544	0.835 1; 0.038 4 0.050 7 0.044 0.015 4 0.007 5 -0.004 1 -0.001 6 -0.001 8 0.002 1 0.001 5 -0.001 8 -0.002 9 0 ⋮ 0
-0.037 372 767 456 907 95	-0.032 789 411 451 952 875	
-0.043 406 196 086 467 105	-0.039 488 125 649 616 054	
-0.027 486 149 404 601 503	-0.027 107 568 402 238 53	
0.008 252 769 527 671 221	0.003 642 176 786 235 481 7	
0.054 537 413 741 972 81	0.045 478 507 054 112 57	
0.097 209 195 621 928 01	0.086 121 595 255 923 64	
0.121 058 627 899 381 7	0.111 500 997 408 773 63	
0.114 285 854 014 006 83	0.109 820 665 237 236 78	
0.072 422 109 196 496 3	0.074 196 216 563 922 67	
0.000 623 683 164 529 862 5	0.009 440 996 312 261 642	
-0.086 396 278 848 252 68	-0.070 033 943 854 504 19	
-0.166 978 077 073 466 46	-0.147 429 638 898 536 27	
-0.217 219 080 029 73	-0.202 674 306 764 101 2	
-0.216 768 383 496 507 5	-0.212 396 132 756 734 38	
-0.154 368 955 636 348 4	-0.163 055 764 045 559 94	
-0.031 766 972 270 760 77	-0.049 724 157 172 647 37	
0.135 099 815 930 591 2	0.114 121 239 098 021 19	
0.318 153 574 581 982 3	0.305 707 490 985 957	
0.482 259 056 075 009 85	0.483 881 120 483 082 2	
0.592 404 062 958 824 4	0.613 293 800 880 640 2	

Table 2

**Error constants of the fourth order methods  
with an extended stability interval  
and their damped versions**

$k$	Initial method	Damped method
21	94.2113	88.2036
17	41.4624	39.1333
13	14.8998	14.196
9	3.8788	3.7303

**Increasing the grid step size.** In the cases of sufficiently small errors  $aerr$  and  $rerr$  it makes sense to increase the step size  $\tau$  of method (2). In contrast to one-step methods [5, chapter II, section II.4], changing the step size  $\tau$  by an arbitrary factor causes serious computational difficulties (see also [3; 4; 6]). To simplify the process of updating the grid, we introduce the constant

$$irate = \frac{\tau_{new}}{\tau},$$

where  $\tau_{new}$  is the step size after the increasing (fig. 5).

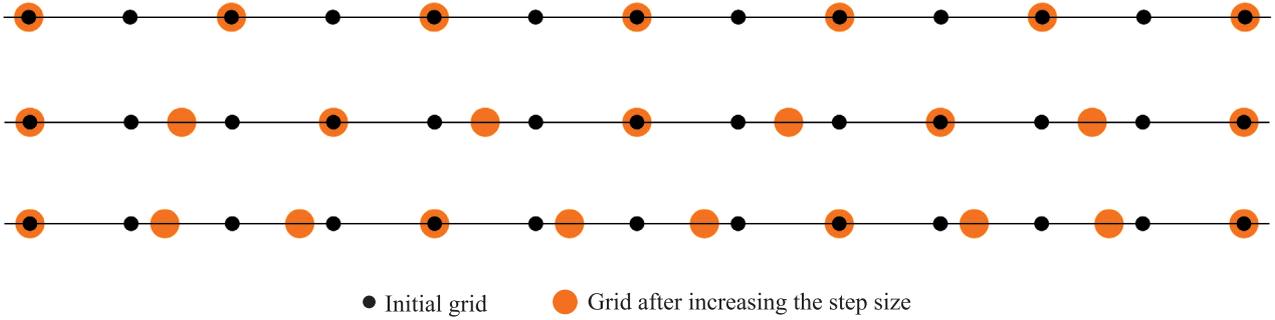


Fig. 5. Increasing the grid step size in the cases  
 $irate = 2$  (top),  $irate = \frac{3}{2}$  (middle) and  $irate = \frac{4}{3}$  (bottom)

After increasing the grid step size, the density of nodes decreases, but their number must still be at least  $k$  to calculate the next value of the solution by the formula (2). We will store a grid of nodes of size

$$gsize = \lceil irate(k - 1) + 1 \rceil$$

to avoid extrapolation. It allows to calculate  $k$  nodes of the increased grid by the interpolation polynomial and continue solving using the formula (2) with the new step size  $\tau_{new}$ .

We used the Hermite interpolation polynomial in our implementation. For methods with  $p \leq 3$ , the well-known formula

$$y_{l-\frac{3}{2}} = \frac{y_{l-2} + y_{l-1}}{2} + \frac{\tau}{8}(f_{l-2} + f_{l-1}), \quad l = m + k - 3j, \quad j = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} - 1 \right\rfloor,$$

is enough to find the values of the missing nodes in the case  $irate = \frac{3}{2}$ . For higher order methods we used the more accurate formula

$$y_{l-\frac{3}{2}} = \frac{13y_{l-3} + 243y_{l-2} + 243y_{l-1} + 13y_l}{512} + \frac{\tau}{512}(3f_{l-3} + 81f_{l-2} - 81f_{l-1} - 3f_l),$$

$$l = m + k - 3j, \quad j = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} - 1 \right\rfloor.$$

Naturally, we have to completely fill the grid with solution values before the next increment. It is reasonable to choose a method with  $irate \cdot (k - 1) \in \mathbb{N}$  to reduce the computational costs when grid values with an increased step size are calculated.

Suppose that the value  $irate$  is chosen. If at some moment the number of stored solution values is less than  $gsize$  (for example, at the very beginning or immediately after increasing the grid step size) then it is not possible to increase the grid step size. If the entire grid is completely filled, in addition to inequalities (11) the condition

$$aerr \leq \omega \frac{atol}{irate^p}, \quad rtol \leq \omega \frac{rtol}{irate^p}, \quad 0 < \omega < 1,$$

should also be checked. If it is satisfied, we calculate the missing grid nodes with an increased step size  $\tau_{new}$  and store them into a separate array. Then we find the next value of the solution using formula (2) and check its accuracy using inequalities (11). If they are satisfied, we change the old grid with step size  $\tau$  to the new one with step size  $\tau_{new}$  and continue calculating with this step. If inequalities (11) are not satisfied, we discard the solution value obtained with step size  $\tau_{new}$  and continue applying the method with step size  $\tau$ .

In our implementation we take  $irate = \frac{3}{2}$ ,  $\omega = 0.9$ .

This implementation already works quite well, but it can be further improved. Consider the situation when the errors  $aerr_{m+k}$  and  $rerr_{m+k}$  of  $y_{m+k}^{[p-1]}$  still satisfy conditions (11) but at least one of them have become larger than  $aerr_{m+k-1}$  and  $rerr_{m+k-1}$  respectively. This could happen for three reasons:

- 1) the error of integration of the function  $f$  has increased;
- 2) one or more eigenvalues of the Jacobian matrix went out of the stability region;
- 3) there were roundoff errors while calculating  $aerr$  and  $rerr$ .

In the first two cases, we should avoid the step increase during the next  $iprhb$  steps. In practice, it turned out that in the case of double precision numbers, a simple check

$$aerr_{m+k} - aerr_{m+k-1} \leq 3 \cdot 10^{-15}, \quad rerr_{m+k} - rerr_{m+k-1} \leq 3 \cdot 10^{-15} \quad (12)$$

is sufficient to handle the third case. If at least one inequality in formula (12) is not satisfied, we disallow the step size increase for the next  $iprhb = 13$  steps.

**Decreasing the grid step size.** If at some moment at least one inequality in formula (11) is not satisfied, then the grid step size must be reduced. As in the case of increase, we introduce the constant

$$drate = \frac{\tau}{\tau_{new}},$$

which is presented in fig. 6.

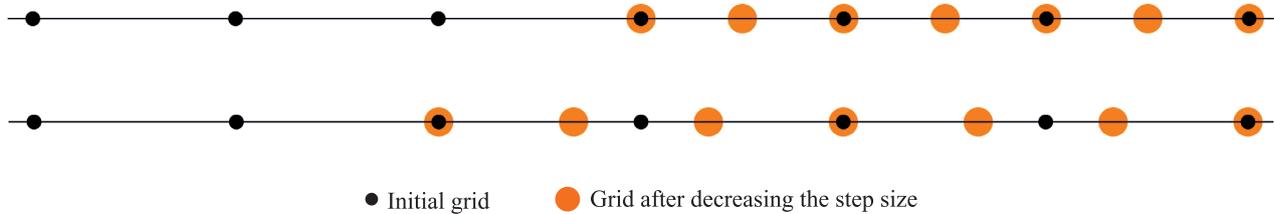


Fig. 6. Decreasing the grid step size in the cases  $drate = 2$  (top),  $drate = \frac{3}{2}$  (bottom)

In our implementation we take  $drate = \frac{3}{2}$ .

The values at the missing nodes can be found using the formula

$$y_{l-\frac{2}{3}} = \frac{5}{81}y_{l-2} + \frac{64}{81}y_{l-1} + \frac{4}{27}y_l + \frac{\tau}{243}(4f_{l-2} + 64f_{l-1} - 8f_l),$$

$$y_{l-\frac{4}{3}} = \frac{4}{27}y_{l-2} + \frac{64}{81}y_{l-1} + \frac{5}{81}y_l + \frac{\tau}{243}(8f_{l-2} - 64f_{l-1} - 4f_l),$$

$$l = m + k - 2j, \quad j = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor.$$

**Implementation details.** The proposed damped explicit multistep methods were implemented in C. The main features of the implementation have already been described, so here we add only a few details.

The first  $k - 1$  grid values were found using the one-step method RADAU5 (see the Internet page [www.uni-ge.ch/~hairer/software.html](http://www.uni-ge.ch/~hairer/software.html)). Grid values  $y_m$  and  $f_m$  of length  $gsize$  are stored in a circular queue. Pointers

to the oldest element in the queue (*begin*), to the element from which the calculation begins according to formula (2) (*front*), and to the last added element (*back*) are stored separately. There are always exactly  $k$  elements between the *front* (inclusive) and *back* (inclusive) elements. Between the *begin* (inclusive) and *back* (inclusive) elements there can be from  $k$  (at the very beginning or immediately after increasing the step size) to  $gsize$  elements (the grid is completely filled). Elements are never completely removed from this queue, currently unnecessary elements are simply moved to the end of the queue (after the *back* element). Elements from the outside are never added to this queue, the usage of free (located between *back* and *begin*) elements is always enough. The projects are compiled with Intel Fortran Compiler Classic 2021.4.0 and Intel C++ Compiler 19.2.

### Numerical experiments

All methods implementations to compare with our method were taken from the Internet page [www.uni-ge.ch/~hairer/software.html](http://www.uni-ge.ch/~hairer/software.html). The damped method with  $p = 4$ ,  $k = 21$  will be denoted as SA4-21. The parameters  $rtol$  and  $atol$  are equal in all cases. The following tables will provide the statistical data about the performance of the considered methods. We use the following notation:

- $rerr_{fin}$  is the final relative error compared to a more accurate model solution;
- $aerr_{fin}$  is the final absolute error compared to a more accurate model solution;
- $fcn$  is the number of function evaluations;
- $step$  is the number of the computed steps;
- $accpt$  is the number of the accepted steps;
- $rejt$  is the number of the rejected steps;
- $time$  is the elapsed time (ms).

DOPRI5 is an explicit one-step Dormand – Prince method of fifth order [7]. Initially this method was not intended for solving stiff problems. But in work [2, chapter IV, section IV.10] it was shown that it can be successfully applied to mildly-stiff systems.

ROCK4 is an explicit one-step fourth order Chebyshev method [4]. This method was created for stiff problems which possess a Jacobian matrix with (possibly large) eigenvalues close to the real negative axis.

RADAU5 is an implicit (unlike all the others) one-step method RadauIIA [2, p. 74]. It is impossible to directly compare the statistics of explicit methods with it, it is listed as a classical method for solving stiff systems.

**HIRES.** This is a classical mildly stiff test system of dimension 8 describing a chemical reaction [8]. The interval of integration is  $[0, 321.812\ 2]$  (table 3) and  $[0, 421.812\ 2]$  (table 4).

Table 3

Numerical experiment results for the HIRES problem,  $t_{max} = 321.812\ 2$

Method	$atol$	$rerr_{fin}$	$aerr_{fin}$	$fcn$	$step$	$accpt$	$rejt$	$time$
SA4-21	$1 \cdot 10^{-6}$	$7.16 \cdot 10^{-6}$	$4.47 \cdot 10^{-8}$	13 766	12 774	12 745	29	3
	$1 \cdot 10^{-8}$	$7.03 \cdot 10^{-8}$	$4.38 \cdot 10^{-10}$	19 080	17 132	17 069	63	4
	$1 \cdot 10^{-10}$	$2.51 \cdot 10^{-9}$	$1.57 \cdot 10^{-11}$	22 517	20 811	20 756	55	4
	$1 \cdot 10^{-12}$	$2.46 \cdot 10^{-10}$	$1.54 \cdot 10^{-12}$	41 523	40 359	40 302	57	8
DOPRI5	$1 \cdot 10^{-6}$	$2.37 \cdot 10^{-3}$	$1.48 \cdot 10^{-7}$	62 504	10 417	10 416	1	2
	$1 \cdot 10^{-8}$	$8.17 \cdot 10^{-7}$	$2.33 \cdot 10^{-9}$	62 840	10 473	10 473	0	2
	$1 \cdot 10^{-10}$	$1.02 \cdot 10^{-8}$	$2.9 \cdot 10^{-11}$	65 366	10 894	10 894	0	2
	$1 \cdot 10^{-12}$	$1.07 \cdot 10^{-10}$	$3.05 \cdot 10^{-13}$	79 340	13 233	13 233	0	3
ROCK4	$1 \cdot 10^{-6}$	$3.23 \cdot 10^{-3}$	$2.01 \cdot 10^{-7}$	11 628	873	812	61	1
	$1 \cdot 10^{-8}$	$9.24 \cdot 10^{-6}$	$2.63 \cdot 10^{-8}$	19 931	2071	1928	143	1
	$1 \cdot 10^{-10}$	$7.82 \cdot 10^{-9}$	$3.09 \cdot 10^{-11}$	35 410	4842	4632	210	1
	$1 \cdot 10^{-12}$	$3.28 \cdot 10^{-11}$	$1.59 \cdot 10^{-13}$	69 873	11 253	11 102	151	2
RADAU5	$1 \cdot 10^{-6}$	$1.01 \cdot 10^{-3}$	$1.48 \cdot 10^{-7}$	491	60	53	7	<1
	$1 \cdot 10^{-8}$	$1.10 \cdot 10^{-5}$	$6.89 \cdot 10^{-8}$	820	100	97	3	1
	$1 \cdot 10^{-10}$	$5.89 \cdot 10^{-8}$	$3.68 \cdot 10^{-10}$	1655	197	197	0	1
	$1 \cdot 10^{-12}$	$4.88 \cdot 10^{-9}$	$1.8 \cdot 10^{-11}$	3291	414	414	0	1

Table 4

Numerical experiment results for the HIRES problem,  $t_{\max} = 421.8122$

Method	<i>atol</i>	<i>rerr<sub>fin</sub></i>	<i>aerr<sub>fin</sub></i>	<i>fcn</i>	<i>step</i>	<i>acct</i>	<i>rejt</i>	<i>time</i>
SA4-21	$1 \cdot 10^{-6}$	$1.08 \cdot 10^{-10}$	$1.52 \cdot 10^{-13}$	14 290	13 288	13 259	29	3
	$1 \cdot 10^{-8}$	$1.28 \cdot 10^{-9}$	$1.64 \cdot 10^{-12}$	19 962	17 916	17 851	65	4
	$1 \cdot 10^{-10}$	$2.01 \cdot 10^{-10}$	$2.58 \cdot 10^{-13}$	24 602	22 816	22 761	55	5
	$1 \cdot 10^{-12}$	$7.19 \cdot 10^{-12}$	$9.23 \cdot 10^{-15}$	47 226	45 953	45 895	58	9
DOPRI5	$1 \cdot 10^{-6}$	$4.01 \cdot 10^{-3}$	$1.98 \cdot 10^{-7}$	64 406	10 734	10 733	1	2
	$1 \cdot 10^{-8}$	$2.92 \cdot 10^{-5}$	$1.45 \cdot 10^{-9}$	64 736	10 789	10 789	0	2
	$1 \cdot 10^{-10}$	$2.88 \cdot 10^{-7}$	$1.42 \cdot 10^{-11}$	67 436	11 239	11 238	1	3
	$1 \cdot 10^{-12}$	$8.4 \cdot 10^{-9}$	$4.16 \cdot 10^{-13}$	82 142	13 690	13 689	1	3
	$1 \cdot 10^{-14}$	$9.08 \cdot 10^{-11}$	$4.49 \cdot 10^{-15}$	149 588	24 931	24 930	1	5
ROCK4	$1 \cdot 10^{-6}$	$5.52 \cdot 10^{-5}$	$6.22 \cdot 10^{-8}$	11 967	909	844	65	1
	$1 \cdot 10^{-8}$	$1.58 \cdot 10^{-6}$	$2.07 \cdot 10^{-9}$	20 312	2110	1966	144	1
	$1 \cdot 10^{-10}$	$1.57 \cdot 10^{-8}$	$2.04 \cdot 10^{-11}$	36 251	4958	4748	210	1
	$1 \cdot 10^{-12}$	$2.06 \cdot 10^{-10}$	$2.64 \cdot 10^{-13}$	72 180	11 617	11 466	151	2
	$1 \cdot 10^{-14}$	$3.82 \cdot 10^{-12}$	$4.9 \cdot 10^{-15}$	168 592	28 285	27 083	1202	6
RADAU5	$1 \cdot 10^{-6}$	$6.65 \cdot 10^{-7}$	$8.54 \cdot 10^{-10}$	542	66	59	7	<1
	$1 \cdot 10^{-8}$	$2.78 \cdot 10^{-7}$	$3.57 \cdot 10^{-10}$	915	111	108	3	1
	$1 \cdot 10^{-10}$	$4.93 \cdot 10^{-9}$	$6.32 \cdot 10^{-12}$	1839	219	219	0	1
	$1 \cdot 10^{-12}$	$1.81 \cdot 10^{-9}$	$2.33 \cdot 10^{-12}$	3661	460	460	0	1
	$1 \cdot 10^{-14}$	$3.02 \cdot 10^{-10}$	$3.87 \cdot 10^{-13}$	7271	977	977	0	2

It should be noted that the required and actually obtained errors for some methods are very different. This fact should be taken into account when comparing statistics.

Unlike one-step methods, reducing the grid step size always causes a rejected step, so in some cases the number of the rejected steps is quite large.

**Burgers' equation.** The second problem is taken from work [4]. The spatial derivatives are approximated by standard central finite differences, the discretisation step is  $\Delta x = \frac{1}{501}$ , so the dimension of the resulting ordinary differential equation is 500. We took  $\mu = 0.005$  and the integration interval is equal to  $[0, 2.5]$  (table 5).

Table 5

Numerical experiment results for the Burgers' equation

Method	<i>atol</i>	<i>rerr<sub>fin</sub></i>	<i>aerr<sub>fin</sub></i>	<i>fcn</i>	<i>step</i>	<i>acct</i>	<i>rejt</i>	<i>time</i>
SA4-21	$1 \cdot 10^{-6}$	$2.82 \cdot 10^{-10}$	$6.08 \cdot 10^{-11}$	4912	4744	4741	3	29
	$1 \cdot 10^{-8}$	$2.54 \cdot 10^{-10}$	$5.65 \cdot 10^{-11}$	4713	4544	4542	2	28
	$1 \cdot 10^{-10}$	$2.69 \cdot 10^{-10}$	$4.55 \cdot 10^{-11}$	4996	4826	4825	1	30
	$1 \cdot 10^{-12}$	$5.88 \cdot 10^{-11}$	$9.16 \cdot 10^{-12}$	9273	9036	9032	4	54
SA3-21	$1 \cdot 10^{-6}$	$4.09 \cdot 10^{-7}$	$6.72 \cdot 10^{-8}$	3204	3045	3043	2	17
	$1 \cdot 10^{-8}$	$1.59 \cdot 10^{-7}$	$2.44 \cdot 10^{-8}$	4305	4144	4144	0	23
DOPRI5	$1 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-6}$	$1.84 \cdot 10^{-7}$	22 784	3797	3794	1	25
	$1 \cdot 10^{-8}$	$1.1 \cdot 10^{-8}$	$1.84 \cdot 10^{-9}$	22 790	3798	3795	1	25
	$1 \cdot 10^{-10}$	$5.75 \cdot 10^{-10}$	$9.62 \cdot 10^{-11}$	22 814	3802	3798	2	25
	$1 \cdot 10^{-12}$	$3.94 \cdot 10^{-12}$	$6.42 \cdot 10^{-13}$	22 868	3811	3807	2	25

Ending table 5

Method	$atol$	$rerr_{fin}$	$aerr_{fin}$	$fcn$	$step$	$accpt$	$rejt$	$time$
ROCK4	$1 \cdot 10^{-6}$	$1.48 \cdot 10^{-3}$	$7.59 \cdot 10^{-5}$	1748	76	71	5	2
	$1 \cdot 10^{-8}$	$2.96 \cdot 10^{-5}$	$1.38 \cdot 10^{-6}$	2059	105	104	1	2
	$1 \cdot 10^{-10}$	$1.85 \cdot 10^{-8}$	$6.62 \cdot 10^{-10}$	3407	231	231	0	3
	$1 \cdot 10^{-12}$	$4.33 \cdot 10^{-11}$	$2.31 \cdot 10^{-12}$	7537	835	835	0	7
RADAU5	$1 \cdot 10^{-6}$	$2.7 \cdot 10^{-6}$	$3.14 \cdot 10^{-7}$	145	22	22	0	2
	$1 \cdot 10^{-8}$	$1.28 \cdot 10^{-7}$	$1.42 \cdot 10^{-8}$	255	39	39	0	3
	$1 \cdot 10^{-10}$	$2.69 \cdot 10^{-9}$	$3.18 \cdot 10^{-10}$	520	76	76	0	5
	$1 \cdot 10^{-12}$	$8.07 \cdot 10^{-11}$	$1.19 \cdot 10^{-11}$	1104	159	159	0	9

The stability region of the SA4-21 method is not enough in the case of low required accuracy. The SA3-21 method has a 1.5 time larger stability interval and works slightly better in these cases.

### Conclusions

Based on the experimental results obtained, we can conclude that the stabilised explicit Adams-type methods of higher orders with damping can be useful in solving mildly-stiff differential systems with real (or close to real) eigenvalues of the Jacobian matrix. If it is possible to improve the algorithm by adding to it an adaptive choice of parameters  $p$  and  $k$ , in some cases it can become the optimal variant, due to the smaller number of the right-hand side evaluations.

### References

1. Repnikov VI, Faleichik BV, Moisa AV. Stabilised explicit Adams-type methods. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2021;2:82–98. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-2-82-98.
2. Hairer E, Wanner G. *Solving ordinary differential equations II: stiff and differential-algebraic problems*. 2<sup>nd</sup> edition. Berlin: Springer; 1996. XV, 614 p. (Springer series in computational mathematics; volume 14). DOI: 10.1007/978-3-642-05221-7.
3. Abdulle A, Medovikov AA. Second order Chebyshev methods based on orthogonal polynomials. *Numerische Mathematik*. 2001;90(1):1–18. DOI: 10.1007/s002110100292.
4. Abdulle A. Fourth order Chebyshev methods with recurrence relation. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2002;23(6): 2041–2054. DOI: 10.1137/S1064827500379549.
5. Hairer E, Nørsett SP, Wanner G. *Solving ordinary differential equations I: nonstiff problems*. 2<sup>nd</sup> edition. Berlin: Springer; 1993. XV, 528 p. (Springer series in computational mathematics; volume 8). DOI: 10.1007/978-3-540-78862-1.
6. Lebedev VI. How to solve stiff systems of differential equations by explicit methods. In: Marchuk GI, editor. *Numerical methods and applications*. Boca Raton: CRC Press; 1994. p. 45–80.
7. Dormand JR, Prince PJ. A family of embedded Runge – Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1980;6(1):19–26. DOI: 10.1016/0771-050X(80)90013-3.
8. Schäfer E. A new approach to explain the «high irradiance responses» of photomorphogenesis on the basis of phytochrome. *Journal of Mathematical Biology*. 1975;2(1):41–56. DOI: 10.1007/BF00276015.

Received 12.09.2022 / revised 10.02.2023 / accepted 11.02.2023.

---

---

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

---

## THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

---

---

УДК 004.056:004.42

### СТЕГАНОГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ВСТРАИВАНИЯ ИДЕНТИФИКАТОРА В ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ДААННЫЕ ЭЛЕКТРОННОЙ КАРТЫ

Е. А. БЛИНОВА<sup>1)</sup>, И. Ю. СТАШЕВСКАЯ<sup>1)</sup>, П. П. УРБАНОВИЧ<sup>1), 2)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный технологический университет,  
ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Беларусь

<sup>2)</sup>Люблинский католический университет им. Иоанна Павла II,  
ал. Рацлавицке, 14, 20-950, г. Люблин, Польша

Электронные карты, представляющие собой набор компьютерных файлов, являются основной формой представления географической информации конечному потребителю. Важной задачей выступает защита карт от несанкционированного использования или модификации. Приводится описание стеганографического метода встраивания

---

#### Образец цитирования:

Блинова ЕА, Стасhevская ИЮ, Урбанович ПП. Стеганографический метод встраивания идентификатора в пространственные данные электронной карты. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2023;1:76–87 (на англ.).  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-76-87>

#### For citation:

Blinova EA, Stashevskaya IYu, Urbanovich PP. A steganographic method of embedding an identifier into the spatial data of an electronic map. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2023;1:76–87.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-76-87>

---

#### Авторы:

**Евгения Александровна Блинова** – старший преподаватель кафедры информационных систем и технологий факультета информационных технологий.

**Ирина Юрьевна Стасhevская** – магистрант кафедры информационных систем и технологий факультета информационных технологий. Научный руководитель – Е. А. Блинова.

**Павел Павлович Урбанович** – доктор технических наук, профессор; профессор кафедры информационных систем и технологий факультета информационных технологий<sup>1)</sup>, профессор<sup>2)</sup>.

#### Authors:

**Evgenia A. Blinova**, senior lecturer at the department of information systems and technologies, faculty of information technologies.

[evgenia.blinova@belstu.by](mailto:evgenia.blinova@belstu.by)  
<https://orcid.org/0000-0001-7245-8721>

**Irina Yu. Stashevskaya**, master's degree student at the department of information systems and technologies, faculty of information technologies.

[irina.stashevskaya@belstu.by](mailto:irina.stashevskaya@belstu.by)  
<https://orcid.org/0000-0001-8889-056X>

**Pavel P. Urbanovich**, doctor of science (engineering), full professor; professor at the department of information systems and technologies, faculty of information technologies<sup>a</sup>, and professor<sup>b</sup>.  
[p.urbanovich@belstu.by](mailto:p.urbanovich@belstu.by)  
<https://orcid.org/0000-0003-2825-4777>

невидимого цифрового водяного знака в пространственные данные электронных карт в целях защиты авторских прав на карты, обеспечения целостности последних или доказательства их подлинности. Метод применим к электронным картам в форматах Shapefile и GeoJSON. Он основывается на размещении дополнительных точек в пространственных объектах (полигонах), составляющих электронную карту. В данном случае карта служит контейнером, а координаты точек являются элементами ключевой информации стеганографического преобразования. При этом устанавливается связь между пространственными объектами карты, что обеспечивает их целостность. Рассматриваются алгоритмы прямого и обратного стеганографического преобразования. Описывается разработанный интернет-сервис *StegoMap* для реализации размещения и извлечения невидимого цифрового водяного знака на основе предложенного метода.

**Ключевые слова:** электронные карты; стеганография; авторское право; цифровой водяной знак; пространственные данные; формат GeoJSON; формат Shapefile.

**Благодарность.** Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований «Цифровые и космические технологии, безопасность человека, общества и государства» на 2021–2025 гг.

## A STEGANOGRAPHIC METHOD OF EMBEDDING AN IDENTIFIER INTO THE SPATIAL DATA OF AN ELECTRONIC MAP

E. A. BLINOVA<sup>a</sup>, I. Yu. STASHEVSKAYA<sup>a</sup>, P. P. URBANOVICH<sup>a, b</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State Technological University, 13a Sviardlova Street, Minsk 220006, Belarus

<sup>b</sup>The John Paul II Catholic University of Lublin, 14 Raclawickie Alley, Lublin 20-950, Poland

Corresponding author: E. A. Blinova (evgenia.blinova@belstu.by)

Electronic maps (e-maps), which are a set of computer files, are the main form of representation of geographic information to the end user. An important task is protecting e-maps from unauthorised use or modification. This paper describes the steganographic method of embedding an invisible digital watermark into the spatial data of e-maps for protecting copyright, ensuring integrity of maps or proving their authenticity. The method is applicable to e-maps in the Shapefile and GeoJSON formats. It is based on the placement of additional points in spatial objects (polygons) of the e-map. In this case the e-map is used as a carrier object, and point coordinates are elements of the key information of the steganographic transformation. This establishes a relationship between the spatial objects of the e-map, which ensures their integrity. Algorithms for direct and inverse steganographic transformations are considered. The developed *StegoMap* Internet service for implementing the placement and extraction of an invisible digital watermark on the basis of the proposed method is described.

**Keywords:** e-maps; steganography; copyright; digital watermark; spatial data; GeoJSON format; Shapefile format.

**Acknowledgements.** This work was carried out with the financial support of the state program of scientific research «Digital and space technologies, security of man, society and state» for 2021–2025.

### Introduction

Modern geoinformation technologies based on the methods and tools for studying, modelling and analysing relationships in geosystems, cartographic analysis and modelling, are the most important areas of geoinformatics [1]. These technologies are of great importance for the solution of a number of social problems. The level of such importance largely depends on the delimitation of access to a geographic information system (GIS), and the information included in the system [2–4].

Electronic cartographic images or electronic maps (e-maps) are the main and rather expensive form of representation of geographic information to the end user [5]. E-maps are a set of computer files containing cartographic images in a vector or raster format that can be rendered in the GIS. E-maps are widely used in environmental, social and economic applications, such as navigation, various land management tasks (creation of a land cadastre for real estate accounting), agromonitoring and equipment monitoring, creating a communications accounting system, as well as business planning. They are also used in military or security related applications [1–5].

The vector e-maps preparation requires significant costs and efforts. At that such methods are used as digitising images of raster maps, as well as space or aerial photography with adjustments if necessary. The value of these e-maps makes protecting them necessary not only to prevent an attacker from illegal use but also to prevent the use of e-map in a situation related to various security aspects.

Due to this, the task of developing effective means of protecting e-maps from illegal copying or use is relevant. The International Hydrographic Organization recommended standards for protecting e-map information are contained in publication [6]. This document defines the security structures and operational procedures that must be followed to ensure the proposed e-maps protection scheme, and also includes specifications to enable the creation of consistent systems for dealing with the data of the e-maps. This document recommends using cryptography as the primary tool for securing the e-map.

Since maps are often used in an open form, in accordance with the recommendations of publication [6] to solve the above problem, it is justified to use the methods that provide the placement of secret, copyrighted information, performing the function of a digital watermark (DWM), using steganographic transformations [7–10].

The main directions and possibilities of using steganographic methods for protecting e-map data presented in vector graphics formats are formulated in works [11–13]. The main features of the method for embedding watermarks in SVG vector image files based on adding points to Bezier curves are described in articles [14; 15]. A similar approach can be used to protect e-maps. The latter is the subject of the research in this paper.

### Theoretical substantiation of the proposed steganographic method

E-map can be considered from the logical and physical sides. Logically it consists of a number of spatial objects that have additional characteristics (attributes). Spatial objects are often grouped into layers. A layer represents geographic data on a specific topic, such as roads, land plots, building footprints, etc. An e-map consists of an ordered collection of layers; often the map has only one layer. In addition to the spatial description the map contains a set of attributes that characterise the spatial areas, for example, soil type, building height, etc. The description of spatial regions is usually written in one of the following formats: WKT (well known text), WKB (well known binary), GML (geography markup language) or GeoJSON. Moreover, all formats, except the last one, are subsets of the XML markup language. Attributes are numeric or textual characteristics.

Physically the e-map is a file or a set of files linked together. Cartographic data processing is done in a GIS such as *ArcGIS* or *MapInfo*, each of which provides its own file format. In addition, most modern DBMS allow you to store and process spatial data in the appropriate database formats.

**E-map Shapefile storage format.** Let us consider the Shapefile format used by *ArcGIS*, which is one of the standards for vector e-maps. A map in the Shapefile format is a set of files that store the spatial and attribute values of objects. Let us analyse, for example, an e-map which contains a single spatial element, namely, a polygon representing the contour of the border of the Republic of Belarus. The set of files is shown in fig. 1.

Имени	Дата изменения	Тип	Размера
 Граница_Беларуси_полигон.dbf	20.12.2017 10:08	Файл "DBF"	1 КБ
 Граница_Беларуси_полигон.prj	20.12.2017 10:07	Файл "PRJ"	1 КБ
 Граница_Беларуси_полигон.shp	20.12.2017 10:07	Файл "SHP"	525 КБ
 Граница_Беларуси_полигон.shx	20.12.2017 10:07	Файл "SHX"	1 КБ

Fig. 1. A set of e-map files in the Shapefile format

The main file is in the .SHP format, which contains information about the spatial object. The file consists of a fixed length header and one or more variable length entries. The .SHX index file format makes a link between .DBF and .SHP files, and also defines the type of the spatial data binding. The most important are the three required files, namely, .SHP, .SHX and .DBF, that must be saved in the same directory. In addition to the main files, there may be additional files, including .SBN and .SBX spatial index files, which allow us to accelerate the processing of spatial data, or .AIH and .AIN attribute table index files that allow to speed up the attribute lookups.

In the .DBF file format the attribute information of geometric objects is saved. The .PRJ file specifies information about the spatial coordinate reference system. Figure 2, a, shows the display of the *Border\_Belarus\_polygon.shp* file. It is not possible to view the contents of a file directly. Figure 2, b, reflects the contents of the *Border\_Belarus\_polygon.dbf* file with a list of spatial data which shows that there is only one spatial object in the file that has no attributes. Figure 2, c, shows the contents of the *Border\_Belarus\_polygon.prj* file which specifies the GCS\_WGS\_1984 reference system.

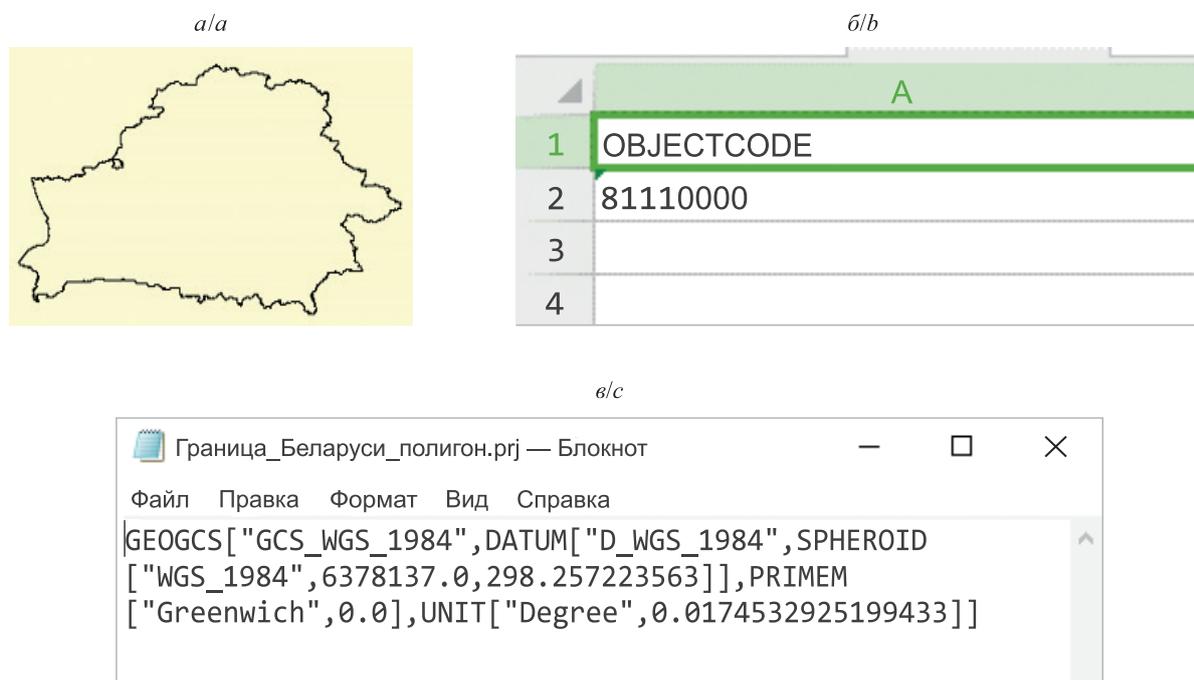


Fig. 2. Contents of e-map files in the Shapefile format

The .SHP format allows to store the following types of geometric objects: points (multipoints), lines (polylines), polygons, etc. When storing polygons, only the coordinates of the vertices are stored. Virtual straight lines between adjacent polygon vertices are named as edges. The edges are not described in any way, they are only displayed by the GIS software. A single file can only store objects of the same type. Each entry in the .SHP file can also have several attributes, such as name, height, terrain type, etc. Spatial objects descriptions can be displayed in the WKT format which is similar to path descriptions in the SVG files. Thus the techniques developed for embedding the hidden data in e-map files can be applied to the SVG files and vice versa. Figure 3, for example, shows the content of one spatial element of the e-map in the .SHP format. The element is a set of two polygons. It is important that according to the requirements of WKT format the last vertex of the polygon must coincide with the first vertex of the polygon. The specified coordinates depend on the used coordinate system which is the same for all objects of the e-map. The current map uses the spatial reference identifier SRID = 4326 which corresponds to the WGS\_1984 geographic coordinate system.

```

MULTIPOLYGON (((24.121052730010657 52.537050075893916,
24.121040931537145 52.536891401261236, 24.121043226657839
52.536916149411823, 24.121052730010657 52.537050075893916))),
((24.12108609988805 52.53756315704824, 24.121075745353686
52.537374418290831, 24.121079227484003 52.537423489707422,
24.12108609988805 52.53756315704824)))
    
```

Fig. 3. Spatial element of the e-map content

**Vector e-map GeoJSON format.** The GeoJSON format is also a way to describe spatial data. A GeoJSON object can generally be represented as a collection (*feature collection*). This object consists of the spatial object itself (*geometry*) and attributes (*properties*), as well as a set of key – value pairs named as properties. Each GeoJSON spatial object must have a property *type*. The value of this property is a string containing the GeoJSON object type. The GeoJSON format supports geometric types similar to WKT format: a point, a line, a polygon, as well as sets of these objects. Next, a mandatory object property is specified – *coordinates*, which are determined by an array of numbers. The order of the elements must be as follows: *x, y, z* (for data in a rectangular coordinate system – east offset, north offset, altitude; for data in a geographic coordinate system – longitude, latitude, altitude). In addition to the spatial description, optional properties of the type of key – value pairs can be included in the object. An example of a fragment of a file in the GeoJSON format is shown in fig. 4. This file is a spatial description of some objects in Baranovichi city (Republic of Belarus), and the fragment of the file demonstrates the structure of the GeoJSON format in the form of key – value pairs where the list of all vertices of a polygon that defines a spatial figure is sequentially set for the *coordinates* key.

```

        "type": "Feature",
        "properties": {
            "name": "UpPart",
            "town": "Baranovichi",
            "square": "15.9152"
        },
        "geometry": {
            "type": "Polygon",
            "coordinates" : [
                [
                    [
                        25.9552001953125,
                        53.11154464430509
                    ],
                    [
                        26.009445190429684,
                        53.140180585580396
                    ],
                    [
                        26.055450439453125,
                        53.156858919018774
                    ],
                    [
                        26.039657592773438,
                        53.15891752333123
                    ],
                    [
                        26.052017211914062,
                        53.16571821716968
                    ],
                    [
                        26.037940979003906,
                        53.17106127943977
                    ],
                    ]
                ]
            ]
        }
    ]
}
    
```

Fig. 4. GeoJSON file fragment example

**Description of the proposed steganographic method.** Now let us return to the fundamental task formulated above: the user needs not only to confirm his copyright on the e-map, but also to ensure the integrity of the data (both spatial and attributive ones). In this regard we will further consider the most important features of the steganographic method described in work [14] and adapt it to the GeoJSON format. The main idea of the steganographic method is that additional points set on edges of the spatial objects or lines are not visualised due to the way GIS displays. Therefore, you can set any number of additional points on segments of a spatial figure and place hidden copyright information in their location. Let us consider a little example. Table 1 gives a description of three spatial objects in the form of the WKT format description. The column «*Id*» lists a single attribute of the spatial area, and the column «Spatial object» lists this object’s description: in this case, all objects are polygons.

Table 1

Spatial figures with the same display

<i>Id</i>	Spatial object
1	POLYGON ((10 10, 10 20, 20 20, 20 15, 10 10))
2	POLYGON ((10 10, 10 15, 10 20, 20 20, 20 15, 10 10))
3	POLYGON ((10 10, 10 20, 15 20, 20 20, 20 15, 10 10))

Table 1 suggests that spatial figures have different descriptions, but they are all displayed in the same way. Figure 5 shows the display of each of the polygons from table 1 in the GIS. The additional vertex (10, 15) from polygon 2 is not displayed because it is on the same line with two neighboring vertices (10, 10) and (10, 20), and the additional vertex (15, 20) from polygon 3 is not displayed because it is on the same line with two neighboring vertices (10, 20) and (20, 20).

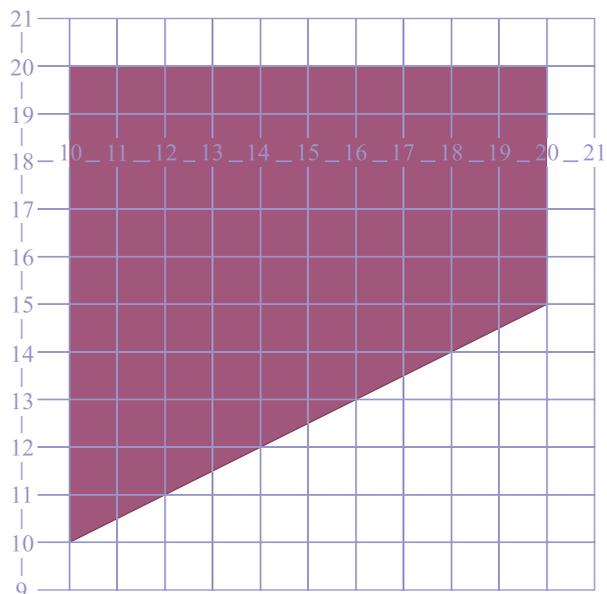


Fig. 5. Display of each of the polygons from table 1

Further only polygons will be considered. For real maps spatial areas are described using *polygon* or *multi-polygon* objects, and each of them can have hundreds, thousands and tens of thousands of vertices. For example, table 2 shows the number of vertices for the polygons that form the spatial areas of a small map of the water protection zones of the Republic of Belarus. In total, the map consists of 363 spatial objects.

Table 2

**Distribution of peaks in the map  
of water protection zones of the Republic of Belarus**

The number of peaks	The quantity of objects	The percentage of total quantity of objects
101–1000	232	64
1001–10 000	124	34
>10 000	7	2

The main idea of the steganographic method proposed in work [14] is to set additional points on the edges of polygons in a certain ratio  $\lambda$ ,  $\lambda \in [0; 1]$ , as shown in fig. 6. The additional vertex will have coordinates  $(X, Y)$ :

$$X = \frac{x_t + \lambda x_{t+1}}{1 + \lambda}, Y = \frac{y_t + \lambda y_{t+1}}{1 + \lambda},$$

where  $(x_t, y_t)$ ,  $(x_{t+1}, y_{t+1})$  are the vertices of the edge on which the additional point is set.

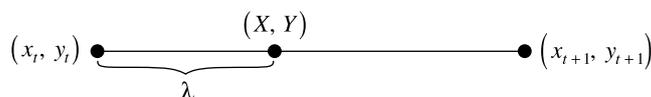


Fig. 6. Additional vertex  $(X, Y)$  set in ratio  $\lambda$

Let us assume that the user has a GeoJSON (or Shapefile) format e-map in which all spatial objects are represented as polygons with a set of additional attributes, the first of which ( $Id$ ) is the number of the object and it is named the *key attribute*. We will consider the e-map as a sequence of polygons in the order of the  $Id$  attribute as shown, for an example, in fig. 7.

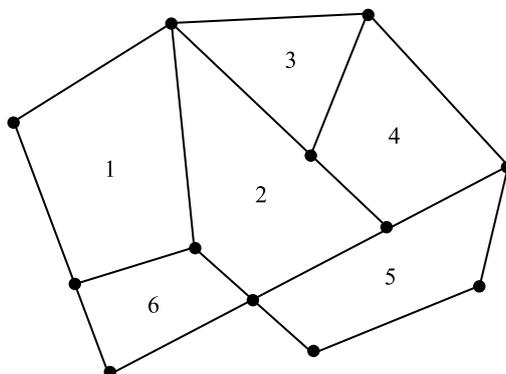


Fig. 7. E-map as a sequence of polygons

Let us also assume that the e-map consists of  $N$  spatial objects, each of which we will denote as  $G_i$ ,  $i \in [1; N]$ . The object  $G_i$  is a structure and consists of the following set of fields:

- $Id_i$  is the key attribute, the number of the spatial object  $G_i$ ;
- $A_{i1}, \dots, A_{im}$  are additional attributes of the object  $G_i$  of the e-map;
- $g_i$  is the description of the initial spatial region  $i$ .

The user also has to generate DWM as the identifier  $I$  to protect copyright, and ensure the integrity of the e-map. This could be the user's first and last name, the current date, another unique identifier, and so on as a text.

Let us define the date of implementation as  $D$  and the data on the e-map owner as  $O$ . The  $D$  and  $O$  values make the identifier  $I$  of the e-map owner, and  $I$  consists of two parts (variable  $D$  and constant  $O$ ):  $I = \{D, O\}$ .

For each polygon, starting from the first one, a control value  $h_i$  should be calculated that ensures the data integrity in this polygon. This control value verifies that the polygon and its attributes are unchanged. As  $h_i$  it is proposed to use the hexadecimal value of the hash function  $H^1$  from the concatenation of the spatial description of the polygon  $g_i$ , its attributes  $A_{i1}, \dots, A_{im}$ , user identifier  $I = \{D, O\}$ , and the number of polygons  $N$ ,  $i \in [1; N]$ :

$$h_i = H^1(g_i \parallel \{A_{i1}, \dots, A_{im}\} \parallel I \parallel N).$$

For this method we suggest to use the MD5 hash function, the result of which is a 128-bit string written in hexadecimal notation.

To hide the DWM ( $I$ ) it is necessary to convert the control value  $h_i$  to a set of additional vertices  $P_i$  embedded on the edges of the polygon  $g_i$ . Such a set  $P_i$  of the polygon  $g_i$  will be called as *secret vertices*. We write  $h_i$  in the form

$$h_i = \{h_{1i} h_{2i} \dots h_{32i}\},$$

where  $h_{ji}$ ,  $j \in [1; 32]$ , is the next digit of the control value  $h_i$  in hexadecimal notation.

We propose to place the vertices  $P_i$  as follows: each vertex of the set  $P_i$  is a set in ratio

$$\lambda = \begin{cases} \frac{h_{ji}}{16}, & h_{ji} \neq 0, \\ \frac{1}{32}, & h_{ji} = 0. \end{cases}$$

For example, for the control value  $h_i = \{68EF4\dots\}$  the first additional vertex is located in the ratio  $\frac{6}{16}$ , the second –  $\frac{8}{16}$ , the third –  $\frac{14}{16}$ , etc.

It is also necessary to select a set of edges  $E_i$  of the spatial object  $g_i$ , to which the vertices  $P_i$  will be added. Hiding each  $h_i$  in the polygon  $g_i$  will require 32 edges. In this method, we propose to use a pseudo-random edge selection principle with a random number generator. Further we will name such edges as *secret*. We propose generating its own list of vertices  $P_i$  for each polygon  $g_i$ . Figure 8 shows the installation of some of the secret vertices (vertices  $P_i$  are marked in red colour, edges  $E_i$ , selected as secret, are marked in blue colour).

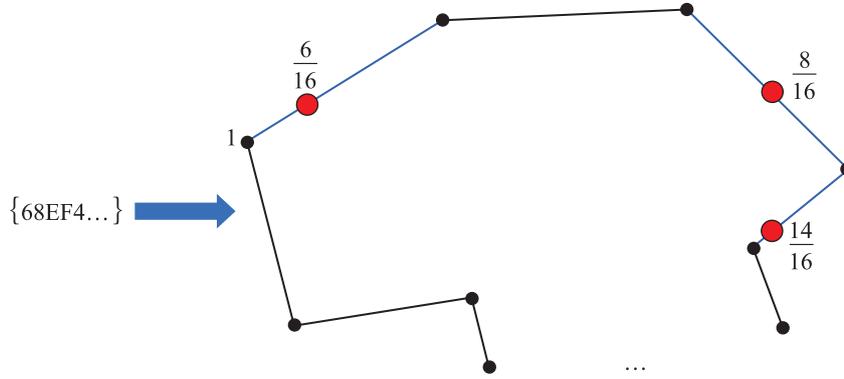


Fig. 8. Setting secret vertices  $P_i$  on the polygon  $g_i$

After setting the vertices  $P_i$  the description of the spatial object  $g_i$  will change with the transformation function:

$$F_i^P: g_i \rightarrow gs_i. \quad (1)$$

For the reverse steganography transformation it is necessary to know the location of the set of secret vertices  $P_i$  in order to extract the identifier  $I$  from the spatial object  $gs_i$ . For this, it is proposed to add another set of vertices  $R_i, i \in [2; N]$ , to the next polygon e-map ( $g_{i+1}$ ) from the data of the location of which it is possible to extract the numbers of secret edges  $P_i, i \in [1; N]$ . We will further name such vertices  $R_i$  as *control vertices*, and the edges  $T_i$ , on which they are installed, as *control edges*. The location of the control vertices  $R_i$  must be known to the author (owner) of the e-map and unknown to other (unauthorised) users. We propose to define the control edges  $T_i$  of the polygon  $g_{i+1}$  as the value  $H_i$  of the hash function  $H^2$  from the concatenation of the identifier  $I$  and the key attribute  $Id_i$  of the spatial object:

$$H_i = H^1(I \parallel N \parallel Id_i).$$

Let us define the set  $K_1 = \{D, O, N, H^1, H^2\}$  as a *key of the first kind*.

It is suggested to use the SHA-2 hash function, the result of which is a string with a length of 512 bits or 128 hexadecimal digits, as a function  $H^2$ . Let us write  $H_i$  in the form  $H_i = \{t_{1i}, t_{2i}, \dots, t_{128i}\}$ , where  $t_{ji}, j \in [1; 128]$ , is a hexadecimal digit from 0 to F.

Each set of control edges  $T_i, i \in [1; N]$ , is formed as follows:

$$T_i = \{t_{1i}, t_{1i} + t_{2i}, t_{1i} + t_{2i} + t_{3i}, \dots, t_{1i} + t_{2i} + \dots + t_{128i}\}. \quad (2)$$

Figure 9 shows how the control edges  $T_i$  are located depending on the value of  $H_i$ :

$$\begin{aligned} t_{1i} = 3 &\Rightarrow T_{1i} = 3, \\ t_{2i} = 4 &\Rightarrow T_{2i} = 7, \\ t_{3i} = 1 &\Rightarrow T_{3i} = 8 \text{ and so on.} \end{aligned}$$

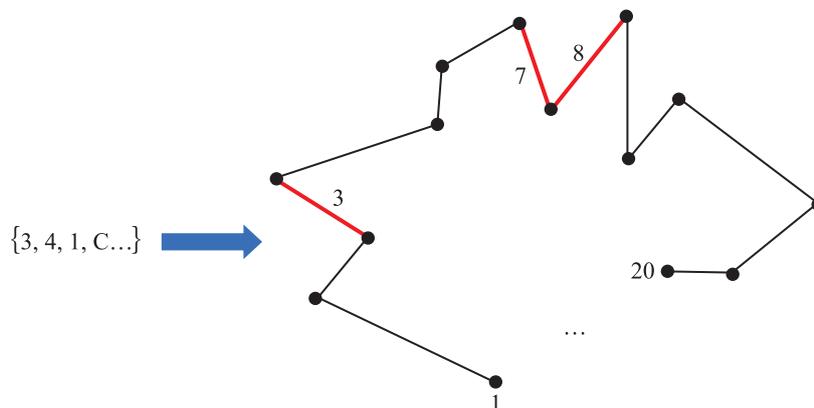


Fig. 9. Selection of a set of control edges  $T_i$  on a polygon  $g_{i+1}$

The set of vertices  $P_i$  is known from polygon  $g_i$ . It is necessary to hide this set on control edges  $T_i$ . Since the number of secret vertices  $P_i$  is not always a single digit, it is necessary to separate the vertex numbers from each other by some symbol. To do this, we write  $P_i$  as a sequence  $\varphi$  separating the vertices with the number 0:

$$\varphi_i = [P_{1i}0P_{2i}0\dots0P_{32i}]. \quad (3)$$

For example, the set of secret vertices  $P = \{1, 4, 17, 25, \dots\}$  becomes the sequence  $\varphi = [104017025\dots]$ . Here we can formulate a constraint on the sets  $P_i$ : vertices are generated randomly but cannot contain vertices marked with the number 0. It is also necessary that  $l(H_i) > l(h_i)$ , where  $l$  is the hash length.

On control edges  $T_i$  control points  $R_i, i \in [2; N]$ , will be set at a certain ratio. We propose to put additional points  $R_i$  in the ratio from the beginning of the edge according to the value of the next digit of the sequence to the number 16, and if the next digit is 0, then in relation to  $\frac{1}{32}$ . For the example of control edges  $T_i$  in fig. 9 the

sequence of the ratio would look like this:  $\left[ \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{4}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{7}{16}, \frac{1}{32}, \frac{2}{16}, \frac{5}{16}, \dots \right]$ . Figure 10 shows how a part of the control vertex set  $R_i$  is set.

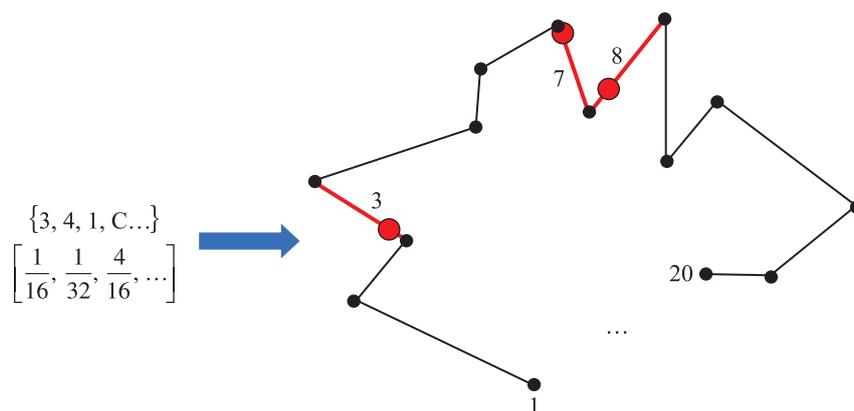


Fig. 10. Setting a set of control points  $R_i$  on a polygon  $g_{i+1}$

Having set control vertices  $R_i$  the description of the spatial object  $g_{i+1}$  will change, so let us define the description of the new spatial object as  $g'_{i+1}$ , and the transformation function  $F_i^R$  as

$$F_i^R : g_{i+1} \rightarrow g'_{i+1}. \quad (4)$$

Next, for the region  $g'_{i+1}$  we perform the transformation  $F_{i+1}^P$  and obtain a spatial object  $g_{i+1}$ .

Thus each polygon  $g_i$ , except for the first one, goes through two transformations: first  $F_i^R$ , when control vertices  $R_i$  are added to the polygon, and then  $F_i^P$ , when secret vertices  $P_i$  are added to the polygon. The first polygon goes through only the  $F_1^P$  transformation. Moreover, the secret vertices  $P_i$  of the polygon  $g_i$  are written in the current polygon  $g_i$ , and its control vertices  $R_i$  – in the next polygon  $g_{i+1}$ , which allows us to sequentially connect all e-map objects like a blockchain system. After transforming the last polygon  $g_N$  we get the polygon  $g_N^S$ :

$$F_N^P : (F_{N-1}^R : g_{N-1}) \rightarrow g_N^S. \quad (5)$$

Let us name a set of secret vertices  $P_N$  the key of the second kind  $K_2$ , that is

$$K_2 = \{P_{1N}, P_{2N}, \dots, P_{32N}\}.$$

After successive transformation of all polygons  $g_i$  we obtain an e-map with a placed identifier  $I$  and a key of the second kind  $K_2$ . Then the resulting e-map can be distributed by the user. Using this method, all spatial regions  $g_i$  of the e-map become sequentially connected with each other. This allows you to control the integrity of the e-map and provide copyright protection.

So, according to formulas (4) and (5) for each spatial object  $g_i$  two transformations are performed sequentially:

$$F_{i-1}^R : g_i \rightarrow g'_i, \quad i > 1,$$

$$F_i^P : g'_i \rightarrow g_i^S.$$

Extraction of the identifier  $I$  occurs sequentially, starting from the last e-map object. The key of the second kind  $K_2$ , contains the secret vertices  $P_N$  of the polygon  $g_{S_N}$ . Let us check which of the following values  $\left\{ \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \dots, \frac{15}{16} \right\}$  represent the ratio in which the vertices  $\{P_{1N}, P_{2N}, \dots, P_{32N}\}$  share edges between the vertices  $\left\{ (P_{1N-1}, P_{1N+1}), (P_{2N-1}, P_{2N+1}), \dots, (P_{32N-1}, P_{32N+1}) \right\}$ . Consistently saving the obtained values, we obtain the value  $h_N$ . Then we remove the secret vertices  $P_N$  of the polygon  $g_{S_N}$  and get the polygon  $g'_N$ . Then, using the key of the first kind  $K_1$ , we determine the set of control edges  $T_{N-1}$  for the previous polygon  $g_{S_{N-1}}$ . We find the control vertices  $R_{N-1}$  and for each of them we determine at which ratio it is installed on the corresponding edge. The sequence of the ratio forms the sequence  $\varphi$  from which we obtain a set of secret vertices  $P_{N-1}$  of the polygon  $g_{S_{N-1}}$ .

Let us delete the control vertices  $R_{N-1}$  and obtain the polygon  $g_N$ . For the resulting polygon  $g_N$  we compare the previously obtained value  $h_N$  with the value of the hash function  $H^1$  which we calculate for the obtained spatial object  $g_N$ . If the map has not been changed, then  $h_N = H^1(g_N)$ . After it we move on to the previous spatial object  $g_{S_{N-1}}$ , and continue comparing the obtained values of  $h_i$  with the values of the hash function  $H^1$  for each spatial object  $g_i$ . We do this for all spatial objects.

### Results and discussion

The proposed steganographic method is designed to hide identification information (invisible DWM) into electronic cartographic images. The peculiarity of the method is that it allows you to analyse the contents of the e-map not as a single, indivisible entity, but as a set of interrelated objects or areas. For each of these objects you can define a certain control parameter, with which you can control the integrity of the e-map. The method allows you to chain all e-map spatial objects with each other, placing the control value of the previous object in the next object, similar to the concept of blockchain. Thus, if any spatial area or the value of any of its attributes changes accidentally or intentionally, a control value mismatch will indicate an attempt to change the integrity of the e-map and perform evidentiary procedures related to copyright issues.

A brief outline of the method is as follows.

- Step 1:** representation of the e-map as an ordered set of polygons.
- Step 2:** building a list of vertices and edges of the current polygon.
- Step 3:** selection of random (secret) edges of the current polygon.
- Step 4:** calculation of the control value from the current polygon.
- Step 5:** setting secret vertices to secret edges defined in step 3 in the ratio defined in step 4.
- Step 6:** rebuilding a list of vertices and edges of the current polygon according to formula (1).
- Step 7:** making the sequence  $\varphi$  according to formula (3).
- Step 8:** move to the next polygon to add control vertices.
- Step 9:** building a list of vertices and edges of the current polygon.
- Step 10:** getting a list of control edges of the current polygon from formula (2).
- Step 11:** setting control vertices of the current polygon defined in step 10 in the ratio defined in step 7.
- Step 12:** go to step 2 if there are still unprocessed polygons.

Upon completion of the algorithm, the user receives a special key that allows him to check the e-map for integrity.

To apply the method, it is necessary for the number of vertices of any spatial object of the e-map to be more than 2048. This value was evaluated as a minimum of the number of control edges needed. If  $l(H^2) = 512$  and it is assumed that each polygon can contain no less edges than is used in formula (3), so the number of vertices is  $16 \cdot 128 = 2048$  (here first multiplier (16) is the max hexadecimal digit, and second multiplier (128) is the quantity of digits). If there are polygons with an insufficient number of vertices in the e-map, then such polygons must either be combined with other polygons with similar values of attribute columns into *multipolygon* objects or deliberately complicated by adding points to random edges.

The method involves placing secret vertices that hide the control value on random edges of spatial objects, which makes it difficult to create an algorithm for extracting them. The key of the first kind provided by the author of the e-map consists of a constant and variable parts, serves to extract such vertices, and must be kept secret. The key of the second kind, obtained as a result of hiding the DWM, allows you to sequentially obtain the original e-map, control the integrity of all objects and confirm the authorship of the card owner. The key information generated by the owner of the e-map for the steganographic system created on the basis of this method allows the owner of the key to perform all the necessary identification and evidentiary procedures like the use of keys in cryptographic systems.

To implement the steganographic method of placing hidden copyright labels on e-map files and checking the integrity of the e-map, the *StegoMap* software product was developed [16]. Using the application, information about the owner of the e-map is embedded in the map, and the polygon attributes are controlled. The application converts a Shapefile format to the GeoJSON format to create a steganographic container. The application is implemented using a microservice and client-server architecture in the form of the *StegoMap* Internet service. For implementation a set of classes was created, which includes methods for hiding information in the polygons of an e-map and extracting that hidden information, as well as several auxiliary classes. To place the hidden label, a hash value is calculated from the identifier of the e-map owner. This identifier is generated when a user registers in the system using standard Angular utilities. The application is implemented using the Java Spring Boot technology.

The user selects an e-map in the .SHP format. As soon as the files are selected from the hard drive, they are converted to the GeoJSON format using the Aspose.GIS library. Then the GeoJSON format file is sent to the Internet service, where the steganographic label is added, and the file with hidden information is sent to the client. The resulting steganographic container (carrier of a secret author's message) is placed in the database and displayed in the tab «Maps» of the application, where the user can upload it. When the map is uploaded, GeoJSON is converted by Aspose.GIS library back into Shapefile that the user can distribute.

To check the map for authenticity the user must click the button «Check map» on the main page and then select the Shapefile that he wants to check in the window that opens. The result of the check from the Internet service is sent to the client. If the map has been changed, the user sees information about these changes.

## Conclusions

A steganographic method is considered that allows embedding and extracting hidden messages when using e-maps as steganographic containers. This method can be applied to the Shapefile or GeoJSON formats of the e-map. The method is based on the sequential modification of the parameters of spatial objects and it can be used to confirm the authorship and control the integrity of the e-map. The method provides the random placement of additional secret vertices containing the user's identifier, and the control of this placement by calculating the control value also using the identifier. The user's identifier consists of a constant and variable parts. All spatial areas of the e-map become connected similarly to the blockchain principle.

Further research is supposed to focus on hiding such an excess steganographic label in the e-map which allows us not only to determine the fact of violation of the integrity of the e-map but also to at least partially restore the spatial objects of the e-map.

## Библиографические ссылки

1. Sheppard E. GIS and society: towards a research agenda. *Cartography and Geographic Information Systems*. 1995;22(1):5–16. DOI: 10.1559/152304095782540555.
2. Longley PA, Goodchild MF, Maguire DJ, Rhind DW. *Geographic information science and systems*. 4<sup>th</sup> edition. Hoboken: Wiley; 2015. XVI, 505 p.
3. Mukherjee F. GIS use by an urban local body as part of e-governance in India. *Cartography and Geographic Information Science*. 2018;45(6):556–569. DOI: 10.1080/15230406.2018.1448304.
4. Rzeszewski M. Geosocial capta in geographical research – a critical analysis. *Cartography and Geographic Information Science*. 2018;45(1):18–30. DOI: 10.1080/15230406.2016.1229221.
5. Захаров МС, Кобзев АГ. *Картографический метод и геоинформационные системы в инженерной геологии*. 3-е издание. Санкт-Петербург: Лань; 2021. 116 с.
6. IHO data protection scheme [Internet]. Monaco: International Hydrographic Organization; 2020 [cited 2022 November 15]. XII, 106 p. (IHO publication S-63; edition 1.2.1). Available from: [https://iho.int/uploads/user/pubs/standards/s-63/S-63\\_2020\\_Ed1.2.1\\_EN\\_Draft\\_Clean.pdf](https://iho.int/uploads/user/pubs/standards/s-63/S-63_2020_Ed1.2.1_EN_Draft_Clean.pdf).
7. López C. Watermarking of digital geospatial datasets: a review of technical, legal and copyright issues. *International Journal of Geographical Information Science*. 2002;16(6):589–607. DOI: 10.1080/13658810210129148.
8. Calagna M, Mancini LV. Information hiding for spatial and geographical data. In: Belussi A, Catania B, Clementini E, Ferrari E, editors. *Spatial data on the web: modeling and management*. Berlin: Springer; 2007. p. 235–258. DOI: 10.1007/978-3-540-69878-4\_11.
9. Aybet J, Al-Saedy H, Farmer M. Watermarking spatial data in geographic information systems. In: Jahankhani H, Hessami AG, Hsu F, editors. *Global security, safety, and sustainability. Proceedings of the 5<sup>th</sup> International conference; 2009 September 1–2; London, England*. Berlin: Springer; 2009. p. 18–26 (Communications in computer and information science; volume 45). DOI: 10.1007/978-3-642-04062-7\_3.
10. Neyman SN, Wijaya YH, Sitohang B. A new scheme to hide the data integrity marker on vector maps using a feature-based fragile watermarking algorithm. In: *Proceedings of 2014 International Conference on Data and Software Engineering (ICODSE); 2014 November 26–27; Bandung, Indonesia*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2014. p. 1–6. DOI: 10.1109/ICODSE.2014.7062486.

11. Блинова ЕА, Урбанович ПП. Защита целостности данных электронных карт стеганографическим методом. В: Галкин ИМ, Романчик ВС, Волков ВМ, Расолько ГА, редакторы. *Веб-программирование и интернет-технологии WebConf2018. Тезисы докладов 4-й Международной научно-практической конференции; 14–18 мая 2018 г.; Минск, Беларусь*. Минск: БГУ; 2018. с. 147.
12. Блинова ЕА, Урбанович ПП. Стеганографический метод на основе встраивания дополнительных значений координат в изображения формата SVG. *Труды БГТУ. Серия 3, Физико-математические науки и информатика*. 2018;1:104–109.
13. Блинова ЕА, Урбанович ПП. Сравнительные особенности использования стеганографических методов в электронных картах. В: Ковалев МЯ, Бибило ПН, Гривачевский АГ, Дудкин АА, редакторы. *Информационные технологии в промышленности, логистике и социальной сфере (ITI'2019). Тезисы докладов X Международной научно-технической конференции; 23–24 мая 2019 г.; Минск, Беларусь*. Минск: ОИПИ НАН Беларуси; 2019. с. 22–24.
14. Блинова ЕА. Стеганографический метод на основе встраивания дополнительных значений координат в картографические данные. *Труды БГТУ. Серия 3, Физико-математические науки и информатика*. 2019;1:69–74.
15. Блинова ЕА, Урбанович ПП. Стеганографический метод на основе встраивания скрытых сообщений в кривые Безье изображений формата SVG. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2021;3: 68–83 (на англ.). DOI: 10.33581/2520-6508-2021-3-68-83.
16. StegoMap [Internet]. 2023 [cited 2023 February 1]. Available from: <https://stashevskaya.belstu.by/about>.

## References

1. Sheppard E. GIS and society: towards a research agenda. *Cartography and Geographic Information Systems*. 1995;22(1):5–16. DOI: 10.1559/152304095782540555.
2. Longley PA, Goodchild MF, Maguire DJ, Rhind DW. *Geographic information science and systems*. 4<sup>th</sup> edition. Hoboken: Wiley; 2015. XVI, 505 p.
3. Mukherjee F. GIS use by an urban local body as part of e-governance in India. *Cartography and Geographic Information Science*. 2018;45(6):556–569. DOI: 10.1080/15230406.2018.1448304.
4. Rzeszewski M. Geosocial capta in geographical research – a critical analysis. *Cartography and Geographic Information Science*. 2018;45(1):18–30. DOI: 10.1080/15230406.2016.1229221.
5. Захаров МС, Кобзев АГ. *Картографический метод и геоинформационные системы в инженерной геологии*. 3-е издание. Санкт-Петербург: Лань; 2021. 116 с.
6. *IHO data protection scheme* [Internet]. Monaco: International Hydrographic Organization; 2020 [cited 2022 November 15]. XII, 106 p. (IHO publication S-63; edition 1.2.1). Available from: [https://iho.int/uploads/user/pubs/standards/s-63/S-63\\_2020\\_Ed1.2.1\\_EN\\_Draft\\_Clean.pdf](https://iho.int/uploads/user/pubs/standards/s-63/S-63_2020_Ed1.2.1_EN_Draft_Clean.pdf).
7. López C. Watermarking of digital geospatial datasets: a review of technical, legal and copyright issues. *International Journal of Geographical Information Science*. 2002;16(6):589–607. DOI: 10.1080/13658810210129148.
8. Calagna M, Mancini LV. Information hiding for spatial and geographical data. In: Belussi A, Catania B, Clementini E, Ferrari E, editors. *Spatial data on the web: modeling and management*. Berlin: Springer; 2007. p. 235–258. DOI: 10.1007/978-3-540-69878-4\_11.
9. Aybet J, Al-Saedy H, Farmer M. Watermarking spatial data in geographic information systems. In: Jahankhani H, Hessami AG, Hsu F, editors. *Global security, safety, and sustainability. Proceedings of the 5<sup>th</sup> International conference; 2009 September 1–2; London, England*. Berlin: Springer; 2009. p. 18–26 (Communications in computer and information science; volume 45). DOI: 10.1007/978-3-642-04062-7\_3.
10. Neyman SN, Wijaya YH, Sitohang B. A new scheme to hide the data integrity marker on vector maps using a feature-based fragile watermarking algorithm. In: *Proceedings of 2014 International Conference on Data and Software Engineering (ICODSE); 2014 November 26–27; Bandung, Indonesia*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2014. p. 1–6. DOI: 10.1109/ICODSE.2014.7062486.
11. Blinova EA, Urbanovich PP. [Protecting the integrity of e-card data steganographic method]. In: Galkin IM, Romanchik VS, Volkov VM, Rasol'ko GA, editors. *Веб-программирование и интернет-технологии WebConf2018. Тезисы докладов 4-й Международной научно-практической конференции; 14–18 мая 2018 г.; Минск, Беларусь* [Web programming and internet technologies WebConf2018. Abstracts of the 4<sup>th</sup> International scientific and practical conference; 2018 May 14–18; Minsk, Belarus]. Minsk: Belarusian State University; 2018. p. 147. Russian.
12. Blinova EA, Urbanovich PP. A steganographic method based on the embedding of additional coordinates into images of SVG format. *Proceedings of BSTU. Issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*. 2018;1:104–109. Russian.
13. Blinova EA, Urbanovich PP. [Comparative features of the use of steganographic methods in electronic maps]. In: Kovaliev MYa, Bibilo PN, Grivachevskii AG, Dudkin AA, editors. *Информационные технологии в промышленности, логистике и социальной сфере (ITI'2019). Тезисы докладов X Международной научно-технической конференции; 23–24 мая 2019 г.; Минск, Беларусь* [Information technologies in industry, logistics and social sphere (ITI'2019). Abstracts of the 10<sup>th</sup> International scientific and technical conference; 2019 May 23–24; Minsk, Belarus]. Minsk: United Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus; 2019. p. 22–24. Russian.
14. Blinova EA. A steganographic method based on the embedding of additional coordinates into spatial data. *Proceedings of BSTU. Issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*. 2019;1:69–74. Russian.
15. Blinova EA, Urbanovich PP. Steganographic method based on hidden messages embedding into Bezier curves of SVG images. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2021;3:68–83. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-3-68-83.
16. StegoMap [Internet]. 2023 [cited 2023 February 1]. Available from: <https://stashevskaya.belstu.by/about>.

Received 15.12.2022 / revised 16.02.2023 / accepted 21.03.2023.

## РАЗРАБОТКА МЕТОДА КЛАССИФИКАЦИИ СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОСЦИЛЛЯТОРА ЧЖУА В РАМКАХ РЕЗЕРВУАРНОГО ПОДХОДА

В. А. СЫЧЁВ<sup>1)</sup>, А. М. КРОТ<sup>1)</sup>, Г. А. ПРОКОПОВИЧ<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,  
ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Беларусь

Рассмотрены практические аспекты обработки сигналов с использованием хаотического осциллятора Чжуа (в русскоязычной литературе также распространен вариант Чуа) в качестве вычислительной среды. Исследование мотивировано растущим интересом к новым способам вычислений с применением свойств, изначально присущих различным сложным системам под общим названием «резервуарные вычисления». Показано, что осциллятор Чжуа может выполнять нелинейное преобразование входных сигналов и обладает кратковременной памятью, а следовательно, соответствует требованиям к резервуарным вычислителям и подходит для использования в качестве основы для построения вычислительных устройств. Для управления осциллятором Чжуа введен специальный параметр, позволяющий схеме в хаотическом режиме генерировать нелинейные колебания, для которых форма аттрактора в пространстве состояний однозначно определяется управляющим параметром. Кроме того, симметрия аттрактора используется для оценки внешнего воздействия на осциллятор. В итоге разработан способ управления осциллятором и считывания его состояния, позволяющий применять осциллятор Чжуа в качестве так называемого резервуара в рамках резервуарного подхода. Реализация метода обработки сигналов показана на примере построения классификатора сигналов квадратной, треугольной и синусоидальной формы. Результаты моделирования и прототипирования электронного устройства демонстрируют возможность использования осциллятора Чжуа как основы для построения аналоговых вычислительных модулей, направленных на решение специализированных задач (аналоговых ускорителей), в гибридных аналого-цифровых системах управления непромышленными роботами и устройствах интернета вещей.

**Ключевые слова:** детерминированный хаос; осциллятор Чжуа; классификация; аналоговые вычислительные машины; обработка сигналов.

**Благодарность.** Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф22КИ-012 «Проектирование самообучающейся модели мобильного робота на основе визуальной одометрии и высокопроизводительных арифметических устройств») и государственной программы научных исследований «Цифровые и космические технологии, безопасность человека, общества и государства» на 2021–2025 гг. (задание 1.3.1 (Т31)).

### Образец цитирования:

Сычѳв ВА, Крот АМ, Прокопович ГА. Разработка метода классификации сигналов с использованием осциллятора Чжуа в рамках резервуарного подхода. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;1:88–101.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-88-101>

### For citation:

Sychou UA, Krot AM, Prakapovich RA. The development of a signal classification method based on Chua's oscillator within the reservoir computing framework. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;1:88–101. Russian.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-88-101>

### Авторы:

**Владислав Анатольевич Сычѳв** – научный сотрудник лаборатории робототехнических систем.

**Александр Михайлович Крот** – доктор технических наук, профессор; заведующий лабораторией моделирования самоорганизующихся систем.

**Григорий Александрович Прокопович** – кандидат технических наук, доцент; заведующий лабораторией робототехнических систем.

### Authors:

**Uladzislau A. Sychou**, researcher at the laboratory of robotic systems.

[vsychyov@robotics.by](mailto:vsychyov@robotics.by)

<https://orcid.org/0000-0002-1355-8965>

**Alexander M. Krot**, doctor of science (engineering), full professor; head of the laboratory of self-organising system modelling.

[alxkrot@newman.basnet.by](mailto:alxkrot@newman.basnet.by)

<https://orcid.org/0000-0003-0705-010X>

**Ryhor A. Prakapovich**, PhD (engineering), docent; head of the laboratory of robotic systems.

[rprakapovich@robotics.by](mailto:rprakapovich@robotics.by)

<http://orcid.org/0000-0002-3412-9174>

## THE DEVELOPMENT OF A SIGNAL CLASSIFICATION METHOD BASED ON CHUA'S OSCILLATOR WITHIN THE RESERVOIR COMPUTING FRAMEWORK

*U. A. SYCHOU<sup>a</sup>, A. M. KROT<sup>a</sup>, R. A. PRAKAPOVICH<sup>a</sup>*

*<sup>a</sup>United Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus,  
6 Surhanava Street, Minsk 220012, Belarus*

*Corresponding author: U. A. Sychou (vsychyov@robotics.by)*

Practical aspects of signal processing using Chua's chaotic oscillator as a computational substrate are considered. The research is inspired by a growing interest in the framework of unconventional computations that involve the inherent properties of different complex systems known as the «reservoir computing framework». The study proves that Chua's oscillator meets such a requirement for being used as computation media as the ability to non-linearly transform input data and possesses a short-term memory. To control Chua's oscillator a special control parameter is introduced to enable the circuit in the chaotic mode to produce non-linear oscillations, for which the form of the attractor in the state space is definitely determined by the control parameter. Besides, the symmetry of the attractor is used to estimate the external influence on the oscillator. As a result, the control and readout methods are developed to apply Chua's oscillator as the so-called reservoir according to the reservoir computing framework. To exemplify the implementation of the signal processing method according to the reservoir computing framework a classifier of square, triangle and sinusoidal waves is developed. The simulation as well as prototyping of the electronic device show prospects to use Chua's oscillator as the basis of an analog computations accelerator to perform narrow tasks in hybrid digital-analog control systems for non-industrial robots and smart devices.

**Keywords:** deterministic chaos; Chua's oscillator; classification; analog computing; signal processing.

**Acknowledgements.** This work was carried out with the financial support of the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project F22KI-012 «Unsupervised learning model based visual odometry for mobile robot and its high-performance arithmetic units design») and the state program of scientific research «Digital and space technologies, security of man, society and state» for 2021–2025 (task 1.3.1 (T31)).

### Введение

Технологии удаленного мониторинга и управления в последние годы активно внедряются в промышленность, городскую среду, отдельные дома и квартиры. Однако лежащим в их основе устройствам интернета вещей и беспроводным сенсорным сетям свойственна ограниченность ресурсов (как вычислительных, так и энергетических) [1]. Обеспечить повышение качества обслуживания потребителей такими системами может использование новых энергоэффективных методов обработки сигналов, данных и методов машинного обучения.

Одним из перспективных подходов к созданию энергоэффективных методов обработки сигналов, данных и методов машинного обучения считается применение специализированных аналоговых компьютеров, построенных на новейшей элементной базе [2; 3]. К примеру, в работе [4] представлен аналоговый аппаратный ускоритель сети глубокого обучения, реализующий функции кластерного анализа и извлечения характерных особенностей входных сигналов для использования в системах распознавания изображений. Данный ускоритель отличается высокой вычислительной эффективностью. Более того, он выполнен в виде интегральной микросхемы по технологии 0,13 мкм. В отличие от современных центральных и графических процессоров подобная микросхема может быть изготовлена на большинстве заводов по производству полупроводниковых приборов.

В то же время аналоговые архитектуры сложны в реконфигурировании. Частично этот недостаток преодолен в гибридных аналого-цифровых вычислительных устройствах, которые были широко распространены с середины 1950-х гг. и до их вытеснения цифровыми компьютерами [5]. В настоящий момент интерес к гибридным системам снова растет. К примеру, в работе [6] представлена гибридная система управления, которая позволяет самобалансирующему роботу реагировать на внешние воздействия быстрее, чем цифровая система сопоставимых размеров со сходным энергопотреблением. В упомянутом роботе специализированные аналоговые ускорители выполняют функции ПИД-регулятора и фильтра Калмана. Для повышения скорости и точности настройки аналоговых ускорителей применяются мемристоры [7]. Показано, что благодаря использованию мемристоров можно качественно улучшить параметры гибридных систем в сравнении с параметрами ранее распространенных архитектур. В то же время в гибридной системе управления роботом аналоговые ускорители отвечают за низкоуровневые функции управления двигателями по сигналам от датчиков для выполнения динамической стабилизации робота. Функции же

высокого уровня, к которым принято относить обработку изображений, картографирование, планирование пути, реализуются целиком на цифровой платформе. Но области применения аналоговых вычислителей не ограничиваются низкоуровневыми функциями. Существуют иные подходы, вовлекающие аналоговые устройства в решение высокоуровневых задач.

В теории автоматического управления получил распространение метод функциональных рядов Вольтерры [8]. Разложение в ряд Вольтерры, позволяющее представить модель нелинейной стационарной системы в виде ряда по многомерным интегралам свертки, используется для синтеза и анализа нелинейных систем с памятью.

Кроме того, было доказано [9], что ряды Вольтерры, в свою очередь, могут быть аппроксимированы двухуровневым процессом, первый уровень которого должен быть динамическим, а именно включать в себя память, и может являться линейным, а второй уровень должен быть нелинейным и может являться статическим.

Последующие исследования показали, что двухуровневый процесс необязательно конструируется целенаправленно. Многие сложные системы различной природы изначально являются нелинейными и обладают свойством кратковременной памяти. В частности, эти особенности присущи некоторым искусственным нейронным сетям (ИНС) и другим сложным системам [10].

На основе перечисленных теоретических результатов возникла практика применения нелинейных динамических систем (НДС) для решения задач аппроксимации, классификации и управления с использованием свойств, изначально присущих НДС, она получила название резервуарного подхода (РП) (в англоязычной литературе используется термин *reservoir computing framework*) [11]. Данный подход предусматривает использование физических систем в качестве вычислительной среды и позволяет реализовать алгоритмы машинного обучения без адаптивного обновления каких бы то ни было весовых коэффициентов, за исключением тех, которые необходимы для подготовки входных данных и обработки результатов. Рост интереса к описываемой парадигме объясняется высокой энергоэффективностью вычислений в сочетании с разнообразием вариантов аппаратной реализации [12]. Наибольшую эффективность РП демонстрирует при решении задач прогнозирования динамики сложных систем. Не уступая в качестве прогнозирования ИНС глубокого обучения, РП требует значительно меньше вычислительных ресурсов и данных для обучения, что подтверждается различными примерами. В частности, на основе нелинейной аналоговой схемы с запаздывающей обратной связью, реализующей уравнение Мэки – Гласса, был построен гибридный резервуарный вычислитель с одним узлом. Устройство способно распознавать цифры, произнесенные голосом, а также прогнозировать временные ряды [13]. Помимо электронных схем, РП продемонстрирован на механических, оптических и других динамических системах [14].

Анализ теоретических основ РП и практики его применения позволил сформулировать основные требования к резервуарам, такие как нелинейность, зависимость выходного сигнала от истории сигналов на входе, кратковременная память [11]. Стоит отметить, что перечисленным требованиям отвечают и многие НДС с хаотическим поведением. Таким образом, применение хаотических осцилляторов для реализации резервуаров может рассматриваться как перспективный путь усовершенствования алгоритмов машинного обучения. Более того, современные аналоговые электронные компоненты, включая мемристоры, позволяют эффективно реализовать резервуары на основе хаотических осцилляторов, так же как и устройства подготовки и считывания данных.

Многие хаотические осцилляторы являются простыми устройствами с точки зрения конструкции. Однако среди электронных схем особое место занимает схема Чжуа. Это единственный хаотический осциллятор, хаос в котором подтвержден исследованиями электронной схемы, компьютерным моделированием и математическим анализом [15]. На данный момент хаотический осциллятор Чжуа является наиболее изученным и описанным и при этом достаточно простым. Возможность применения всех трех методов исследования мотивирует к использованию осциллятора Чжуа в качестве вычислительной среды в рамках РП, как это показано, например, в статье [16]. Утверждается, что вычислительное устройство на основе схемы Чжуа демонстрирует высокую производительность в задачах нелинейной регрессии и нелинейной классификации.

В публикации [17] показано, как схема Чжуа, построенная с использованием мемристоров, выполняет классификацию образов. Работа классификатора рассмотрена на примере классификации сигналов треугольной и синусоидальной формы и сигналов ЭКГ.

Важно отметить, что применение осциллятора Чжуа для решения задач обработки сигналов началось вскоре после появления данной схемы, задолго до возникновения концепции резервуарных вычислений. Чаще всего она использовалась в качестве искусственного нейрона в составе ИНС. В частности, в работе [18] представлена ИНС, которая продемонстрировала возможность распознавания рукописных цифр. В статье [19] предложена ИНС, выполняющая функции ассоциативной памяти. В публикации [20] упомянутая архитектура реализована аппаратно.

Однако схема Чжуа не получила широкого применения в задачах обработки информации, несмотря на благоприятные для этого характеристики, описанные выше. Данное обстоятельство обусловлено несколькими причинами. Так, для успешного применения схемы Чжуа в рамках РП необходимо решить задачу идентификации динамики системы и связанных с ней изменений входного сигнала. В настоящее время есть множество методов, разработанных специально для анализа НДС с хаотическими режимами. В частности, для реализации механизма считывания состояния осциллятора Чжуа в работе [16] был использован бифуркационный анализ. Для количественной оценки хаоса применяются экспонента Ляпунова и фрактальная размерность [10], а также факт самосинхронизации сигналов с выходов ядер в матричной декомпозиции [22; 23]. Однако все перечисленные методы являются сравнительно ресурсоемкими. Кроме того, существующие методы управления хаотическими осцилляторами хотя и хорошо разработаны, но не адаптированы для решения задач обработки информации. Не менее важно и то, что большинство описываемых примеров физических реализаций РП демонстрируют работоспособность принципов, лежащих в их основе, только на узком круге задач.

Таким образом, настоящее исследование ставит своей целью разработку способа управления хаотическим осциллятором Чжуа и считывания его состояния, позволяющего использовать осциллятор в рамках РП для классификации временных рядов. В дальнейшем этот способ получит практическое применение в области обработки сигналов в виде электронного устройства.

### Осциллятор Чжуа в качестве физического резервуара

Пусть имеются обучающая выборка  $u^{\text{train}}(t)$ , представляющая собой входной сигнал, и соответствующий ей желаемый выходной сигнал  $y^{\text{train}}(t)$ . Согласно РП [10] необходимо разработать такой фильтр  $F$ , который при получении на входе сигнала  $u^{\text{train}}(t)$  выдаст на выходе сигнал  $\hat{y}^{\text{train}}(t)$ , максимально близкий к сигналу  $y^{\text{train}}(t)$ . Для этого следует подготовить многомерную динамическую систему  $X(t)$ , которая выполняет функцию резервуара и может управляться сигналом  $u^{\text{train}}(t)$ , при этом переменные пространства состояний такой системы  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , можно наблюдать и записывать. На следующем шаге на вход системы подается сигнал  $u^{\text{train}}(t)$  и записывается соответствующий ответный сигнал  $x_i^{\text{train}}(t)$ . Далее находится функция  $F$ , которая позволит преобразовать записанный вектор состояний системы  $(x_1^{\text{train}}(t), \dots, x_n^{\text{train}}(t))$  в выходной сигнал  $\hat{y}^{\text{train}}(t)$ , аппроксимирующий желаемый сигнал  $y^{\text{train}}(t)$ . Процедура использования резервуара заключается в том, чтобы подать на вход новый сигнал  $u(t)$ , записать изменения переменных пространства состояний  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  и вычислить выходной сигнал  $\hat{y}(t) = F(x(t))$ . Исходя из предположения о том, что осциллятор Чжуа может быть подходящим вычислительным средством в рамках РП, необходимо разработать способ управления осциллятором и считывания его состояния, соответствующий описанной выше схеме. При этом основным требованием является существование зависимости траектории системы в пространстве состояний от управляющего сигнала *без необходимости получить некую специфическую динамику осциллятора*.

Рассмотрим далее систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающую осциллятор с кубической нелинейностью и дополнительным управляющим параметром:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha(y - x^3 - cx) + \delta, \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + z, \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta y, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x, y, z$  – переменные пространства состояний;  $\alpha, \beta, c$  – параметры;  $\delta$  – сигнал управления. Хаотическая динамика наблюдается при  $\alpha = 15,6$ ,  $\beta = 28$ ,  $c = -0,3$ .

Для управления осциллятором Чжуа чаще всего используется параметр  $\alpha$ . В частности, в публикациях [22; 24] показано, как от параметра  $\alpha$  зависят динамические режимы осциллятора Чжуа. Однако в системе (1) присутствует дополнительный параметр  $\delta$ , который изначально был введен в работе [24] как коэффициент связи между двумя осцилляторами, работающими в режиме синхронизации. В настоящем исследовании  $\delta$  является самостоятельным параметром, влияющим (как будет показано ниже) на динамику осциллятора. Далее исследуются случаи, когда параметр  $\delta$  остается неизменным либо изменяется кратковременно.

**Динамика осциллятора при фиксированном значении управляющего параметра.** Рассмотрим результаты численного моделирования системы (1) при различных значениях управляющего параметра. Оно проведено в среде *MATLAB* с помощью встроенного решателя дифференциальных уравнений *ode45*, автоматически определяющего параметры решения. Здесь и далее приняты следующие начальные условия:  $x_0 = 0,02, y_0 = 0, z_0 = 0$ . Изображения аттракторов системы (1) для  $\delta = 0,2$  и  $\delta = -0,4$  представлены на рис. 1, *a* и *б*, соответственно. Графики изменения во времени первой переменной пространства состояний системы (1) для  $\delta = 0,2$  и  $\delta = -0,4$  приведены на рис. 2. Можно видеть, что при  $\delta = 0,2$  колебания сосредоточены преимущественно в положительной области, а при  $\delta = -0,4$  – в отрицательной.

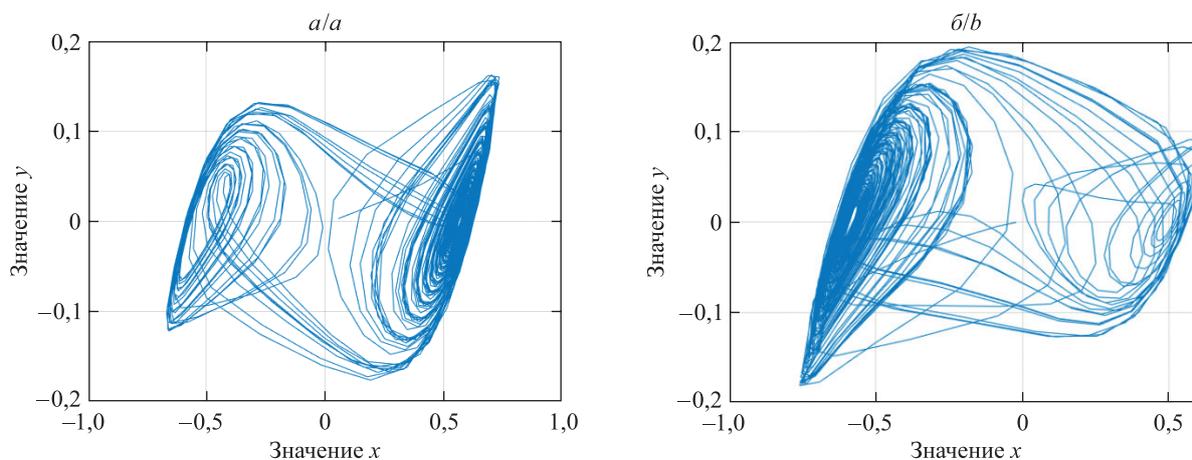


Рис. 1. Формы аттракторов для различных значений управляющего параметра  $\delta$ :  
 $a - \delta = 0,2; b - \delta = -0,4$

Fig. 1. The forms of attractors for different values of control parameter  $\delta$ :  
 $a - \delta = 0.2; b - \delta = -0.4$

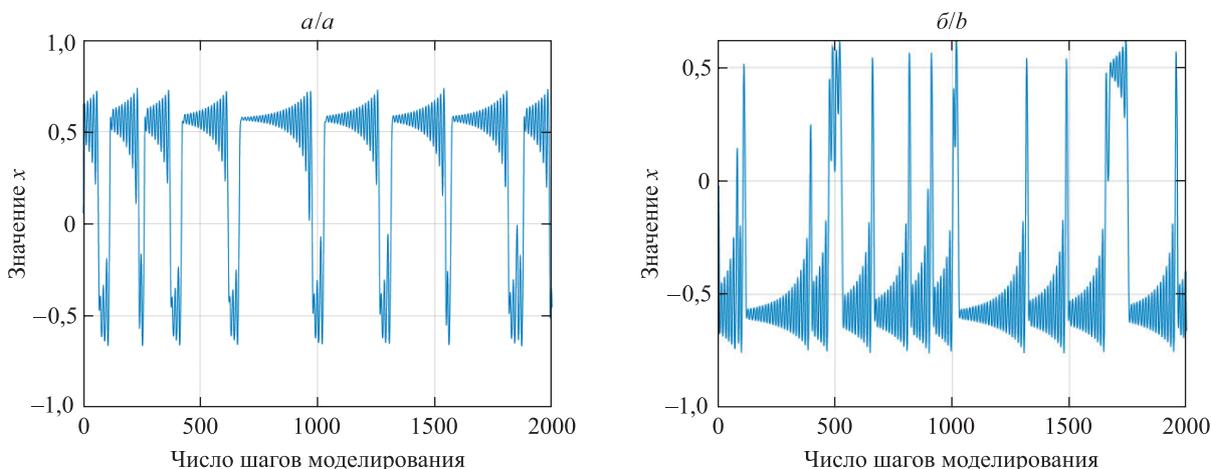


Рис. 2. Динамика первой переменной пространства состояний системы (1) при различных значениях управляющего параметра  $\delta$ :  
 $a - \delta = 0,2; b - \delta = -0,4$

Fig. 2. The dynamics of the first state-space variable for the system (1) at different values of control parameter  $\delta$ :  
 $a - \delta = 0.2; b - \delta = -0.4$

Общее представление о влиянии управляющего параметра  $\delta$  на траекторию системы (1) в пространстве состояний дает бифуркационная диаграмма на рис. 3, *a*. Для сравнения на рис. 3, *б*, приведена бифуркационная диаграмма при управлении по параметру  $\alpha$ . Область значений управляющего параметра, в которой существуют хаотические колебания и наблюдается аттрактор типа «двойной завиток», отмечена красным цветом. Можно видеть, что при больших отрицательных значениях параметра  $\delta$  колебания происходят только в отрицательной области. С ростом величины  $\delta$  все больше колебаний наблюдается в положительной области и все меньше – в отрицательной, до тех пор пока все колебания не сосредоточатся

в положительной области. Для численной оценки описанного явления удобно использовать *среднее арифметическое значение первой переменной  $x$*  (обозначим его через  $\bar{x}$ ), вычисляемое на некотором временном интервале. Далее  $\bar{x}$  будет рассчитываться для всего времени моделирования с помощью функции `mean()` среды *MATLAB*. Для случаев, проиллюстрированных на рис. 1 и 2, при 2000 шагов моделирования  $\bar{x} = 0,364\ 08$  (для  $\delta = 0,2$ ) и  $\bar{x} = -0,438\ 48$  (для  $\delta = -0,4$ ). Графики зависимости величины  $\bar{x}$  от управляющего параметра при управлении по параметрам  $\delta$  и  $\alpha$  показаны на рис. 4, *a* и *б*, соответственно.

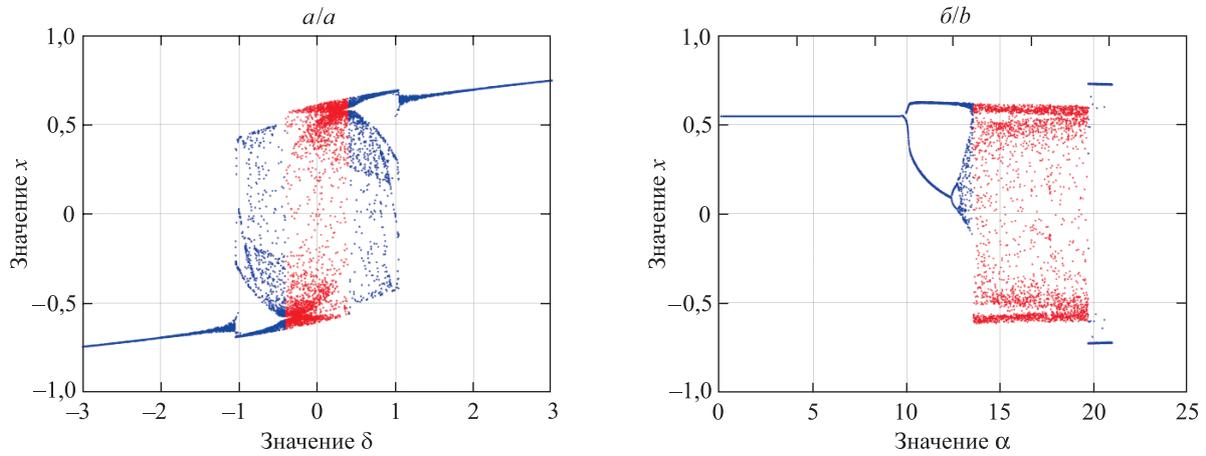


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы для системы (1):  
*a* – при управлении по параметру  $\delta$ ; *б* – при управлении по параметру  $\alpha$  ( $\delta = 0$ )

Fig. 3. Bifurcation diagrams for system (1):  
*a* – for the  $\delta$ -control; *b* – for the  $\alpha$ -control ( $\delta = 0$ )

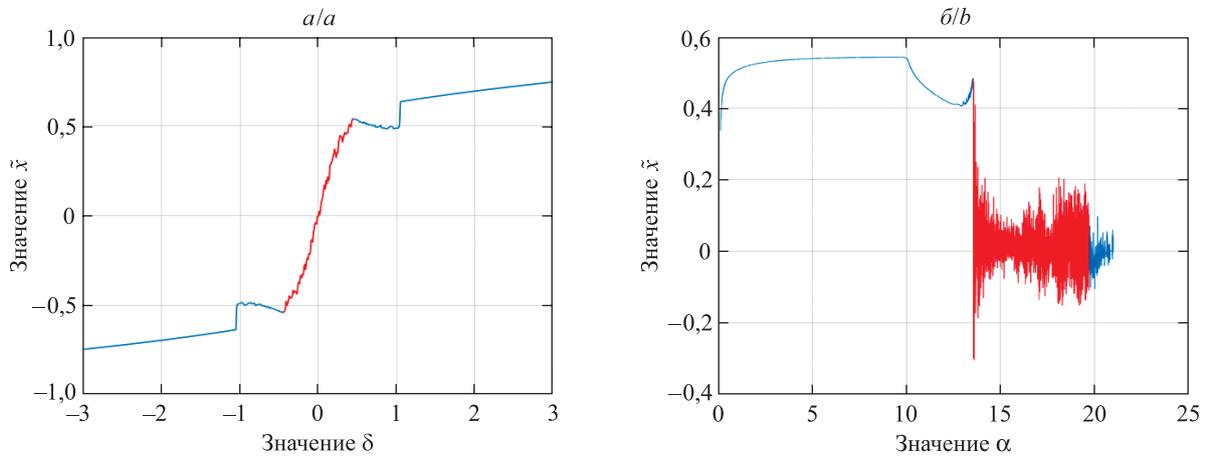


Рис. 4. Зависимость среднего арифметического значения первой переменной пространства состояний  $\bar{x}$  от управляющего параметра:  
*a* – при управлении по параметру  $\delta$ ; *б* – при управлении по параметру  $\alpha$  ( $\delta = 0$ )

Fig. 4. The dependence of the mean value of the first state-space variable  $\bar{x}$  on the control parameter:  
*a* – for the  $\delta$ -control; *b* – for the  $\alpha$ -control ( $\delta = 0$ )

Как видно из рис. 4, *a*, значения управляющего параметра, при которых наблюдается хаотический режим, формируют на графике нелинейную кривую, в отличие от случая управления по параметру  $\alpha$  (см. рис. 4, *б*), где в хаотическом режиме величина  $\bar{x}$  колеблется относительно нуля без образования каких-либо явных трендов.

**Динамика осциллятора при импульсной форме управляющего параметра.** Управляющий параметр для осциллятора может быть представлен в виде импульса, амплитуда, ширина, полярность и время появления которого позволяют кодировать информацию. На рис. 5, *a*, изображен график переменной  $x(t)$  для варианта, когда  $\delta = 0$ . В этом случае при 250 шагах моделирования  $\bar{x} = 0,034\ 433$ . При подаче на вход системы на 80-м шаге импульса  $\delta = 0,4$  длительностью 1 шаг моделирования  $\bar{x} = -0,003\ 811\ 6$  (рис. 5, *б*).

Как показано на рис. 5, *в*, если ширина импульса становится многократно больше времени, которое можно условно назвать периодом колебаний<sup>1</sup> по  $x$  (60–300-й шаги моделирования,  $\delta = 0,4$ ), система переходит в режим работы при фиксированном значении параметра, в этом случае  $\tilde{x} = 0,19534$ . Из рис. 5, *г*, видно, что, когда длинный импульс прерывается коротким (141–142-й шаги моделирования,  $\delta = 0$ ),  $\tilde{x} = 0,21467$ . Кроме того, в двух последних случаях заметны отличия в форме колебаний  $x$ . В частности, на рис. 5, *г*, в районе 173-го шага моделирования колебания уходят в отрицательную область и сохраняются там до 181-го шага, чего не наблюдается на рис. 5, *в*.

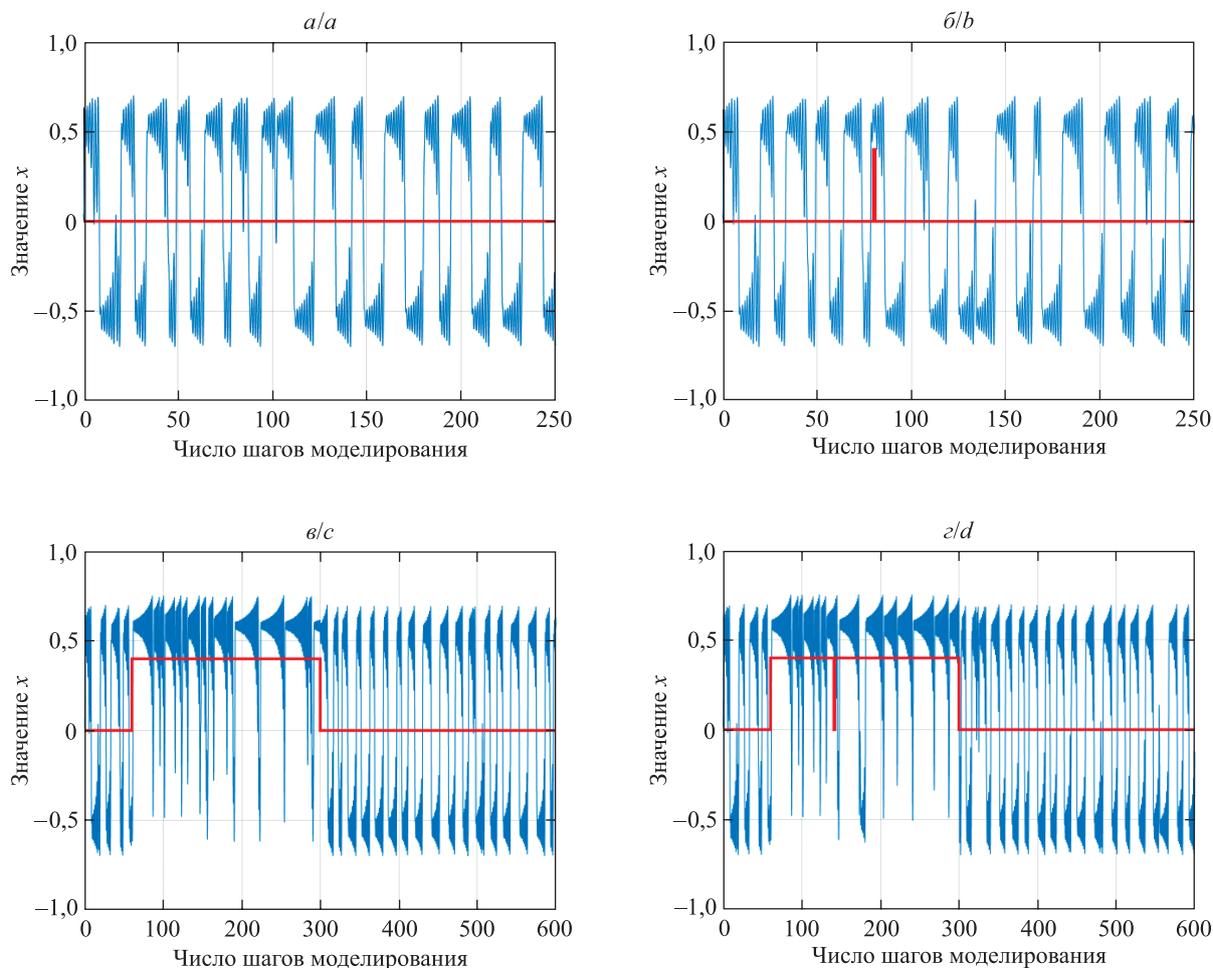


Рис. 5. Влияние управляющих сигналов на динамику системы (1) при управлении по параметру  $\delta$ :  
*a* – отсутствие импульса; *b* – короткий импульс; *в* – длинный импульс; *г* – сложный импульс

Fig. 5. The influence of control signals on the dynamic of system (1) under the  $\delta$ -control:  
*a* – without impulse; *b* – the short impulse; *c* – the long impulse; *d* – the complex impulse

На величину  $\tilde{x}$  влияют как форма импульса, так и число шагов моделирования. Если оно достаточно велико, разница в значении  $\tilde{x}$  для случаев отсутствия и наличия импульса со временем уменьшается. Для короткого импульса (рис. 6, *a* и *б*) отмечено, что до 94-го шага импульс, поданный на 80-м шаге, не оказывает значительного влияния на  $\tilde{x}$ . После 122-го шага расхождение начинает увеличиваться, достигая наибольшей величины в районе 200-го шага моделирования. В районе 1000-го шага кривые сходятся. И хотя далее они не становятся полностью идентичными или параллельными, уже не удастся идентифицировать систему, подвергшуюся импульсному воздействию, по величине  $\tilde{x}$ . Как видно из рис. 6, *в*, длинный импульс вызывает рост величины  $\tilde{x}$ . В свою очередь, рис. 6, *г*, показывает, что прерывание длинного импульса не приводит к значительным изменениям в зависимости  $\tilde{x}$  от числа шагов моделирования.

<sup>1</sup>Термин «период колебаний» использован здесь для обозначения среднего времени, в течение которого траектория системы остается в положительной области, прежде чем перейти в отрицательную область, и наоборот.

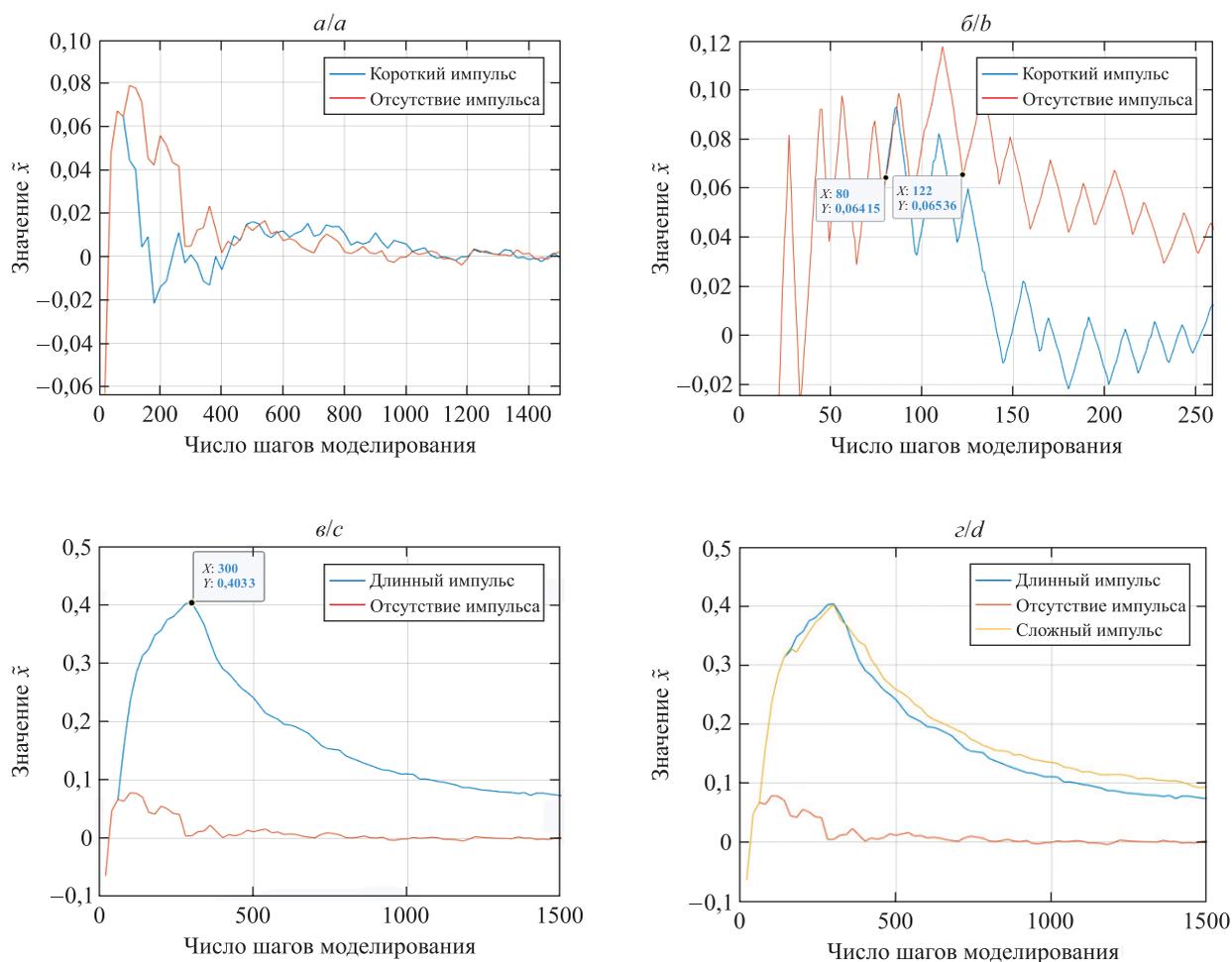


Рис. 6. Эффект кратковременной памяти:  
 а – короткий импульс (дискретность 20 шагов);  
 б – увеличенный фрагмент для короткого импульса (дискретность 1 шаг);  
 в – длинный импульс; г – сложный импульс

Fig. 6. Short-term memory effect:  
 a – the short impulse (discrete 20 steps); b – enlarged fragment  
 for the short impulse (discrete 1 step); c – the long impulse; d – the complex impulse

### Классификатор сигналов на основе осциллятора Чжуа

Предлагаемый подход к управлению осциллятором и считыванию данных применен для построения классификатора квадратного, треугольного и синусоидального сигналов.

Для этого авторами разработан программный решатель в среде *MATLAB* на основе метода Рунге – Кутты четвертого порядка, который позволяет изменять параметры системы обыкновенных дифференциальных уравнений в процессе решения и использовать фиксированный шаг времени.

С помощью инструмента *audioOscillator* среды *MATLAB* создано по 300 образцов (семплов) сигналов каждого типа для настройки (обучения) классификатора. Аналогичная выборка сформирована для тестирования. К числу параметров образцов относятся смещение фазы, значения частоты, амплитуды и смещения уровня сигнала относительно нуля. Смещение фазы (*PhaseOffset*) каждого сигнала задается случайным образом с помощью генератора псевдослучайных чисел, лежащих в нормализованном интервале  $[0; 1]$ , который соответствует диапазону  $[0; 2\pi]$ . Частота (*f*) задается случайным образом в диапазоне 20–40 Гц. Для оценки состояния осциллятора используется величина  $\tilde{x}$ , вычисляемая за все время моделирования для каждого сигнала. Графики фрагментов тестовых сигналов и соответствующих им колебаний по переменной *x* представлены на рис. 7. Хорошо видны различия в форме колебаний осциллятора в зависимости от управляющего сигнала.

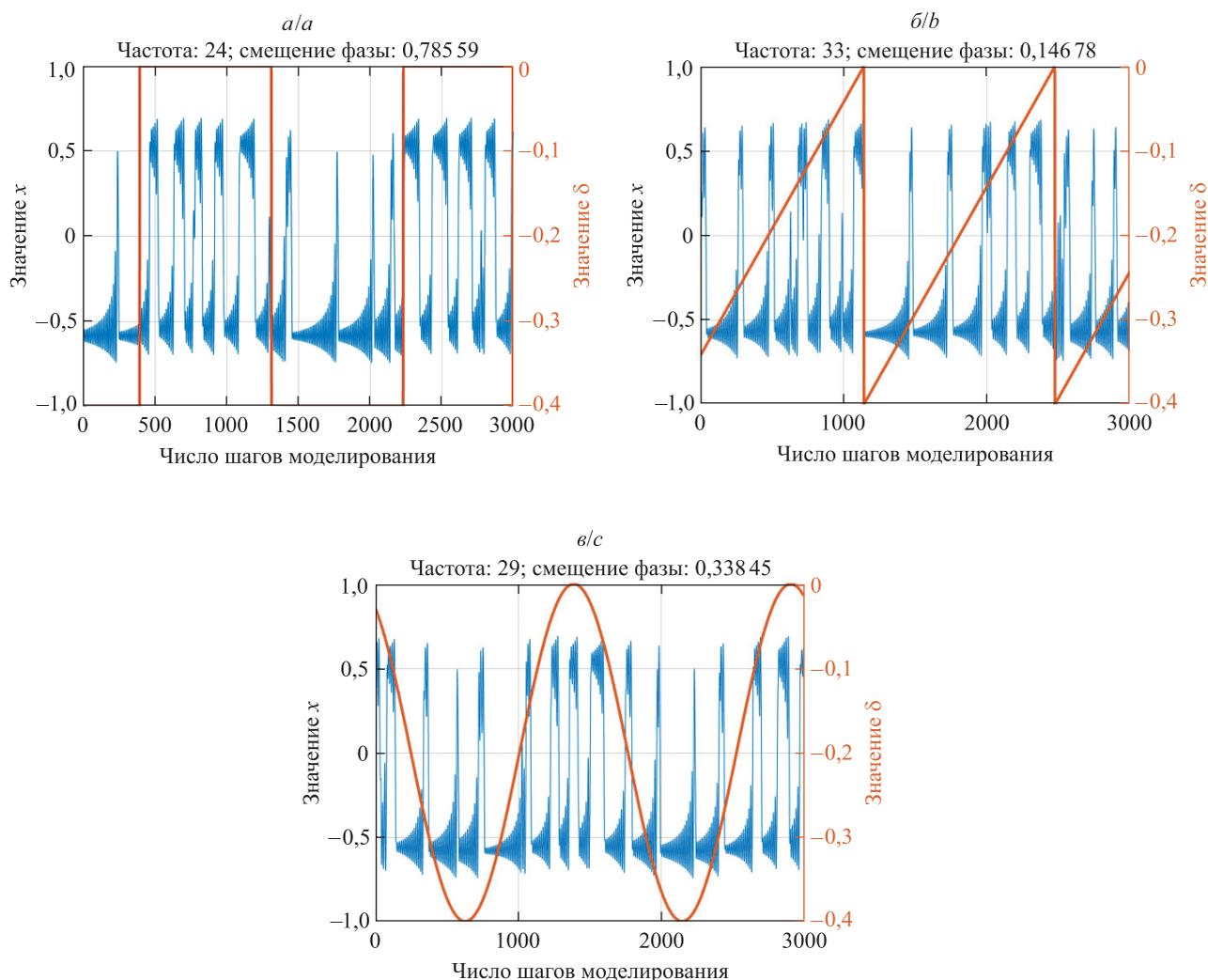


Рис. 7. Влияние тестовых сигналов (линии красного цвета) на динамику осциллятора:  
 а – квадратный сигнал; б – треугольный сигнал; в – синусоидальный сигнал  
 Fig. 7. The dynamic of the oscillator under the influence of the different control signals (red lines):  
 a – square signal; b – triangle signal; c – sinusoidal signal

Оценивая величину  $\tilde{x}$  для различных образцов, можно сделать вывод, что  $\tilde{x}$  зависит от формы управляющего сигнала, как показано на рис. 8, где каждая точка соответствует одному значению  $\tilde{x}$  для каждого из сигналов обучающей выборки. Средние значения  $\tilde{X} = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^E \tilde{x}_i$  ( $E$  – размер обучающей выборки) для каждой группы сигналов могут использоваться как опорные значения многоуровневого компаратора при выполнении классификации. Таким образом, функцию, выполняемую искомым фильтром  $F$ , можно описать в виде

$$F(\delta) = \begin{cases} k_1, & \text{если } (|\tilde{X}_{\sin} - \tilde{x}| < |\tilde{X}_{\text{triangle}} - \tilde{x}|) \wedge (|\tilde{X}_{\sin} - \tilde{x}| < |\tilde{X}_{\text{sqr}} - \tilde{x}|), \\ k_2, & \text{если } (|\tilde{X}_{\text{triangle}} - \tilde{x}| < |\tilde{X}_{\sin} - \tilde{x}|) \wedge (|\tilde{X}_{\text{triangle}} - \tilde{x}| < |\tilde{X}_{\text{sqr}} - \tilde{x}|), \\ k_3, & \text{если } (|\tilde{X}_{\text{sqr}} - \tilde{x}| < |\tilde{X}_{\text{triangle}} - \tilde{x}|) \wedge (|\tilde{X}_{\text{sqr}} - \tilde{x}| < |\tilde{X}_{\sin} - \tilde{x}|), \end{cases}$$

где  $\delta$  – сигнал управления;  $k_1, k_2, k_3$  – классы сигналов;  $\tilde{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$  ( $x$  – первая переменная системы (1),  $N$  – число шагов моделирования);  $\tilde{X}_{\sin}$  – опорное значение для синусоидального сигнала;  $\tilde{X}_{\text{triangle}}$  – опорное значение для треугольного сигнала;  $\tilde{X}_{\text{sqr}}$  – опорное значение для квадратного сигнала.

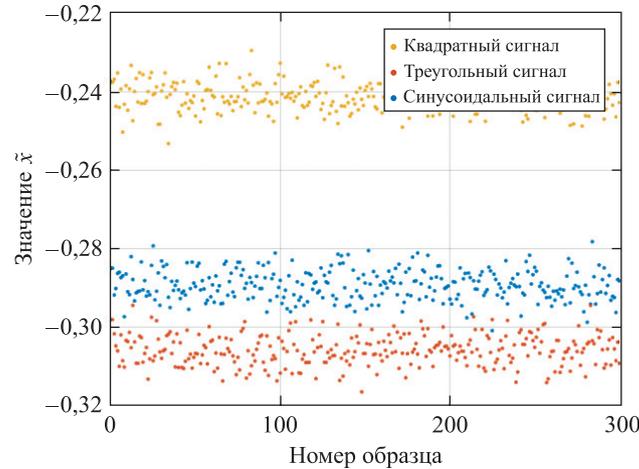


Рис. 8. Средние арифметические значения первой переменной пространства состояний  $\tilde{x}$  для различных управляющих сигналов

Fig. 8. The mean values  $\tilde{x}$  of the first state-space variable for the different control signals

Амплитуда и смещение сигнала относятся к параметрам, с помощью которых производится настройка резервуарного вычислителя. Процесс настройки сводится к тому, чтобы добиться наибольшей разницы между величинами  $\tilde{X}_{\sin}$ ,  $\tilde{X}_{\text{triangle}}$ ,  $\tilde{X}_{\text{sqr}}$ .

Зависимость доли ошибок классификации от числа шагов моделирования представлена на рис. 9.

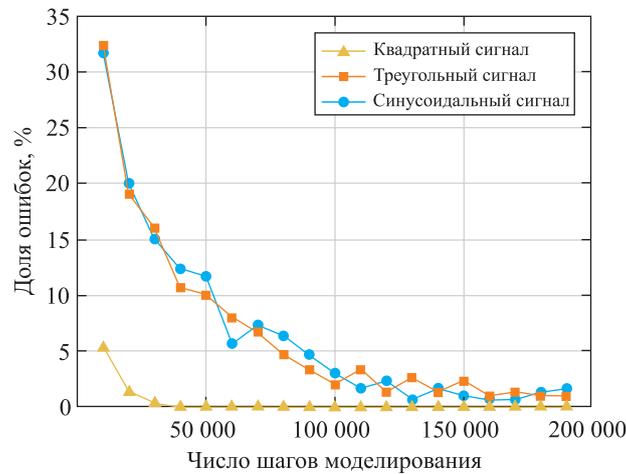


Рис. 9. Зависимость доли ошибок классификации от времени моделирования

Fig. 9. The dependence of the classification error rate on the simulation time

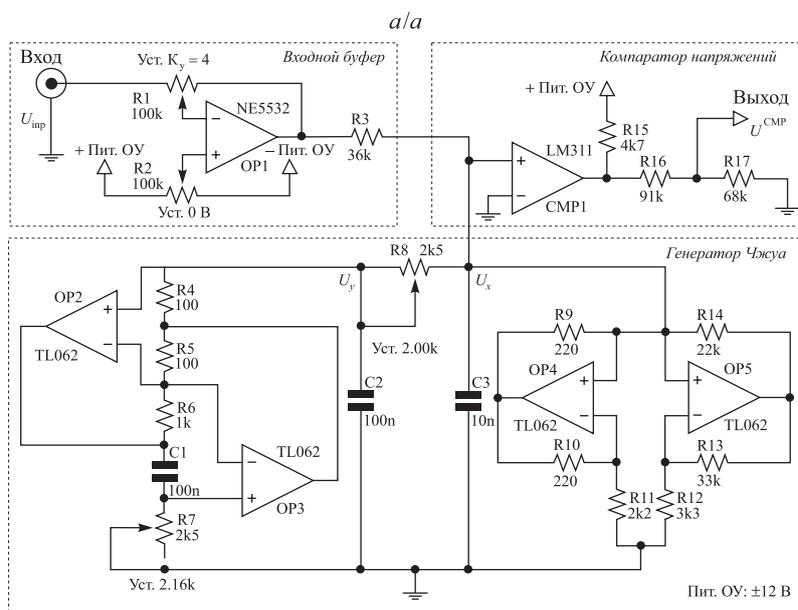
Видно, что при большей длительности моделирования доля ошибок классификации быстро уменьшается. Уже при 40 000 шагов моделирования все квадратные сигналы классифицируются безошибочно. Минимальное количество ошибок классификации (две ошибки для синусоидальных сигналов и три ошибки для треугольных сигналов) достигнуто при 160 000 шагов. Далее доля ошибочно классифицированных сигналов незначительно колеблется. Ряд представленных наблюдений за динамикой осциллятора Чжуа носят эмпирический характер, однако позволяют заключить, что осциллятору в хаотическом режиме при управлении по параметру  $\delta$  свойственны инертность и кратковременная память. Принимая во внимание нелинейную зависимость выходной величины  $\tilde{x}$  от управляющего параметра  $\delta$ , представленную на рис. 5, а, можно сделать вывод, что осциллятор Чжуа, управляемый с помощью параметра  $\delta$ , отвечает всем требованиям, предъявляемым к резервуарам. В свою очередь, среднее арифметическое значение первой переменной пространства состояний  $\tilde{x}$  может использоваться для грубой оценки динамики системы.

## Заклучение

Исследованы свойства осциллятора Чжуа, позволяющие успешно применять его для обработки сигналов. Разработаны способ управления осциллятором и оценки его состояния, дающий возможность однозначно связать управляющий сигнал с формой колебаний осциллятора, и архитектура устройства, реализующая предлагаемый подход (см. приложение). Представленный способ исследован на примере построения классификатора сигналов квадратной, треугольной и синусоидальной формы на основе осциллятора Чжуа в рамках физического РП.

## Приложение

На основе полученных результатов разработаны принципиальная электрическая схема (рис. 1, а) и экспериментальный стенд (рис. 1, б) аналоговой части резервуарного вычислителя. Представленный на схеме генератор Чжуа предложен В. Сидерским<sup>2</sup>.



б/б

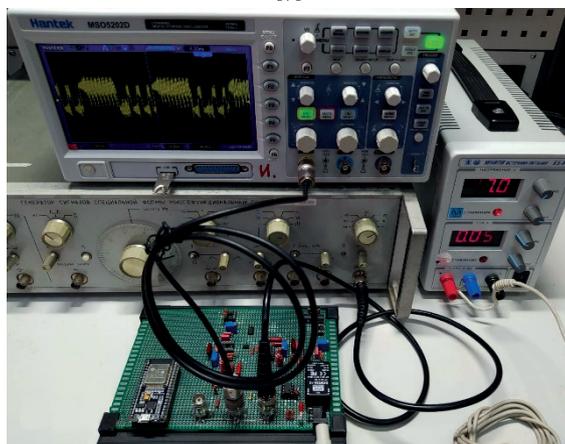


Рис. 1. Аналоговая часть резервуарного вычислителя:  
 а – принципиальная электрическая схема (уст. – установленное значение;  
 пит. ОУ – питание операционного усилителя); б – экспериментальный стенд

Fig. 1. The analog part of reservoir computer:  
 а – electronic circuit (уст. – set value;  
 пит. ОУ – operation amplifier power supply); б – experimental setup

<sup>2</sup>Siderskiy V. Building Chua's circuit [Electronic resource]. URL: <http://www.chuacircuits.com/howtobuild1.php> (date of access: 03.11.2022).

Входной буфер служит для электрического согласования источника сигнала со схемой Чжуа. Компаратор напряжений сравнивает двухполярный выходной сигнал осциллятора с нулем. Все время, пока на выходе осциллятора сохраняются колебания в положительной области напряжений, на выходе компаратора присутствует сигнал логической единицы, в противном случае логического нуля. Далее микроконтроллер (на схеме не показан) вычисляет время, в течение которого выходной сигнал компаратора остается равным логической единице, после чего рассчитывает величину  $\tilde{x}$ . Осциллограммы управляющих сигналов различной формы и вид сигналов на выходе осциллятора показаны на рис. II.

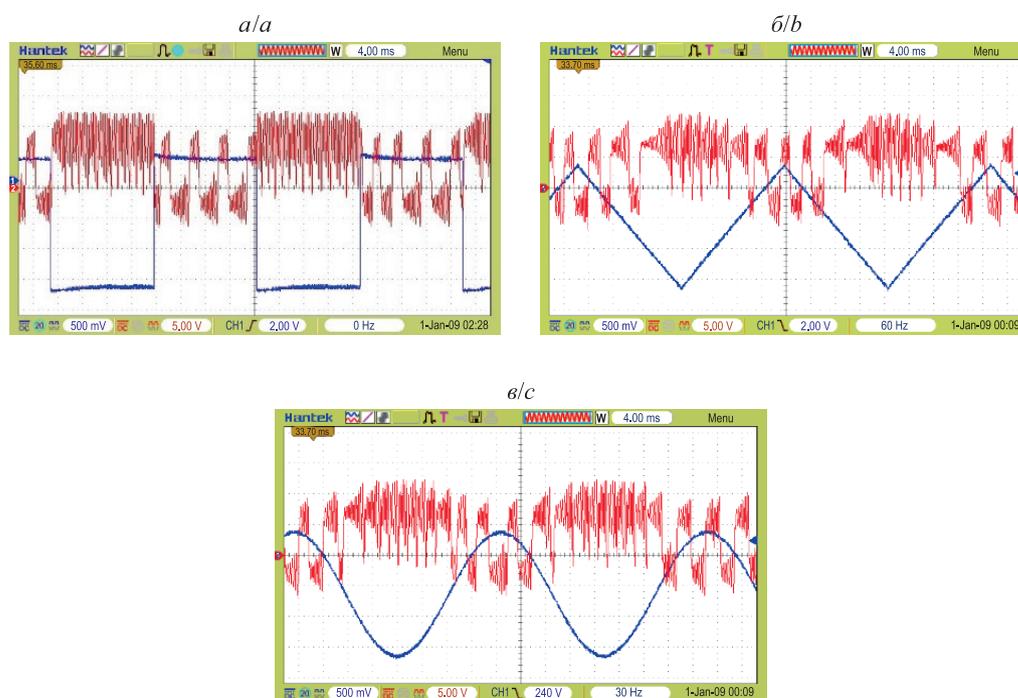


Рис. II. Формы напряжений  $U_x$  (линии красного цвета) для различных форм входного сигнала  $U_{\text{inp}}$  (линии синего цвета):  
 $a$  – квадратный сигнал;  $b$  – треугольный сигнал;  $в$  – синусоидальный сигнал  
 Fig. II. The waveforms of oscillations  $U_x$  (red lines) for different input waveforms  $U_{\text{inp}}$  (blue lines):  
 $a$  – square signal;  $b$  – triangle signal;  $c$  – sinusoidal signal

Для входных сигналов частотой 30 Гц (источник – генератор стандартных сигналов типа Г6-34) получены следующие усредненные по времени значения напряжений на выходе компаратора, используемые как опорные значения при классификации:  $\tilde{U}_{\text{sqr}}^{\text{CMP}} = 3,6$  В для квадратного сигнала,  $\tilde{U}_{\text{triangle}}^{\text{CMP}} = 4,0$  В для треугольного сигнала,  $\tilde{U}_{\text{sin}}^{\text{CMP}} = 3,84$  В для синусоидального сигнала. Размах входного сигнала  $U_{\text{inp}}$  составляет от 0,2 до 1,6 В.

## Библиографические ссылки

1. Мулярчик КС, Полочанский АС. Качество обслуживания в беспроводных сенсорных сетях. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2017;2:65–70.
2. Xue Yang. Recent development in analog computation: a brief overview. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*. 2016;86(2):181–187. DOI: 10.1007/S10470-015-0668-Y.
3. Hasler J. Analog abstraction, computation, and numerical analysis. In: *Proceedings of the 2018 IEEE International symposium on circuits and systems; 2018 May 27–30; Florence, Italy*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2018. p. 1–5. DOI: 10.1109/ISCAS.2018.8351646.
4. Lu J, Young S, Arel I, Holleman J. A 1 TOPS/W analog deep machine-learning engine with floating-gate storage in 0.13  $\mu\text{m}$  CMOS. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*. 2015;50(1):270–281. DOI: 10.1109/JSSC.2014.2356197.
5. Ulmann B. *Analog computing*. Munich: Oldenbourg Verlag; 2013. XIX, 300 p. DOI: 10.1524/9783486755183.
6. Chen Buyun, Yang Hao, Song Boxiang, Meng Deming, Yan Xiaodong, Li Yuanrui, et al. A memristor-based hybrid analog-digital computing platform for mobile robotics. *Science Robotics*. 2020;5(47):1–7. DOI: 10.1126/scirobotics.abb6938.
7. Chua L, Sirakoulis GCh, Adamatzky A, editors. *Handbook of memristor networks*. Cham: Springer; 2019. XIV, 1368 p. DOI: 10.1007/978-3-319-76375-0.
8. Эйкхофф П. *Основы идентификации систем управления: оценивание параметров и состояния*. Лотоцкий ВА, Мандель АС, переводчики; Райбман НС, редактор. Москва: Мир; 1975. 683 с.

9. Boyd S, Chua LO. Fading memory and the problem of approximating nonlinear operators with Volterra series. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. 1985;32(11):1150–1161. DOI: 10.1109/TCS.1985.1085649.
10. Moon FC. *Chaotic vibrations: an introduction for applied scientists and engineers*. New York: Wiley-Interscience; 2004. XIX, 309 p.
11. Nakajima K, Fischer I, editors. *Reservoir computing: theory, physical implementations, and applications*. Singapore: Springer; 2021. XIX, 458 p. (Natural computing series). DOI: 10.1007/978-981-13-1687-6.
12. Ortín S, Pesquera L. Reservoir computing with an ensemble of time-delay reservoirs. *Cognitive Computation*. 2017;9(3):327–336. DOI: 10.1007/s12559-017-9463-7.
13. Soriano MC, Ortín S, Keuninckx L, Appeltant L, Danckaert J, Pesquera L, et al. Delay-based reservoir computing: noise effects in a combined analog and digital implementation. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. 2015;26(2):388–393. DOI: 10.1109/TNNLS.2014.2311855.
14. Tanaka G, Yamane T, Héroux JB, Nakane R, Kanazawa N, Takeda S, et al. Recent advances in physical reservoir computing: a review. *Neural Networks*. 2019;115:100–123. DOI: 10.1016/j.neunet.2019.03.005.
15. Wu Shuxian. Chua's circuit family. *Proceedings of the IEEE*. 1987;75(8):1022–1032. DOI: 10.1109/PROC.1987.13847.
16. Jensen JH, Tufte G. Reservoir computing with a chaotic circuit. In: Knibbe C, Beslon G, Parsons D, Misevic D, Rouzaud-Cornabas J, Bredèche N, et al., editors. *ECAL-2017. Proceedings of the 14<sup>th</sup> European conference on artificial life; 2017 September 4–8; Lyon, France*. Cambridge: MIT Press; 2017. p. 222–229. DOI: 10.7551/ecal\_a\_039.
17. Tong Z, Nakane R, Hirose A, Tanaka G. A simple memristive circuit for pattern classification based on reservoir computing. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*. 2022;32(9):2250141. DOI: 10.1142/S0218127422501413.
18. Baird B, Hirsch MW, Eeckman F. A neural network associative memory for handwritten character recognition using multiple Chua characters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*. 1993;40(10):667–674. DOI: 10.1109/82.246169.
19. Jankowski S, Londei A, Mazur C, Lozowski A. Synchronization and association in a large network of coupled Chua's circuits. *International Journal of Electronics*. 1995;79(6):823–828. DOI: 10.1080/00207219508926316.
20. Barr J, Miller DA. A hybrid analog/digital chaotic associative memory. In: *Proceedings of the 43<sup>rd</sup> IEEE Midwest Symposium on Circuits and Systems; 2000 August 8–11; Lansing, USA. Volume 3*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2000. p. 1018–1021. DOI: 10.1109/MWSCAS.2000.951389.
21. Крот АМ, Сычѳв ВА. Анализ хаотических режимов функционирования схемы Чжуа с гладкой нелинейностью на основе метода матричной декомпозиции. *Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-тэхнічных навук*. 2018;63(4): 501–512. DOI: 10.29235/1561-8358-2018-63-4-501-512.
22. Krot AM. A model of stabilization of chaotic wave processes in complex dynamical systems from the point of view of the matrix decomposition theory. In: Skiadas CH, Dimotikalís Y, editors. *13<sup>th</sup> Chaotic modeling and simulation international conference*. Cham: Springer; 2021. p. 413–429 (Springer proceedings in complexity). DOI: 10.1007/978-3-030-70795-8\_32.
23. Крот АМ, Сычѳв ВА. Об особенностях нелинейного анализа динамических систем на основе метода матричной декомпозиции. *Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук*. 2022;58(2):190–207. DOI: 10.29235/1561-2430-2022-58-2-190-207.
24. Siderskiy V, Kapila V. Parameter matching using adaptive synchronization of two Chua's oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*. 2014;24(11):1430032. DOI: 10.1142/S0218127414300328.

## References

1. Mulyarchik KS, Polochanskiy AS. Quality of service in wireless sensor networks. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2017;2:65–70. Russian.
2. Xue Yang. Recent development in analog computation: a brief overview. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*. 2016;86(2):181–187. DOI: 10.1007/S10470-015-0668-Y.
3. Hasler J. Analog abstraction, computation, and numerical analysis. In: *Proceedings of the 2018 IEEE International symposium on circuits and systems; 2018 May 27–30; Florence, Italy*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2018. p. 1–5. DOI: 10.1109/ISCAS.2018.8351646.
4. Lu J, Young S, Arel I, Holleman J. A 1 TOPS/W analog deep machine-learning engine with floating-gate storage in 0.13  $\mu\text{m}$  CMOS. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*. 2015;50(1):270–281. DOI: 10.1109/JSSC.2014.2356197.
5. Ulmann B. *Analog computing*. Munich: Oldenbourg Verlag; 2013. XIX, 300 p. DOI: 10.1524/9783486755183.
6. Chen Buyun, Yang Hao, Song Boxiang, Meng Deming, Yan Xiaodong, Li Yuanrui, et al. A memristor-based hybrid analog-digital computing platform for mobile robotics. *Science Robotics*. 2020;5(47):1–7. DOI: 10.1126/scirobotics.abb6938.
7. Chua L, Sirakoulis GCh, Adamatzky A, editors. *Handbook of memristor networks*. Cham: Springer; 2019. XIV, 1368 p. DOI: 10.1007/978-3-319-76375-0.
8. Eykhoff P. *System identification: parameter and state estimation*. London: John Wiley & Sons; 1974. XX, 555 p.  
Russian edition: Eykhoff P. *Osnovy identifikatsii sistem upravleniya: otsenivanie parametrov i sostoyaniya*. Lototskii VA, Mandel' AS, translators; Raibman NS, editor. Moscow: Mir; 1975. 683 p.
9. Boyd S, Chua LO. Fading memory and the problem of approximating nonlinear operators with Volterra series. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. 1985;32(11):1150–1161. DOI: 10.1109/TCS.1985.1085649.
10. Moon FC. *Chaotic vibrations: an introduction for applied scientists and engineers*. New York: Wiley-Interscience; 2004. XIX, 309 p.
11. Nakajima K, Fischer I, editors. *Reservoir computing: theory, physical implementations, and applications*. Singapore: Springer; 2021. XIX, 458 p. (Natural computing series). DOI: 10.1007/978-981-13-1687-6.
12. Ortín S, Pesquera L. Reservoir computing with an ensemble of time-delay reservoirs. *Cognitive Computation*. 2017;9(3):327–336. DOI: 10.1007/s12559-017-9463-7.

13. Soriano MC, Ortín S, Keuninckx L, Appeltant L, Danckaert J, Pesquera L, et al. Delay-based reservoir computing: noise effects in a combined analog and digital implementation. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. 2015;26(2):388–393. DOI: 10.1109/TNNLS.2014.2311855.
14. Tanaka G, Yamane T, Héroux JB, Nakane R, Kanazawa N, Takeda S, et al. Recent advances in physical reservoir computing: a review. *Neural Networks*. 2019;115:100–123. DOI: 10.1016/j.neunet.2019.03.005.
15. Wu Shuxian. Chua's circuit family. *Proceedings of the IEEE*. 1987;75(8):1022–1032. DOI: 10.1109/PROC.1987.13847.
16. Jensen JH, Tufte G. Reservoir computing with a chaotic circuit. In: Knibbe C, Beslon G, Parsons D, Misevic D, Rouzaud-Cornabas J, Bredèche N, et al., editors. *ECAL-2017. Proceedings of the 14<sup>th</sup> European conference on artificial life; 2017 September 4–8; Lyon, France*. Cambridge: MIT Press; 2017. p. 222–229. DOI: 10.7551/ecal\_a\_039.
17. Tong Z, Nakane R, Hirose A, Tanaka G. A simple memristive circuit for pattern classification based on reservoir computing. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*. 2022;32(9):2250141. DOI: 10.1142/S0218127422501413.
18. Baird B, Hirsch MW, Eeckman F. A neural network associative memory for handwritten character recognition using multiple Chua characters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*. 1993;40(10):667–674. DOI: 10.1109/82.246169.
19. Jankowski S, Londei A, Mazur C, Lozowski A. Synchronization and association in a large network of coupled Chua's circuits. *International Journal of Electronics*. 1995;79(6):823–828. DOI: 10.1080/00207219508926316.
20. Barr J, Miller DA. A hybrid analog/digital chaotic associative memory. In: *Proceedings of the 43<sup>rd</sup> IEEE Midwest Symposium on Circuits and Systems; 2000 August 8–11; Lansing, USA. Volume 3*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2000. p. 1018–1021. DOI: 10.1109/MWSCAS.2000.951389.
21. Krot AM, Sychou UA. The analysis of chaotic regimes in Chua's circuit with smooth nonlinearity based on the matrix decomposition method. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-Technical Series*. 2018;63(4):501–512. Russian. DOI: 10.29235/1561-8358-2018-63-4-501-512.
22. Krot AM. A model of stabilization of chaotic wave processes in complex dynamical systems from the point of view of the matrix decomposition theory. In: Skiadas CH, Dimotikalis Y, editors. *13<sup>th</sup> Chaotic modeling and simulation international conference*. Cham: Springer; 2021. p. 413–429 (Springer proceedings in complexity). DOI: 10.1007/978-3-030-70795-8\_32.
23. Krot AM, Sychou UA. On the features of nonlinear analysis of dynamical systems based on the matrix decomposition method. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2022;58(2):190–207. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2022-58-2-190-207.
24. Siderskiy V, Kapila V. Parameter matching using adaptive synchronization of two Chua's oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*. 2014;24(11):1430032. DOI: 10.1142/S0218127414300328.

Получена 26.12.2022 / исправлена 21.02.2023 / принята 21.02.2023.  
Received 26.12.2022 / revised 21.02.2023 / accepted 21.02.2023.

## СОДЕРЖАНИЕ

### ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

- Медведева В. Ю., Ровба Е. А.* Рациональная интерполяция функции  $|x|^\alpha$  с узлами Чебышева – Маркова первого рода ..... 6

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

- Уихо А. Д., Уихо Д. С.* Исследование в целом поведения траекторий системы хищник – жертва ..... 20

### ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

- Бедрицкий А. С., Тимохович В. Л.* Функториальные свойства  $\Omega$ -насыщения топологического пространства ..... 31

### ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

- Чигарев А. В., Ботогова М. Г., Михасев Г. И.* Распространение поверхностной волны около случайно-шероховатой поверхности ..... 38

- Леоненко Д. В., Маркова М. В.* Колебания круговой трехслойной пластины под действием линейной во времени внешней нагрузки ..... 49

### ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

- Мойса А. В., Фалейчик Б. В., Репников В. И.* Стабилизированные явные методы типа Адамса высоких порядков с демпфированием ..... 64

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

- Блинова Е. А., Сташевская И. Ю., Урбанович П. П.* Стеганографический метод встраивания идентификатора в пространственные данные электронной карты ..... 76

- Сычѳв В. А., Крот А. М., Прокопович Г. А.* Разработка метода классификации сигналов с использованием осциллятора Чжуа в рамках резервуарного подхода ..... 88

## CONTENTS

### REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

- Medvedeva V. Yu., Rouba Y. A.* Rational interpolation of a function  $|x|^\alpha$  with Chebyshev – Markov nodes of the first kind..... 6

### DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

- Ushkho A. D., Ushkho D. S.* Investigation in general of the behaviour of the trajectories of a predator – prey system ..... 20

### GEOMETRY AND TOPOLOGY

- Biadrytski A. S., Timokhovich V. L.* Functor properties of the  $\Omega$ -saturation of a topological space..... 31

### THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

- Chigarev A. V., Botogova M. G., Mikhasev G. I.* Propagation of a surface wave near a randomly rough surface..... 38

- Leonenko D. V., Markova M. V.* Oscillations of a circular three-layer plate under external linear in time load ..... 49

### COMPUTATIONAL MATHEMATICS

- Moisa A. V., Faleichik B. V., Repnikov V. I.* Higher order stabilised explicit Adams-type methods with damping ..... 64

### THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

- Blinova E. A., Stashevskaya I. Yu., Urbanovich P. P.* A steganographic method of embedding an identifier into the spatial data of an electronic map ..... 76

- Sychou U. A., Krot A. M., Prakupovich R. A.* The development of a signal classification method based on Chua’s oscillator within the reservoir computing framework ..... 88

*Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области математики и информатики), техническим наукам (в области информатики).*

*Журнал включен в наукометрические базы данных Scopus, Mathematical Reviews, Ulrichsweb, Google Scholar, zbMath, Russian Science Citation Index, ПИИЦ, China National Knowledge Infrastructure.*

**Журнал Белорусского  
государственного университета.  
Математика. Информатика.  
№ 1. 2023**

Учредитель:  
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4,  
220030, г. Минск.

Почтовый адрес: пр. Независимости, 4,  
220030, г. Минск.

Тел. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: [jmathinf@bsu.by](mailto:jmathinf@bsu.by)

URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Журнал Белорусского государственного  
университета. Математика. Информатика»  
издается с января 1969 г.  
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ.  
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»  
(ISSN 1561-834X).

Редактор *О. А. Семенец*  
Технический редактор *В. В. Пижкова*  
Корректор *Л. А. Меркуль*

Подписано в печать 31.03.2023.  
Тираж 65 экз. Заказ 59.

Республиканское унитарное предприятие  
«Издательский центр Белорусского  
государственного университета».  
ЛП № 02330/117 от 14.04.2014.  
Ул. Красноармейская, 6, 220030, г. Минск.

© БГУ, 2023

**Journal  
of the Belarusian State University.  
Mathematics and Informatics.  
No. 1. 2023**

Founder:  
Belarusian State University

Registered address: 4 Niezaliežnasci Ave.,  
Minsk 220030.

Correspondence address: 4 Niezaliežnasci Ave.,  
Minsk 220030.

Tel. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: [jmathinf@bsu.by](mailto:jmathinf@bsu.by)

URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Journal of the Belarusian State University.  
Mathematics and Informatics»  
published since January, 1969.  
Until 2017 named «Vestnik BGU.  
Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika»  
(ISSN 1561-834X).

Editor *O. A. Semenets*  
Technical editor *V. V. Pishkova*  
Proofreader *L. A. Merkul'*

Signed print 31.03.2023.  
Edition 65 copies. Order number 59.

Republic Unitary Enterprise  
«Publishing Center of the Belarusian State University».  
License for publishing No. 02330/117, 14 April, 2014.  
6 Ćyrvonaarmiejskaja Str., Minsk 220030.

© BSU, 2023