



ЖУРНАЛ
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА ИНФОРМАТИКА

JOURNAL
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

MATHEMATICS and INFORMATICS

Издается с января 1969 г.
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)
Выходит три раза в год

2

2023

МИНСК
БГУ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор ХАРИН Ю. С. – доктор физико-математических наук, академик НАН Беларуси, профессор; директор Научно-исследовательского института прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: kharin@bsu.by

**Заместители
главного редактора** КРОТОВ В. Г. – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: krotov@bsu.by

ДУДИН А. Н. – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий лабораторией прикладного вероятностного анализа факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: dudin@bsu.by

**Ответственный
секретарь** МАТЕЙКО О. М. – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: matseika@bsu.by

- Абламейко С. В.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Альтенбах Х. Магдебургский университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия.
Антоневич А. Б. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Бауэр С. М. Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
Беляш-Кривец В. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Берник В. И. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Бухштабер В. М. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Вабищевич П. Н. Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук, Москва, Россия.
Волков В. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Гладков А. Л. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Го В. Китайский университет науки и технологий, Хэфэй, провинция Аньхой, Китай.
Гогинава У. Тбилисский государственный университет им. Иванэ Джавахишвили, Тбилиси, Грузия.
Головко В. А. Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь.
Гороховик В. В. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Громак В. И. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Демидо Г. Институт математики и информатики Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва.
Донской В. И. Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия.
Егоров А. Д. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Еремеев В. А. Гданьский политехнический университет, Гданьск, Польша.
Жоландек Х. Институт математики Варшавского университета, Варшава, Польша.
Журавков М. А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Залесский П. А. Бразильский университет, Бразилиа, Бразилия.
Зубков А. М. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.
Каплунов Ю. Д. Университет Кииле, Кииле, Великобритания.
Кашин Б. С. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Келлерер Х. Грацский университет им. Карла и Франца, Грац, Австрия.
Кожанов А. И. Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.

- Котов В. М.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Краснопрошин В. В.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Лауринчикас А. П.** Вильнюсский университет, Вильнюс, Литва.
- Мадани К.** Университет Париж-Эст Марн-ла-Валле, Марн-ла-Валле, Франция.
- Макаров Е. К.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Матус П. П.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Медведев Д. Г.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Михасев Г. И.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Нестеренко Ю. В.** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
- Никопоров Ю. Г.** Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук, Владикавказ, Россия.
- Освальд П.** Боннский университет, Бонн, Германия.
- Романовский В. Г.** Мариборский университет, Марибор, Словения.
- Рязанов В. В.** Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук, Москва, Россия.
- Сафонов В. Г.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Скиба А. Н.** Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель, Беларусь.
- Сотсков Ю. Н.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Трофимов В. А.** Южно-Китайский университет технологий, Гуанчжоу, Китай.
- Тузиков А. В.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Фильцмозер П.** Венский технический университет, Вена, Австрия.
- Черноусов В. И.** Альбертский университет, Эдмонтон, Канада.
- Чижик С. А.** Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Шешок Д.** Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса, Вильнюс, Литва.
- Шубэ А. С.** Институт математики и информатики Академии наук Республики Молдова, Кишинев, Молдова.
- Янчевский В. И.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

EDITORIAL BOARD

- Editor-in-chief** **KHARIN Y. S.**, doctor of science (physics and mathematics), academician of the National Academy of Sciences of Belarus, full professor; director of the Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: kharin@bsu.by
- Deputy editors-in-chief** **KROTOV V. G.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: krotov@bsu.by
- DUDIN A. N.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the laboratory of applied probabilistic analysis, faculty of applied mathematics and computer science, Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: dudin@bsu.by
- Executive secretary** **MATEIKO O. M.**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of general mathematics and computer science, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: matseika@bsu.by
- Ablameyko S. V.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Altenbach H. Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany.
Antonevich A. B. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Bauer S. M. Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia.
Beniash-Kryvets V. V. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Bernik V. I. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Buchstaber V. M. Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Chernousov V. I. University of Alberta, Edmonton, Canada.
Chizhik S. A. National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Donskoy V. I. V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia.
Dzemyda G. Institute of Mathematics and Informatics of the Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
Egorov A. D. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Eremeyev V. A. Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland.
Filzmoser P. Vienna University of Technology, Vienna, Austria.
Gladkov A. L. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Goginava U. Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia.
Golovko V. A. Brest State Technical University, Brest, Belarus.
Gorokhovich V. V. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Gromak V. I. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Guo W. University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, China.
Kaplunov J. D. Keele University, Keele, United Kingdom.
Kashin B. S. Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Kellerer H. University of Graz, Graz, Austria.
Kotov V. M. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Kozhanov A. I. Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia.
Krasnoproshin V. V. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Laurinchikas A. P. Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
Madani K. Université Paris-Est, Marne-la-Vallée, France.
Makarov E. K. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Matus P. P. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Medvedev D. G. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Mikhasev G. I. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Nesterenko Y. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.

- Nikonorov Y. G.** Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia.
- Oswald P.** University of Bonn, Bonn, Germany.
- Romanovskij V. G.** University of Maribor, Maribor, Slovenia.
- Ryazanov V. V.** Dorođnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
- Safonov V. G.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Šešok D.** Vilnius Gediminas Technical University, Vilnius, Lithuania.
- Skiba A. N.** Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus.
- Sotskov Y. N.** United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Suba A. S.** Institute of Mathematics and Computer Science of the Academy of Sciences of Moldova, Kishinev, Moldova.
- Trofimov V. A.** South China University of Technology, Guangzhou, China.
- Tuzikov A. V.** Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Vabishchevich P. N.** Institute for the Safe Development of Atomic Energy of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
- Volkov V. M.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Yanchevskii V. I.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Zalesskii P. A.** University of Brazilia, Brazilia, Brazil.
- Zhuravkov M. A.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Zoladek H.** Mathematics Institute of the University of Warsaw, Warsaw, Poland.
- Zubkov A. M.** Lomonosov Moscow State University, Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

УДК 517.538.52+517.538.53

О СУЩЕСТВОВАНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ЯКОБИ И НЕЛИНЕЙНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ЧЕБЫШЕВА

А. П. СТАРОВОЙТОВ¹⁾, Е. П. КЕЧКО¹⁾, Т. М. ОСНАЧ¹⁾

¹⁾Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины,
ул. Советская, 104, 246028, г. Гомель, Беларусь

Определены аналоги алгебраических аппроксимаций Эрмита – Паде, а именно тригонометрические аппроксимации Эрмита – Паде и Эрмита – Якоби. Построены примеры функций, для которых тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби существуют, но не совпадают с тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Паде.

Образец цитирования:

Старовойтов АП, Кечко ЕП, Оснач ТМ. О существовании тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышева. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2023;2:6–17.

<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-6-17>

EDN: XJRLWT

For citation:

Starovoitov AP, Kechko EP, Osnach TM. On the existence of trigonometric Hermite – Jacobi approximations and non-linear Hermite – Chebyshev approximations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2023;2:6–17. Russian.

<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-6-17>

EDN: XJRLWT

Авторы:

Александр Павлович Старовойтов – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений факультета математики и технологий программирования.

Елена Петровна Кечко – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры вычислительной математики и программирования факультета математики и технологий программирования.

Татьяна Михайловна Оснач – аспирантка кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений факультета математики и технологий программирования. Научный руководитель – А. П. Старовойтов.

Authors:

Alexander P. Starovoitov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of mathematical analysis and differential equations, faculty of mathematics and technologies of programming.

svoitov@gsu.by, apsvoitov@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-1067-5744>

Elena P. Kechko, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of computational mathematics and programming, faculty of mathematics and technologies of programming.

ekechko@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-1882-8781>

Tatyana M. Osnach, postgraduate student at the department of mathematical analysis and differential equations, faculty of mathematics and technologies of programming.

osnach@gsu.by

Подобные примеры построены для линейных и нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышева, являющихся кратными аналогами линейных и нелинейных аппроксимаций Паде – Чебышева. Оба типа примеров вытекают из известных представлений для числителя и знаменателя дробей, введенных Ш. Эрмитом при доказательстве трансцендентности числа e .

Ключевые слова: тригонометрические ряды; ряды Фурье; тригонометрические аппроксимации Паде; многочлены Эрмита – Паде; аппроксимации Паде – Чебышева.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025».

ON THE EXISTENCE OF TRIGONOMETRIC HERMITE – JACOBI APPROXIMATIONS AND NON-LINEAR HERMITE – CHEBYSHEV APPROXIMATIONS

A. P. STAROVOITOV^a, E. P. KECHKO^a, T. M. OSNACH^a

^aFrancisk Skorina Gomel State University, 104 Savieckaja Street, Gomel 246028, Belarus

Corresponding author: E. P. Kechko (ekchko@gmail.com)

In this paper, analogues of algebraic Hermite – Padé approximations are defined, being trigonometric Hermite – Padé approximations and Hermite – Jacobi approximations. Examples of functions are represented for which trigonometric Hermite – Jacobi approximations exist but are not the same as trigonometric Hermite – Padé approximations. Similar examples are made for linear and non-linear Hermite – Chebyshev approximations, which are multiple analogues of linear and non-linear Padé – Chebyshev approximations. Each type of examples follows from the well-known representations for the numerator and denominator of fractions, introduced by C. Hermite when proving the transcendence of number e .

Keywords: trigonometric series; Fourier sums; trigonometric Padé approximations; Hermite – Padé polynomials; Padé – Chebyshev approximations.

Acknowledgements. This work was supported by the state programme of scientific research «Convergence-2025».

Введение

Пусть функция $f(z)$ представлена степенным рядом

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^i$$

с комплексными коэффициентами. Для любой пары (n, m) целых неотрицательных чисел существуют такие алгебраические многочлены $Q_m(z)$ и $P_n(z)$, имеющие степени $\deg Q_m \leq m$, $\deg P_n \leq n$, что

$$Q_m(z)f(z) - P_n(z) = O(z^{n+m+1}). \quad (1)$$

Здесь и далее под $O(z^p)$ понимается степенной ряд вида $l_1 z^p + l_2 z^{p+1} + \dots$

Многочлены $Q_m(z)$ и $P_n(z)$ определяются условиями (1) не единственным образом, тем не менее дроби

$$\pi_{n, m}(z) = \pi_{n, m}(z; f) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

определяют одну и ту же рациональную функцию, какие бы многочлены $Q_m(z)$ и $P_n(z)$, удовлетворяющие условиям (1), мы ни взяли [1, гл. 2, § 1]. Существование многочленов $Q_m(z)$ и $P_n(z)$ доказано А. Паде [2, ч. 1, гл. 1, § 1.1]. По этой причине рациональные функции $\pi_{n, m}(z)$ принято называть аппроксимациями Паде или Паде – Фробениуса (Г. Фробениус [3] в 1881 г. исследовал аналогичную задачу).

Еще раньше, в 1846 г., близкая в идейном плане задача изучалась К. Якоби [4], который обобщил результат О. Коши, связанный с рациональной интерполяцией функции, заданной в $n + m + 1$ различных точках. К. Якоби рассмотрел $(n + m + 1)$ -кратную рациональную интерполяцию в одной точке. Его интерполяционная конструкция приводит к следующему определению.

Определение 1. Рациональную дробь вида

$$\hat{\pi}_{n,m}(z) = \hat{\pi}_{n,m}(z; f) = \frac{\hat{P}_n(z)}{\hat{Q}_m(z)},$$

где многочлены $\hat{Q}_m(z)$ и $\hat{P}_n(z)$ имеют степени не выше m и n соответственно, будем называть аппроксимацией Паде – Якоби для пары индексов (n, m) и функции $f(z)$, если

$$f(z) - \frac{\hat{P}_n(z)}{\hat{Q}_m(z)} = O(z^{n+m+1}).$$

Согласно теореме Паде [2, ч. 1, гл. 1, § 1.1, теорема 1.1.1] аппроксимации Паде $\pi_{n,m}(z; f)$ существуют для любой пары индексов (n, m) , в то время как аппроксимации Паде – Якоби $\hat{\pi}_{n,m}(z; f)$ могут и не существовать. Соответствующий пример функции $f(z)$ и пары индексов (n, m) приведен в работе [2, ч. 1, гл. 1, § 1.4]. Полное исследование условий, при наличии которых рациональные функции $\hat{\pi}_{n,m}(z; f)$ существуют, провел Дж. Бейкер [2, ч. 1, гл. 1, § 1.4]. В связи с этим рациональные функции $\hat{\pi}_{n,m}(z; f)$ иногда называют аппроксимациями Паде в смысле Бейкера.

Аналогичные конструкции рациональных дробей, но соответствующие одновременной интерполяции нескольких функций, были разработаны Ш. Эрмитом [5]. Они стали основой его доказательства трансцендентности числа e . Рациональные дроби Эрмита обычно называют совместными аппроксимациями Паде [1, гл. 4, § 1]. В случае когда рассматриваются несколько функций, совместные аппроксимации также могут быть двух типов. Будем называть их аппроксимациями Эрмита – Паде и аппроксимациями Эрмита – Якоби. Изначально Ш. Эрмит рассматривал одновременную интерполяцию нескольких экспоненциальных функций. Для системы экспонент, рассматриваемых Ш. Эрмитом, две конструкции рациональных дробей совпадают. Однако для произвольного набора нескольких аналитических функций это не так. Соответствующий пример приведен далее.

Аппроксимации Эрмита – Паде и Эрмита – Якоби

Рассмотрим систему $\mathbf{f} = (f_1(z), \dots, f_k(z))$, состоящую из k аналитических в окрестности нуля функций, представимых степенными рядами

$$f_j(z) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l^j z^l, \quad j = 1, \dots, k, \quad (2)$$

с комплексными коэффициентами. Множество k -мерных мультииндексов, являющихся упорядоченным набором k целых неотрицательных чисел, обозначим \mathbb{Z}_+^k . Порядок мультииндекса $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ есть сумма $m = m_1 + \dots + m_k$. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$.

Аппроксимации Эрмита – Паде для мультииндекса (n, \vec{m}) , ассоциированные с системой функций \mathbf{f} , определяются равенствами

$$\pi_j(z) = \pi_{n_j, n, \vec{m}}^j(z; \mathbf{f}) = \frac{P_{n_j}^j(z)}{Q_m(z)}, \quad j = 1, \dots, k,$$

где многочлены $Q_m(z) = Q_{n, \vec{m}}(z; \mathbf{f})$ и $P_{n_j}^j(z) = P_{n, \vec{m}}^j(z; \mathbf{f})$ являются решением следующей задачи [1, гл. 4, § 1, задача А].

Задача 1. Найти тождественно не равный нулю многочлен $Q_m(z) = Q_{n, \vec{m}}(z; \mathbf{f})$, $\deg Q_m \leq m$, и такие многочлены $P_{n_j}^j(z) = P_{n, \vec{m}}^j(z; \mathbf{f})$, $\deg P_{n_j}^j \leq n_j$, $n_j = n + m - m_j$, чтобы для $j = 1, \dots, k$ выполнялись условия

$$R_{n, \vec{m}}^j(z) := Q_m(z) f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = O(z^{n+m+1}). \quad (3)$$

Многочлены $Q_m(z)$ и $P_{n_1}^1(z), \dots, P_{n_k}^k(z)$, являющиеся решением задачи 1 (решение задачи 1 всегда существует), называют многочленами Эрмита – Паде для мультииндекса (n, \vec{m}) и системы функций \mathbf{f} .

Особый интерес представляют системы функций \mathbf{f} , для которых рациональные дроби $\{\pi_j(z)\}_{j=1}^k$ однозначно определяются условиями (3) для любого мультииндекса (n, \vec{m}) . Важным случаем таких систем являются совершенные системы (примеры систем, отличных от совершенных, для которых рациональные дроби $\{\pi_j(z)\}_{j=1}^k$ определяются однозначно, приведены в работе [6]).

Определение 2. Систему \mathbf{f} , состоящую из функций (2), называют совершенной относительно задачи 1, если для любого мультииндекса $(n, \bar{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ и любого решения задачи 1 $Q_m(z), P_{n_1}^1(z), \dots, P_{n_k}^k(z)$ с этим мультииндексом

$$\deg Q_m = m, \deg P_{n_j}^j = n_j, j = 1, \dots, k.$$

Примером совершенной системы функций является набор экспонент $\left\{e^{\lambda_j z}\right\}_{j=1}^k$, где λ_j – различные не равные нулю комплексные числа. Совершенство этой системы (без формального определения) доказал Ш. Эрмит [5]. Его доказательство трансцендентности числа e основывается на том, что для некоторого простого числа p интегралы

$$M = \frac{1}{(p-1)!} \int_0^{+\infty} \left[x \prod_{i=1}^k (x-i) \right]^{p-1} e^{-x} dx,$$

$$M_j = \frac{e^j}{(p-1)!} \int_j^{+\infty} \left[x \prod_{i=1}^k (x-i) \right]^{p-1} e^{-x} dx,$$

$$\varepsilon_j = \frac{e^j}{(p-1)!} \int_0^j \left[x \prod_{i=1}^k (x-i) \right]^{p-1} e^{-x} dx$$

дают нужные приближения к набору натуральных степеней e :

$$e^j - \frac{M_j}{M} = \frac{\varepsilon_j}{M}, j = 1, \dots, k.$$

При $\bar{m} \neq (0, \dots, 0)$ интегралы Эрмита легко преобразуются [1, гл. 4, § 2] в решения задачи 1 для системы

$$\mathbf{E}_k = \left\{ e^{\lambda_j z} \right\}_{j=1}^k : \text{при нормировке } Q_m(0) = 1 \text{ и } j = 1, \dots, k$$

$$Q_m(z) = Q_{n, \bar{m}}(z; \mathbf{E}_k) = \frac{z^{n+m+1}}{(n+m)!} \int_0^{+\infty} T(x) e^{-zx} dx, \quad (4)$$

$$P_{n_j}^j(z) = P_{n, \bar{m}}^j(z; \mathbf{E}_k) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+m+1}}{(n+m)!} \int_{\lambda_j}^{+\infty} T(x) e^{-zx} dx, \quad (5)$$

$$R_j(z) = R_{n, \bar{m}}^j(z; \mathbf{E}_k) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+m+1}}{(n+m)!} \int_0^{\lambda_j} T(x) e^{-zx} dx, \quad (6)$$

где $T(x) = x^n \prod_{p=1}^k (x - \lambda_p)^{m_p}$. Считается, что в формулах (4) и (5) $\operatorname{Re} z > 0$. В случае $\operatorname{Re} z \leq 0$ значения многочленов $Q_m(z)$ и $P_{n_j}^j(z)$ определяются с помощью аналитического продолжения. Из формул (4) и (5) следует, что

$$\deg Q_{n, \bar{m}}(\cdot; \mathbf{E}_k) = m, \deg P_{n, \bar{m}}^j(\cdot; \mathbf{E}_k) = n_j, j = 1, \dots, k.$$

Введем в рассмотрение аппроксимации Эрмита – Якоби.

Определение 3. Рациональные функции вида

$$\hat{\pi}_j(z) = \hat{\pi}_{n_j, n, \bar{m}}(z; \mathbf{f}) = \frac{\hat{P}_{n_j}^j(z)}{\hat{Q}_m(z)}, j = 1, \dots, k,$$

где алгебраические многочлены $\hat{Q}_m(z) = \hat{Q}_{n, \bar{m}}(z; \mathbf{f})$ и $\hat{P}_{n_j}^j(z) = \hat{P}_{n, \bar{m}}^j(\cdot; \mathbf{f})$ имеют степени не выше m и n_j соответственно, $n_j = n + m - m_j$, будем называть аппроксимациями Эрмита – Якоби для мультииндекса (n, \bar{m}) и системы функций \mathbf{f} , если

$$f_j(z) - \frac{\hat{P}_{n_j}^j(z)}{\hat{Q}_m(z)} = O\left(z^{n+m+1}\right), j = 1, \dots, k. \quad (7)$$

Многочлены $\hat{Q}_m(z)$ и $\hat{P}_1^1(z), \dots, \hat{P}_k^k(z)$, удовлетворяющие условиям (7) (будем называть их многочленами Эрмита – Якоби), как и аппроксимации Эрмита – Якоби, могут не существовать. Приведем соответствующий пример.

Пример 1. Пусть $k = 2, n = 1, m_1 = m_2 = 1$,

$$f_1(z) = 2 + z + 2z^2 + z^3 + 2z^4 + z^5 + \dots,$$

$$f_2(z) = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + 5z^5 + \dots$$

Тогда $m = n_1 = n_2 = 2$, многочлены $\hat{Q}_2(z)$ и $\hat{P}_2^1(z), \hat{P}_2^2(z)$, удовлетворяющие условиям (7), находятся с точностью до числового множителя и при определенном выборе этого числового множителя имеют вид

$$\hat{P}_2^1(z) = 2z - 3z^2, \hat{P}_2^2(z) = z - z^2, \hat{Q}_2(z) = z - 2z^2.$$

Легко проверить, что для найденных многочленов условия (7) не выполняются, т. е.

$$f_1(z) - \frac{2z - 3z^2}{z - 2z^2} \neq O(z^4), f_2(z) - \frac{z - z^2}{z - 2z^2} \neq O(z^4).$$

Многочлены Эрмита – Паде, удовлетворяющие условиям (3), как и аппроксимации Эрмита – Паде, существуют для любого мультииндекса (n, \vec{m}) и системы функций \mathbf{f} .

Теорема 1. Пусть $\mathbf{E}_k = \left\{ e^{\lambda_j z} \right\}_{j=1}^k$, где λ_j – различные не равные нулю комплексные числа. Тогда для любого мультииндекса $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ аппроксимации Эрмита – Якоби $\left\{ \hat{\pi}_j(z; \mathbf{E}_k) \right\}_{j=1}^k$ существуют, определяются единственным образом и тождественно совпадают с соответствующими аппроксимациями Эрмита – Паде, т. е.

$$\hat{\pi}_j(z; \mathbf{E}_k) = \pi_j(z; \mathbf{E}_k), j = 1, \dots, k. \quad (8)$$

Доказательство. Предположим вначале, что $\vec{m} \neq (0, \dots, 0)$. Тогда многочлены Эрмита – Паде $Q_m(z; \mathbf{E}_k)$ и $P_{n_j}^j(z; \mathbf{E}_k)$ при нормировке $Q_m(0; \mathbf{E}_k) = 1$ задаются формулами (4) и (5). Это значит, что многочлен $Q_m(z; \mathbf{E}_k)$ можно записать в виде $Q_m(z; \mathbf{E}_k) = 1 + b_1 z + \dots + b_m z^m$, поэтому функция $\frac{1}{Q_m(z; \mathbf{E}_k)}$ является аналитической в некоторой окрестности нуля и, следовательно, может быть представлена в этой окрестности степенным рядом

$$\frac{1}{Q_m(z; \mathbf{E}_k)} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

Рассматриваемые многочлены Эрмита – Паде удовлетворяют условиям

$$e^{\lambda_j z} Q_m(z; \mathbf{E}_k) - P_{n_j}^j(z; \mathbf{E}_k) = O(z^{n+m+1}), j = 1, \dots, k. \quad (9)$$

Разделив левую и правую части равенства (9) на $Q_m(z; \mathbf{E}_k)$, а затем перемножив соответствующие ряды в правой части нового равенства, получим

$$e^{\lambda_j z} - \frac{P_{n_j}^j(z; \mathbf{E}_k)}{Q_m(z; \mathbf{E}_k)} = O(z^{n+m+1}), j = 1, \dots, k. \quad (10)$$

Отсюда следует справедливость соотношений (8) при $\vec{m} \neq (0, \dots, 0)$.

Если $\vec{m} = (0, \dots, 0)$, то очевидно, что с точностью до числового множителя $Q_m(z; \mathbf{E}_k) = \hat{Q}_m(z; \mathbf{E}_k) \equiv 1$, а $P_{n_j}^j(z; \mathbf{E}_k) = \hat{P}_{n_j}^j(z; \mathbf{E}_k)$ есть n -я частная сумма ряда $f_j(z)$, и справедливы равенства (8). Единственность аппроксимаций Эрмита – Якоби $\left\{ \hat{\pi}_j(z; \mathbf{E}_k) \right\}_{j=1}^k$ следует из единственности соответствующих аппроксимаций Эрмита – Паде. Теорема 1 доказана.

Тригонометрические аппроксимации Эрмита – Паде и Эрмита – Якоби

Пусть $\mathbf{f}^t = (f_1^t(x), \dots, f_k^t(x))$ – набор тригонометрических рядов

$$f_j^t(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} (a_l^j \cos lx + b_l^j \sin lx), \quad j = 1, \dots, k, \quad (11)$$

с действительными коэффициентами. Считаем, что ряды (11) сходятся при всех $x \in \mathbb{R}$ и каждый из них задает функцию, определенную на всей действительной прямой.

Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ и рассмотрим следующую задачу.

Задача 2. Для набора тригонометрических рядов (11) найти тождественно не равный нулю тригонометрический многочлен $Q_m^t(x) = Q_{n, \vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t)$, $\deg Q_m^t \leq m$, и такие тригонометрические многочлены $P_j^t(x) = P_{n_j, n, \vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t)$, $\deg P_j^t \leq n_j$, $n_j = n + m - m_j$, чтобы для $j = 1, \dots, k$ выполнялись условия

$$Q_m^t(x) f_j^t(x) - P_j^t(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} (\tilde{a}_l^j \cos lx + \tilde{b}_l^j \sin lx),$$

где \tilde{a}_l^j и \tilde{b}_l^j , как и коэффициенты тригонометрических многочленов $Q_m^t(x)$ и $P_j^t(x)$, могут быть комплексными числами.

Определение 4. Если пара (Q_m^t, P^t) , где $P^t := (P_1^t, \dots, P_k^t)$, является решением задачи 2 с индексом $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндексом $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$, то многочлены $Q_m^t(x)$ и $P_1^t(x), \dots, P_k^t(x)$ и рациональные дроби

$$\pi_j^t(x) = \pi_{n_j, n, \vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t) = \frac{P_j^t(x)}{Q_m^t(x)}, \quad j = 1, \dots, k,$$

будем называть тригонометрическими многочленами Эрмита – Паде и тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Паде (совместными аппроксимациями Эрмита – Фурье) для набора тригонометрических рядов \mathbf{f}^t соответственно.

Как и в алгебраическом случае, доказывается, что решение задачи 2 существует для любого мультииндекса (n, \vec{m}) и любого набора тригонометрических рядов \mathbf{f}^t (в том числе формальных). Это решение определяется с точностью до числового множителя, причем его неединственность, как и в алгебраическом случае, может быть и более существенной. Будем говорить, что задача 2 имеет единственное решение, если это решение единственно с точностью до числового множителя. Аналогично алгебраическому случаю доказывается, что решение задачи 2 единственно для мультииндекса (n, \vec{m}) , когда для любого решения задачи 2 $Q_m^t(x), P_1^t(x), \dots, P_k^t(x)$ с этим мультииндексом

$$\deg Q_m^t = m, \quad \deg P_j^t = n_j, \quad j = 1, \dots, k.$$

Определим теперь тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби.

Определение 5. Рациональные функции вида

$$\hat{\pi}_j^t(x) = \hat{\pi}_{n_j, n, \vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t) = \frac{\hat{P}_j^t(x)}{\hat{Q}_m^t(x)}, \quad j = 1, \dots, k,$$

где тригонометрические многочлены $\hat{Q}_m^t(x) = \hat{Q}_{n, \vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t)$ и $\hat{P}_j^t(x) = \hat{P}_{n_j, n, \vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t)$ имеют степени не выше m и n_j соответственно, $n_j = n + m - m_j$, будем называть тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Якоби для мультииндекса (n, \vec{m}) и системы функций \mathbf{f}^t , если рациональные функции $\hat{\pi}_j^t(x)$ представимы своими рядами Фурье и выполняются условия

$$f_j^t(x) - \frac{\hat{P}_j^t(x)}{\hat{Q}_m^t(x)} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} (\tilde{a}_l^j \cos lx + \tilde{b}_l^j \sin lx), \quad j = 1, \dots, k. \quad (12)$$

Многочлены $\hat{Q}_m^t(x)$ и $\hat{P}_1^t(x), \dots, \hat{P}_k^t(x)$, удовлетворяющие условиям (12), будем называть тригонометрическими многочленами Эрмита – Якоби.

В отличие от тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Паде тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби могут не существовать. Более того, в случае своего существования они могут не

совпадать с тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Паде. В частности, при $k = 1$ тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби не существуют (см. [7]) для недифференцируемой функции Вейерштрасса

$$f^t(x) = \sum_{l=0}^{\infty} q^l \cos(2p+1)^l x, \quad p \in \mathbb{N}, \quad 0 < q < 1.$$

Другие примеры функций, для которых при $k = 1$ тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби не существуют, а также примеры функций, для которых тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби существуют, но не совпадают с тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Паде, можно построить, опираясь на результаты работ [8; 9].

Примеры тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Якоби

Введем в рассмотрение однопараметрическое семейство функций (параметр $\lambda \in \mathbb{R}$), представленных тригонометрическими рядами

$$G(x; \lambda) = e^{\lambda \cos x} (\cos(\lambda \sin x)) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} \cos lx, \quad (13)$$

$$H(x; \lambda) = e^{\lambda \cos x} (\sin(\lambda \sin x)) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} \sin lx. \quad (14)$$

Тождества (13) и (14) легко получить, если в равенстве

$$e^{\lambda z} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} z^l$$

положить, что $z = e^{ix}$, а затем приравнять действительные и мнимые части выражений, стоящих слева и справа от знака равенства.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – набор различных не равных нулю действительных чисел. Тогда для мультииндекса $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\vec{m} \neq (0, \dots, 0)$, удовлетворяющего условию $n \geq \max_{1 \leq j \leq k} m_j$, и системы функций $\mathbf{G}_k = \{G(x; \lambda_j)\}_{j=1}^k$ существуют тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби $\{\hat{\pi}_j^t(x; \mathbf{G}_k)\}_{j=1}^k$ и при соответствующей нормировке для их знаменателя и числителей справедливы представления

$$\begin{aligned} \hat{Q}_m^t(x; \mathbf{G}_k) &= \hat{Q}_{n, \vec{m}}^t(x; \mathbf{G}_k) = Q_m(e^{ix}; \mathbf{E}_k) \cdot \overline{Q_m(e^{ix}; \mathbf{E}_k)} = \\ &= \frac{1}{[(n+m)!]^2} \left| \int_0^{+\infty} T(t) e^{-t(\cos x + i \sin x)} dt \right|^2, \end{aligned}$$

$$\hat{P}_j^t(x; \mathbf{G}_k) = \hat{P}_{n_j, n, \vec{m}}^t(x; \mathbf{G}_k) = \operatorname{Re} \left\{ P_{n_j}^j(e^{ix}; \mathbf{E}_k) \cdot \overline{Q_m(e^{ix}; \mathbf{E}_k)} \right\}, \quad j = 1, \dots, k,$$

где многочлены $Q_m(z; \mathbf{E}_k)$ и $P_{n_j}^j(z; \mathbf{E}_k)$ представляются в виде интегралов Эрмита (4) и (5).

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что для многочленов $Q_m(z; \mathbf{E}_k)$ и $P_{n_j}^j(z; \mathbf{E}_k)$, представимых интегралами Эрмита (4) и (5), в некоторой окрестности нуля справедливы равенства (10). Положим, что в равенстве (10) $z = e^{ix}$, а затем приравняем действительные части выражений, стоящих слева и справа от знака равенства. В результате получим

$$G(x; \lambda_j) - \operatorname{Re} \left\{ \frac{P_{n_j}^j(e^{ix}; \mathbf{E}_k)}{Q_m(e^{ix}; \mathbf{E}_k)} \right\} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{a}_l^j \cos lx. \quad (15)$$

Остается доказать, что при $n \geq \max_{1 \leq j \leq k} m_j$

$$\hat{\pi}_j^t(x; \mathbf{G}_k) = \operatorname{Re} \left\{ \pi_{n_j, \vec{m}}^j(e^{ix}; \mathbf{E}_k) \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{P_{n_j}^j(e^{ix}; \mathbf{E}_k)}{Q_m(e^{ix}; \mathbf{E}_k)} \right\}. \quad (16)$$

Для этого представим многочлены $Q_m(z; \mathbf{E}_k)$ и $P_{n_j}^j(z; \mathbf{E}_k)$ в виде

$$Q_m(z; \mathbf{E}_k) = \sum_{p=0}^m b_p z^p, \quad P_{n_j}^j(z; \mathbf{E}_k) = \sum_{p=0}^{n_j} a_p^j z^p.$$

Поскольку b_p и a_p^j – действительные числа, то при $z = e^{ix}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left\{\pi_{n_j, \bar{m}}^j(e^{ix}; \mathbf{E}_k)\right\} &= \frac{1}{2} \left(\frac{P_{n_j}^j(z)}{Q_m(z)} + \overline{\frac{P_{n_j}^j(z)}{Q_m(z)}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sum_{p=0}^{n_j} a_p^j e^{ikx} \cdot \sum_{l=0}^m b_l e^{-ilx} + \sum_{p=0}^{n_j} a_p e^{-ipx} \cdot \sum_{s=0}^m b_s e^{isx}}{\sum_{s=0}^m b_s e^{isx} \cdot \sum_{p=0}^m b_p e^{-ipx}}. \end{aligned}$$

Заметим, что (см. [2, ч. 2, гл. 1, § 1.6])

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^m b_s e^{isx} \cdot \sum_{l=0}^m b_l e^{-ilx} &= \sum_{s=0}^m \sum_{l=0}^m b_s b_l \cos(s-l)x, \\ \sum_{p=0}^{n_j} a_p^j e^{ikx} \cdot \sum_{l=0}^m b_l e^{-ilx} + \sum_{p=0}^{n_j} a_p e^{-ipx} \cdot \sum_{s=0}^m b_s e^{isx} &= \\ &= 2 \sum_{p=0}^{n_j} \sum_{l=0}^m a_p^j b_l \cos(p-l)x, \end{aligned}$$

ПОЭТОМУ

$$\operatorname{Re}\left\{\pi_{n_j, \bar{m}}^j(e^{ix}; \mathbf{E}_k)\right\} = \frac{\sum_{p=0}^{n_j} \sum_{l=0}^m a_p^j b_l \cos(p-l)x}{\sum_{s=0}^m \sum_{l=0}^m b_s b_l \cos(s-l)x} =: \frac{\tilde{P}_j^t(x)}{\tilde{Q}_m^t(x)}, \quad j=1, \dots, k. \quad (17)$$

Из условия на мультииндекс следует, что $n_j \geq m$. Опираясь на формулу (17), легко показать, что $\deg \tilde{Q}_m^t \leq m$, $\deg \tilde{P}_j^t \leq n_j$, $j=1, \dots, k$. Следовательно, тождество (16) и теорема 2 доказаны.

Аналогичным образом доказывается следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – набор различных не равных нулю действительных чисел. Тогда для мультииндекса $(n, \bar{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\bar{m} \neq (0, \dots, 0)$, удовлетворяющего условию $n \geq \max_{1 \leq j \leq k} m_j$, и системы функций $\mathbf{H}_k = \{H(x; \lambda_j)\}_{j=1}^k$ существуют тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби $\{\hat{\pi}_j^t(x; \mathbf{H}_k)\}_{j=1}^k$ и при соответствующей нормировке для их знаменателя и числителей справедливы представления

$$\begin{aligned} \hat{Q}_m^t(x; \mathbf{H}_k) &= \hat{Q}_{n, \bar{m}}^t(x; \mathbf{H}_k) = Q_m(e^{ix}; \mathbf{E}_k) \cdot \overline{Q_m(e^{ix}; \mathbf{E}_k)} = \\ &= \frac{1}{[(n+m)!]^2} \left| \int_0^{+\infty} T(t) e^{-t(\cos x + i \sin x)} dt \right|^2, \end{aligned}$$

$$\hat{P}_j^t(x; \mathbf{H}_k) = \hat{P}_{n_j, n, \bar{m}}^t(x; \mathbf{H}_k) = \operatorname{Im} \left\{ P_{n_j}^j(e^{ix}; \mathbf{E}_k) \cdot \overline{Q_m(e^{ix}; \mathbf{E}_k)} \right\}, \quad j=1, \dots, k,$$

где многочлены $Q_m(z; \mathbf{E}_k)$ и $P_{n_j}^j(z; \mathbf{E}_k)$ представляются в виде интегралов Эрмита (4) и (5).

Следствие 1. Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – набор различных не равных нулю действительных чисел, для которого при $j^* \in \{1, \dots, k\}$

$$I_{j^*} = \frac{1}{(n+m)!} \int_0^{\lambda_{j^*}} T(x) dx \neq 0. \quad (18)$$

Тогда для мультииндекса $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\vec{m} \neq (0, \dots, 0)$, удовлетворяющего условию $n \geq \max_{1 \leq j \leq k} m_j$, существуют тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби $\{\hat{\pi}_j^t(x; \mathbf{G}_k)\}_{j=1}^k$ для систем функций \mathbf{G}_k , а также тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби $\{\hat{\pi}_j^t(x; \mathbf{H}_k)\}_{j=1}^k$ для систем функций \mathbf{H}_k , но $\{\hat{\pi}_j^t(x; \mathbf{G}_k)\}_{j=1}^k$ и $\{\hat{\pi}_j^t(x; \mathbf{H}_k)\}_{j=1}^k$ не являются тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Паде для систем функций \mathbf{G}_k и \mathbf{H}_k соответственно.

Доказательство. Докажем только утверждение для системы функций \mathbf{G}_k (для системы функций \mathbf{H}_k доказательство аналогично). Из формул (15) и (17) следует, что

$$G(x; \lambda_j) - \hat{\pi}_j^t(x; \mathbf{G}_k) = G(x; \lambda_j) - \frac{\tilde{P}_j^t(x)}{\tilde{Q}_m^t(x)} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{a}_l^j \cos lx.$$

Воспользовавшись тригонометрической формулой для умножения двух косинусов, из последних равенств формул (6) и (17) получаем

$$\tilde{Q}_m^t(x)G(x; \lambda_{j^*}) - \tilde{P}_{j^*}^t(x) = c_{n+1}^{j^*} \cos(n+1)x + c_{n+2}^{j^*} \cos(n+2)x + \dots,$$

где $c_{n+1}^{j^*} = 2b_m b_0 I_{j^*} \neq 0$. Отсюда и из определения тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Паде вытекает утверждение следствия 1 для системы функций \mathbf{G}_k .

Замечание 1. Условие (18) выполняется при $j^* = 1$, например когда $\lambda_j = j$, $j = 1, \dots, k$, а также в более общем случае, когда $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$.

Линейные и нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышева

Пусть $\mathbf{f}^{ch} = (f_1^{ch}(x), \dots, f_k^{ch}(x))$ – система функций, которые представимы рядами Фурье по многочленам Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ вида

$$f_j^{ch}(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l^j T_l(x), \quad j = 1, \dots, k, \quad (19)$$

с действительными коэффициентами. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ и рассмотрим следующую задачу.

Задача 3. Для набора рядов (19) найти тождественно не равный нулю многочлен $Q_m^{ch}(x) = Q_{n, \vec{m}}^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch}) = \sum_{p=0}^m u_p T_p(x)$ и такие многочлены $P_j^{ch}(x) = P_{n_j, n, \vec{m}}^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch}) = \sum_{p=0}^{n_j} v_p^j T_p(x)$, $n_j = n + m - m_j$, чтобы для $j = 1, \dots, k$ выполнялись условия

$$Q_m^{ch}(x) f_j^{ch}(x) - P_j^{ch}(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{a}_l^j T_l(x),$$

где \tilde{a}_l^j и коэффициенты многочленов $Q_m^{ch}(x)$ и $P_j^{ch}(x)$ могут быть комплексными числами.

Определение 6. Если пара (Q_m^{ch}, P^{ch}) , где $P^{ch} = (P_1^{ch}, \dots, P_k^{ch})$, является решением задачи 3 с индексом $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндексом $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$, то многочлены $Q_m^{ch}(x)$ и $P_1^{ch}(x), \dots, P_k^{ch}(x)$ и рациональные дроби

$$\pi_j^{ch}(x) = \pi_{n_j, n, \vec{m}}^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch}) = \frac{P_j^{ch}(x)}{Q_m^{ch}(x)}, \quad j = 1, \dots, k,$$

будем называть многочленами Эрмита – Чебышева и линейными аппроксимациями Эрмита – Чебышева для системы функций \mathbf{f}^{ch} соответственно.

Определение 7. Рациональные функции вида

$$\hat{\pi}_j^{ch}(x) = \hat{\pi}_{n_j, n, \bar{m}}^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch}) = \frac{\hat{P}_j^{ch}(x)}{\hat{Q}_m^{ch}(x)},$$

где многочлены

$$\hat{Q}_m^{ch}(x) = \hat{Q}_{n, \bar{m}}^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch}) = \sum_{p=0}^m \hat{u}_p T_p(x),$$

$$P_j^{ch}(x) = P_{n_j, n, \bar{m}}^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch}) = \sum_{p=0}^{n_j} \hat{v}_p^j T_p(x) \quad (n_j = n + m - m_j)$$

подобраны так, что при $j = 1, \dots, k$

$$f_i^{ch}(x) - \frac{\hat{P}_j^{ch}(x)}{\hat{Q}_m^{ch}(x)} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \hat{a}_l^j T_l(x),$$

будем называть нелинейными аппроксимациями Эрмита – Чебышева.

Известно (см., например, [9]), что в случае $k = 1$ существуют функции, разлагающиеся в ряд по многочленам Чебышева, для которых нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышева (при $k = 1$ их называют нелинейными аппроксимациями Паде – Чебышева; терминология в этом разделе частично заимствована из работы [9]) не существуют, и функции, для которых нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышева существуют, но не совпадают с линейными аппроксимациями Эрмита – Чебышева.

Приведем пример системы функций, для которой существуют нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышева, но они не совпадают с линейными аппроксимациями Эрмита – Чебышева.

С этой целью определим семейство функций, представимых на отрезке $[-1, 1]$ рядами по многочленам Чебышева

$$F(x; \lambda) = e^{\lambda x} \cos(\lambda \sqrt{1-x^2}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} T_l(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

и рассмотрим систему функций $\mathbf{F}_k = \{F(x; \lambda_j)\}_{j=1}^k$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – набор различных не равных нулю действительных чисел. Очевидно, что $F(\cos x; \lambda) = G(x; \lambda)$, т. е. $G(x; \lambda)$ является индуцированной функцией для $F(x; \lambda)$, поэтому, заменяя в формуле (15) x на $\arccos x$, получаем

$$F(x; \lambda_j) - \operatorname{Re} \left\{ \frac{P_{n_j}^j(e^{i \arccos x}; \mathbf{E}_k)}{Q_m(e^{i \arccos x}; \mathbf{E}_k)} \right\} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{a}_l^j T_l(x).$$

Отсюда и из формулы (17) вытекает, что

$$\hat{\pi}_{n_j, n, \bar{m}}^{ch}(x; \mathbf{F}_k) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{P_{n_j}^j(e^{i \arccos x}; \mathbf{E}_k)}{Q_m(e^{i \arccos x}; \mathbf{E}_k)} \right\}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – набор различных не равных нулю действительных чисел. Тогда для мультииндекса $(n, \bar{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\bar{m} \neq (0, \dots, 0)$, удовлетворяющего условию $n \geq \max_{1 \leq j \leq k} m_j$, и системы функций $\mathbf{F}_k = \{F(x; \lambda_j)\}_{j=1}^k$ существуют нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышева $\{\hat{\pi}_j^i(x; \mathbf{F}_k)\}_{j=1}^k$ и при соответствующей нормировке для их знаменателя и числителя справедливы представления

$$\begin{aligned} \hat{Q}_m^{ch}(x; \mathbf{F}_k) &= \hat{Q}_{n, \bar{m}}^{ch}(x; \mathbf{F}_k) = Q_m(e^{i \arccos x}; \mathbf{E}_k) \cdot \overline{Q_m(e^{i \arccos x}; \mathbf{E}_k)} = \\ &= \frac{1}{[(n+m)!]^2} \left| \int_0^{+\infty} T(t) e^{-t(x+i\sqrt{1-x^2})} dt \right|^2, \end{aligned}$$

$$\hat{P}_j^{ch}(x; \mathbf{F}_k) = \hat{P}_{j, n, \vec{m}}^{ch}(x; \mathbf{F}_k) = \operatorname{Re} \left\{ P_{n_j}^j \left(e^{i \arccos x}; \mathbf{E}_k \right) \cdot \overline{Q_m \left(e^{i \arccos x}; \mathbf{E}_k \right)} \right\},$$

где многочлены $Q_m(z; \mathbf{E}_k)$ и $P_{n_j}^j(z; \mathbf{E}_k)$ представляются в виде интегралов Эрмита (4) и (5).

Следствие 2. Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – набор различных не равных нулю действительных чисел, для которого при $j \in \{1, \dots, k\}$ интеграл $\int_0^{\lambda_j} T(x) dx$ не равен нулю. Тогда для мультииндекса $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\vec{m} \neq (0, \dots, 0)$, удовлетворяющего условию $n \geq \max_{1 \leq j \leq k} m_j$, и системы функций \mathbf{F}_k существуют нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышева $\{\hat{\pi}_j^{ch}(x; \mathbf{F}_k)\}_{j=1}^k$, которые при этом не являются линейными тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Чебышева для системы функций \mathbf{F}_k .

Доказательство следствия 2 аналогично доказательству следствия 1.

Замечание 2. Условия следствия 2 выполняются, например когда $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$.

В заключение заметим, что в работе [10] по схеме, ранее предложенной О. Коши, построены интерполяционные рациональные операторы с узлами интерполяции в нулях дробей Чебышева – Маркова.

Библиографические ссылки

1. Никишин ЕМ, Сорокин ВН. *Рациональные аппроксимации и ортогональность*. Москва: Наука; 1988. 256 с.
2. Бейкер Дж мл., Грейвс-Моррис П. *Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения*. Рахманов ЕА, Суетин СП, переводчики; Гончар АА, редактор. Москва: Мир; 1986. 502 с.
3. Frobenius G. Ueber Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1881;90:1–17. DOI: 10.1515/crll.1881.90.1.
4. Jacobi CGJ. Über die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebrochne rationale Function. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1846;30:127–156. DOI: 10.1515/crll.1846.30.127.
5. Hermite M. Sur la fonction exponentielle. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. 1873;77:18–24, 74–79, 226–233, 285–293.
6. Старовойтов АП, Рябченко НВ. О детерминантных представлениях многочленов Эрмита – Паде. *Труды Московского математического общества*. 2022;83(1):17–36.
7. Лабых ЮА, Старовойтов АП. Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье. *Математический сборник*. 2009;200(7):107–130. DOI: 10.4213/sm4523.
8. Суетин СП. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда. *Успехи математических наук*. 2002;57(1):45–142. DOI: 10.4213/rm475.
9. Суетин СП. О существовании нелинейных аппроксимаций Паде – Чебышева для аналитических функций. *Математические заметки*. 2009;86(2):290–303. DOI: 10.4213/mzm5262.
10. Медведева ВЮ, Ровба ЕА. Рациональная интерполяция функций $|x|^\alpha$ с узлами Чебышева – Маркова первого рода. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2023;1:6–19. DOI: 10.33581/2520-6508-2023-1-6-19.

References

1. Nikishin EM, Sorokin VN. *Ratsional'nye approksimatsii i ortogonal'nost'* [Rational approximations and orthogonality]. Moscow: Nauka; 1988. 256 p. Russian.
2. Baker GA Jr, Graves-Morris P. *Padé approximants*. London: Addison-Wesley Publishing Company; 1981. 2 volumes (Rota G-C, editor. Encyclopedia of mathematics and its applications; volume 13–14).
Russian edition: Baker G Jr, Graves-Morris P. *Approksimatsii Pade. 1. Osnovy teorii. 2. Obobshcheniya i prilozheniya*. Rakhmanov EA, Suetin SP, translators; Gonchar AA, editor. Moscow: Mir; 1986. 502 p.
3. Frobenius G. Ueber Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1881;90:1–17. DOI: 10.1515/crll.1881.90.1.
4. Jacobi CGJ. Über die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebrochne rationale Function. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1846;30:127–156. DOI: 10.1515/crll.1846.30.127.
5. Hermite M. Sur la fonction exponentielle. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. 1873;77:18–24, 74–79, 226–233, 285–293.
6. Starovoitov AP, Ryabchenko NV. [On determinantal representations of Hermite – Padé polynomials]. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva*. 2022;83(1):17–36. Russian.
7. Labych YuA, Starovoitov AP. [Trigonometric Padé approximations for functions with regularly decreasing Fourier coefficients]. *Matematicheskii sbornik*. 2009;200(7):107–130. Russian. DOI: 10.4213/sm4523.

8. Suetin SP. [The Padé approximations and efficient analytic continuation of a power series]. *Uspekhi matematicheskikh nauk*. 2002;57(1):45–142. Russian. DOI: 10.4213/rm475.

9. Suetin SP. [On the existence of non-linear Padé – Chebyshev approximations for analytic functions]. *Matematicheskie zametki*. 2009;86(2):290–303. Russian. DOI: 10.4213/mzm5262.

10. Medvedeva VYu, Rouba YA. Rational interpolation of a function $|x|^\alpha$ with Chebyshev – Markov nodes of the first kind. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2023;1:6–19. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2023-1-6-19.

Получена 05.03.2023 / исправлена 05.06.2023 / принята 05.06.2023.
Received 05.03.2023 / revised 05.06.2023 / accepted 05.06.2023.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

УДК 517.95

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПАМЯТЬЮ

А. Л. ГЛАДКОВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассмотрено нелинейное параболическое уравнение с памятью $u_t = \Delta u + au^p \int_0^t u^q(x, \tau) d\tau - bu^m$ для $(x, t) \in \Omega \times (0, +\infty)$ с нелинейным нелокальным граничным условием $\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega \times (0, +\infty)} = \int_{\Omega} k(x, y, t) u^l(y, t) dy$ и начальными данными $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$, где a, b, q, m, l – положительные постоянные; $p \geq 0$; Ω – ограниченная область в пространстве \mathbb{R}^n с гладкой границей $\partial \Omega$; ν – единичная внешняя нормаль к $\partial \Omega$. Неотрицательная непрерывная функция $k(x, y, t)$ определена при $x \in \partial \Omega$, $y \in \bar{\Omega}$, $t \geq 0$, неотрицательная функция $u_0(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, при этом она удовлетворяет условию $\frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \int_{\Omega} k(x, y, 0) u_0^l(y) dy$ при $x \in \partial \Omega$. Рассмотрены классические решения.

Установлено существование локального максимального решения исходной задачи. Введены понятия верхнего и нижнего решений. Показано, что при выполнении определенных условий верхнее решение не меньше нижнего решения. Найдены условия положительности решений. Как следствие положительности решений и принципа сравнения решений доказана теорема единственности решения.

Ключевые слова: нелинейное параболическое уравнение; нелокальное граничное условие; существование решения; принцип сравнения.

Образец цитирования:

Гладков А.Л. Начально-краевая задача с нелокальным граничным условием для нелинейного параболического уравнения с памятью. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;2:18–27 (на англ.).
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-18-27>
EDN: UZCQJQ

For citation:

Gladkov AL. Initial boundary value problem with nonlocal boundary condition for a nonlinear parabolic equation with memory. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;2:18–27.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-18-27>
EDN: UZCQJQ

Автор:

Александр Львович Гладков – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой математической кибернетики механико-математического факультета.

Author:

Alexander L. Gladkov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics.
gladkoyal@bsu.by

INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITION FOR A NONLINEAR PARABOLIC EQUATION WITH MEMORY

A. L. GLADKOV^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

We consider a nonlinear parabolic equation with memory $u_t = \Delta u + au^p \int_0^t u^q(x, \tau) d\tau - bu^m$ for $(x, t) \in \Omega \times (0, +\infty)$ under nonlinear nonlocal boundary condition $\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega \times (0, +\infty)} = \int_{\Omega} k(x, y, t) u^l(y, t) dy$ and initial data $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$, where a, b, q, m, l are positive constants; $p \geq 0$; Ω is a bounded domain in \mathbb{R}^n with smooth boundary $\partial\Omega$; ν is unit outward normal on $\partial\Omega$. Nonnegative continuous function $k(x, y, t)$ is defined for $x \in \partial\Omega$, $y \in \bar{\Omega}$, $t \geq 0$, nonnegative function $u_0(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, while it satisfies the condition $\frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \int_{\Omega} k(x, y, 0) u_0^l(y) dy$ for $x \in \partial\Omega$. In this paper we study classical solutions. We establish the existence of a local maximal solution of the original problem. We introduce definitions of a supersolution and a subsolution. It is shown that under some conditions a supersolution is not less than a subsolution. We find conditions for the positiveness of solutions. As a consequence of the positiveness of solutions and the comparison principle of solutions, we prove the uniqueness theorem.

Keywords: nonlinear parabolic equation; nonlocal boundary condition; existence of a solution; comparison principle.

Introduction

In this paper we consider the initial boundary value problem for the nonlinear parabolic equation

$$u_t = \Delta u + au^p \int_0^t u^q(x, \tau) d\tau - bu^m, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

with nonlinear nonlocal boundary condition

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} = \int_{\Omega} k(x, y, t) u^l(y, t) dy, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (2)$$

and initial datum

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

where a, b, q, m, l are positive constants; $p \geq 0$; Ω is a bounded domain in \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) with smooth boundary $\partial\Omega$; ν is unit outward normal on $\partial\Omega$.

Throughout this paper we suppose that the functions $k(x, y, t)$ and $u_0(x)$ satisfy the following conditions:

$$k(x, y, t) \in C(\partial\Omega \times \bar{\Omega} \times [0, +\infty)), \quad k(x, y, t) \geq 0,$$

$$u_0(x) \in C^1(\bar{\Omega}), \quad u_0(x) \geq 0 \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \int_{\Omega} k(x, y, 0) u_0^l(y) dy \text{ on } \partial\Omega.$$

Initial boundary value problems with nonlocal terms in parabolic equations or in boundary conditions have been considered in many papers (see, for example, [1–17] and the references therein). In particular, the initial boundary value problem (1)–(3) with $a = 0$ was considered for $b = b(x, t) \geq 0$ and $b = b(x, t) \leq 0$ in publications [18; 19] and [20; 21] respectively. Problem (1)–(3) with $p = 0$ and nonlocal boundary condition

$$u(x, t) = \int_{\Omega} k(x, y, t) u^l(y, t) dy, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (4)$$

was investigated in work [22].

The aim of this paper is to study problem (1)–(3) for any positive p, q, m and l . We prove existence of a local solution of problem (1)–(3). Comparison principle and the uniqueness of a solution are established. We show the nonuniqueness of solution of problem (1)–(3) with $u_0(x) \equiv 0$ also.

Local existence

In this section a local existence theorem for problem (1)–(3) will be proved. We begin with definitions of a supersolution, a subsolution and a maximal solution of problem (1)–(3). Let $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$, $\Gamma_T = S_T \cup \bar{\Omega} \times \{0\}$, $T > 0$.

Definition 1. We say that a nonnegative function $u(x, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$ is a supersolution of problem (1)–(3) in Q_T if

$$u_t \geq \Delta u + au^p \int_0^t u^q(x, \tau) d\tau - bu^m, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} \geq \int_{\Omega} k(x, y, t) u^l(y, t) dy, \quad (x, t) \in S_T, \quad (6)$$

$$u(x, 0) \geq u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (7)$$

and a nonnegative function $u(x, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$ is a subsolution of problem (1)–(3) in Q_T if $u \geq 0$ and it satisfies inequalities (5)–(7) in the reverse order. We say that $u(x, t)$ is a solution of problem (1)–(3) in Q_T if $u(x, t)$ is both a subsolution and a supersolution of problem (1)–(3) in Q_T .

Definition 2. We say that $u(x, t)$ is a maximal solution of problem (1)–(3) in Q_T if for any other solution $w(x, t)$ of problem (1)–(3) in Q_T the inequality $w(x, t) \leq u(x, t)$ is satisfied for $(x, t) \in Q_T \cup \Gamma_T$.

Let $\{\varepsilon_m\}$ be decreasing to zero a sequence such that $0 < \varepsilon_m < 1$ and $\varepsilon_m \rightarrow 0$ as $m \rightarrow \infty$. For $\varepsilon = \varepsilon_m$, $m = 1, 2, \dots$, let $u_{0\varepsilon}(x)$ be the functions with the following properties:

$$\begin{aligned} u_{0\varepsilon}(x) &\in C^1(\bar{\Omega}), \quad u_{0\varepsilon}(x) \geq \varepsilon, \quad u_{0\varepsilon_i}(x) \geq u_{0\varepsilon_j}(x) \text{ for } \varepsilon_i \geq \varepsilon_j, \\ u_{0\varepsilon}(x) &\rightarrow u_0(x) \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ uniformly in } \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial u_{0\varepsilon}(x)}{\partial \nu} &= \int_{\Omega} k(x, y, 0) u_{0\varepsilon}^l(y) dy, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (8)$$

Let us consider the following auxiliary problem:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + au^p \int_0^t u^q(x, \tau) d\tau - bu^m + b\varepsilon^m, \quad (x, t) \in Q_T, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} = \int_{\Omega} k(x, y, t) u^l(y, t) dy, \quad (x, t) \in S_T, \\ u(x, 0) = u_{0\varepsilon}(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \quad (9)$$

where $\varepsilon = \varepsilon_m$. The notion of a solution u_ε for problem (9) can be defined in a similar way as in the definition 1.

Theorem 1. Problem (9) has a unique solution in Q_T for small values of $T > 0$.

Proof. Denote $K = \sup_{\partial\Omega \times Q_1} k(x, y, t)$ and introduce an auxiliary function $\psi(x)$ with the following properties:

$$\psi(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \quad \inf_{\Omega} \psi(x) \geq \max\left(\sup_{\Omega} u_{0\varepsilon}(x), 1\right), \quad \inf_{\partial\Omega} \frac{\partial \psi(x)}{\partial \nu} \geq K \max(1, \exp(l-1)) \int_{\Omega} \psi^l(y) dy.$$

We put

$$w(x, t) = \exp(\alpha t) \psi(x),$$

where α will be defined below.

To prove the existence of a solution for problem (9) we introduce the set

$$B = \left\{ h(x, t) \in C(\bar{Q}_T) : \varepsilon \leq h(x, t) \leq w(x, t), \quad h(x, 0) = u_{0\varepsilon}(x) \right\}$$

and consider the problem

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + a v^p \int_0^t v^q(x, \tau) d\tau - b u^m + b \varepsilon^m, & (x, t) \in Q_T, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} = \int_{\Omega} k(x, y, t) v^l(y, t) dy, & (x, t) \in S_T, \\ u(x, 0) = u_{0\varepsilon}(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (10)$$

where $v \in B$. It is obvious, B is a nonempty convex subset of $C(\bar{Q}_T)$. By classical theory [23] problem (10) has a solution $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\bar{Q}_T)$ for small values of T . Let us call $A(v) = u$, where $v \in B$, and u is a solution of problem (10). In order to show that A has a fixed point in B we verify that A is a continuous mapping from B into itself such that AB is relatively compact. Obviously, the function $u(x, t) = \varepsilon$ is a subsolution of problem (10). Let us show that $w(x, t)$ is a supersolution of problem (10) for suitable choice of $\alpha > 0$ and $T > 0$.

Indeed,

$$\begin{aligned} w_t - \Delta w - a v^p \int_0^t v^q(x, \tau) d\tau + b w^m - b \varepsilon^m &\geq w_t - \Delta w - a w^p \int_0^t w^q(x, \tau) d\tau + b w^m - b \varepsilon^m \geq \\ &\geq \exp(\alpha t) [\alpha \psi(x) - \Delta \psi(x)] - a \exp(p\alpha t) \frac{\exp(q\alpha t) - 1}{q\alpha} \psi^{p+q} + b (\exp(m\alpha t) \psi^m(x) - \varepsilon^m) \geq 0 \end{aligned}$$

for $(x, t) \in Q_T$ if

$$\alpha \geq \max \left\{ \frac{1}{q}, a \exp(1) \sup_{\Omega} \psi^{p+q-1}(x) + \sup_{\Omega} \frac{\Delta \psi(x)}{\psi(x)} \right\}, \quad T \leq \frac{1}{(p+q)\alpha}.$$

On the boundary S_T we have

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x, t)}{\partial \nu} - \int_{\Omega} k(x, y, t) v^l(y, t) dy &\geq \exp(\alpha t) K \max(1, \exp(l-1)) \int_{\Omega} \psi^l(y) dy - \\ &- K \exp(l\alpha t) \int_{\Omega} \psi^l(y) dy \geq 0 \end{aligned}$$

for $T \leq \frac{1}{\alpha}$. The inequality

$$w(x, 0) - u_{0\varepsilon}(x) \geq 0$$

holds for $x \in \Omega$. Then $w(x, t)$ is a supersolution of problem (10) and thanks to a comparison principle for problem (10) A maps B into itself.

Let $G(x, y; t - \tau)$ denote the Green's function for a heat equation with homogeneous Neumann boundary condition. The Green's function has the following properties (see, for example, [24]):

$$\begin{aligned} G(x, y; t - \tau) &\geq 0, \quad x, y \in \Omega, \quad 0 \leq \tau < t, \\ \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) dy &= 1, \quad x \in \Omega, \quad 0 \leq \tau < t. \end{aligned} \quad (11)$$

It is well known that $u(x, t)$ is a solution of problem (10) in Q_T if and only if for $(x, t) \in Q_T$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\Omega} G(x, y; t) u_{0\varepsilon}(y) dy + \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) \left(a v^p(y, \tau) \int_0^{\tau} v^q(y, \sigma) d\sigma + b (\varepsilon^m - u^m(y, \tau)) \right) dy d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_{\partial \Omega} G(x, \xi; t - \tau) \int_{\Omega} k(\xi, y, \tau) v^l(y, \tau) dy dS_{\xi} d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

We claim that A is continuous. In fact let v_k be a sequence in B converging to $v \in B$ in $C(\bar{Q}_T)$. Denote $u_k = A v_k$. Then by (11) and (12) we see that

$$\begin{aligned}
 |u - u_k| &= \left| \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) \left\{ a(v^p(y, \tau) - v_k^p(y, \tau)) \int_0^{\tau} v^q(y, \sigma) d\sigma + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. av_k^p(y, \tau) \int_0^{\tau} (v^q(y, \sigma) - v_k^q(y, \sigma)) d\sigma - b(u^m(y, \tau) - u_k^m(y, \tau)) \right\} dy d\tau + \right. \\
 &+ \left. \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x, \xi; t - \tau) \int_{\Omega} k(\xi, y, \tau) (v^l(y, \tau) - v_k^l(y, \tau)) dy dS_{\xi} d\tau \right| \leq \\
 &\leq aT^2 \sup_{Q_T} |v^p - v_k^p| \sup_{Q_T} w^q + aT^2 \sup_{Q_T} |v^q - v_k^q| \sup_{Q_T} w^p + \\
 &+ \theta T \sup_{Q_T} |u - u_k| + KT |\Omega| \sup_{Q_T} |v^l - v_k^l|,
 \end{aligned}$$

where $\theta = mb \max \left(\varepsilon^{m-1}, \sup_{Q_T} w^{m-1}(x, t) \right)$; $T \leq \min \left\{ 1, \frac{1}{2\theta} \right\}$. Now we can conclude that u_k converges to u in $C(\bar{Q}_T)$ as $k \rightarrow \infty$.

The equicontinuity of AB follows from equation (12) and the properties of the Green's function (see, for example, [25]). The Ascoli – Arzelà theorem guarantees the relative compactness of AB . Thus we are able to apply the Schauder – Tychonoff fixed point theorem and conclude that A has a fixed point in B if T is small. Now if u_{ε} is a fixed point of A , $u_{\varepsilon} \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\bar{Q}_T)$ and it is a solution of problem (9) in Q_T . Uniqueness of the solution follows from a comparison principle for problem (9) which can be proved in a similar way as in the next section. Theorem 1 is proved.

Now, let $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Then it is easy to see that $u_{\varepsilon_2}(x, t)$ is a supersolution of problem (9) with $\varepsilon = \varepsilon_1$. Applying to problem (9) a comparison principle we have $u_{\varepsilon_1}(x, t) \leq u_{\varepsilon_2}(x, t)$. Using the last inequality and the continuation principle of solutions we deduce that the existence time of u_{ε} does not decrease as $\varepsilon \rightarrow 0$. Taking $\varepsilon \rightarrow 0$, we get $u_M(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon}(x, t) \geq 0$ and $u_M(x, t)$ exists in Q_T for some $T > 0$. We know that $u_{\varepsilon}(x, t)$ is a solution of problem (9) in Q_T if and only if for $(x, t) \in Q_T$

$$\begin{aligned}
 u_{\varepsilon}(x, t) &= \int_{\Omega} G(x, y; t) u_{0\varepsilon}(y) dy + \\
 &+ \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) \left(au_{\varepsilon}^p(y, \tau) \int_0^{\tau} u_{\varepsilon}^q(y, \sigma) d\sigma + b(\varepsilon^m - u_{\varepsilon}^m(y, \tau)) \right) dy d\tau + \\
 &+ \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x, \xi; t - \tau) \int_{\Omega} k(\xi, y, \tau) u_{\varepsilon}^l(y, \tau) dy dS_{\xi} d\tau.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Passing to the limit as $\varepsilon \rightarrow 0$ in equation (13), we obtain by dominated convergence theorem

$$\begin{aligned}
 u_M(x, t) &= \int_{\Omega} G(x, y; t) u_0(y) dy + \\
 &+ \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) \left(au_M^p(y, \tau) \int_0^{\tau} u_M^q(y, \sigma) d\sigma - bu_M^m(y, \tau) \right) dy d\tau + \\
 &+ \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x, \xi; t - \tau) \int_{\Omega} k(\xi, y, \tau) u_M^l(y, \tau) dy dS_{\xi} d\tau
 \end{aligned}$$

for $(x, t) \in Q_T$. Therefore, $u_M(x, t)$ is a solution of problem (1)–(3). Let $u(x, t)$ be any other solution of problem (1)–(3). Then by comparison principle from the next section $u_{\varepsilon}(x, t) \geq u(x, t)$. Taking $\varepsilon \rightarrow 0$, we conclude $u_M(x, t) \geq u(x, t)$. Now we proved the following local existence theorem.

Theorem 2. *Problem (1)–(3) has a maximal solution in Q_T for small values of T .*

Comparison principle

Theorem 3. Let $\bar{u}(x, t)$ and $\underline{u}(x, t)$ be a supersolution and a subsolution of problem (1)–(3) in Q_T respectively. Suppose that $\underline{u}(x, t) > 0$ or $\bar{u}(x, t) > 0$ in $Q_T \cup \Gamma_T$ if either $\min(q, l) < 1$ or $0 < p < 1$. Then $\bar{u}(x, t) \geq \underline{u}(x, t)$ in $Q_T \cup \Gamma_T$.

Proof. Suppose that $\min(p, q, l) \geq 1$. Let $T_0 \in (0, T)$ and $u_{0\varepsilon}(x)$ have the same properties as in (8) but only $u_{0\varepsilon}(x) \rightarrow \underline{u}(x, 0)$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ uniformly in $\bar{\Omega}$. We can construct a solution $u_M(x, t)$ of problem (1)–(3) with $u_0(x) = \underline{u}(x, 0)$ in the following way: $u_M(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t)$, where $u_\varepsilon(x, t)$ is a solution of problem (9). To establish the theorem we will show that

$$\underline{u}(x, t) \leq u_M(x, t) \leq \bar{u}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q}_{T_0}. \quad (14)$$

We prove the second inequality in relations (14) only since the proof of the first one is similar. Let $\varphi(x, \tau) \in C^{2,1}(\bar{Q}_{T_0})$ be a nonnegative function such that

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial \nu} = 0$$

for $(x, t) \in S_{T_0}$. If we multiply the first equation in problem (9) by $\varphi(x, t)$ and then integrate over Q_t for $t \in (0, T_0)$, we obtain

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_\Omega u_{\varepsilon\tau}(x, \tau) \varphi(x, \tau) dx d\tau = \\ & = \int_0^t \int_\Omega \left(\Delta u_\varepsilon(x, \tau) + a u_\varepsilon^p(x, \tau) \int_0^\tau u_\varepsilon^q(x, \sigma) d\sigma + b(\varepsilon^m - u_\varepsilon^m(x, \tau)) \right) \varphi(x, \tau) dx d\tau. \end{aligned}$$

Integrating by parts and using Green's identity, we have

$$\begin{aligned} & \int_\Omega u_\varepsilon(x, t) \varphi(x, t) dx \leq \int_\Omega u_\varepsilon(x, 0) \varphi(x, 0) dx + \\ & + \int_0^t \int_\Omega (u_\varepsilon(x, \tau) \varphi_\tau(x, \tau) + u_\varepsilon(x, \tau) \Delta \varphi(x, \tau)) dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_\Omega \left(a u_\varepsilon^p(x, \tau) \int_0^\tau u_\varepsilon^q(x, \sigma) d\sigma + b(\varepsilon^m - u_\varepsilon^m(x, \tau)) \right) \varphi(x, \tau) dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \varphi(x, \tau) \int_\Omega k(x, y, \tau) u_\varepsilon'(y, \tau) dy dS_x d\tau. \end{aligned} \quad (15)$$

On the other hand, \bar{u} satisfies (15) with reversed inequality and with $\varepsilon = 0$. Set $w(x, t) = u_\varepsilon(x, t) - \bar{u}(x, t)$. Then $w(x, t)$ satisfies

$$\begin{aligned} & \int_\Omega w(x, t) \varphi(x, t) dx \leq \int_\Omega w(x, 0) \varphi(x, 0) dx + \varepsilon^m b \int_0^t \int_\Omega \varphi(x, \tau) dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_\Omega w(x, \tau) (\varphi_\tau(x, \tau) + \Delta \varphi(x, \tau) - mb \theta_1^{m-1}(x, \tau)) \varphi(x, \tau) dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_\Omega \left(a \bar{u}^p(x, \tau) \varphi(x, \tau) \int_0^\tau q \theta_2^{q-1}(x, \sigma) w(x, \sigma) d\sigma \right) dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_\Omega \left(a p \theta_3^{p-1}(x, \tau) w(x, \tau) \varphi(x, \tau) \int_0^\tau u_\varepsilon^q(x, \sigma) d\sigma \right) dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \varphi(x, \tau) \int_\Omega k(x, y, \tau) l \theta_4^{l-1}(y, \tau) w(y, \tau) dy dS_x d\tau, \end{aligned} \quad (16)$$

where $\theta_i(x, \tau)$, $i = 1, 2, 3, 4$, are some continuous functions between $u_\varepsilon(x, t)$ and $\bar{u}(x, t)$. Note here that by hypotheses for $k(x, y, \tau)$, $u_\varepsilon(x, t)$ and $\bar{u}(x, t)$, we have

$$\begin{aligned} 0 \leq \bar{u}(x, t) \leq M, \quad \varepsilon \leq u_\varepsilon(x, t) \leq M, \quad (x, t) \in \bar{Q}_{T_0}, \\ 0 \leq k(x, y, t) \leq M, \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times \bar{\Omega} \times [0, T_0], \end{aligned} \tag{17}$$

where M is some positive constant. Then it is easy to see from (17) that $\theta_1^{m-1}(x, \tau)$, $\theta_2^{q-1}(x, \tau)$, $\theta_3^{p-1}(x, \tau)$ and $\theta_4^{l-1}(x, \tau)$ are positive and bounded functions in \bar{Q}_{T_0} and, moreover, $\theta_1^{m-1}(x, \tau) \leq \max\{\varepsilon^{m-1}, M^{m-1}\}$, $\theta_2^{q-1}(x, \tau) \leq M^{q-1}$, $\theta_3^{p-1}(x, \tau) \leq M^{p-1}$, $\theta_4^{l-1}(x, \tau) \leq M^{l-1}$. Define a sequence $\{a_n\}$ in the following way: $a_n(x, t) \in C^\infty(\bar{Q}_{T_0})$, $a_n(x, t) \geq 0$ and $a_n(x, t) \rightarrow mb\theta_1^{m-1}(x, t)$ as $n \rightarrow \infty$ in $L^1(\bar{Q}_{T_0})$. Now, we consider a backward problem given by

$$\begin{cases} \varphi_\tau + \Delta\varphi - a_n\varphi = 0, & (x, \tau) \in Q_t, \\ \frac{\partial\varphi(x, \tau)}{\partial\nu} = 0, & (x, \tau) \in S_t, \\ \varphi(x, t) = \psi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{18}$$

where $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ and $0 \leq \psi(x) \leq 1$. Denote a solution of problem (18) as $\varphi_n(x, \tau)$. Then by the standard theory for linear parabolic equations (see, for example, [25]), we find that $\varphi_n(x, \tau) \in C^{2,1}(\bar{Q}_t)$, $0 \leq \varphi_n(x, \tau) \leq 1$ in \bar{Q}_t . Putting $\varphi = \varphi_n$ in inequality (16) and passing to the limit as $n \rightarrow \infty$, we infer

$$\begin{aligned} \int_\Omega w(x, t)\psi(x)dx \leq \int_\Omega w_+(x, 0)dx + \varepsilon^m b T_0 |\Omega| + \\ + \left\{ a(p+q)M^{p+q-1}T_0 + l|\partial\Omega|M^l \right\} \int_0^t \int_\Omega w_+(x, \tau)dx d\tau, \end{aligned} \tag{19}$$

where $w_+ = \max(w, 0)$; $|\partial\Omega|$ and $|\Omega|$ are the Lebesgue measures of $\partial\Omega$ in \mathbb{R}^{n-1} and Ω in \mathbb{R}^n respectively. Since inequality (19) holds for every $\psi(x)$, we can choose a sequence $\{\psi_n(x)\}$ converging in $L^1(\Omega)$ to

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } w(x, t) > 0, \\ 0, & \text{if } w(x, t) \leq 0. \end{cases}$$

Passing to the limit as $n \rightarrow \infty$ in inequality (19), we obtain

$$\begin{aligned} \int_\Omega w_+(x, t)dx \leq \int_\Omega w_+(x, 0)dx + \varepsilon^m b T_0 |\Omega| + \\ + \left\{ a(p+q)M^{p+q-1}T_0 + l|\partial\Omega|M^l \right\} \int_0^t \int_\Omega w_+(x, \tau)dx d\tau, \quad t \in (0, T_0]. \end{aligned}$$

Applying now Gronwall's inequality, we have

$$\int_\Omega w_+(x, t)dx \leq \left(\int_\Omega w_+(x, 0)dx + \varepsilon^m b T_0 |\Omega| \right) \exp \left[\left\{ a(p+q)M^{p+q-1}T_0 + l|\partial\Omega|M^l \right\} t \right]$$

for $t \in (0, T_0]$. Passing to the limit as $\varepsilon \rightarrow 0$, the conclusion of the theorem follows for $\min(p, q, l) \geq 1$. For the case $p = 0$, $\min(q, l) \geq 1$ we prove the theorem in the same way. If $\min(q, l) < 1$ or $0 < p < 1$ we can consider $w(x, t) = \underline{u}(x, t) - \bar{u}(x, t)$ and prove the theorem in a similar way using the positiveness of a subsolution or a supersolution. Theorem 3 is proved.

Remark. For similar problem (1), (3), (4) with $p = 0$ the authors of work [22] suppose in the comparison principle that $\underline{u}(x, t) > 0$ or $\bar{u}(x, t) > 0$ in $Q_T \cup \Gamma_T$ if $\min(q, m, l) < 1$.

Lemma 1. Let $u(x, t)$ be a solution of problem (1)–(3) in Q_T . Let $u_0(x) \equiv 0$ in Ω and $m \geq 1$. Then $u(x, t) > 0$ in $Q_T \cup S_T$. If $u_0(x) > 0$ in $\bar{\Omega}$ and $p < m < 1$ then $u(x, t) > 0$ in $Q_T \cup \Gamma_T$.

Proof. Let $u_0(x) \equiv 0$ in Ω and $m \geq 1$. We denote

$$M = \sup_{Q_{T_0}} u(x, t),$$

where M is some positive constant; $T_0 \in (0, T)$. Now we put $h(x, t) = u(x, t) \exp(\lambda t)$ with $\lambda \geq bM^{m-1}$. Then in Q_{T_0} we have

$$h_t - \Delta h = \exp(\lambda t)(\lambda u + u_t - \Delta u) \geq u \exp(\lambda t)(\lambda - bu^{m-1}) \geq 0.$$

Since $h(x, 0) = u_0(x) \geq 0$, $x \in \Omega$, and $u_0(x) \equiv 0$ in Ω , by the strong maximum principle $h(x, t) > 0$ in Q_{T_0} . Hence, $u(x, t) > 0$ in Q_{T_0} . Let $h(x_0, t_0) = 0$ in some point $(x_0, t_0) \in S_T$. Then according to theorem 3.6 of work [26] it yields $\frac{\partial h(x_0, t_0)}{\partial \nu} < 0$, which contradicts boundary condition (2).

Let $u_0(x) > 0$ in $\bar{\Omega}$ and $p < m < 1$. Then there exist $\tau \in (0, T)$ and $\varepsilon > 0$ such that

$$u(x, t) \geq \varepsilon \text{ in } \bar{Q}_\tau$$

and, moreover, $u(x, t) \equiv \varepsilon_1 = \min \left(\varepsilon, \left[\frac{a\tau\varepsilon^q}{b} \right]^{\frac{1}{m-p}} \right)$ is the subsolution of problem (1)–(3) in $Q_{T_0} \setminus \bar{Q}_\tau$ with initial

function $u(x, \tau)$ for $t = \tau$ instead of initial datum (3). Putting $\underline{u}(x, t) \equiv \varepsilon_1$ and $\bar{u}(x, t) \equiv u(x, t)$ and arguing as in the proof of theorem 3, we get

$$u(x, t) \geq \varepsilon_1 \text{ in } \bar{Q}_{T_0} \text{ for any } T_0 \in (0, T).$$

Lemma 1 is proved.

As a simple consequence of theorem 3 and lemma 1, we get the following uniqueness result for problem (1)–(3).

Theorem 4. Let problem (1)–(3) have a positive in $Q_T \cup \Gamma_T$ solution or a solution in Q_T either with non-negative initial data in Ω for $\min(p, q, l) \geq 1$ or with positive initial data in $\bar{\Omega}$ under the conditions $m \geq 1$ or $p < m < 1$. Then a solution of problem (1)–(3) is unique in Q_T .

Now we will prove the nonuniqueness of solution of problem (1)–(3) with $u_0(x) \equiv 0$ for $l < \min(1, m)$ or $p + q < \min(1, m)$. We note that problem (1)–(3) with $u_0(x) \equiv 0$ has solution $u(x, t) \equiv 0$.

Theorem 5. Let $u_0(x) \equiv 0$ and either $l < \min(1, m)$ and

$$k(x, y_0, t_0) > 0 \text{ for any } x \in \partial\Omega \text{ and some } y_0 \in \partial\Omega \text{ and } t_0 \in [0, T) \tag{20}$$

or $p + q < \min(1, m)$. Then a maximal solution of problem (1)–(3) $u_M(x, t) \not\equiv 0$ in Q_T .

Proof. As shown in theorem 2 a maximal solution $u_M(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t)$, where $u_\varepsilon(x, t)$ is some positive in \bar{Q}_T supersolution of problem (1)–(3). To prove the theorem we construct a subsolution $\underline{u}(x, t) \equiv 0$ of problem (1)–(3) with $u_0(x) \equiv 0$. By theorem 3 we have $u_\varepsilon(x, t) \geq \underline{u}(x, t)$ and therefore maximal solution $u_M(x, t) \not\equiv 0$.

At first let $l < \min(1, m)$ and inequality (20) hold. To construct a subsolution we use the change of variables in a neighbourhood of $\partial\Omega$ as in work [27]. Let \bar{x} be a point on $\partial\Omega$. We denote by $\bar{n}(\bar{x})$ the inner unit normal to $\partial\Omega$ at the point \bar{x} . Since $\partial\Omega$ is smooth it is well-known that there exists $\delta > 0$ such that the mapping $\psi : \partial\Omega \times [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ given by $\psi(\bar{x}, s) = \bar{x} + s\bar{n}(\bar{x})$ defines new coordinates (\bar{x}, s) in a neighbourhood of $\partial\Omega$ in $\bar{\Omega}$.

Under the assumptions of the theorem, there exists \bar{t} such that $k(x, y, t) > 0$ for $t_0 \leq t \leq t_0 + \bar{t}$, $x \in \partial\Omega$ and $y \in V(y_0)$, where $V(y_0)$ is some neighbourhood of y_0 in $\bar{\Omega}$.

Let $\frac{1}{1-l} < \alpha \leq \frac{1}{1-m}$ for $m < 1$ and $\alpha > \frac{1}{1-l}$ for $m \geq 1$, $2 < \beta < \frac{2}{1-m}$ for $m < 1$ and $\beta > 2$ for $m \geq 1$. Assume that $A > 0$, $0 < \xi_0 \leq 1$ and $0 < T_0 < \min(T - t_0, \bar{t}, \delta^2)$. For points in $\partial\Omega \times [0, \delta] \times (t_0, t_0 + T_0]$ of coordinates (\bar{x}, s, t) define

$$\underline{u}(\bar{x}, s, t) = A(t - t_0)^\alpha \left(\xi_0 - \frac{s}{\sqrt{t - t_0}} \right)_+^\beta$$

and extend \underline{u} as zero to the whole of \bar{Q}_τ with $\tau = t_0 + T_0$. Arguing as in work [18] we prove that \underline{u} is the subsolution of problem (1)–(3) with $u_0(x) \equiv 0$ in Q_τ .

Now we suppose that $p + q < \min(1, m)$. Then it is easy to check that $\underline{u}(x, t) = t^\gamma$ is the subsolution of problem (1)–(3) with $u_0(x) \equiv 0$ in Q_τ for small values of τ if

$$\gamma > \max \left(\frac{2}{1 - (p + q)}, \frac{1}{m - (p + q)} \right).$$

Theorem 5 is proved.

References

1. Friedman A. Monotonic decay of solutions of parabolic equations with nonlocal boundary conditions. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1986;44(3):401–407. DOI: 10.1090/qam/860893.
2. Deng K. Comparison principle for some nonlocal problems. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1992;50(3):517–522. DOI: 10.1090/qam/1178431.
3. Souplet P. Blow-up in nonlocal reaction – diffusion equations. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*. 1998;29(6):1301–1334. DOI: 10.1137/S0036141097318900.
4. Cui Zhoujin, Yang Zuodong. Roles of weight functions to a nonlinear porous medium equation with nonlocal source and nonlocal boundary condition. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2008;342(1):559–570. DOI: 10.1016/j.jmaa.2007.11.055.
5. Mu Chunlai, Liu Dengming, Zhou Shouming. Properties of positive solutions for a nonlocal reaction – diffusion equation with nonlocal nonlinear boundary condition. *Journal of the Korean Mathematical Society*. 2010;47(6):1317–1328. DOI: 10.4134/JKMS.2010.47.6.1317.
6. Gladkov A, Guedda M. Blow-up problem for semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 2011;74(13):4573–4580. DOI: 10.1016/j.na.2011.04.027.
7. Gladkov A, Guedda M. Semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition. *Applicable Analysis*. 2012;91(12):2267–2276. DOI: 10.1080/00036811.2011.601297.
8. Anderson JR, Deng K. Global solvability for the porous medium equation with boundary flux governed by nonlinear memory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2015;423(2):1183–1202. DOI: 10.1016/j.jmaa.2014.10.041.
9. Fang Zhong Bo, Zhang Jianyun. Global existence and blow-up properties of solutions for porous medium equation with nonlinear memory and weighted nonlocal boundary condition. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2015;66(1):67–81. DOI: 10.1007/s00033-013-0382-5.
10. Zhou Jun, Yang Di. Blowup for a degenerate and singular parabolic equation with nonlocal source and nonlocal boundary. *Applied Mathematics and Computation*. 2015;256:881–884. DOI: 10.1016/j.amc.2015.01.096.
11. Gladkov AL, Nikitin AI. On global existence of solutions of initial boundary value problem for a system of semilinear parabolic equations with nonlinear nonlocal Neumann boundary conditions. *Differential Equations*. 2018;54(1):86–105. DOI: 10.1134/S0012266118010081.
12. Gladkov AL, Kavitova TV. On the initial-boundary value problem for a nonlocal parabolic equation with nonlocal boundary condition. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2018;1:29–38. Russian.
13. Gladkov A, Guedda M. Global existence of solutions of a semilinear heat equation with nonlinear memory condition. *Applicable Analysis*. 2020;99(16):2823–2832. DOI: 10.1080/00036811.2019.1584291.
14. Gladkov A, Kavitova T. Global existence of solutions of initial boundary value problem for nonlocal parabolic equation with nonlocal boundary condition. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2020;43(8):5464–5479. DOI: 10.1002/mma.6286.
15. Liang Mengyang, Fang Zhong Bo. Blow-up phenomenon for a reaction – diffusion equation with weighted nonlocal gradient absorption terms. *Mediterranean Journal of Mathematics*. 2021;18(4):160. DOI: 10.1007/s00009-021-01795-5.
16. Lu Heqian, Hu Bei, Zhang Zhengce. Blowup time estimates for the heat equation with a nonlocal boundary condition. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2022;73(2):60. DOI: 10.1007/s00033-022-01698-9.
17. Huo Wentao, Fang Zhong Bo. Blow-up analysis for heat equation with a nonlocal weighted exponential boundary flux. *Mediterranean Journal of Mathematics*. 2023;20(3):131. DOI: 10.1007/s00009-023-02354-w.
18. Gladkov A. Initial boundary value problem for a semilinear parabolic equation with absorption and nonlinear nonlocal boundary condition. *Lithuanian Mathematical Journal*. 2017;57(4):468–478. DOI: 10.1007/s10986-017-9376-x.
19. Gladkov A. Blow-up problem for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal Neumann boundary condition. *Communications on Pure and Applied Analysis*. 2017;16(6):2053–2068. DOI: 10.3934/cpa.2017101.
20. Gladkov A, Kavitova T. Blow-up problem for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition. *Applicable Analysis*. 2016;95(9):1974–1988. DOI: 10.1080/00036811.2015.1080353.
21. Gladkov AL, Kavitova TV. Initial boundary value problem for a semilinear parabolic equation with nonlinear nonlocal boundary conditions. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2016;68(2):162–174. DOI: 10.1007/s11253-016-1217-2.
22. Liu D, Mu C, Ahmed I. Blow-up for a semilinear parabolic equation with nonlinear memory and nonlocal nonlinear boundary. *Taiwanese Journal of Mathematics*. 2013;17(4):1353–1370. DOI: 10.11650/tjm.17.2013.2648.
23. Pao CV. *Nonlinear parabolic and elliptic equations*. New York: Springer Science & Business Media; 1992. XV, 777 p. DOI: 10.1007/978-1-4615-3034-3.

24. Kahane CS. On the asymptotic behavior of solutions of parabolic equations. *Czechoslovak Mathematical Journal*. 1983;33(2):262–285.
25. Ladyženskaja OA, Solonnikov VA, Ural'ceva NN. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*. Providence: American Mathematical Society; 1968. 648 p. (Translations of mathematical monographs; volume 23).
26. Hu Bei. *Blow-up theories for semilinear parabolic equations*. Berlin: Springer-Verlag; 2011. X, 127 p. (Lecture notes in mathematics; volume 2018). DOI: 10.1007/978-3-642-18460-4_1.
27. Cortázar C, del Pino M, Elgueta M. On the short-time behavior of the free boundary of a porous medium equation. *Duke Mathematical Journal*. 1997;87(1):133–149. DOI: 10.1215/S0012-7094-97-08706-8.

Получена 05.05.2023 / исправлена 01.06.2023 / принята 02.06.2023.
Received 05.05.2023 / revised 01.06.2023 / accepted 02.06.2023.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

MATHEMATICAL LOGIC, ALGEBRA AND NUMBER THEORY

УДК 512.542

ОБ ОДНОЙ ОТКРЫТОЙ ПРОБЛЕМЕ ТЕОРИИ МОДУЛЯРНЫХ ПОДГРУПП

ЛЮ АМИН-МИН¹⁾, ГО ВЭНЬБИНЬ¹⁾, И. Н. САФОНОВА²⁾, А. Н. СКИБА³⁾

¹⁾Хайнаньский университет, пр. Рэньминь, 58, 570228, г. Хайкоу, пров. Хайнань, Китай

²⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

³⁾Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины,
ул. Советская, 104, 246028, г. Гомель, Беларусь

Пусть G – конечная группа. Подгруппа A группы G называется модулярной в G , если (i) $\langle X, A \cap Z \rangle = \langle X, A \rangle \cap Z$ для всех $X \leq G, Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$, и (ii) $\langle A, Y \cap Z \rangle = \langle A, Y \rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G, Z \leq G$ таких, что $A \leq Z$. Получено описание конечных групп, в которых модулярность является транзитивным отношением, т. е. если A – модулярная

Образец цитирования:

Лю Амин-Мин, Го Вэньбинь, Сафонова ИН, Скиба АН. Об одной открытой проблеме теории модулярных подгрупп. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2023;2:28–34 (на англ.). <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-28-34>
EDN: WELODI

For citation:

Liu Aming-Ming, Guo Wenbin, Safonova IN, Skiba AN. On an open problem in the theory of modular subgroups. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2023;2:28–34. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-28-34>
EDN: WELODI

Авторы:

Лю Амин-Мин – доцент Школы науки.

Го Вэньбинь – профессор Школы науки.

Инна Николаевна Сафонова – кандидат физико-математических наук, доцент; заместитель декана факультета прикладной математики и информатики по научной работе.

Александр Николаевич Скиба – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры алгебры и геометрии факультета математики и технологий программирования.

Authors:

Liu Aming-Ming, associate professor at the School of Science. amliu@hainanu.edu.cn

Guo Wenbin, professor at the School of Science.

wbguo@ustc.edu.cn

<https://orcid.org/0000-0002-6934-363X>

Inna N. Safonova, PhD (physics and mathematics), docent; deputy dean of the faculty of applied mathematics and computer science for research.

safonova@bsu.by

<https://orcid.org/0000-0001-6896-7208>

Alexander N. Skiba, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of algebra and geometry, faculty of mathematics and programming technologies.

alexander.skiba49@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-6521-2712>

подгруппа в K и K – модулярная подгруппа в G , то A – модулярная подгруппа в G . Полученный результат является решением одной из старых задач теории модулярных подгрупп, восходящей к работам А. Фриджеро (1974), И. Циммерман (1989).

Ключевые слова: конечная группа; модулярная подгруппа; субмодулярная подгруппа; M -группа; комплекс Робинсона.

Благодарность. Работа выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук Китая (грант № 12171126) и Фонда естественных наук провинции Хайнань Китая (грант № 621RC510). Исследование третьего автора поддержано Министерством образования Республики Беларусь (№ гос. регистрации 20211328).

ON AN OPEN PROBLEM IN THE THEORY OF MODULAR SUBGROUPS

LIU AMING-MING^a, GUO WENBIN^a, I. N. SAFONOVA^b, A. N. SKIBA^c

^aHainan University, 58 Renmin Avenue, Haikou 570228, Hainan Province, China

^bBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

^cFrancisk Skorina Gomel State University, 104 Savieckaja Street, Gomel 246028, Belarus

Corresponding author: I. N. Safonova (safonova@bsu.by)

Let G be a finite group. Then a subgroup A of group G is said to be modular in G if (i) $\langle X, A \cap Z \rangle = \langle X, A \rangle \cap Z$ for all $X \leq G, Z \leq G$ such that $X \leq Z$, and (ii) $\langle A, Y \cap Z \rangle = \langle A, Y \rangle \cap Z$ for all $Y \leq G, Z \leq G$ such that $A \leq Z$. We obtain a description of finite groups in which modularity is a transitive relation, that is, if A is a modular subgroup of K and K is a modular subgroup of G , then A is a modular subgroup of G . The result obtained is a solution to one of the old problems in the theory of modular subgroups, which goes back to the works of A. Frigerio (1974), I. Zimmermann (1989).

Keywords: finite group; modular subgroup; submodular subgroup; M -group; Robinson complex.

Acknowledgements. This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (grant No. 12171126) and the Natural Science Foundation of Hainan Province of China (grant No. 621RC510). The research of the third author was supported by the Ministry of Education of the Republic of Belarus (state registration No. 20211328).

Introduction

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group: G is said to be an M -group [1, p. 54] if the lattice $L(G)$ of all subgroups of G is modular. If n is an integer, then the symbol $\pi(n)$ denotes the set of all primes dividing n ; as usual, $\pi(G) = \pi(|G|)$, the set of all primes dividing the order of G .

A subgroup A of G is said to be quasinormal (O. Ore) or permutable (S. E. Stonehewer) in G if A permutes with every subgroup H of G , that is, $AH = HA$; Sylow permutable or S -permutable [2; 3] if A permutes with all Sylow subgroups of G .

Quasinormal and Sylow permutable subgroups have many useful properties. For instance, if A is quasinormal in G , then A is subnormal in G [4], A/A_G is nilpotent [5], $C_G(H/K) = G$ for every chief factor H/K of G between A_G and A^G [6], and, in general, the section A/A_G is not necessarily abelian [7].

Quasinormal subgroups have also a close connection with the so-called modular subgroups.

Recall that a subgroup M of G is said to be modular in G if M is a modular element (in the sense of Kurosh [1, p. 43]) of the lattice $L(G)$, that is, (i) $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$ for all $X \leq G, Z \leq G$ such that $X \leq Z$, and (ii) $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$ for all $Y \leq G, Z \leq G$ such that $M \leq Z$.

Every quasinormal subgroup is clearly modular in the group. Moreover, the following interesting fact is well known.

Theorem 1 [1, theorem 5.1.1]. *A subgroup A of G is quasinormal in G if and only if A is modular and subnormal in G .*

A group G is said to be a T -group if normality is a transitive relation on G , that is, if H is a normal subgroup of K and K is a normal subgroup of G , then H is a normal subgroup of G . In other words, the group G is a T -group if every subnormal subgroup of G is normal in G .

The description of T -groups was first obtained by W. Gaschütz [8] for the soluble case and by D. J. S. Robinson [9] for the general case.

Works [8; 9] aroused great interest in the further study of T -groups and groups in which some conditions of generalised normality are transitive (PT -groups, i. e. groups in which quasinormality is transitive; PST -groups, i. e. groups in which Sylow permutability is transitive, etc.) [2, chapter 2].

However, the following interesting problem still remains open.

Question 1. What is the structure of MT -groups, i. e. groups G in which modularity is a transitive relation on G , that is, if H is a modular subgroup of K and K is a modular subgroup of G , then H is a modular subgroup of G ?

Such a problem was first raised in paper [10], where the following theorem was proved, which gives a complete answer to the problem for the soluble case.

Theorem 2 [10]. *A soluble group is an MT -group if and only if G is a group with modular lattice of all subgroups $L(G)$.*

New proof of theorem 1 was obtained in paper [11].

Our main goal here is to give an answer to question 1 for the insoluble case.

Before continuing, we give a few definition.

Definition 1. We say that $(D, Z(D); U_1, \dots, U_k)$ is a Robinson complex of G if the following conditions hold: (i) $D \neq 1$ is a normal perfect subgroup of G , (ii) $D/Z(D) = U_1/Z(D) \times \dots \times U_k/Z(D)$, where $U_i/Z(D)$ is a simple chief factor of G , and (iii) every chief factor of G below $Z(D)$ is cyclic.

We say, following D. J. S. Robinson [9], that G satisfies:

(1) \mathbf{N}_p if whenever N is a soluble normal subgroup of G , p' -elements of G induce power automorphism in $O_p(G/N)$;

(2) \mathbf{P}_p if whenever N is a soluble normal subgroup of G , every subgroup of $O_p(G/N)$ is quasinormal in Sylow p -subgroups of G/N .

A subgroup A of G is said to be submodular in G if there is a subgroup chain

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$$

such that A_{i-1} is a modular subgroup of A_i for all $i = 1, \dots, n$. Thus, a group G is an MT -group if and only if every of its submodular subgroups is modular.

Remark 1. It is clear that every subnormal subgroup is submodular. On the other hand, in view of Ore's above-mentioned result, G is a PT -group if and only if every its subnormal subgroup is quasinormal. Therefore, every MT -group is a PT -group.

In view of remark 1, the following well-known result partially describes the structure of insoluble MT -groups.

Theorem 3 [9]. *G is a PT -group if and only if G has a normal perfect subgroup D such that: (i) G/D is a soluble PT -group, and (ii) if $D \neq 1$, G has a Robinson complex $(D, Z(D); U_1, \dots, U_k)$ and (iii) for any set $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, k\}$, where $1 \leq r < k$, G and $G/U_{i_1}' \dots U_{i_r}'$ satisfy \mathbf{N}_p for all $p \in \pi(Z(D))$ and \mathbf{P}_p for all $p \in \pi(D)$.*

Now, recall that G is a non-abelian P -group (see [1, p. 49]) if $G = A \rtimes \langle t \rangle$, where A is an elementary abelian p -group and an element t of prime order $q \neq p$ induces a non-trivial power automorphism on A . In this case we say that G is a P -group of type (p, q) .

Definition 2. We say that G satisfies \mathbf{M}_p ($\mathbf{M}_{p,q}$ respectively) if whenever N is a soluble normal subgroup of G and P/N is a normal non-abelian P -subgroup (a normal P -group of type (p, q) respectively) of G/N , every non-subnormal subgroup of P/N is modular in G/N .

In this article we prove the following theorem, which answers question 1 in the general case.

Theorem 4. *A group G is an MT -group if and only if G has a normal perfect subgroup D such that: (i) G/D is an M -group, and (ii) if $D \neq 1$, G has a Robinson complex $(D, Z(D); U_1, \dots, U_k)$ and (iii) for any set $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, k\}$, where $1 \leq r < k$, G and $G/U_{i_1}' \dots U_{i_r}'$ satisfy \mathbf{N}_p for all $p \in \pi(Z(D))$, \mathbf{P}_p for all $p \in \pi(D)$ and $\mathbf{M}_{p,q}$ for all pairs $\{p, q\} \cap \pi(D) \neq \emptyset$.*

The following example shows that, in general, a PT -group may not be an MT -group.

Example 1. (i) Let $\alpha : Z(SL(2, 5)) \rightarrow Z(SL(2, 7))$ be an isomorphism and let

$$D := SL(2, 5)SL(2, 7) = (SL(2, 5) \times SL(2, 7))/V,$$

where $V = \left\{ \left(a, (a^\alpha)^{-1} \right) \mid a \in Z(SL(2, 5)) \right\}$, is the direct product of the groups $SL(2, 5)$ and $SL(2, 7)$ with a joint center (see [12, p. 49]). Let $M = (C_7 \rtimes C_3)(C_{13} \rtimes C_3)$ be the direct product of the groups $C_7 \rtimes C_3$ and $C_{13} \rtimes C_3$

with a joint factor group C_3 (see [12, p. 50]), where $C_7 \rtimes C_3$ is a non-abelian group of order 21, and $C_{13} \rtimes C_3$ is a non-abelian group of order 39. Finally, let $G = D \times M$. We show that G satisfies the conditions in theorem 3.

It is clear also that $D = G^{\mathfrak{S}}$ is a soluble residual of G and $M \cong G/D$ is a soluble PT -group. In view of [12, Kapitel I, Satz 9.10], $D = U_1 U_2$ and $U_1 \cap U_2 = Z(D) = \Phi(D)$, where U_i is normal in D , $U_1/Z(D)$ is a simple group of order 60, and $U_2/Z(D)$ is a simple group of order 168. Hence $(D, Z(D); U_1, U_2)$ is a Robinson complex of G , and the subgroup $Z(D)$ has order 2 and $Z(D) \leq Z(G)$. Therefore, conditions (i) and (ii) hold for G . It is not difficult to show that for every prime r dividing $|G|$ and for $O_r(G/N)$, where N is a normal soluble subgroup of G , we have $|O_r(G/N)| \in \{1, r\}$, so condition (iii) also holds for G . Therefore, G is a PT -group by theorem 3.

Now we show that G is not an MT -group. First, note that M has a subgroup $T \cong C_7 \rtimes C_3$ and $|M : T| = 13$. Then T is a maximal subgroup of M and $M/T_M \cong C_7 \rtimes C_3$. Hence a subgroup L of T of order 3 is modular in T and T is modular in M by [1, lemma 5.1.2], so L is submodular in G . Finally, L is not modular in M by lemma 2 below. Therefore, G is not an MT -group by theorem 4.

(ii) The group $D \times (C_7 \rtimes C_3)$ is an MT -group by theorem 4.

Prelimaries

We use \mathfrak{A}^* to denote the class of all abelian groups of squarefree exponent. It is clear that \mathfrak{A}^* is a hereditary formation, $G^{\mathfrak{A}^*}$ is the intersection of all normal subgroups N of G with $G/N \in \mathfrak{A}^*$.

Lemma 1. *Let A, B and N be subgroups of G , where A is submodular in G , and N is normal in G .*

- (1) $A \cap B$ is submodular in B .
- (2) AN/N is submodular in G/N .
- (3) If $N \leq K$ and K/N is submodular in G/N , then K is submodular in G .
- (4) $A^{\mathfrak{A}^*}$ is subnormal in G .

(5) If $G = U_1 \times \dots \times U_k$, where U_i is a simple non-abelian group, then A is normal in G .

Proof. Statements (1)–(4) are proved in work [11].

(5) Let $E = U_i A$. Then A is submodular in E by statement (1), so there is a subgroup chain

$$A = E_0 < E_1 < \dots < E_{t-1} < E_t = E$$

such that E_{i-1} is a maximal modular subgroup of E_i for all $i = 1, \dots, t$ and for $M = E_{t-1}$ we have $M = A(M \cap U_i)$ and, by [1, lemma 5.1.2], either $M = E_{t-1}$ is a maximal normal subgroup of E or M is a maximal subgroup of E such that E/M_E is a non-abelian group of order qr for primes q and r . In the former case we have $M \cap U_i = 1$, so $A = M$ is normal in E . The second case is impossible since E has no a quotient of order qr . Therefore, $U_i \leq N_G(A)$ for all i , so $G \leq N_G(A)$. Hence we have statement (5).

The lemma is proved.

Lemma 2 [1, lemma 5.1.9]. *Let M be a modular subgroup of G of prime power order. If M is not quasinormal in G , then $G/M_G = M^G/M_G \times K/M_G$, where M^G/M_G is a non-abelian P -group of order prime to $|K/M_G|$.*

Recall that a group G is said to be an SC -group if every chief factor of G is simple [9].

Lemma 3. *Let G be a non-soluble SC -group and suppose that G has a Robinson complex $(D, Z(D); U_1, \dots, U_k)$, where $D = G^{\mathfrak{S}} = G^{\mathfrak{A}^*}$. Let U be a submodular non-modular subgroup of G of minimal order.*

(1) If UU'_i/U'_i is modular in G/U'_i for all $i = 1, \dots, k$, then U is supersoluble.

(2) If U is supersoluble and UL/L is modular in G/L for all non-trivial nilpotent normal subgroups L of G , then U is a cyclic p -group for some prime p .

Proof. Suppose that this lemma is false and let G be a counterexample of minimal order.

(1) Assume statement (1) is false. Suppose that $U \cap D \leq Z(D)$. Then every chief factor of U below $U \cap Z(D) = U \cap D$ is cyclic and, also, $UD/D \cong U/(U \cap D)$ is supersoluble. Hence U is supersoluble, a contradiction. Therefore, $U \cap D \not\leq Z(D)$. Moreover, statements (1) and (2) of lemma 1 imply that $(U \cap D)Z(D)/Z(D)$ is submodular in $D/Z(D)$ and so $(U \cap D)Z(D)/Z(D)$ is a non-trivial normal subgroup of $D/Z(D)$ by statement (5) of lemma 1.

Hence for some i we have $U_i/Z(D) \leq (U \cap D)Z(D)/Z(D)$, so $U_i \leq (U \cap D)Z(D)$. But then $U'_i \leq ((U \cap D)Z(D))' \leq U \cap D$.

By hypothesis, $UU'_i/U'_i = U/U'_i$ is modular in G/U'_i and so U is modular in G by [1, p. 201, property (4)], a contradiction. Therefore, statement (1) holds.

(2) Assume statement (2) is false. Let $N = U^{\mathfrak{N}}$ be the nilpotent residual of U . Then $N < U$ since U supersoluble, so N is modular in G . It is clear that every proper subgroup S of U with $N \leq S$ is submodular in G , so the minimality of U implies that S is modular in G . Therefore, if U has at least two distinct maximal subgroups S and W such that $N \leq S \cap W$, then $U = \langle S, W \rangle$ is modular in G by [1, p. 201, property (5)], contrary to our assumption on U . Hence U/N is a cyclic p -group for some prime p and $N \neq 1$ since U is not cyclic.

Now we show that U is a PT -group. Let S be a proper subnormal subgroup of U . Then S is submodular in G since U is submodular in G , so S is modular in G and hence S is quasinormal in U by theorem 1. Therefore, U is a soluble PT -group, so $N = U^{\mathfrak{N}} = U'$ is a Hall abelian subgroup of U and every subgroup of N is normal in U by [2, theorem 2.1.11]. Then $N \leq U^{\mathfrak{A}^*}$ and so $U^{\mathfrak{A}^*} = NV$, where V is a maximal subgroup of a Sylow p -subgroup $P \simeq U/N$ of U . Then NV is modular in G and NV is subnormal in G by statement (4) of lemma 1. Therefore, NV is quasinormal in G by theorem 1. Assume that for some minimal normal subgroup R of G we have $R \leq (NV)_G$. Then U/R is modular in G/R by hypothesis, so U is modular in G , a contradiction. Therefore, $(NV)_G = 1$, so NV is nilpotent by [2, corollary 1.5.6] and then V is normal in U .

Some maximal subgroup W of N is normal in U with $|N:W| = q$. Then $S = WP$ is a maximal subgroup of U such that U/S_U is a non-abelian group of order pq . Hence S is modular in U by [1, lemma 5.1.2], so S is modular in G . It follows that $U = NS$ is modular in G , a contradiction. Therefore, statement (2) holds.

The lemma is proved.

Lemma 4. *If G is an MT -group, then every quotient G/N of G is also an MT -group.*

Proof. Let L/N be submodular subgroup of G/N . Then L is submodular subgroup in G by statement (3) of lemma 1, so L is modular in G and then L/N is modular in G/N by [1, p. 201, property (3)]. Hence G/N is an MT -group.

The lemma is proved.

Lemma 5. *If G is an MT -group, then G/R satisfies \mathbf{M}_p for every normal subgroup R of G .*

Proof. In view of lemma 4, we can assume without loss of generality that $R = 1$. Let P/N be a normal non-abelian P -subgroup of G/N and let $L/N \leq P/N$. Then L/N is modular in P/N by [1, lemma 2.4.1], so L/N is submodular in G/N and hence L/N is modular in G/N . Therefore, L is modular in G by [1, p. 201, property (4)]. Hence G satisfies \mathbf{M}_p .

Lemma 6 [2, remark 1.6.8]. *Suppose that G has a Robinson complex $(D, Z(D); U_1, \dots, U_k)$ and let N be a normal subgroup of G .*

(1) *If $N = U'_i$ and $k \neq 1$, then $Z(D/N) = U_i/N = Z(D)N/N$ and*

$$(D/N, Z(D/N); U_1N/N, \dots, U_{i-1}N/N, U_{i+1}N/N, \dots, U_kN/N)$$

is a Robinson complex of G/N .

(2) *If N is nilpotent, then $Z(DN/N) = Z(D)N/N$ and*

$$(DN/N, Z(DN/N); U_1N/N, \dots, U_kN/N)$$

is a Robinson complex of G/N .

Proposition 1. *Suppose that a group G is a soluble PT -group and let p be a prime. If every submodular p -subgroup of G is modular in G , then every p -subgroup of G is modular in G . In particular, if every submodular subgroup of a supersoluble group G is modular in G , then G is an M -group.*

Proof. Assume that this proposition is false and let G be a counterexample of minimal order. Then, by [2, theorem 2.1.11], the following conditions are satisfied: the nilpotent residual D of G is an Hall abelian subgroup of odd order, G acts by conjugation on D as group power automorphisms, and every subgroup of G/D is quasinormal in G/D . Let M be a complement to D in G .

Let U be a non-modular p -subgroup of G of minimal order. Then U is not submodular and every maximal subgroup of U is modular in G , so U is a cyclic group by [1, p. 201, property (5)]. Let V be the maximal subgroup of U . Then $V \neq 1$ since every subgroup of prime order of a supersoluble group is submodular by [11, lemma 6].

We can assume without loss of generality that $U \leq M$ since M is a Hall subgroup of G .

(1) *If R is a normal p -subgroup of G , then every p -subgroup of G containing R is modular in G . In particular, $U_G = 1$ and so $U \cap D = 1$.*

Let L/R be a submodular p -subgroup of G/R . Then L is a submodular p -subgroup of G by [11, lemma 1 (iii)], so L is modular in G by hypothesis. Hence L/R is modular in G/R by [1, p. 201, property (4)]. Thus, the hypothesis holds for G/R . Therefore, every p -subgroup S/R of G/R is modular in G/R by the choice of G , so S is modular in G by [1, p. 201, property (4)].

In view of claim (1) we can assume without loss of generality that $U \leq M$ since M is a Hall subgroup of G .

(2) If K is a proper submodular subgroup of G , then every p -subgroup L of K is modular in G , so every proper subgroup of G containing U is not submodular in G .

The subgroup K is a PT -group by [2, corollary 2.11] and if S is a submodular subgroup of K , then S is submodular in G and so S is modular in G . Hence S is modular in K . Therefore, the hypothesis holds for K , so every p -subgroup L of K is modular in K by the choice of G . Hence L is modular in G by hypothesis.

(3) $DU = G$ (this follows from claim (2) and the fact that every subgroup of G containing D is subnormal in G).

(4) V is not subnormal in G .

Assume that V is subnormal in G . Then V is quasinormal in G by theorem 1 since V is modular in G . Therefore, $1 < V \leq R = O_p(Z_\infty(G))$ by [2, corollary 1.5.6] since $V_G = 1 = U_G$ by claim (1). But $R \leq U$ by claim (3), hence $R = V = 1$ and so $|U| = p$, a contradiction. Hence we have claim (4).

(5) $G = V^G \times K$, where V^G is a non-abelian P -group of order prime to $|K|$ (since $V_G = 1$, this follows from claim (4) and lemma 2).

From claim (5) it follows that $U \leq V^G$, so U is submodular in G by [1, theorem 2.4.4]). This final contradiction completes the proof of the result.

The proposition is proved.

Outline of the proof of theorem 4

First assume that G is an MT -group. Then G is a PT -group and every quotient G/N is an MT -group by lemma 4. Moreover, by theorem 3, G has a normal perfect subgroup D such that: G/D is a soluble PT -group, and if $D \neq 1$, G has a Robinson complex $(D, Z(D); U_1, \dots, U_k)$ and for any set $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, k\}$, where $1 \leq r < k$, G and $G/U'_{i_1} \dots U'_{i_r}$ satisfy \mathbf{N}_p for all $p \in \pi(Z(D))$ and \mathbf{P}_p for all $p \in \pi(D)$. In view of lemma 5, G and $G/U'_{i_1} \dots U'_{i_r}$ satisfy $\mathbf{M}_{p,q}$ for all pairs $\{p, q\} \cap \pi(D) \neq \emptyset$.

In view of [2, theorem 2.1.11], G/D is a supersoluble PT -group, and if U/D is a submodular subgroup of G/D , the U is submodular in G by statement (3) of lemma 1, so U is modular in G by hypothesis and hence U/D is modular in G/D by [1, p. 201, property (4)]. Therefore, G/D is an M -group by proposition 1.

Thus, the necessity of the condition of the theorem holds.

Now, assume, arguing by contradiction, that G is a non- MT -group of minimal order satisfying conditions (i), (ii) and (iii).

Then $D \neq 1$ and G has a submodular subgroup U such that U is not modular in G but every submodular subgroup U_0 of G with $U_0 < U$ is modular in G . Let $Z = Z(D)$. Then $Z \leq \Phi(U_i) \leq \Phi(D)$ since D/Z is perfect.

Using lemmas 1–5 and proposition 1, we can show that:

(i) G has a normal subgroup C_q of order q for some $q \in \pi(Z(D))$;

(ii) $E := C_q U = C_q \times U$ is not subnormal in G and, also, $E_G = C_q$.

Hence $G/E_G = E^G/E_G \times K/E_G = C_q U^G/C_q \times K/C_q$, where $E^G/E_G = C_q U^G/C_q = U^G/(C_q \cap U^G)$ is a non-abelian P -group of order prime to $|K/C_q|$ by lemma 2. Hence G is a π -decomposable group, where $\pi = \pi(U^G/(C_q \cap U^G))$.

Then D/C_q is π -decomposable. But $C_q \leq \Phi(D)$, so q divides $|D/C_q|$. Hence q does not divide $|C_q U^G/C_q|$.

If $C_q \cap U^G = 1$, then $U^G = C_q U^G/C_q$ is a non-abelian P -group, contrary, so $C_q \leq U^G$. Then C_q is a Sylow q -subgroup of U^G . Hence $U^G = C_q \rtimes (R \rtimes U)$, where $R \rtimes U = U^G/C_q$ is a non-abelian P -group. Let $C = C_{U^G}(C_q)$. Then $U \leq C$ and so, by [1, lemma 2.2.2], $R \rtimes U = U^{R \rtimes U} \leq C$. Hence $C_q \leq Z(U^G)$. Therefore, $U^G = C_q \times (R \rtimes U)$, where $R \rtimes U$ is characteristic in U^G and so it is normal in G . But then $U^G = R \rtimes U \neq C_q \rtimes (R \rtimes U)$, a contradiction.

The theorem is proved.

Note that another type of generalised T -groups was considered in paper [13].

References

- Schmidt R. *Subgroup lattices of groups*. Berlin: Walter de Gruyter; 1994. 572 p. (de Gruyter expositions of mathematics; volume 14). DOI: 10.1515/9783110868647.
- Ballester-Bolinches A, Esteban-Romero R, Asaad M. *Products of finite groups*. Berlin: Walter de Gruyter; 2010. 334 p. (de Gruyter expositions in mathematics; volume 53). DOI: 10.1515/9783110220612.
- Ballester-Bolinches A, Beidleman JC, Heineken H. Groups in which Sylow subgroups and subnormal subgroups permute. *Illinois Journal of Mathematics*. 2003;47(1–2):63–69. DOI: 10.1215/ijm/1258488138.
- Ore O. Contributions to the theory of groups of finite order. *Duke Mathematical Journal*. 1939;5(2):431–460. DOI: 10.1215/S0012-7094-39-00537-5.
- Itô N, Szép J. Über die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen. *Acta Scientiarum Mathematicarum*. 1962;23(1–2):168–170.

6. Maier R, Schmid P. The embedding of quasinormal subgroups in finite groups. *Mathematische Zeitschrift*. 1973;131(3):269–272. DOI: 10.1007/BF01187244.

7. Thompson JG. An example of core-free quasinormal subgroups of p -groups. *Mathematische Zeitschrift*. 1967;96(3):226–227. DOI: 10.1007/BF01124081.

8. Gaschütz W. Gruppen, in denen das Normalteilersein transitiv ist. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1957;198:87–92. DOI: 10.1515/crll.1957.198.87.

9. Robinson DJS. The structure of finite groups in which permutability is a transitive relation. *Journal of the Australian Mathematical Society*. 2001;70(2):143–160. DOI: 10.1017/S1446788700002573.

10. Frigerio A. Gruppi finiti nei quali è transitivo l'essere sottogruppo modulare. In: Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. *Atti. Classe di scienze matematiche e naturali. Tomo 132, Anno academico 1973/74*. Venezia: Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti; 1974. p. 185–190.

11. Zimmermann I. Submodular subgroups of finite groups. *Mathematische Zeitschrift*. 1989;202(4):545–557. DOI: 10.1007/BF01221589.

12. Huppert B. *Endliche Gruppen I*. Berlin: Springer-Verlag; 1967. 796 p. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; volume 134). DOI: 10.1007/978-3-642-64981-3.

13. Skiba AN. On some classes of sublattices of the subgroup lattice. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;3:35–47. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-3-35-47.

Received 27.02.2023 / revised 03.05.2023 / accepted 02.06.2023.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

УДК 519.4

D- И A-ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ С НЕРАВНОТОЧНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

В. П. КИРЛИЦА¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Для регрессионной функции

$$y(x) = \theta_1 + \sum_{s=1}^k (\theta_{2s} \cos sx + \theta_{2s+1} \sin sx),$$

представляющей тригонометрическую сумму порядка k , построены непрерывные D - и A -оптимальные планы экспериментов

$$\varepsilon_n^0 = \begin{Bmatrix} x_1^0, \dots, x_n^0 \\ \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \end{Bmatrix}$$

с точками спектров

$$x_i^0 = \frac{2\pi(i-1)}{n} + \varphi, \quad i = \overline{1, n}, \quad n \geq 2k + 1,$$

Образец цитирования:

Кирлица В.П. D- и A-оптимальные планы экспериментов для тригонометрической регрессии с неравноточными наблюдениями. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;2:35–44. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-35-44>
EDN: KDGPZW

For citation:

Kirlitsa VP. D- and A-optimal designs of experiments for trigonometric regression with heteroscedastic observations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;2:35–44. Russian. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-35-44>
EDN: KDGPZW

Автор:

Валерий Петрович Кирлица – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики.

Author:

Valery P. Kirlitsa, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of mathematical modelling and data analysis, faculty of applied mathematics and computer science.
kirlitsa@bsu.by



где φ – произвольный угол ($\varphi \geq 0$) такой, что информационная матрица плана эксперимента является невырожденной. Данные планы экспериментов сконструированы для неравноточных наблюдений с дисперсиями

$$d(x) \geq \sigma^2, d(x_i^0) = \sigma^2, \sigma \neq 0, i = \overline{1, n}.$$

Для частного случая рассматриваемой регрессионной функции ($k = 1$) построены насыщенные планы экспериментов для неравноточных наблюдений с дисперсиями, принимающими различные значения в точках спектров этих планов.

Ключевые слова: непрерывные D - и A -оптимальные планы экспериментов; тригонометрическая регрессия; равноточные наблюдения; неравноточные наблюдения.

D- AND A-OPTIMAL DESIGNS OF EXPERIMENTS FOR TRIGONOMETRIC REGRESSION WITH HETEROSCEDASTIC OBSERVATIONS

V. P. KIRLITSA^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Herein for the regression function

$$y(x) = \theta_1 + \sum_{s=1}^k (\theta_{2s} \cos sx + \theta_{2s+1} \sin sx)$$

representing a trigonometrical sum of an k order, we constructed continuous D - and A -optimal designs of experiments

$$\varepsilon_n^0 = \left\{ \begin{array}{l} x_1^0, \dots, x_n^0 \\ \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \end{array} \right\}$$

with points of a spectrum

$$x_i^0 = \frac{2\pi(i-1)}{n} + \varphi, i = \overline{1, n}, n \geq 2k + 1,$$

where φ is an arbitrary angle ($\varphi \geq 0$), for which the determinant of the information matrix of the experiment design is not equal to zero. These designs of experiments are constructed for heteroscedastic observations with variances

$$d(x) \geq \sigma^2, d(x_i^0) = \sigma^2, \sigma \neq 0, i = \overline{1, n}.$$

For a special case of the considered regression function ($k = 1$), we constructed the saturated designs of experiments for observations with unequal accuracy and dispersions accepting various values in the points of a spectrum of such plans.

Keywords: continuous D - and A -optimal designs of experiments; trigonometric regression; homoscedastic observations; heteroscedastic observations.

Рассмотрим модель наблюдений

$$y_j = \theta_1 + \sum_{s=1}^k (\theta_{2s} \cos sx_j + \theta_{2s+1} \sin sx_j) + \varepsilon(x_j), j = \overline{1, n}, n \geq 2k + 1, \quad (1)$$

где y_j – наблюдаемые переменные; x_j – контролируемые переменные, принадлежащие интервалу $[0, 2\pi)$; $\theta_1, \theta_{2s}, \theta_{2s+1}$ – неизвестные параметры, подлежащие оцениванию; $\varepsilon(x_j)$ – некоррелированные ошибки наблюдений со средним значением, равным нулю, и дисперсией, зависящей от точки наблюдения:

$$D(\varepsilon(x_j)) = d(x_j) > 0, j = \overline{1, n}, n \geq 2k + 1. \quad (2)$$

Здесь функция $d(x)$ – некоторая положительная функция.

В монографиях [1; 2] для модели равноточных наблюдений ($d(x) = \sigma^2, \sigma^2 > 0$) доказано, что план экспериментов

$$\varepsilon_n^0 = \left\{ \begin{array}{l} x_1^0, \dots, x_n^0 \\ \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \end{array} \right\} \quad (3)$$

является непрерывным D -оптимальным. Точки спектра плана (3) имеют вид

$$x_i^0 = \frac{2\pi(i-1)}{n}, \quad i = \overline{1, n}, \quad n \geq 2k + 1. \quad (4)$$

Для частного случая $n = 2k + 2$ оптимальный план (3) впервые был построен в публикации [3]. В статье [4] обосновано, что план (3) остается D -оптимальным для определенного класса неравноточных наблюдений. Такие планы удалось построить, опираясь на теорему эквивалентности Кифера – Вольфовица. В работе [5] предлагаются другие методы построения планов экспериментов с неравноточными наблюдениями.

В данной публикации будет показано, что план (3) с точками спектра

$$x_i^0 = \frac{2\pi(i-1)}{n} + \varphi, \quad i = \overline{1, n}, \quad n \geq 2k + 1, \quad (5)$$

где φ – произвольный угол ($\varphi \geq 0$) такой, что информационная матрица плана эксперимента является невырожденной, не только D -оптимальный, но и A -оптимальный для определенного класса неравноточных наблюдений. Также будут построены так называемые насыщенные D -оптимальные планы экспериментов для некоторых частных случаев модели наблюдений (1), (2).

Теорема 1. Для модели наблюдений (1), (2) план (3) с точками спектра (5) является одновременно непрерывным D - и A -оптимальным для неравноточных наблюдений с дисперсиями $d(x)$, удовлетворяющими неравенству

$$d(x) \geq \sigma^2, \quad \sigma \neq 0, \quad (6)$$

в котором равенство выполняется в точках спектра (5) плана (3).

Доказательство. Вначале докажем D -оптимальность плана (3) с точками спектра (5). Для этого нужно показать, что будут выполняться условия теоремы эквивалентности Кифера – Вольфовица [1] для D -оптимальных планов:

$$\frac{1}{d(x)} f'(x) M^{-1}(\varepsilon_n^0) f(x) \leq 2k + 1, \quad x \in [0, 2\pi), \quad (7)$$

где $f(x) = (1, \cos x, \sin x, \dots, \cos kx, \sin kx)$ – вектор базисных функций; $M(\varepsilon_n^0)$ – информационная матрица плана (3). В неравенстве (7) равенство должно выполняться в точках спектра (5) плана (3).

Докажем, что информационная матрица плана (3), (4) с неравноточными наблюдениями (6) имеет диагональный вид:

$$M(\varepsilon_n^0) = \sigma^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

В монографиях [1; 2] приводится доказательство утверждения (8) для равноточных наблюдений с углом $\varphi = 0$. Однако оно фрагментарно и в работе [1, с. 123] представлено для четных значений n . Приведем полное доказательство утверждения (8) для любых n и φ .

Сначала докажем выполнение утверждения (8) для угла $\varphi = 0$. Будем использовать формулы Эйлера

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

и формулу для суммы геометрической прогрессии. Пусть m и l – натуральные числа, принимающие значения от 1 до k , причем $m \neq l$. Применяя формулы Эйлера, вычислим диагональные элементы информационной матрицы, начиная со второго:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \cos^2 \frac{2\pi m(j-1)}{n} &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \left(1 + \cos \frac{4\pi m(j-1)}{n} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \sum_{j=1}^n \left(e^{i \frac{4\pi m(j-1)}{n}} + e^{-i \frac{4\pi m(j-1)}{n}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \left(\frac{1 - e^{i4\pi m}}{1 - e^{i \frac{4\pi m}{n}}} + \frac{1 - e^{-i4\pi m}}{1 - e^{-i \frac{4\pi m}{n}}} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \left(\frac{(1 - e^{i4\pi m}) \left(1 - e^{-i \frac{4\pi m}{n}} \right) + (1 - e^{-i4\pi m}) \left(1 - e^{i \frac{4\pi m}{n}} \right)}{2 - 2 \cos \frac{4\pi m}{n}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \frac{2 - 2 \cos 4\pi m - 2 \cos \frac{4\pi m}{n} + 2 \cos 4\pi m \left(1 - \frac{1}{n} \right)}{2 - 2 \cos \frac{4\pi m}{n}} = \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \sin^2 \frac{2\pi m(j-1)}{n} = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \left(1 - \cos \frac{4\pi m(j-1)}{n} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \cos \frac{4\pi m(j-1)}{n} = \frac{1}{2}. \quad (10)$$

Недиагональные элементы равны нулю. Используя формулы Эйлера, получаем

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \cos \frac{2\pi m(j-1)}{n} = \frac{1}{2n} \left(\frac{1 - e^{i2\pi m}}{1 - e^{i \frac{2\pi m}{n}}} + \frac{1 - e^{-i2\pi m}}{1 - e^{-i \frac{2\pi m}{n}}} \right) = \frac{1}{2n} \frac{-2 \cos \frac{2\pi m}{n} + 2 \cos \frac{2\pi m}{n}}{2 - 2 \cos \frac{2\pi m}{n}} = 0, \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{2\pi m(j-1)}{n} = \frac{1}{2ni} \left(\frac{1 - e^{i2\pi m}}{1 - e^{i \frac{2\pi m}{n}}} - \frac{1 - e^{-i2\pi m}}{1 - e^{-i \frac{2\pi m}{n}}} \right) = \frac{1}{2n} \frac{2 \sin \frac{2\pi m}{n} + 2 \sin 2\pi m \left(1 - \frac{1}{n} \right)}{2 - 2 \cos \frac{2\pi m}{n}} = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{2\pi m(j-1)}{n} \cos \frac{2\pi l(j-1)}{n} = \\ &= \frac{1}{2n} \left(\sum_{j=1}^n \sin \frac{2\pi(m+l)(j-1)}{n} + \sum_{j=1}^n \sin \frac{2\pi(m-l)(j-1)}{n} \right) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Формулы (9)–(13) обосновывают, что для точек спектра (4) плана (3) будет иметь место формула (8).

Теперь покажем, что и в общем случае для точек спектра (5) формулы (9)–(13) останутся справедливыми. Но доказательство этих формул претерпит некоторые изменения. Выполним расчеты только для формулы (9) (доказательство формул (10)–(13) может быть проведено по аналогичной схеме). Чтобы доказать выполнимость формулы (9), нам понадобятся уже обоснованные формулы (9), (10) и (12). Итак, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \cos^2 m \left(\frac{2\pi(j-1)}{n} + \varphi \right) &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \left(\cos \frac{2\pi m(j-1)}{n} \cos m\varphi - \sin \frac{2\pi m(j-1)}{n} \sin m\varphi \right)^2 = \\ &= \cos^2 m\varphi \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \cos^2 \frac{2\pi m(j-1)}{n} + \sin^2 m\varphi \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \sin^2 \frac{2\pi m(j-1)}{n} - \frac{\sin 2m\varphi}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{4\pi m(j-1)}{n} = \\ &= \frac{\cos^2 m\varphi}{2} + \frac{\sin^2 m\varphi}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, для плана экспериментов (3) с точками спектра (5) выполняется формула (8). Опираясь на формулу (8), легко проверить выполнимость критерия D -оптимальности (7):

$$\begin{aligned} \frac{1}{d(x)} f'(x) M^{-1}(\varepsilon_n^0) f(x) &= \frac{\sigma^2}{d(x)} \left(1 + 2(\cos^2 x + \sin^2 x + \dots + \cos^2 kx + \sin^2 kx) \right) = \\ &= \frac{\sigma^2}{d(x)} (2k + 1) \leq 2k + 1. \end{aligned} \quad (14)$$

В неравенстве (14) равенство достигается в точках спектра (5) плана (3). Условия теоремы эквивалентности Кифера – Вольфовица выполнены. D -оптимальность плана (3) с точками спектра (5) доказана.

Множество функций, удовлетворяющих неравенству (6), обширно. Ему удовлетворяют равнооточные наблюдения с дисперсиями $d(x) = \sigma^2$, а также, например, функции ($\varphi = 0$)

$$d(x) = \sigma^2 + \beta |\sin 2nx|, \quad \beta > 0,$$

$$d(x) = \sigma^2 + \beta (x \bmod \Delta), \quad \beta > 0, \quad \Delta = \frac{2\pi}{n},$$

$$d(x) = \sigma^2 \sqrt{\frac{\Delta^2}{4} - \left(x - s\Delta + \frac{\Delta}{2} \right)^2}, \quad x \in [(s-1)\Delta, s\Delta], \quad s = \overline{1, n}, \quad \Delta = \frac{2\pi}{n}.$$

Можно предложить и ряд других функций.

Перейдем к доказательству того, что план (3) с точками спектра (5) и неравноточными наблюдениями (6) будет также и A -оптимальным.

Наряду с регрессионной функцией

$$y = \theta_1 + \sum_{s=1}^k (\theta_{2s} \cos sx + \theta_{2s+1} \sin sx) \quad (15)$$

рассмотрим регрессионную функцию

$$y_1 = \sum_{s=1}^k (\theta_{2s} \cos sx + \theta_{2s+1} \sin sx). \quad (16)$$

В теореме 1 было доказано, что для регрессионной функции (15) план экспериментов (3) с точками спектра (5) и неравноточными наблюдениями (6) является D -оптимальным. Информационная матрица этого плана определяется формулой (8). Тот же план экспериментов с точками спектра (5) будет D -оптимальным и для регрессионной функции (16) в силу выполнимости критерия D -оптимальности Кифера – Вольфовица. Действительно, информационная матрица этого плана для регрессионной функции (16) имеет вид

$$M_1(\varepsilon_n^0) = \sigma^{-2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Матрица (17) имеет размерность $2k \times 2k$. Дисперсионная матрица в соответствии с формулой (17) равна

$$D_1(\varepsilon_n^0) = M_1^{-1}(\varepsilon_n^0) = \sigma^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

В силу формулы (18) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{d(x)} f'(x) M_1^{-1}(\varepsilon_n^0) f(x) &= \\ = \frac{\sigma^2}{d(x)} 2(\cos^2 x + \sin^2 x + \dots + \cos^2 kx + \sin^2 kx) &= \frac{\sigma^2}{d(x)} 2k \leq 2k. \end{aligned} \quad (19)$$

В неравенстве (19) равенство достигается в точках спектра (5) плана (3). Условия теоремы эквивалентности Кифера – Вольфовица выполнены. План (3) с точками спектра (5) является D -оптимальным для регрессионной функции (16).

Итак, для плана экспериментов (3) с точками спектра (5) регрессионные функции (15) и (16) являются эквивалентными. Более того, этот план не только D -оптимален, но и A -оптимален для регрессионной функции (16). Чтобы обосновать это, обратимся к следующей теореме.

Теорема 2 [2, с. 150, теорема 2.11.1]. *План ε^0 является одновременно D - и A -оптимальным, если*

$$kD(\varepsilon^0) = D^2(\varepsilon^0), \quad D(\varepsilon^0) = M^{-1}(\varepsilon^0),$$

при этом

$$\text{Sp}D(\varepsilon^0) = km,$$

где k – некоторая константа и m – число неизвестных параметров.

Первое равенство в нашем случае принимает вид

$$k\sigma^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix} = \sigma^4 \begin{pmatrix} 4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 4 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Из формулы (20) вытекает, что $k = 2\sigma^2$. Так как $m = 2k$, имеем

$$\text{Sp}D_1(\varepsilon_n^0) = km = 2\sigma^2 \cdot 2k = 4k\sigma^2.$$

Регрессионные функции (15) и (16) также эквивалентны в смысле их A -оптимальности для плана экспериментов (3) с точками спектра (5), причем

$$\text{Sp}D(\varepsilon_n^0) = \text{Sp}D_1(\varepsilon_n^0) + \sigma^2 = (4k + 1)\sigma^2.$$

Действительно, пусть ε – произвольный невырожденный план экспериментов

$$\varepsilon = \left\{ \begin{matrix} x_1, \dots, x_n \\ \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \end{matrix} \right\},$$

где точки спектра x_1, \dots, x_n принадлежат интервалу $[0, 2\pi)$. Наблюдения являются неравноточными и имеют дисперсии, удовлетворяющие неравенству (6), в котором равенство выполняется в точках спектра плана ε . Обозначим через $D_1(\varepsilon) = M_1^{-1}(\varepsilon)$ дисперсионную матрицу для регрессионной функции (16). Тогда дисперсионная матрица для регрессионной функции (15) для плана экспериментов ε имеет следующий блочный вид:

$$D(\varepsilon) = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & b_{1,2} & \dots & b_{1,2k+1} \\ b_{1,2} & & & \\ \vdots & & D_1(\varepsilon) & \\ b_{1,2k+1} & & & \end{pmatrix}.$$

Кроме того, $\text{Sp}D_1(\varepsilon) \geq \text{Sp}D_1(\varepsilon_n^0)$, так как ε_n^0 – A -оптимальный план для регрессионной функции (16). Очевидно, что

$$\text{Sp}D(\varepsilon) = \sigma^2(1 + \text{Sp}D_1(\varepsilon)) \geq \sigma^2(1 + \text{Sp}D_1(\varepsilon_n^0)).$$

Из последнего неравенства следует, что $\text{Sp}D(\varepsilon)$ принимает минимальное значение тогда, когда $\varepsilon = \varepsilon_n^0$, т. е. план ε_n^0 является A -оптимальным планом для регрессионной функции (15),

$$\text{Sp}D(\varepsilon_n^0) = \text{Sp}D_1(\varepsilon_n^0) + \sigma^2 = (4k + 1)\sigma^2.$$

Теорема 1 доказана.

Для регрессионной функции

$$y = \theta_1 + \theta_2 \cos x + \theta_3 \sin x \quad (21)$$

были проведены компьютерные расчеты для планов экспериментов

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} x, & y, & z \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

Чтобы планы (22) были невырожденными, должны выполняться неравенства $x < y < z$. Компьютерные расчеты подтвердили правильность утверждений теоремы 1.

Следствие теоремы 1. Для регрессионной функции (16) план экспериментов (3) с точками спектра (5) и неравноточными наблюдениями (6) является одновременно D - и A -оптимальным.

Особенность построенных планов экспериментов (3) с неравноточными наблюдениями состоит в том, что в точках спектров (5) этих планов дисперсии наблюдений принимают одни и те же значения, равные σ^2 . Оказывается, что для регрессионной функции (21) и ее частного случая, когда свободный член отсутствует, можно построить насыщенные D -оптимальные планы, у которых дисперсии наблюдений в точках спектров этих планов могут быть различными. Насыщенные планы экспериментов – это планы, у которых число точек спектра совпадает с числом неизвестных параметров.

Теорема 3. Для регрессионной функции

$$y = \theta_1 \cos x + \theta_2 \sin x \quad (23)$$

план экспериментов

$$\varepsilon^0 = \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{4} + \varphi, & \frac{3\pi}{4} + \varphi \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

является D -оптимальным для дисперсий наблюдений $d(x)$, удовлетворяющих неравенству

$$d(x) \geq \frac{1}{2} \left((d_2(1 + \sin 2\varphi) + d_1(1 - \sin 2\varphi)) \cos^2 x + \right. \\ \left. + (d_2(1 - \sin 2\varphi) + d_1(1 + \sin 2\varphi)) \sin^2 x + (d_1 - d_2) \cos 2\varphi \sin 2x \right), \quad (25)$$

где $d_1(x) = d\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)$; $d_2(x) = d\left(\frac{3\pi}{4} + \varphi\right)$; φ – произвольный угол ($\varphi \geq 0$) такой, для которого план экспериментов (24) является невырожденным.

Доказательство. Информационная матрица плана (24) равна

$$M(\varepsilon^0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d_1} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right), & \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \frac{1}{d_2} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \varphi\right) \\ \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \varphi\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \varphi\right), & \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \varphi\right) \end{pmatrix} \right) = \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d_1} \begin{pmatrix} (\cos \varphi - \sin \varphi)^2 & \cos 2\varphi \\ \cos 2\varphi & (\cos \varphi + \sin \varphi)^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{d_2} \begin{pmatrix} (\cos \varphi + \sin \varphi)^2 & -\cos 2\varphi \\ -\cos 2\varphi & (\cos \varphi - \sin \varphi)^2 \end{pmatrix} \right) = \\ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1}(1 - \sin 2\varphi) + \frac{1}{d_2}(1 + \sin 2\varphi) & \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) \cos 2\varphi \\ \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) \cos 2\varphi & \frac{1}{d_1}(1 + \sin 2\varphi) + \frac{1}{d_2}(1 - \sin 2\varphi) \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Матрица, обратная к матрице (26), если пропустить промежуточные вычисления, имеет вид

$$M^{-1}(\varepsilon^0) = \begin{pmatrix} d_2(1 + \sin 2\varphi) + d_1(1 - \sin 2\varphi) & (d_1 - d_2)\cos 2\varphi \\ (d_1 - d_2)\cos 2\varphi & d_2(1 + \sin 2\varphi) + d_1(1 - \sin 2\varphi) \end{pmatrix}.$$

Для D -оптимального плана экспериментов (24) должны выполняться условия теоремы эквивалентности Кифера – Вольфовица:

$$\frac{1}{d(x)}(\cos x, \sin x)M^{-1}(\varepsilon^0)\begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} = \frac{1}{d(x)}\left((d_2(1 + \sin 2\varphi) + d_1(1 - \sin 2\varphi))\cos^2 x + (d_2(1 - \sin 2\varphi) + d_1(1 + \sin 2\varphi))\sin^2 x + (d_1 - d_2)\cos 2\varphi \sin 2x\right) \leq 2. \quad (27)$$

Разрешая неравенство (27) относительно функции $d(x)$, получаем требуемое неравенство (25). Нетрудно проверить, что в точках спектра плана (24) неравенство (25) обращается в равенство. Теорема 3 доказана.

Замечание. Для регрессионной функции (23) невырожденный план экспериментов

$$\varepsilon_n^0 = \left\{ \frac{2\pi(i-1)}{n} + \varphi, \varphi \geq 0, p_i = \frac{1}{n}, i = \overline{1, n}, n \geq 3 \right\} \quad (28)$$

с дисперсиями наблюдений $d(x)$, удовлетворяющими неравенству $d(x) \geq \sigma^2$, $\sigma^2 > 0$, в котором равенство выполняется в точках спектра плана (28), является одновременно D - и A -оптимальным в силу доказанной теоремы 1. Таким образом, для регрессионной функции (23) существуют два различных типа D -оптимальных планов экспериментов. Это планы (24) и (28).

Для регрессионной функции (21) можно построить насыщенные D -оптимальные планы экспериментов с дисперсиями наблюдений $d(x)$, принимающими различные значения в точках спектров этих планов. Введем следующие обозначения: $d_1 = d(0) > 0$, $d_2 = d\left(\frac{2\pi}{3}\right) > 0$, $d_3 = d\left(\frac{4\pi}{3}\right) > 0$.

Теорема 4. Для регрессионной функции (21) насыщенный D -оптимальный план экспериментов имеет вид

$$\varepsilon_3^0 = \left\{ \begin{matrix} 0, & \frac{2\pi}{3}, & \frac{4\pi}{3} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{matrix} \right\} \quad (29)$$

с дисперсиями наблюдений $d(x)$, удовлетворяющими неравенству

$$d(x) \geq \frac{1}{9}\left((4d_1 + d_2 + d_3)\cos^2 x + 3(d_2 + d_3)\sin^2 x + \sqrt{3}(d_3 - d_2)\sin 2x + 2(2d_1 - d_2 - d_3)\cos x + 2\sqrt{3}(d_2 - d_3)\sin x + d_1 + d_2 + d_3\right), \quad (30)$$

в котором равенство выполняется в точках спектра плана (29).

Доказательство. Для D -оптимального плана ε_3^0 по теореме эквивалентности Кифера – Вольфовица [1] должно выполняться неравенство

$$\frac{1}{d(x)}(1, \cos x, \sin x)M^{-1}(\varepsilon_3^0)\begin{pmatrix} 1 \\ \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \leq 3, x \in [0, 2\pi), \quad (31)$$

причем в неравенстве (31) равенство должно достигаться в точках спектра плана (29). Проверим справедливость этого утверждения.

Информационная матрица плана равна

$$M(\varepsilon_3^0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{d_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} (1, 1, 0) + \frac{1}{d_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{d_3} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & k & e \\ c & e & m \end{pmatrix},$$

где

$$a = d_1^{-1} + d_2^{-1} + d_3^{-1}, b = d_1^{-1} - \frac{1}{2}d_2^{-1} - \frac{1}{2}d_3^{-1}, c = \frac{\sqrt{3}}{2}d_2^{-1} - \frac{\sqrt{3}}{2}d_3^{-1}, e = -\frac{\sqrt{3}}{4}d_2^{-1} + \frac{\sqrt{3}}{4}d_3^{-1},$$

$$k = d_1^{-1} + \frac{1}{4}d_2^{-1} + \frac{1}{4}d_3^{-1}, m = \frac{3}{4}d_2^{-1} + \frac{3}{4}d_3^{-1}. \quad (32)$$

Матрица, обратная к матрице $M(\varepsilon_3^0)$, имеет вид

$$M^{-1}(\varepsilon_3^0) = \frac{3}{akm + 2bce - c^2k - e^2a - b^2m} \begin{pmatrix} km - e^2 & ce - bm & be - kc \\ ce - bm & am - c^2 & bc - ae \\ be - kc & bc - ae & ak - b^2 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Используя формулу (32), преобразуем элементы матрицы (33):

$$km - e^2 = \frac{3(d_1 + d_2 + d_3)}{4d_1d_2d_3}, ce - bm = \frac{3(2d_1 - d_2 - d_3)}{4d_1d_2d_3}, be - kc = \frac{3\sqrt{3}(d_2 - d_3)}{4d_1d_2d_3},$$

$$am - c^2 = \frac{3(d_2 + 4d_1 + d_3)}{4d_1d_2d_3}, bc - ae = \frac{3\sqrt{3}(d_3 - d_2)}{4d_1d_2d_3}, ak - b^2 = \frac{9(d_3 + d_2)}{4d_1d_2d_3}, \quad (34)$$

$$akm + 2bec - c^2k - e^2a - b^2m = \frac{27}{4d_1d_2d_3}.$$

Разрешая неравенство (31) относительно функции $d(x)$ и учитывая соотношения (33) и (34), получаем требуемое неравенство (30). Легко проверить, что неравенство (30) обращается в равенство в точках спектра плана (29). Условия теоремы эквивалентности Кифера – Вольфовица выполнены. Теорема 4 доказана.

Точки спектра плана (29) можно сдвинуть на угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Тогда

$$x_1^0 = \varphi, x_2^0 = \frac{2\pi}{3} + \varphi, x_3^0 = \frac{4\pi}{3} + \varphi \quad (35)$$

есть точки спектра такого плана экспериментов, при этом изменится вид функций $d(x)$ в неравенстве (30). Расчеты, проведенные для угла $\varphi = \frac{\pi}{6}$, подтверждают это. Пусть $d_1 = d(x_1^0)$, $d_2 = d(x_2^0)$, $d_3 = d(x_3^0)$. Следуя теореме эквивалентности Кифера – Вольфовица, получим выражение для дисперсий наблюдений $d(x)$, соответствующих оптимальному плану экспериментов с точками спектра (35):

$$d(x) \geq \frac{1}{9}(3(d_1 + d_2)\cos^2 x + (d_1 + d_2 + 4d_3)\sin^2 x + \sqrt{3}(d_1 - d_2)\sin 2x + 2\sqrt{3}(d_1 - d_2)\cos x + 2(d_1 + d_2 - 2d_3)\sin x + d_1 + d_2 + d_3). \quad (36)$$

В точках спектра (35) плана с углом $\varphi = \frac{\pi}{6}$ неравенство (36) обращается в равенство.

Можно было бы получить и обобщение неравенства (36) для произвольных углов φ так, как это было сделано в теореме 3. Однако расчеты в данном случае становятся намного более сложными и громоздкими.

Итак, для регрессионной функции (21) и ее частного случая без свободного члена существуют два различных типа D -оптимальных планов. Это планы (24), (29) и планы, которые строятся на основе теоремы 1.

Возникает вопрос: можно ли для регрессионной функции (21) с четырьмя наблюдениями построить оптимальный план

$$\varepsilon_4^0 = \left\{ \begin{matrix} 0, & \frac{\pi}{2}, & \pi, & \frac{3\pi}{2} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \end{matrix} \right\} \quad (37)$$

с неравноточными наблюдениями, для которого дисперсии наблюдений в точках спектра плана (37) будут различными? В публикации [4] доказано, что сделать это нельзя.

Библиографические ссылки

1. Ермаков СМ, Жиглявский АА. *Математическая теория оптимального эксперимента*. Москва: Наука; 1987. 320 с.
2. Федоров ВВ. *Теория оптимального эксперимента (планирование регрессионных экспериментов)*. Москва: Наука; 1971. 312 с. (Физико-математическая библиотека инженера).
3. Hoel PG. Minimax designs in two dimension regression. *The Annals of Mathematical Statistics*. 1965;36(4):1097–1106. DOI: 10.1214/aoms/1177699984.
4. Кирлица ВП. D-оптимальные планы экспериментов для тригонометрической регрессии на отрезке с неравноточными наблюдениями. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2020;3:80–85. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-3-80-85.
5. Ермаков СМ, Бродский ВЗ, Жиглявский АА, Козлов ВП, Малютков МБ, Мелас ВБ и др. *Математическая теория планирования эксперимента*. Ермаков СМ, редактор. Москва: Наука; 1983. 392 с. (Справочная математическая библиотека).

References

1. Ermakov SM, Zhiglyavskii AA. *Matematicheskaya teoriya optimal'nogo eksperimenta* [The mathematical theory of optimal design]. Moscow: Nauka; 1987. 320 p. Russian.
2. Fedorov VV. *Teoriya optimal'nogo eksperimenta (planirovanie regressionnykh eksperimentov)* [The theory of optimal design (planning regression experiments)]. Moscow: Nauka; 1971. 312 p. (Fiziko-matematicheskaya biblioteka inzhenera). Russian.
3. Hoel PG. Minimax designs in two dimension regression. *The Annals of Mathematical Statistics*. 1965;36(4):1097–1106. DOI: 10.1214/aoms/1177699984.
4. Kirlitsa VP. D-optimal designs of experiments for trigonometric regression on interval with heteroscedastic observations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2020;3:80–85. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-3-80-85.
5. Ermakov SM, Brodskii VZ, Zhiglyavskii AA, Kozlov VP, Maljutov MB, Melas VB, et al. *Matematicheskaya teoriya planirovaniya eksperimenta* [The mathematical theory of experiment design]. Ermakov SM, editor. Moscow: Nauka; 1983. 392 p. (Spravochnaya matematicheskaya biblioteka). Russian.

Получена 22.05.2023 / исправлена 02.06.2023 / принята 05.06.2023.
Received 22.05.2023 / revised 02.06.2023 / accepted 05.06.2023.

G-СЕТЬ КАК СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СЕТИ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

Т. В. РУСИЛКО¹⁾

¹⁾Гродненский государственный университет им. Янки Купалы,
ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Беларусь

Целью статьи является математическое моделирование сети передачи данных, состоящей из конечных устройств, соединенных устройствами маршрутизации и каналами передачи данных. В качестве стохастической модели предлагается использовать замкнутую экспоненциальную G-сеть массового обслуживания с однолинейными узлами, в которой циркулируют положительные заявки и сигналы. Модель исследуется в асимптотическом случае при большом числе обрабатываемых заявок. Применяемый математический подход позволяет рассчитать основные статистические характеристики марковского процесса, описывающего состояние модели, а также аналитически восстановить его нормальную функцию плотности распределения вероятностей на основе метода гауссова приближения. Результаты исследования могут быть полезны для расчета показателей производительности сети передачи данных как в переходном, так и в стационарном режиме, а также для проектирования и оптимизации сетей передачи данных.

Ключевые слова: G-сеть; сеть передачи данных; сеть массового обслуживания; асимптотический анализ; гауссово приближение; математическое моделирование.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.6.01).

THE G-NETWORK AS A STOCHASTIC DATA NETWORK MODEL

T. V. RUSILKO^a

^aYanka Kupala State University of Grodno, 22 Azheshka Street, Grodno 230023, Belarus

The primary objective of this paper is the mathematical modelling of a data network consisting of terminal devices connected by routing devices and data links. A closed exponential G-network of single-server queueing nodes with positive requests and signals is used as a stochastic model. The model is studied in the asymptotic case of a large number of requests being processed. The mathematical approach used makes it possible to calculate the main statistical characteristics of a Markov process describing the model state, as well as to reconstruct analytically its normal probability density function based on the Gaussian approximation method. The results of the study allow us to analyse the data network performance in both transient and steady state. The areas of implementation of the research results are the pre-design of data networks and solving problems of their optimisation.

Keywords: G-network; data network; queueing network; asymptotic analysis; Gaussian approximation; mathematical modelling.

Acknowledgements. The research was supported by the state programme of scientific research «Convergence-2025» (subprogramme «Mathematical models and methods», assignment 1.6.01).

Образец цитирования:

Русилко ТВ. G-сеть как стохастическая модель сети передачи данных. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;2:45–54 (на англ.). <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-45-54>
EDN: QCCPXH

For citation:

Rusilko TV. The G-network as a stochastic data network model. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;2:45–54. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-45-54>
EDN: QCCPXH

Автор:

Татьяна Владимировна Русилко – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики факультета математики и информатики.

Author:

Tatiana V. Rusilko, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of fundamental and applied mathematics, faculty of mathematics and informatics. tatiana.rusilko@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-4880-0619>

Introduction

To date, the development of technology has led to the widespread use of systems that provide parallel and decentralised data processing. Examples of such systems are multiprocessor devices, distributed databases, grid systems and data networks. A characteristic feature of these systems is the set of incoming tasks that are quite simple to process. These tasks come to the system nodes, requesting resources for processing. The required transformations are performed using resources, after which the task is considered completed and the resources are released. Due to the peculiarities of such systems, it is necessary to create new and modify existing methods for their analysis and for solving the problems of increasing their efficiency.

The transfer and processing of data is the field of activity of a large number of companies. Network systems and data processing applications are ubiquitous, so the study of the functioning of these systems is relevant. Various mathematical models can be used for research, including models belonging to the queueing theory. Queueing networks are effective mathematical models for studying discrete probabilistic systems with a network-like structure. A queueing network is a collection of interdependent queueing systems (nodes) that provides transfer and processing of requests. The object of investigation in this paper is a stochastic data network model in the form of a G-network.

G-networks are generalised queueing networks of queueing nodes with several types of requests: positive requests, negative requests and, in some cases, triggers. Negative requests and triggers are not serviced, so they are identified as signals. When a negative request arrives at a node, one or a group of positive requests is removed or «killed» in a non-empty queue, while the queued trigger displaces requests and moves positive requests from one node to some other node. G-networks were first introduced by E. Gelenbe and have been studied in a steady state since the 1990s [1–3]. Their field of application is modelling computing systems and networks, evaluating their performance, modelling biophysical neural networks, pattern recognition tasks and etc. [4–7]. More details on the practical use of G-networks with signals are described in work [8].

The purpose of this paper is the mathematical modelling and efficiency analysis of the data network using a closed exponential G-network with signals. An asymptotic analysis of the model is carried out, which implies an approximation method of the queueing network study under the assumption of a large but limited number of requests [9–11]. The mathematical approach used in this article is based on a discrete model of a continuous Markov process and the theory of diffusion approximation of a Markov process [12; 13].

Model description. Formulation of the problem

The focus of this paper is the data network consisting of terminal devices, connected by routing devices and communication channels (data links). The function of terminal devices is the transfer and reception of data, as they are communication endpoints. Each terminal or routing device has many inputs and outputs. Each of the communication channels has one input and one output, which are connected to the inputs and outputs of the devices: they provide data transfer. Data are transmitted over the network in the form of discrete packets. The bandwidth of data links is limited. Network devices and channels process data packets at a limited rate.

In general, a payload (information useful to the user), a malicious code (malware) and a service information can be transmitted over data networks. By service information we mean commands that provide load balancing between devices. The load balancing is the process of distributing a set of packets over a set of network units, with the aim of making their overall processing more efficient and avoiding overloading some units.

The problem of mathematical modelling of such a data network can be solved using a G-network with signals. As a model of a data network, we will use a closed exponential G-network, consisting of n queueing nodes S_i , $i = \overline{1, n}$, and a fictitious request source S_0 . The node S_0 plays the role of an external environment. Requests in the G-network correspond to data packets transmitted over the data network, positive requests are assigned to payload, signals are assigned to malware and service information. Assume that K homogeneous requests circulate in the G-network. Exponential single-server nodes S_i , $i = \overline{1, n}$, correspond to the terminal and routing devices, as well as network data links. The fictitious system S_0 has K servers.

Each data packet can be in one of the following states corresponding to G-network nodes with the same number:

- S_0 – the data packet is in an external environment outside the data network;
- S_i – the data packet is in one of the devices or data links, $i = \overline{1, n}$.

The transition of a request from the node S_0 to the node S_i , $i = \overline{1, n}$, corresponds to the arrival of a packet in the network. The arrival request flow is divided into a flow of positive requests and signals. Requests arrive from the outside following a Poisson process with the rate $\lambda_0 k_0$, λ_0 is the parameter, k_0 is the number of requests in the node S_0 . The probability of payload packet arriving at the time interval $[t, t + \Delta t]$ is $\lambda_0 k_0 p_0^+ \Delta t + o(\Delta t)$,

the arrival probability of packet containing malicious code or service information is $\lambda_0 k_0 p_{0i}^- \Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1, n}$, $\sum_{i=1}^n (p_{0i}^+ + p_{0i}^-) = 1$. A payload packet transfers from S_i to S_j without modification with the probability p_{ij}^+ , transfers from S_i to S_j as a packet containing malicious code or service information with the probability p_{ij}^- , or leaves the network with the probability $p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^n (p_{ij}^+ + p_{ij}^-)$, $i, j = \overline{1, n}$.

All queueing nodes S_i , $i = \overline{1, n}$, are single-server, the waiting buffer is unlimited. The service time of positive requests is exponentially distributed with the service rate μ_i , $i = \overline{1, n}$. Requests are served according to the FIFO rule (first in first out). Signals arriving at a node are not served by the node servers. A signal arriving at the node S_i either instantly moves a positive request from the system S_i to the system S_j with the probability q_{ij} , note that in this case the signal is called a trigger, or destroys a positive request located at the same node S_i with the probability $q_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^n q_{ij}$ and immediately leaves the network.

The state of this G-network at the time t is represented by a random process

$$k(t) = (k_1(t), k_2(t), \dots, k_n(t)),$$

where $k_i(t)$ is the number of requests (data packets) in the node S_i at the time t , $0 \leq k_i(t) \leq K$, $i = \overline{1, n}$, $t \in [0, +\infty)$.

It is obvious that the number of requests serving in the G-network at the time t is $\sum_{i=1}^n k_i(t) = K - k_0(t)$. The location of data packets according to possible states at the time t fully describes the state of the data network at that time. Accordingly, the allocation of requests by queueing nodes completely determines the state of the G-network used as the data network model. Taking into account the above-described, the process $k(t)$ is a continuous-time Markov process on the finite state space.

Using the technique described in works [9–16], it is possible to derive a set of differential equations for the main statistical characteristics of a random process $k(t)$ in the asymptotic case of a large number of requests.

Asymptotic analysis of the network model

The discrete (discontinuous-state) Markov process $k(t)$ is used to determine the state of the G-network under study. In this paper, the passage to the limit from a Markov chain $k(t)$ to a continuous-state Markov process $\xi(t)$ is considered. In contrast to discontinuous processes, continuous processes in any small time interval $\Delta t \rightarrow 0$ have some small change in the state $\Delta x \rightarrow 0$. The mathematical approach used in this paper is based on a discrete model of a continuous Markov process described in many books on the theory of diffusion Markov processes (see, for example, [13]).

Theorem. *In the asymptotic case of a large number of requests K the probability density function $p(x, t)$ of the random process $\xi(t) = \frac{k(t)}{K} = \left(\frac{k_1(t)}{K}, \frac{k_2(t)}{K}, \dots, \frac{k_n(t)}{K} \right)$ provides that it is differentiable with respect to t*

and twice continuously differentiable with respect to x_i , $i = \overline{1, n}$, satisfies up to $O(\varepsilon^2)$, where $\varepsilon = \frac{1}{K}$, the multi-dimensional Fokker – Planck – Kolmogorov equation

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i(x, t) p(x, t)) + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i, j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (B_{ij}(x, t) p(x, t)) \quad (1)$$

with drift coefficients

$$\begin{aligned} A_i(x, t) = & \lambda_0 \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) (p_{0i}^+ - p_{0i}^-) + \sum_{j=1}^n \lambda_0 \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) p_{0j}^- q_{ji} - \\ & - \mu_i \min(x_i, \varepsilon) \sum_{j=1}^n p_{ij}^- (1 - \theta(x_j)) + \sum_{j=1}^n \mu_j \min(x_j, \varepsilon) (p_{ji}^+ - p_{ji}^- - \delta_{ji}) + \\ & + \sum_{j, s=1}^n \mu_j \min(x_j, \varepsilon) p_{js}^- q_{si} \end{aligned}$$

and diffusion coefficients

$$B_{ii}(x, t) = \lambda_0 \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) (p_{0i}^+ + p_{0i}^-) + \sum_{j=1}^n \lambda_0 \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) p_{0j}^- q_{ji} +$$

$$+ \mu_i \min(x_i, \varepsilon) \sum_{j=1}^n p_{ij}^- (1 - \theta(x_j)) + \sum_{j=1}^n \mu_j \min(x_j, \varepsilon) (p_{ji}^+ + p_{ji}^- + \delta_{ji}) +$$

$$+ \sum_{j,s=1}^n \mu_j \min(x_j, \varepsilon) p_{js}^- q_{si},$$

$$B_{ij}(x, t) = -\mu_i \min(x_i, \varepsilon) p_{ij}^+ - \lambda_0 \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) p_{0i}^- q_{ij} +$$

$$+ \mu_i \min(x_i, \varepsilon) p_{ij}^- q_{j0} + \mu_i \min(x_i, \varepsilon) p_{ij}^- \sum_{s=1}^n q_{js} -$$

$$- \mu_i \min(x_i, \varepsilon) \sum_{s=1}^n p_{is}^- q_{sj} - \sum_{s=1}^n \mu_s \min(x_s, \varepsilon) p_{sj}^- q_{ji}, \quad i \neq j,$$

where δ_{ji} is the Kronecker delta, $i, j = \overline{1, n}$.

P r o o f. First of all, we consider all possible ways of changing the state of the Markov random process $k(t)$

in a small time Δt . Let us introduce a n -vector of the form $I_i = \left(\overbrace{0, 0, \dots, 0}^i, 1, 0, 0, \dots, 0 \right)$ and the Heaviside function

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

As mentioned above, the process $k(t)$ is a continuous-time Markov process on the finite state space. The assumptions made in the model description determine that in the short time Δt the Markov process $k(t) = (k, t)$ can make one of the following transitions:

- from the state $(k - I_i, t)$ to the state $(k, t + \Delta t)$ with the probability

$$\lambda_0 \left(K - \sum_{i=1}^n k_i(t) + 1 \right) p_{0i}^+ \Delta t + o(\Delta t),$$

that corresponds to a payload packet arrival from the node S_0 to the node S_{n+1} ;

- from the state $(k + I_i, t)$ to the state $(k, t + \Delta t)$ with the probability

$$\lambda_0 \left(K - \sum_{i=1}^n k_i(t) - 1 \right) p_{0i}^- q_{i0} \Delta t +$$

$$+ \mu_i \min(k_i(t) + 1, 1) (p_{i0} + p_{ij}^- (1 - \theta(k_j(t)))) \Delta t + o(\Delta t),$$

which is possible when a packet containing malicious code arrives from the external environment S_0 , when a payload packet is routed from S_i to the external environment S_0 , or when a payload packet is transmitted as a signal from S_i to the empty node S_j , $i, j = \overline{1, n}$;

- from the state $(k + I_i - I_j, t)$ to the state $(k, t + \Delta t)$ with the probability

$$\left(\mu_i \min(k_i(t) + 1, 1) p_{ij}^+ + \lambda_0 \left(K - \sum_{i=1}^n k_i(t) \right) p_{0i}^- q_{ij} \right) \Delta t + o(\Delta t),$$

which is possible when a payload packet is transferred from the system S_i to the system S_j without modification or when a signal (trigger) arrives from the external environment S_0 to S_i and this trigger moves the payload packet from S_i to S_j , $i, j = \overline{1, n}$;

- from the state $(k + I_i + I_j, t)$ to the state $(k, t + \Delta t)$ with the probability

$$\mu_i \min(k_i(t) + 1, 1) p_{ij}^- q_{j0} \Delta t + o(\Delta t),$$

which corresponds to the transfer of a payload packet from the node S_i to the node S_j , $i, j = \overline{1, n}$, as malware;

- from the state $(k + I_i + I_j - I_s, t)$ to the state $(k, t + \Delta t)$ with the probability

$$\mu_i \min(k_i(t) + 1, 1) p_{ij}^- q_{js} \Delta t + o(\Delta t),$$

when a payload packet moves from the node S_i to the node S_j as a signal (trigger) that moves the packet from S_j to S_s , $i, j, s = \overline{1, n}$;

- from the state (k, t) to the state $(k, t + \Delta t)$ with the probability

$$1 - \left(\lambda_0 \left(K - \sum_{i=1}^n k_i(t) \right) + \sum_{i=1}^n \mu_i \min(k_i(t), 1) \left(1 + \sum_{j=1}^n p_{ij}^- (1 - \theta(k_j(t))) \right) \right) \Delta t + o(\Delta t),$$

which corresponds to no packets transfer;

- from other states to the state $(k, t + \Delta t)$ with the probability $o(\Delta t)$.

With regard to the transitions listed above in the short time Δt , using the law of total probability, the following set of equations is valid for the probability $P(k, t) = P(k(t) = k)$:

$$\begin{aligned} \frac{dP(k, t)}{dt} = & \sum_{i=1}^n \lambda_0 \left(K - \sum_{i=1}^n k_i(t) \right) p_{0i}^+ (P(k - I_i, t) - P(k, t)) + \\ & + \sum_{i=1}^n \lambda_0 p_{0i}^+ P(k - I_i, t) + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_0 \left(K - \sum_{i=1}^n k_i(t) \right) p_{0i}^- q_{i0} + \right. \\ & + \left. \sum_{i, j=1}^n \mu_i \min(k_i(t), 1) (p_{i0} + p_{ij}^- (1 - \theta(k_j(t)))) \right) (P(k + I_i, t) - P(k, t)) + \\ & + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_0 p_{0i}^- q_{i0} + \sum_{i, j=1}^n \mu_i (\min(k_i(t) + 1, 1) - \min(k_i(t), 1)) (p_{i0} + p_{ij}^- (1 - \theta(k_j(t)))) \right) \times \\ & \times P(k + I_i, t) + \sum_{i, j=1}^n \mu_i \min(k_i(t), 1) p_{ij}^+ (P(k + I_i - I_j, t) - P(k, t)) + \\ & + \sum_{i, j=1}^n \mu_i (\min(k_i(t) + 1, 1) - \min(k_i(t), 1)) p_{ij}^+ P(k + I_i - I_j, t) + \\ & + \sum_{i, j=1}^n \lambda_0 \left(K - \sum_{i=1}^n k_i(t) \right) p_{0i}^- q_{ij} (P(k + I_i - I_j, t) - P(k, t)) + \\ & + \sum_{i, j=1}^n \mu_i \min(k_i(t), 1) p_{ij}^- q_{j0} (P(k + I_i + I_j, t) - P(k, t)) + \\ & + \sum_{i, j=1}^n \mu_i (\min(k_i(t) + 1, 1) - \min(k_i(t), 1)) p_{ij}^- q_{j0} P(k + I_i + I_j, t) + \\ & + \sum_{i, j, s=1}^n \mu_i \min(k_i(t), 1) p_{ij}^- q_{js} (P(k + I_i + I_j - I_s, t) - P(k, t)) + \\ & + \sum_{i, j, s=1}^n \mu_i (\min(k_i(t) + 1, 1) - \min(k_i(t), 1)) p_{ij}^- q_{js} P(k + I_i + I_j - I_s, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Data networks typically handle a large number of data packets. In connection with this, we proceed to the limit from the Markov chain $k(t)$ to the continuous-state Markov process $\xi(t) = \frac{k(t)}{K} = \left(\frac{k_1(t)}{K}, \frac{k_2(t)}{K}, \dots, \frac{k_n(t)}{K} \right)$

when K tends to be very large number. The state space of the relative vector $\xi(t) = \frac{k(t)}{K}$ is

$$X = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \geq 0, i = \overline{1, n}, \sum_{i=1}^n x_i \leq 1 \right\}.$$

The increment of $\xi_i(t)$ in the short time $\Delta t \rightarrow 0$ is $\Delta x_i = \varepsilon$, where $\varepsilon = \frac{1}{K}$. As $K \rightarrow \infty$, the increment of $\xi_i(t)$ decreases, and in any small time interval $\Delta t \rightarrow 0$ the process $\xi_i(t)$ has some small change in the state $\Delta x_i \rightarrow 0$. We can assume that the limiting distribution of $\xi_i(t)$ is continuous. The vector $\xi(t)$ will be continuous-time continuous-state Markov processes with a probability density function $p(x, t)$. The probability density function satisfies the asymptotic relation

$$K^n P(k, t) = K^n P(xK, t) \xrightarrow{K \rightarrow \infty} p(x, t), x \in X. \quad (3)$$

Realising the passage to limit (3) for equation (2), assuming, $\varepsilon = \frac{1}{K}$ and $e_i = I_i \varepsilon = \frac{I_i}{K}$, we obtain the following partial differential equation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = & K \sum_{i=1}^n \lambda_0 \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) p_{0i}^+ (p(x - e_i, t) - p(x, t)) + \\ & + \sum_{i=1}^n \lambda_0 p_{0i}^+ p(x - e_i, t) + K \left(\sum_{i=1}^n \lambda_0 \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) p_{0i}^- q_{i0} + \right. \\ & + \left. \sum_{i,j=1}^n \mu_i \min(x_i, 1) (p_{i0} + p_{ij}^- (1 - \theta(x_j))) \right) (p(x + e_i, t) - p(x, t)) + \\ & + \sum_{i=1}^n \lambda_0 p_{0i}^- q_{i0} + \sum_{i,j=1}^n \mu_i \frac{\partial \min(x_i, \varepsilon)}{\partial x_i} (p_{i0} + p_{ij}^- (1 - \theta(x_j))) p(x + e_i, t) + \\ & + K \sum_{i,j=1}^n \mu_i \min(x_i, 1) p_{ij}^+ (p(x + e_i - e_j, t) - p(x, t)) + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \mu_i \frac{\partial \min(x_i, \varepsilon)}{\partial x_i} p_{ij}^+ p(x + e_i - e_j, t) + K \sum_{i,j=1}^n \lambda_0 \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) p_{0i}^- q_{ij} (p(x + e_i - e_j, t) - p(x, t)) + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \mu_i \frac{\partial \min(x_i, \varepsilon)}{\partial x_i} p_{ij}^- q_{j0} p(x + e_i + e_j, t) + \\ & + K \sum_{i,j=1}^n \mu_i \min(x_i, 1) p_{ij}^- q_{js} (p(x + e_i + e_j - e_s, t) - p(x, t)) + \\ & + \sum_{i,j,s=1}^n \mu_i \frac{\partial \min(x_i, \varepsilon)}{\partial x_i} p_{ij}^- q_{js} p(x + e_i + e_j - e_s, t). \end{aligned} \quad (4)$$

If $p(x, t)$ is a twice continuously differentiable function with respect to x , then we can use the second degree Taylor series of functions $p(x \pm e_i, t)$, $p(x + e_i - e_j, t)$, $p(x + e_i + e_j, t)$ and $p(x + e_i + e_j - e_s, t)$ at a point x [9; 11]. Substituting the above-mentioned Taylor series into equation (4), having grouped the terms in the resulting equation, we conclude that compact mathematical expression (1) is valid. The theorem is proven.

Equation (1) is known as the multidimensional Fokker – Planck – Kolmogorov equation. The drift coefficients $A_i(x, t)$ characterise the rate of change of random process $\xi(t)$. The diffusion coefficients $B_{ij}(x, t)$ characterise the rate of change in the variance of the considered process $\xi(t)$. Note that the drift and diffusion coefficients depend linearly on x .

The main statistical characteristics of a Markov process describing the model state

The probability distribution of the vector $\xi(t)$ given by the probability density function $p(x, t)$ is a complete and exhaustive characteristic of the G-network state at the time t . However, such an exhaustive characteristic cannot be found, since equation (1) is not explicitly solvable. Therefore, instead of the probability density function $p(x, t)$, we will use an incomplete approximate description of a random process $\xi(t)$ using its moments. The probability distribution of a random process is usually characterised by a small number of parameters, which also have a practical interpretation. It is often enough to know what «average value» of $\xi(t)$ is, how far from this average value the values of $\xi(t)$ typically are, and how the statistical relationship between its components $\xi_i(t)$ and $\xi_j(t)$ is characterised.

The minimum set of parameters by which an n -dimensional random process can be characterised is as follows.

1. The expected values $E\xi_1(t) = v_1^{(1)}(t)$, $E\xi_2(t) = v_2^{(1)}(t)$, ..., $E\xi_n(t) = v_n^{(1)}(t)$. Expectations are non-random functions of the time that characterise the mean trajectories of the process components around which they are grouped.
2. The variances $D\xi_1(t)$, $D\xi_2(t)$, ..., $D\xi_n(t)$. Variances are non-random functions of the time that characterise the spread or dispersion of process realisations relative to the expectations.
3. The correlation moments

$$\begin{aligned} K_{ij}(t) &= E\left((\xi_i(t) - E\xi_i(t))(\xi_j(t) - E\xi_j(t))\right) = \\ &= E(\xi_i(t)\xi_j(t)) - E\xi_i(t)E\xi_j(t) = v_{ij}^{(1,1)}(t) - v_i^{(1)}(t)v_j^{(1)}(t). \end{aligned}$$

They characterise the pairwise correlation of the components included in the vector $\xi(t)$. The notation $v_{ij}^{(1,1)}(t) = E(\xi_i(t)\xi_j(t))$ is the mixed raw moment of the second order, $i, j = \overline{1, n}$.

It was found [16] that the set of ordinary differential equations for the first-order and second-order raw moments of the state vector elements $\xi_i(t)$ is

$$\begin{aligned} \frac{dv_i^{(1)}(t)}{dt} &= \frac{dM(\xi_i(t))}{dt} = A_i(v^{(1)}(t)), \\ \frac{dv_{ij}^{(1,1)}(t)}{dt} &= \frac{dM(\xi_i(t)\xi_j(t))}{dt} = M(\xi_i(t)A_j(\xi(t))) + \\ &+ M(\xi_j(t)A_i(\xi(t))) + \varepsilon B_{ij}(v^{(1)}(t)), \quad i, j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (5)$$

It is proven that the moments are determined with an accuracy of $O(\varepsilon^2)$, where $\varepsilon = \frac{1}{K}$, from the set of ordinary differential equations (5). The solution of set (5) with a certain initial condition, firstly, makes it possible to predict the mean and the dispersion of the number of data packets at each model state with time, and, secondly, draw a conclusion about the correlation of the number of packets at different data network units with time. These results are useful in decision making and network load analysis. They are applicable with a specified accuracy in both transient and steady state, this is a fundamental advantage of the used asymptotic method.

In this paper, we restrict ourselves to considering only the set of differential equations for expected values $v_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, n}$, of the defined form

$$\begin{aligned} \frac{dv_i^{(1)}(t)}{dt} &= \lambda_0 \left(1 - \sum_{i=1}^n v_i^{(1)}(t) \right) (p_{0i}^+ - p_{0i}^-) + \sum_{j=1}^n \lambda_0 \left(1 - \sum_{i=1}^n v_i^{(1)}(t) \right) p_{0j}^- q_{ji} - \\ &- \mu_i \min(v_i^{(1)}(t), \varepsilon) \sum_{j=1}^n p_{ij}^- \left(1 - \theta(v_j^{(1)}(t)) \right) + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=1}^n \mu_j \min(v_j^{(1)}(t), \varepsilon) (p_{ji}^+ - p_{ji}^- - \delta_{ji}) + \sum_{j,s=1}^n \mu_j \min(v_j^{(1)}(t), \varepsilon) p_{js}^- q_{si}.$$

In the asymptotic case of large K , the Gaussian approximation method [13; 17] can be used to analytically reconstruct the normal probability density function

$$p(x, t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det K(t))^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (x - v^{(1)}(t))^T K^{-1}(t) (x - v^{(1)}(t))\right]$$

from the found moments of the process $\xi(t)$ and to analyse this process using the normal density properties, $K^{-1}(t)$ being the inverse covariance matrix [18].

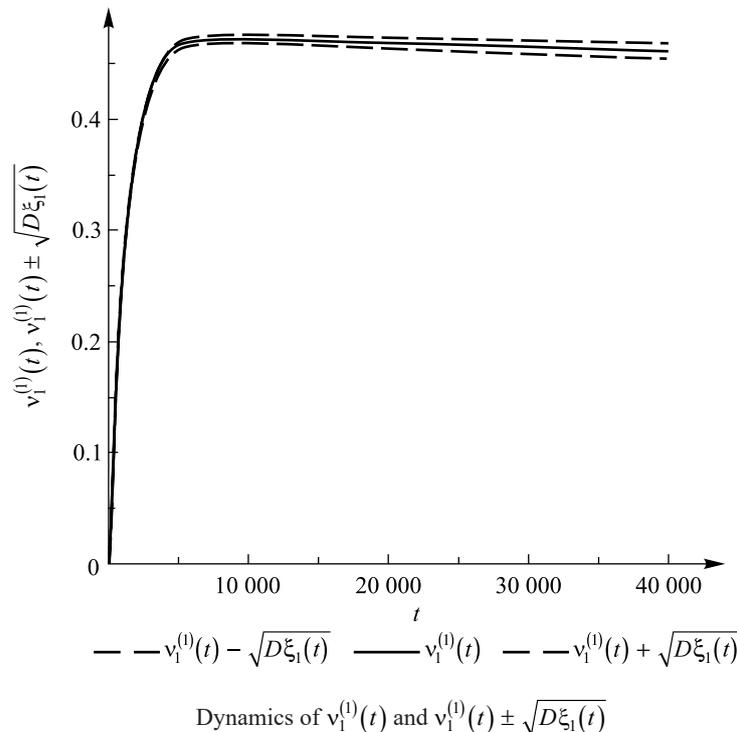
Numerical example

Consider the data network with a router to which two terminal devices are connected via two data links. The mathematical model of this network will be the above-described G-network of four nodes ($n = 4$). Nodes S_1 and S_2 are data links, nodes S_3 and S_4 are terminal devices, the external environment S_0 is a router. The structure of the G-network is set by the following non-zero elements of the transition matrices: $p_{01}^+ = 0.6$, $p_{01}^- = 0.2$, $p_{02}^+ = 0.19$, $p_{02}^- = 0.01$, $p_{13}^+ = 0.65$, $p_{13}^- = 0.01$, $p_{10} = 0.34$, $p_{24}^+ = 0.02$, $p_{24}^- = 0.7$, $p_{20} = 0.28$, $p_{31}^+ = 0.99$, $p_{31}^- = 0.01$, $p_{42}^+ = 0.01$, $p_{42}^- = 0.99$, $q_{12} = 0.97$, $q_{10} = 0.03$, $q_{21} = 0.95$, $q_{20} = 0.05$, $q_{30} = 1$, $q_{40} = 1$.

Let the number of data packets not exceed $K = 100\,000$, and the network operation be specified by the following parameters: the arrival rate is $\lambda_0 = 0.001$; the number of node servers are $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 1$, $m_4 = 1$; the service rates are $\mu_1 = 10$, $\mu_2 = 10$, $\mu_3 = 100$, $\mu_4 = 100$; the initial placement of packets is $v_i^{(1)}(t) = 0$, $v_{ij}^{(1,1)}(t) = 0$, $i, j = \overline{1, 4}$.

Let us solve set (5) by numerical methods under the above initial condition. The figure shows a graphical solution of set (5) for $v_1^{(1)}(t)$ and $v_1^{(1)}(t) \pm \sqrt{D\xi_1(t)}$, which allows us to observe the dynamics of the average relative number of packets at the node S_1 and its variation.

The figure demonstrates that the process does not reach the steady state in the considered time interval. At time $t = 30\,000$, the average number of packets at the node S_1 is $Kv_1^{(1)}(t) = 100\,000 \cdot 0.4575 = 45\,750$. It can be concluded that the efficiency of the data network is limited by the data link capacity modelled by the queueing system S_1 . It is recommended to expand this data link, which is the network bottleneck. Similarly, we can get the results for the rest of the network nodes.



The second-order moments found from set (5) allow us to investigate the correlation between the number of requests in different network nodes with time:

$$r_{ij}(t) = r(\xi_i(t), \xi_j(t)) = \frac{v_{ij}^{(1,1)}(t) - v_i^{(1)}(t)v_j^{(1)}(t)}{\sqrt{D\xi_i(t)}\sqrt{D\xi_j(t)}}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Thus, the calculation results can be useful in analysing and making decisions regarding the operation of the data network with different parameters. Data network performance indicators and some revenues can be found using mathematical methods for calculating the nodal characteristics of queueing networks [19; 20].

Conclusions

In this paper, the queueing G-network with signals was presented as a stochastic data network model. Obviously, both payload and malware, as well as service information, can be transmitted over a data network. Thus, a closed Markov queueing G-network is an appropriate mathematical model for a data network. Requests in the G-network correspond to data packets transmitted over the data network, positive requests are assigned to payload, signals are assigned to malware and service information. The model was studied in the asymptotic case of a large number of requests. As a result, the main statistical characteristics of the number of requests at each network unit were found in both transient and steady state. In particular, it is possible to investigate the correlation between the number of requests in different network nodes with time. The presented technique allows us to reconstruct the normal probability density function of the state process $\xi(t)$ based on the Gaussian approximation method. These results allow us to analyse the network efficiency and load balancing, i. e. distribute incoming traffic between several devices to improve the stability of their operation.

Библиографические ссылки

- Gelenbe E. Product-form queueing networks with negative and positive customers. *Journal of Applied Probability*. 1991;28(3): 656–663. DOI: 10.2307/3214499.
- Gelenbe E. G-networks by triggered customer movement. *Journal of Applied Probability*. 1993;30(3):742–748. DOI: 10.2307/3214781.
- Gelenbe E. G-networks with signals and batch removal. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. 1993;7(3): 335–342. DOI: 10.1017/S0269964800002953.
- Caglayan MU. G-networks and their applications to machine learning, energy packet networks and routing: introduction to the special issue. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. 2017;31(4):381–395. DOI: 10.1017/S0269964817000171.
- Zhang Yunxiao. Optimal energy distribution with energy packet networks. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. 2021;35(1):75–91. DOI: 10.1017/S0269964818000566.
- Gelenbe E. Steps toward self-aware networks. *Communications of the ACM*. 2009;52(7):66–75. DOI: 10.1145/1538788.1538809.
- Matalytski M, Naumenko V. Investigation of G-network with signals at transient behavior. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*. 2014;13(1):75–86. DOI: 10.17512/jamcm.2014.1.08.
- Gelenbe E, Pujolle G. *Introduction to queueing networks*. 2nd edition. Chichester: John Wiley & Sons; 1998. XIII, 244 p.
- Rusilko TV. Network stochastic call centre model. In: Petrenko SA, Tarkhov DA, editors. *Distance learning technologies – 2021 (DLT-2021). Selected papers of the VI International scientific and practical conference; 2021 September 20–22; Yalta, Crimea* [Internet]. [S. l.]: [s. n.]; 2021 [cited 2022 March 21]. p. 91–101 (CEUR workshop proceedings; volume 3057). Available from: <https://ceur-ws.org/Vol-3057/paper9.pdf>.
- Rusilko T. Asymptotic analysis of a closed G-network of unreliable nodes. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*. 2022;21(2):91–102. DOI: 10.17512/jamcm.2022.2.08.
- Матальцкий МА, Романюк ТВ. *Приближенные методы анализа сетей с центральной системой обслуживания и их применения*. Гродно: ГрГУ; 2003. 200 с.
- Медведев ГА. Замкнутые системы массового обслуживания и их оптимизация. *Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика*. 1978;6:199–203.
- Тихонов ВИ, Миронов МА. Марковские процессы. Москва: Советское радио; 1977. 488 с.
- Параев ЮИ. *Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации*. Москва: Советское радио; 1976. 184 с. (Библиотека технической кибернетики).
- Гардинер КВ. *Стохастические методы в естественных науках*. Доброславский АС, Коломенский АА, Толстопятенко АВ, переводчики; Стратонович РЛ, редактор. Москва: Мир; 1986. 526 с.
- Русилко ТВ. Метод определения моментов первых двух порядков для вектора состояния сети массового обслуживания в асимптотическом случае. *Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне*. 2021;11(2):152–161.
- Русилко ТВ. Метод гауссова приближения для определения плотности вероятности вектора состояния сети массового обслуживания в асимптотическом случае. *Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне*. 2022;12(3):151–161.
- Tu TT, Kharin AYU. Sequential probability ratio test for many simple hypotheses on parameters of time series with trend. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;1:35–45. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-1-35-45.

19. Rusilko TV. Application of queueing network models in insurance. *Izvestiya of Saratov University. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2022;22(3):315–321. DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-3-315-321.
20. Matalytski MA. Forecasting anticipated incomes in the Markov networks with positive and negative customers. *Automation and Remote Control*. 2017;78(5):815–825. DOI: 10.1134/S0005117917050046.

References

1. Gelenbe E. Product-form queueing networks with negative and positive customers. *Journal of Applied Probability*. 1991;28(3):656–663. DOI: 10.2307/3214499.
2. Gelenbe E. G-networks by triggered customer movement. *Journal of Applied Probability*. 1993;30(3):742–748. DOI: 10.2307/3214781.
3. Gelenbe E. G-networks with signals and batch removal. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. 1993;7(3):335–342. DOI: 10.1017/S0269964800002953.
4. Caglayan MU. G-networks and their applications to machine learning, energy packet networks and routing: introduction to the special issue. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. 2017;31(4):381–395. DOI: 10.1017/S0269964817000171.
5. Zhang Yunxiao. Optimal energy distribution with energy packet networks. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. 2021;35(1):75–91. DOI: 10.1017/S0269964818000566.
6. Gelenbe E. Steps toward self-aware networks. *Communications of the ACM*. 2009;52(7):66–75. DOI: 10.1145/1538788.1538809.
7. Matalytski M, Naumenko V. Investigation of G-network with signals at transient behavior. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*. 2014;13(1):75–86. DOI: 10.17512/jamcm.2014.1.08.
8. Gelenbe E, Pujolle G. *Introduction to queueing networks*. 2nd edition. Chichester: John Wiley & Sons; 1998. XIII, 244 p.
9. Rusilko TV. Network stochastic call centre model. In: Petrenko SA, Tarkhov DA, editors. *Distance learning technologies – 2021 (DLT-2021). Selected papers of the VI International scientific and practical conference; 2021 September 20–22; Yalta, Crimea* [Internet]. [S. l.]: [s. n.]; 2021 [cited 2022 March 21]. p. 91–101 (CEUR workshop proceedings; volume 3057). Available from: <https://ceur-ws.org/Vol-3057/paper9.pdf>.
10. Rusilko T. Asymptotic analysis of a closed G-network of unreliable nodes. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*. 2022;21(2):91–102. DOI: 10.17512/jamcm.2022.2.08.
11. Matalytski MA, Romaniuk TV. *Priblizhennyye metody analiza setei s tsentral'noi sistemoi obsluzhivaniya i ikh primeneniya* [Approximate methods for analysis of networks with a central queueing system and their applications]. Grodna: Yanka Kupala State University of Grodna; 2003. 200 p. Russian.
12. Medvedev GA. [Closed queueing systems and their optimisation]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 1978;6:199–203. Russian.
13. Tikhonov VI, Mironov MA. *Markovskie protsessy* [Markov processes]. Moscow: Sovetskoe radio; 1977. 488 p. Russian.
14. Paraev YuI. *Vvedenie v statisticheskuyu dinamiku protsessov upravleniya i fil'tratsii* [Introduction to statistical dynamics of management and filtering]. Moscow: Sovetskoe radio; 1976. 184 p. (Biblioteka tekhnicheskoi kibernetiki). Russian.
15. Gardiner CW. *Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences*. 2nd edition. Berlin: Springer-Verlag; 1985. 442 p. (Springer series in synergetics; volume 13). Russian edition: Gardiner CW. *Stokhasticheskie metody v estestvennykh naukakh*. Dobroslavskii AS, Kolomenskii AA, Tolstopyatenko AV, translators; Stratonovich RL, editor. Moscow: Mir; 1986. 526 p.
16. Rusilko TV. The first two orders moments of determination method for the state vector of the queueing network in the asymptotic case. *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodna. Series 2, Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and Control*. 2021;11(2):152–161. Russian.
17. Rusilko TV. Gaussian approximation method for determining the probability density of the state vector of the queueing network in the asymptotic case. *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodna. Series 2, Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and Control*. 2022;12(3):151–161. Russian.
18. Tu TT, Kharin AYU. Sequential probability ratio test for many simple hypotheses on parameters of time series with trend. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;1:35–45. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-1-35-45.
19. Rusilko TV. Application of queueing network models in insurance. *Izvestiya of Saratov University. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2022;22(3):315–321. DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-3-315-321.
20. Matalytski MA. Forecasting anticipated incomes in the Markov networks with positive and negative customers. *Automation and Remote Control*. 2017;78(5):815–825. DOI: 10.1134/S0005117917050046.

Received 15.03.2023 / revised 22.06.2023 / accepted 22.06.2023.

УДК 519.642.7

К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ СЛАБОСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Г. А. РАСОЛЬКО¹⁾, С. М. ШЕШКО¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассмотрено сингулярное интегральное уравнение с логарифмической особенностью, использующееся в математической модели рассеяния электромагнитных волн. Для численного анализа его решений из разных функциональных классов Мухелишвили построены три вычислительные схемы, основанные на представлении части искомой функции в виде линейной комбинации многочленов Чебышева первого рода. После небольших преобразований и применения известных спектральных соотношений для сингулярного интеграла получены простые аналитические выражения для сингулярной составляющей уравнения. Коэффициенты разложения решения по базису полиномов Чебышева найдены как решение соответствующих систем линейных алгебраических уравнений. Результаты численных экспериментов показывают, что на сетке из 15–20 узлов погрешность приближенного решения не превышает вычислительной погрешности.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение; численное решение; метод ортогональных многочленов.

Образец цитирования:

Расолько ГА, Шешко СМ. К численному решению слабосингулярного интегрального уравнения второго рода методом ортогональных многочленов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023; 2:55–62.

<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-55-62>

EDN: FFDWPC

For citation:

Rasolko GA, Sheshko SM. On the numerical solution to a weakly singular integral equation of the second kind by the method of orthogonal polynomials. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;2:55–62. Russian.

<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-55-62>

EDN: FFDWPC

Авторы:

Галина Алексеевна Расолько – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.

Сергей Михайлович Шешко – старший преподаватель кафедры цифровой экономики экономического факультета.

Authors:

Galina A. Rasolko, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of web technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics. rasolka@bsu.by

<https://orcid.org/0000-0002-4055-7343>

Sergei M. Sheshko, senior lecturer at the department of digital economy, faculty of economics.

sheshkasm@bsu.by

<https://orcid.org/0000-0001-6366-4961>

ON THE NUMERICAL SOLUTION TO A WEAKLY SINGULAR INTEGRAL EQUATION OF THE SECOND KIND BY THE METHOD OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS

G. A. RASOLKO^a, S. M. SHESHKO^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: S. M. Sheshko (sheshkasm@bsu.by)

It is considered a singular integral equation with a logarithmic singularity. Such equations are used in the mathematical model of electromagnetic wave scattering. Three computational schemes are constructed for the numerical analysis of its solutions from different Muskhelishvili functional classes. They are based on the representation of a part of the determined function as a linear combination of Chebyshev polynomials of the first kind. After minor transformations and application of the known spectral relations for the singular integral, simple analytical expressions for the singular component of the equation are obtained. The solution is expanded in the basis of Chebyshev polynomials. The expansion coefficients are calculated as the solution of the corresponding systems of linear algebraic equations. The results of numerical experiments show that on a grid of 15–20 nodes, the error of the approximation does not exceed the computational error.

Keywords: integro-differential equation; numerical solution; method of orthogonal polynomials.

Введение

В работах [1; 2] рассматривается приближенное решение сингулярного интегрального уравнения второго рода с логарифмическим ядром в классе ограниченных на концах отрезка функций

$$\varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) \ln|t-x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) K(x, t) dt = f(x), \quad -1 < x < 1. \quad (1)$$

Здесь $\varphi(x)$ – неизвестная функция; $K(x, t)$ – известная функция из класса $\mathbb{C}[-1, 1]$ по обоим аргументам; $f(x) \in \mathbb{C}[-1, 1]$.

Обзор результатов исследований, посвященных вопросам разрешимости уравнений вида (1) и их численного решения, приведен в монографии [1, с. 27, 59]. В дальнейшем будем считать, что соответствующее однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение. Тогда решение уравнения (1) в классе непрерывных функций единственно [3; 4]. Показано, что при наличии в ядре интегрального уравнения второго рода, кроме логарифмической особенности, еще и регулярной части решение может быть получено лишь численно. Различные подходы к прямому численному решению данного уравнения содержат работы [5; 6].

В настоящей статье предлагаются алгоритмы численного решения уравнения (1) с неизвестной функцией $\varphi(x)$ в разных классах функций по Мухелишвили методом ортогональных многочленов, основной идеей которого является использование спектральных или квазиспектральных соотношений для входящих в уравнение интегралов.

Известны спектральные соотношения для слабосингулярного интеграла [7]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln|t-x| dt = \alpha_k T_k(x), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (2)$$

где $\alpha_0 = -\ln 2$; $\alpha_k = -\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$; $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ – многочлены Чебышева первого рода, $x \in [-1, 1]$.

Напомним классы функций по Мухелишвили [8, с. 31].

Говорят, что функция $\psi(x) \in h(0)$, если на отрезке $[-1 + \varepsilon_1, 1 - \varepsilon_2]$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, она удовлетворяет условию Гёльдера, а в окрестности точек $x = \pm 1$ допускает интегрируемую особенность.

Функция $\psi(x) \in h(1)$, если на отрезке $[-1, 1 - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, она удовлетворяет условию Гёльдера, а в окрестности точки $x = 1$ допускает интегрируемую особенность.

Функция $\psi(x) \in h(-1)$, если на отрезке $[-1 + \varepsilon, 1]$, $\varepsilon > 0$, она удовлетворяет условию Гёльдера, а в окрестности точки $x = -1$ допускает интегрируемую особенность.

Класс функций $h(-1, 1)$ представляет собой класс ограниченных в окрестности точек $x = \pm 1$ функций.

Данная статья является продолжением серии работ по приближенному решению сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, в том числе со слабой особенностью, методом ортогональных многочленов (см., например, [9]).

Предварительные сведения

При построении вычислительной схемы используем интерполяционный многочлен функции $f(x)$ по узлам Чебышева первого рода [10, с. 104]:

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j^n T_j(x), \quad (3)$$

где

$$f_0^n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k), \quad f_j^n = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j = \overline{1, n},$$

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

Применяя разложения (3), несложно построить интерполяционный многочлен $K_{n,n}(x, t)$ функции двух переменных $K(x, t)$:

$$K_{n,n}(x, t) = \sum_{r=0}^n T_r(x) \sum_{j=0}^n T_j(t) k_{r,j},$$

$$k_{r,j} = \frac{\delta_r \delta_j}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n T_r(x_l) \sum_{q=0}^n K(x_l, x_q) T_j(x_q), \quad \delta_s = \begin{cases} 1, & s=0, \\ 2, & s \neq 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

Приближенное решение уравнения (1) в классе неограниченных на концах отрезка функций

Приближенное решение $\varphi_n(x)$ уравнения (1) будем искать как решение следующего уравнения относительно новой неизвестной функции $v_n(x)$:

$$\frac{v_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln|t-x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} K_{n,n}(x, t) dt = F_n(x), \quad |x| < 1, \quad (5)$$

где $K_{n,n}(x, t)$ – интерполяционный многочлен (4) функции $K(x, t)$ степени n по обоим переменным; $F_n(x)$ – некоторая функция из класса $C[-1, 1]$ такая, что $F_n(x_k) = f(x_k)$, $x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi$, $k = \overline{0, n}$. Ре-

шения φ_n и v_n связаны равенством $\varphi_n(x) = \frac{v_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Отметим, что уравнение (5), как и уравнение (1),

разрешимо в рассматриваемом классе $h(0)$ [3; 4].

Решение уравнения (5) будем искать в виде

$$v_n(x) = \sum_{m=0}^n c_m T_m(x), \quad (6)$$

где c_m , $m = \overline{0, n}$, – неизвестные пока постоянные.

Рассмотрим первый интеграл в уравнении (5) с учетом представления (6) и равенств (2):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} v_n(t) \ln|t-x| dt = \sum_{m=0}^n c_m \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_m(t) \ln|t-x| dt = \sum_{m=0}^n T_m(x) c_m \alpha_m, \quad (7)$$

где согласно равенствам (2) $\alpha_0 = -\ln 2$; $\alpha_m = -\frac{1}{m}$, $m = \overline{1, n}$.

Рассмотрим второй интеграл в уравнении (5). Учитывая представления (4) и (6) и свойство ортогональности многочленов Чебышева первого рода, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} v_n(t) K_{n,n}(x,t) dt &= \sum_{m=0}^n c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) \sum_{j=0}^n k_{r,j} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_m(t) T_j(t) dt = \\ &= \sum_{m=0}^n c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) k_{r,m} \omega_m, \quad \omega_m = \begin{cases} 1, & m=0, \\ 0,5, & m>0. \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя представления (6)–(8) в уравнение (5), получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{m=0}^n c_m T_m(x) + \sum_{m=0}^n c_m T_m(x) \alpha_m + \sum_{m=0}^n c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) k_{r,m} \omega_m = F_n(x). \quad (9)$$

В качестве внешних узлов x в уравнении (9) выберем узлы Чебышева первого рода, а именно $x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi$, $k = \overline{0, n}$. Из уравнения (9) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n a_{k,m} c_m &= f(x_k), \quad k = \overline{0, n}, \\ a_{k,m} &= \frac{1}{\sqrt{1-x_k^2}} T_m(x_k) + T_m(x_k) \alpha_m + \sum_{r=0}^n T_r(x_k) k_{r,m} \omega_m. \end{aligned} \quad (10)$$

Решив систему (10) относительно неизвестных c_m , $m = \overline{0, n}$, найдем приближенное решение уравнения (1) с учетом представления (6) по формуле

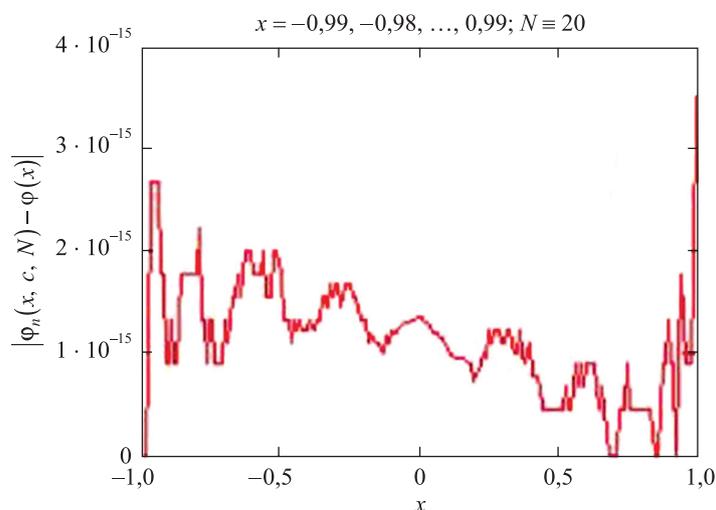
$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{m=0}^n c_m T_m(x). \quad (11)$$

Предложенная схема протестирована на примере решения модельной задачи для уравнения (1)

при $k(x,t) = \frac{2t^2-1}{(x+2)(t+2)}$, $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} - 2x + \left(16 - \frac{28\sqrt{3}}{3}\right) \frac{1}{x+2}$. Несложно показать, что решением

уравнения (1) в данном случае является функция $\varphi(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$. Как свидетельствуют расчеты, про-

веденные в среде компьютерной математики *Mathcad*, уже при сравнительно небольших значениях n , равных 5, 15 и 20, погрешность приближенного решения $\varphi_n(x)$, вычисленного по формуле (11), в системе точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$ не превосходит $1,0 \cdot 10^{-5}$, $2,7 \cdot 10^{-15}$ и $3,6 \cdot 10^{-15}$ соответственно (см. рисунок).



Погрешность приближенного решения
 Error of the approximate solution

**Приближенное решение уравнения (1)
в классе неограниченных на левом конце функций**

Как и в предыдущем разделе, рассмотрим следующее уравнение относительно новой неизвестной функции $v_n(x)$:

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}v_n(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}v_n(t) \ln|t-x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}v_n(t) K_{n,n}(x,t) dt = F_n(x), |x| < 1, \quad (12)$$

где $K_{n,n}(x,t)$ – интерполяционный многочлен функции $K(x,t)$ степени n по обоим переменным; $F_n(x)$ – некоторая функция из класса $C[-1,1]$ такая, что $F_n(x_k) = f(x_k)$, $x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi$, $k = \overline{0, n}$. Решения φ_n и v_n связаны равенством $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}v_n(x)$.

Отметим, что уравнение (12), как и уравнение (1), в данном случае разрешимо [1]. Докажем следующее утверждение.

Утверждение 1. Для $|x| < 1$ имеет место равенство

$$L_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} T_m(t) \ln|t-x| dt = \begin{cases} -\ln 2 T_0(x) + T_1(x), & m=0, \\ \frac{\ln 2}{2} T_0(x) - T_1(x) + \frac{1}{4} T_2(x), & m=1, \\ \frac{T_{m-1}(x)}{2(m-1)} - \frac{T_m(x)}{m} + \frac{T_{m+1}(x)}{2(m+1)}, & m \geq 2. \end{cases} \quad (13)$$

Доказательство. Умножим числитель и знаменатель подынтегральной функции на $\sqrt{1-t}$ и учтем соотношение $xT_m(x) = T_{m+1}(x) + T_{m-1}(x)$ [7, с. 23]. В результате подынтегральная функция в равенстве (13) сводится к виду (2), откуда следует истинность данного утверждения.

Пусть снова имеет место представление (6).

Рассмотрим первый интеграл в уравнении (12). С учетом представления (6) и равенства (13) имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}v_n(t) \ln|t-x| dt = \sum_{m=0}^n c_m \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} T_m(t) \ln|t-x| dt = \sum_{m=0}^n L_m(x) c_m. \quad (14)$$

Рассмотрим второй интеграл в уравнении (12) и в качестве интерполяционного многочлена $K_{n,n}(x,t)$ выберем многочлен (4). Учитывая представление (6) и свойство ортогональности многочленов Чебышева первого рода, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}v_n(t) K_{n,n}(x,t) dt &= \sum_{m=0}^n c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) \sum_{j=0}^n k_{r,j} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}} T_m(t) T_j(t) dt = \\ &= \sum_{m=0}^n c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) \left(k_{r,m} \omega_m - \frac{1}{2} k_{r,|m-1|} \omega_{|m-1|} \right) - \sum_{m=0}^{n-1} c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) \frac{1}{2} k_{r,m+1} \omega_{m+1} = \\ &= \sum_{m=0}^n c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) \Omega_{r,m}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{r,m} &= k_{r,m} \omega_m - \frac{1}{2} k_{r,|m-1|} \omega_{|m-1|} - \frac{1}{2} k_{r,m+1} \omega_{m+1} \delta_{m+1}, \\ \delta_m &= \begin{cases} 1, & m = \overline{0, n} \\ 0, & m > n, \end{cases} \quad \omega_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0,5, & m > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

Собирая вместе представление (6) и разложения каждого из этих интегралов по формулам (14)–(16), из уравнения (12) имеем

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \sum_{m=0}^n c_m T_m(x) + \sum_{m=0}^n c_m L_m(x) + \sum_{m=0}^n c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) \Omega_{r,m} = F_n(x). \quad (17)$$

В качестве внешних узлов x в уравнении (17) выберем узлы Чебышева первого рода, а именно $x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi$, $k = \overline{0, n}$. Из уравнения (17) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=0}^n a_{k,m} c_m = f(x_k), \quad k = \overline{0, n}, \quad (18)$$

$$a_{k,m} = \sqrt{\frac{1-x_k}{1+x_k}} T_m(x_k) + L_m(x_k) + \sum_{r=0}^n T_r(x_k) \Omega_{r,m}.$$

Решив систему (18) относительно неизвестных c_m , $m = \overline{0, n}$, найдем приближенное решение уравнения (1) по формуле

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \sum_{m=0}^n c_m T_m(x). \quad (19)$$

Предложенная схема протестирована на примере решения модельной задачи для уравнения (1) при $k(x, t) = \frac{4t}{(x+2)(t+2)}$, $f(x) = (2x+2x^2) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{2}{3} x^3 - x + (56 - 32\sqrt{3}) \frac{1}{x+2}$. Решением уравнения (1) в данном случае является функция $\varphi(x) = (2x+2x^2) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Как свидетельствуют расчеты, проведенные в среде компьютерной алгебры *Mathcad*, уже при сравнительно небольших значениях n , равных 5, 15 и 20, погрешность приближенного решения $\varphi_n(x)$, вычисленного по формуле (19), в системе точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$ не превосходит $6,1 \cdot 10^{-5}$, $1,8 \cdot 10^{-14}$ и $1,4 \cdot 10^{-14}$ соответственно.

Приближенное решение уравнения (1) в классе неограниченных на правом конце функций

По аналогии с предыдущим случаем приближенное решение уравнения (1) будем искать как решение следующего уравнения относительно новой неизвестной функции $v_n(x)$:

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} v_n(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} v_n(t) \ln|t-x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} v_n(t) K_{n,n}(x, t) dt = F_n(x), \quad |x| < 1, \quad (20)$$

где $K_{n,n}(x, t)$ – интерполяционный многочлен функции $K(x, t)$ степени n по обоим переменным; $F_n(x)$ – некоторая функция из класса $C[-1, 1]$ такая, что $F_n(x_k) = f(x_k)$, $x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi$, $k = \overline{0, n}$. Решения φ_n и v_n связаны равенством $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} v_n(x)$.

Отметим, что уравнение (20), как и уравнение (1), разрешимо в заданном классе. Докажем следующее утверждение.

Утверждение 2. Для $|x| < 1$ имеет место равенство

$$D_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} T_m(t) \ln|t-x| dt = \begin{cases} -\ln 2 T_0(x) - T_1(x), & m=0, \\ -\frac{\ln 2}{2} T_0(x) - T_1(x) - \frac{1}{4} T_2(x), & m=1, \\ -\frac{T_{m-1}(x)}{2(m-1)} - \frac{T_m(x)}{m} - \frac{T_{m+1}(x)}{2(m+1)}, & m \geq 2. \end{cases} \quad (21)$$

Доказательство. Умножим числитель и знаменатель подынтегральной функции на $\sqrt{1+t}$ и учтем соотношение $xT_k(x) = T_{k+1}(x) + T_{|k-1|}(x)$ [7]. В результате подынтегральная функция в равенстве (21) сводится к виду (2), откуда следует истинность данного утверждения.

Пусть снова имеет место представление (6).

Рассмотрим первый интеграл в уравнении (20). С учетом представления (6) и равенства (21) имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} v_n(t) \ln|t-x| dt = \sum_{m=0}^n c_m \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} T_m(t) \ln|t-x| dt = \sum_{m=0}^n D_m(x) c_m. \quad (22)$$

Рассмотрим второй интеграл в уравнении (20) и в качестве интерполяционного многочлена $K_{n,n}(x, t)$ выберем многочлен (4). Учитывая представление (6) и свойство ортогональности многочленов Чебышева первого рода, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} v_n(t) K_{n,n}(x, t) dt &= \sum_{m=0}^n c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) \sum_{j=0}^n k_{r,j} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1+t)}{\sqrt{1-t^2}} T_m(t) T_j(t) dt = \\ &= \sum_{m=0}^n c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) \left(k_{r,m} \omega_m + \frac{1}{2} k_{r,|m-1|} \omega_{|m-1|} \right) + \sum_{m=0}^{n-1} c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) \frac{1}{2} k_{r,m+1} \omega_{m+1} = \\ &= \sum_{m=0}^n c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) \Omega_{r,m}^*, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{r,m}^* &= k_{r,m} \omega_m + \frac{1}{2} k_{r,|m-1|} \omega_{|m-1|} + \frac{1}{2} k_{r,m+1} \omega_{m+1} \delta_{m+1}, \\ \delta_m &= \begin{cases} 1, & m = \overline{0, n} \\ 0, & m > n, \end{cases} \quad \omega_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0,5, & m > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

Собирая вместе представление (6) и разложения каждого из этих интегралов по формулам (22)–(24), из уравнения (20) имеем

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \sum_{m=0}^n c_m T_m(x) + \sum_{m=0}^n c_m L_m(x) + \sum_{m=0}^n c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) \Omega_{r,m}^* = F_n(x). \quad (25)$$

В качестве внешних узлов x в уравнении (25) выберем узлы Чебышева первого рода, а именно $x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi$, $k = \overline{0, n}$. Из уравнения (25) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n a_{k,m} c_m &= f(x_k), \quad k = \overline{0, n}, \\ a_{k,m} &= \sqrt{\frac{1+x_k}{1-x_k}} T_m(x_k) + D_m(x_k) + \sum_{r=0}^n T_r(x_k) \Omega_{r,m}^*. \end{aligned} \quad (26)$$

Решив систему (26) относительно неизвестных c_m , $m = \overline{0, n}$, найдем приближенное решение уравнения (1) по формуле

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \sum_{m=0}^n c_m T_m(x). \quad (27)$$

Предложенная схема протестирована на примере решения модельной задачи для уравнения (1) при $f(x) = (2x - 2x^2) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{2}{3} x^3 - x + (56 - 32\sqrt{3}) \frac{1}{x+2}$, $k(x, t) = \frac{4t}{(x+2)(t+2)}$. Решением уравнения (1)

в данном случае является функция $\varphi(x) = (2x - 2x^2) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Как показывают расчеты, проведенные

в среде компьютерной алгебры *Mathcad*, уже при сравнительно небольших значениях n достигается достаточно высокая точность вычисления приближенного решения.

Решая систему (26) при n , равных 5, 15 и 20, видим, что точное решение $\varphi(x)$ отличается от приближенного решения $\varphi_n(x)$, вычисленного по формуле (27), в системе точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$ не более чем на $6,8 \cdot 10^{-5}$, $1,8 \cdot 10^{-14}$ и $1,3 \cdot 10^{-14}$ соответственно.

Заключение

Построенные схемы численного решения сингулярного интегрального уравнения второго рода со слабой особенностью вида (1) в разных классах функций, в отличие от ранее известных методик [1], позволяют получить приближенное решение задачи, не прибегая к квадратурным формулам. Благодаря

этому, как показывают численные примеры, предложенные алгоритмы при небольших вычислительных затратах на достаточно грубой сетке обеспечивают высокую точность приближенного решения, ограниченную лишь вычислительной погрешностью. Доказательство сходимости приближенных решений к точным и оценка погрешностей решения являются целью другой работы.

Библиографические ссылки

1. Панасюк ВВ, Саврук МП, Назарчук ЗТ. *Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции*. Киев: Наукова думка; 1984. 344 с.
2. Шешко СМ. Численное решение одного слабосингулярного интегрального уравнения методом ортогональных многочленов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2021;3:98–103. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-3-98-103.
3. Vainikko G, Pedas A. The properties of solutions of weakly singular integral equations. *Journal of the Australian Mathematical Society. Series B, Applied Mathematics*. 1981;22(4):419–430. DOI: 10.1017/S0334270000002769.
4. Vainikko G, Uba P. A piecewise polynomial approximation to the solution of an integral equation with weakly singular kernel. *Journal of the Australian Mathematical Society. Series B, Applied Mathematics*. 1981;22(4):431–438. DOI: 10.1017/S0334270000002770.
5. Anselone PM, Krabs W. Approximate solution of weakly singular integral equations. *Journal of Integral Equations*. 1979;1(1):61–75.
6. Anselone PM. Singularity subtraction in the numerical solution of integral equations. *Journal of the Australian Mathematical Society. Series B, Applied Mathematics*. 1981;22(4):408–418. DOI: 10.1017/S0334270000002757.
7. Попов ГЯ. Об одном приближенном способе решения некоторых плоских контактных задач теории упругости. *Известия Академии наук Армянской ССР. Серия физико-математических наук*. 1961;14(3):81–96.
8. Мухелишвили НИ. *Сингулярные интегральные уравнения: граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике*. 3-е издание. Москва: Наука; 1968. 512 с.
9. Расолько ГА, Волков ВМ. Численное решение одного слабо сингулярного интегрального уравнения методом ортогональных многочленов в разных классах функций. *Дифференциальные уравнения*. 2022;58(4):545–553. DOI: 10.31857/S0374064122040100.
10. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева*. Киро СН, переводчик; Лебедев ВИ, редактор. Москва: Наука; 1983. 384 с.

References

1. Panasyuk VV, Savruk MP, Nazarchuk ZT. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravnenii v dvumernykh zadachakh difraktsii* [The method of singular integral equations in two-dimensional diffraction problems]. Kyiv: Naukova dumka; 1984. 344 p. Russian.
2. Sheshko SM. Numerical solution of a weakly singular integral equation by the method of orthogonal polynomials. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2021;3:98–103. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-3-98-103.
3. Vainikko G, Pedas A. The properties of solutions of weakly singular integral equations. *Journal of the Australian Mathematical Society. Series B, Applied Mathematics*. 1981;22(4):419–430. DOI: 10.1017/S0334270000002769.
4. Vainikko G, Uba P. A piecewise polynomial approximation to the solution of an integral equation with weakly singular kernel. *Journal of the Australian Mathematical Society. Series B, Applied Mathematics*. 1981;22(4):431–438. DOI: 10.1017/S0334270000002770.
5. Anselone PM, Krabs W. Approximate solution of weakly singular integral equations. *Journal of Integral Equations*. 1979;1(1):61–75.
6. Anselone PM. Singularity subtraction in the numerical solution of integral equations. *Journal of the Australian Mathematical Society. Series B, Applied Mathematics*. 1981;22(4):408–418. DOI: 10.1017/S0334270000002757.
7. Popov GYa. [On one approximate method for solving some plane contact problems of elasticity theory]. *Izvestiya Akademii nauk Armyanskoi SSR. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk*. 1961;14(3):81–96. Russian.
8. Muskhelishvili NI. *Singulyarnye integral'nye uravneniya: granichnye zadachi teorii funktsii i nekotorye ikh prilozheniya k matematicheskoi fizike* [Singular integral equations: boundary value problems of function theory and some of their applications to mathematical physics]. 3rd edition. Moscow: Nauka; 1968. 512 p. Russian.
9. Rasolko GA, Volkov VM. [Numerical solution of a weakly singular integral equation by the method of orthogonal polynomials in various function classes]. *Differentsial'nye uravneniya*. 2022;58(4):545–553. Russian. DOI: 10.31857/S0374064122040100.
10. Paszkowski S. *Zastosowania numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe; 1975. 481 s.
Russian edition: Paszkowski S. *Vychislitel'nye primeneniya mnogochlenov i ryadov Chebysheva*. Kiro SN, translator; Lebedev VI, editor. Moscow: Nauka; 1983. 384 p.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

УДК 539.3+004.02+004.942

МНОГОПОТОЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И КЕШИРОВАНИЕ В РАМКАХ МИКРОСЕРВИСНОЙ АРХИТЕКТУРЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Е. А. БУЙВОЛОВ¹⁾, А. А. СЕМЕНОВ¹⁾

¹⁾Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. 2-я Красноармейская, 4, 190005, г. Санкт-Петербург, Россия

Статья посвящена вопросу разработки высокопроизводительного программного обеспечения для расчета тонкостенных оболочечных конструкций, процесс деформирования которых носит существенно нелинейный характер и требует больших вычислительных ресурсов. Использована математическая модель типа Тимошенко (Миндлина – Рейснера), учитывающая геометрическую нелинейность, ортотропию материала, поперечные сдвиги и наличие ребер жесткости. Модель записана в виде функционала полной потенциальной энергии деформации и может быть применена для исследования конструкций различной геометрической формы. Для осуществления расчета использованы метод Рунге и метод Ньютона. При программной реализации показано, каким образом от сервисной архитектуры получилось перейти к эффективной микросервисной архитектуре, заменив один из недостаточно производительных Java-модулей на Python-модуль. Проведена оптимизация вычислительного алгоритма для реализации многопоточного расчета всех стадий вычисления, включая метод Ньютона. Выполнены замеры производительности расчета

Образец цитирования:

Буйволов ЕА, Семенов АА. Многопоточное программирование и кеширование в рамках микросервисной архитектуры для исследования оболочечных конструкций. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2023;2:63–79.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-63-79>
EDN: DZSBBW

For citation:

Buyvolov EA, Semenov AA. Multithreaded programming and caching within the framework of microservice architecture for the research of shell structures. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2023;2:63–79. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-63-79>
EDN: DZSBBW

Авторы:

Евгений Алексеевич Буйволов – аспирант кафедры информационных технологий строительного факультета. Научный руководитель – А. А. Семенов.
Алексей Александрович Семенов – кандидат технических наук, доцент; заведующий кафедрой информационных технологий строительного факультета.

Authors:

Evgeniy A. Buyvolov, postgraduate student at the department of computer science, faculty of civil engineering.
Alexey A. Semenov, PhD (engineering), docent; head of the department of computer science, faculty of of civil engineering.
sw.semenov@gmail.com



при различных подходах к реализации многопоточного расчета, а именно `parallelStream` и `ForkJoinPool`. Затронуто использование концепции `MapReduce` в рамках фреймворка `Java Stream API`. Таким образом, разработано эффективное микросервисное приложение, позволяющее моделировать процесс деформирования оболочечных конструкций, в том числе усиленных ребрами жесткости. Полученный в клиентской части приложения графический результат зависимости прогиба от нагрузки позволяет судить о корректности численного решения. Показана эффективность предложенного алгоритма по сравнению с подходом, реализованным в математическом пакете *Maple* (на основе анализа устойчивости пологой оболочки двоякой кривизны).

Ключевые слова: оболочки; устойчивость; микросервисная архитектура; многопоточное программирование; Python; Vue.js; *Maple*.

MULTITHREADED PROGRAMMING AND CACHING WITHIN THE FRAMEWORK OF MICROSERVICE ARCHITECTURE FOR THE RESEARCH OF SHELL STRUCTURES

E. A. BUYVOLOV^a, A. A. SEMENOV^a

^a*Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering,
4 2nd Krasnoarmeiskaya Street, Saint Petersburg 190005, Russia
Corresponding author: A. A. Semenov (sw.semenov@gmail.com)*

This work is devoted to the development of high-performance software for the calculation of thin-walled shell structures. The process of their deformation is essentially non-linear and requires large computing resources. The study is based on a mathematical model of the Timoshenko (Mindlin – Reissner) type, which takes into account geometric non-linearity, material orthotropy, transverse shears and the presence of stiffeners. The model is written in the form of a functional of the total potential energy of deformation, and can be used to study the structures of various geometric shapes. To carry out the calculation, we use the Ritz method and Newton’s method. In software implementation, it is shown how it is possible to move from a service architecture to an efficient microservice architecture, replacing one of the insufficiently performing Java modules with a Python module. Optimisation is carried out for the implementation of multithreaded calculation of all stages of calculation, including Newton’s method. Measurements of the performance of the calculation are obtained for various approaches to the implementation of multithreaded calculation, namely, `parallelStream` and `ForkJoinPool`. The use of the `MapReduce` concept within the framework of `Java Stream API` is considered. Thus, an effective microservice application has been developed that allows simulating the process of deformation of shell structures, including those reinforced with stiffeners. The graphical result of the dependence of the deflection on the load obtained in the client part of the application makes it possible to judge the correctness of the numerical solution. The efficiency of the proposed algorithm is shown by comparing it with the implementation in the *Maple* mathematical package. The comparison is made on the basis of an analysis of the buckling of a shallow shell of double curvature.

Keywords: shells; buckling; microservice architecture; multithreaded programming; Python; Vue.js; *Maple*.

Введение

Тонкостенные конструкции активно применяются во многих отраслях промышленности, в частности в авиа-, судо- и ракетостроении, строительстве и других сферах деятельности [1–4].

Тонкостенность таких конструкций позволяет существенно снизить их вес и материалоемкость, при этом они обладают достаточно высокой жесткостью, особенно при усилении ребрами [5–7]. Однако процесс деформирования тонкостенных оболочек носит существенно нелинейный характер, что может приводить к потере устойчивости, когда при малом изменении нагрузки происходит резкое увеличение прогиба. В результате образуются вмятины, конструкция «проваливается», может произойти разрушение материала.

Важное значение для обеспечения безопасной работы конструкций имеет компьютерное моделирование процесса их деформирования в целях выявления опасных режимов работы. При его проведении необходимо учитывать геометрическую нелинейность, наличие ребер жесткости, возможность поперечных сдвигов, а в ряде случаев – особенности деформирования материала (ортотропию, физическую нелинейность, ползучесть и др.) [8–11].

Актуальные исследования, связанные с анализом устойчивости оболочечных конструкций, представлены, например, в публикациях [12–14]. Однако таких работ сравнительно мало. Большинство исследований в последнее десятилетие посвящены расчетам замкнутых цилиндрических оболочек, осуществляемым в конечно-элементных программных комплексах общего назначения, таких как *Ansys*, *Abaqus*, *Nastran* и др. Без сомнения, эти комплексы эффективны для быстрого решения сложных инженерных задач, но в меньшей степени пригодны для детальных научных исследований.

При проведении вычислительного эксперимента с учетом множества факторов и соблюдением требуемой точности формируются нелинейные системы уравнений, решение которых вызывает существенные трудности. Использование современных технологий разработки программного обеспечения и поиск новых алгоритмов решения данной задачи являются актуальной проблемой.

В настоящем исследовании для таких расчетов разработано микросервисное приложение с многопоточным программированием и кешированием, показаны его реализация и эффективность по сравнению с более «классическим» вариантом расчета.

Многопоточное программирование находит применение не только в задачах алгоритмизации, прикладной математики и программирования, но и при автоматизации промышленности [15], а также в физических приборах, например приборах регистрации космических лучей [16]. Идея разделения задачи была совмещена с сетевыми технологиями: в данный момент существует огромное количество облачных решений, использующих вычислительные узлы и балансировку нагрузки между ними [17].

Эффективность многопоточных приложений изучена и подтверждена в тех случаях, когда время на разделение задачи значительно меньше времени выполнения подзадачи [18; 19].

Материалы и методы исследования

Математическая модель. Будем рассматривать математическую модель деформирования оболочечной конструкции, основанную на гипотезах Тимошенко (Миндлина – Рейснера). Модель учитывает геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги, ортотропию материала и наличие ребер жесткости. Она состоит из геометрических и физических соотношений, а также функционала полной потенциальной энергии деформации.

Общий вид одного из вариантов оболочечных конструкций (пологая оболочка двоякой кривизны, квадратная в плане) приведен на рис. 1.

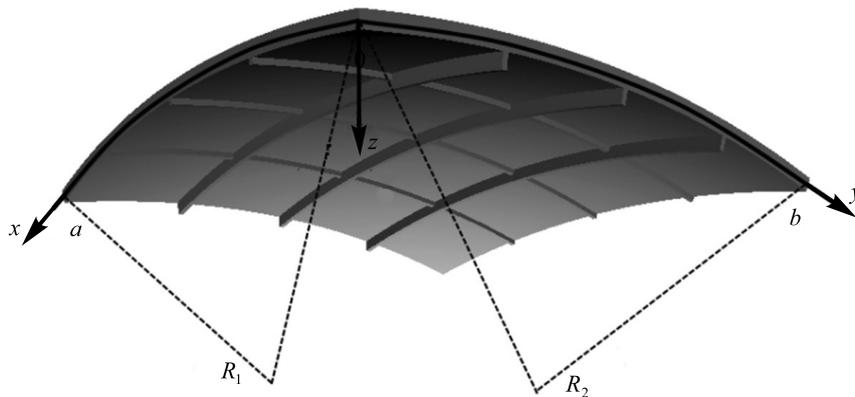


Рис. 1. Общий вид пологой оболочки двоякой кривизны, усиленной ребрами жесткости

Fig. 1. General view of a shallow shell of double curvature, stiffened by ribs

Геометрические соотношения. Данный вид соотношений связывает деформации ε_x , ε_y , γ_{xy} и перемещения U , V , W , Ψ_x , Ψ_y . Для срединной поверхности конструкции имеем [20]

$$\varepsilon_x = \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} V - k_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2, \quad \varepsilon_y = \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U - k_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} V - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} U - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} V + \theta_1 \theta_2,$$

$$k_x = \frac{1}{R_1}, \quad k_y = \frac{1}{R_2}, \quad \theta_1 = -\left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right), \quad \theta_2 = -\left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V \right).$$

Геометрия конструкции задается через параметры Ламе и главные радиусы кривизны, которые для полой оболочки двойкой кривизны, квадратной в плане, равны следующим величинам:

$$A = 1, B = 1, R_1 = \text{const}, R_2 = \text{const}.$$

Деформации слоя, отстоящего от срединной поверхности на расстояние z , выражаются соотношениями

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\chi_1, \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z\chi_2, \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z\chi_{12},$$

где функции изменения кривизн χ_1, χ_2 и кручения χ_{12} принимают вид [20]

$$\chi_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_y, \chi_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_x,$$

$$\chi_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \Psi_y + \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_x \right) \right).$$

Физические соотношения. Данный вид соотношений связывает напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ и деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$. Для упругого ортотропного материала оболочки имеем [20]

$$\sigma_x = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} (\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y + z(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2)), \sigma_y = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} (\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1)),$$

$$\tau_{xy} = G_{12} (\gamma_{xy} + 2z\chi_{12}), \tau_{xz} = G_{13} k f(z) (\Psi_x - \theta_1), \tau_{yz} = G_{23} k f(z) (\Psi_y - \theta_2).$$

Усилия и моменты. Интегрируя напряжения по z в пределах от $-\frac{h}{2}$ до $\frac{h}{2}$ (т. е. в пределах обшивки), получаем усилия, моменты и перерезывающие силы, приходящиеся на единицу длины сечения и приведенные к координатной поверхности [20]:

$$N_x^0 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \frac{E_1 h}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} (\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y), N_y^0 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz = \frac{E_2 h}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} (\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x), N_{xy}^0 = N_{yx}^0 = G_{12} h \gamma_{xy},$$

$$M_x^0 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \frac{h^3}{12} (\chi_1 + \mu_{21}\chi_2), M_y^0 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \frac{h^3}{12} (\chi_2 + \mu_{12}\chi_1),$$

$$M_{xy}^0 = M_{yx}^0 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = G_{12} \frac{h^3}{6} \chi_{12},$$

$$Q_x^0 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = G_{13} k h (\Psi_x - \theta_1), Q_y^0 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz = G_{23} k h (\Psi_y - \theta_2),$$

где N_x^0, N_y^0 – нормальные усилия; N_{xy}^0, N_{yx}^0 – сдвиговые усилия; M_x^0, M_y^0 – изгибающие моменты; M_{xy}^0, M_{yx}^0 – крутящие моменты; Q_x^0, Q_y^0 – перерезывающие силы.

Для получения усилий, моментов и перерезывающих сил, действующих в ребрах, необходимо произвести аналогичное интегрирование, но уже в пределах от $\frac{h}{2}$ до $\frac{h}{2} + H$.

Функция H задает распределение ребер по оболочке с помощью единичных столбчатых функций. Расчет жесткостных характеристик ребер подробно рассматривается в работе [20] и здесь в силу громоздкости не приводится. Отметим лишь, что наличие ребер жесткости на порядок повышает сложность вычислений.

Функционал полной потенциальной энергии деформации. Функционал полной потенциальной энергии деформации оболочки, представляющий собой сумму работ внутренних и внешних сил, имеет вид

$$E_s = E_p^0 + E_p^R - A, \quad (1)$$

$$E_p^0 = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[N_x^0 \varepsilon_x + N_y^0 \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy}^0 + N_{yx}^0) \gamma_{xy} + M_x^0 \chi_1 + M_y^0 \chi_2 + (M_{xy}^0 + M_{yx}^0) \chi_{12} + \right. \\ \left. + Q_x^0 (\Psi_x - \theta_1) + Q_y^0 (\Psi_y - \theta_2) \right] AB dx dy,$$

$$E_p^R = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[N_x^R \varepsilon_x + N_y^R \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy}^R + N_{yx}^R) \gamma_{xy} + M_x^R \chi_1 + M_y^R \chi_2 + (M_{xy}^R + M_{yx}^R) \chi_{12} + \right. \\ \left. + Q_x^R (\Psi_x - \theta_1) + Q_y^R (\Psi_y - \theta_2) \right] AB dx dy,$$

$$A = \int_{a_1}^a \int_0^b (P_x U + P_y V + qW) AB dx dy,$$

где E_p^0 – потенциальная энергия обшивки; E_p^R – потенциальная энергия ребер жесткости; A – работа внешних сил.

Алгоритм. Для исследования оболочечных конструкций предлагается использовать алгоритм, основанный на методе Рунца и методе Ньютона.

Метод Рунца. Данный метод применяется к функционалу для сведения вариационной задачи к системе нелинейных алгебраических уравнений. Для этого искомые функции перемещений представляются в виде

$$U = U(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} U_{kl} X_1^k Y_1^l, \quad V = V(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} V_{kl} X_2^k Y_2^l, \quad W = W(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} W_{kl} X_3^k Y_3^l, \\ \Psi_x = \Psi_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \Psi_{x,kl} X_4^k Y_4^l, \quad \Psi_y = \Psi_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \Psi_{y,kl} X_5^k Y_5^l, \quad (2)$$

где $U_{kl}, V_{kl}, W_{kl}, \Psi_{x,kl}, \Psi_{y,kl}$ – неизвестные числовые параметры; $X_1^k - X_5^k, Y_1^l - Y_5^l$ – известные аппроксимирующие функции аргументов x и y , удовлетворяющие заданным краевым условиям на контуре оболочки; N – количество членов разложения. Подставляя функции (2) в функционал (1), находим производные по неизвестным числовым параметрам $U_{kl}, V_{kl}, W_{kl}, \Psi_{x,kl}, \Psi_{y,kl}$. Таким образом, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений. Для ее решения воспользуемся многомерным методом Ньютона.

Метод Ньютона. Данный метод считается классическим методом решения задач оптимизации. В многомерном случае коэффициенты $U_{kl}, V_{kl}, W_{kl}, \Psi_{x,kl}, \Psi_{y,kl}$ являются корнями, которые определяются при заданной точности для выбранного значения нагрузки. Рассчитанные на предыдущей стадии значения коэффициентов будут использованы для следующего значения нагрузки.

Таким образом, вектор неизвестных числовых параметров вычисляется на каждом шаге нагружения. Используя формулы (2) и найденные значения числовых параметров, можно получить значения перемещений в каждой точке конструкции.

Алгоритм вычисления искомого вектора в соответствии с методом Ньютона может быть записан в виде [21]

$$X_i = X_{i-1} - H^{-1}(X_{i-1}) \nabla E_s(X_{i-1}), \quad X = (U_{kl}, V_{kl}, W_{kl}, \Psi_{x,kl}, \Psi_{y,kl})^T, \quad k, l = 1, \dots, \sqrt{N},$$

где X_i – значение искомого вектора на текущей итерации; X_{i-1} – значение искомого вектора на предыдущей итерации; H^{-1} – обратная матрица Гессе для E_s ; ∇E_s – вектор частных производных (градиент) E_s .

Технологии разработки программного обеспечения. Далее рассмотрим технологии, которые будут использованы при реализации программного обеспечения.

Микросервисная архитектура. Данный вариант сервисно ориентированной архитектуры, подразумевает отказ от единой структуры [22]. Сервисно ориентированная архитектура состоит в формировании модулей приложения для решения бизнес-задач, при этом модули масштабируемы и независимы друг от друга.

Микросервисная архитектура обеспечивает меньшие потери при неисправности одного из модулей, а также простоту масштабирования. С другой стороны, возрастают сетевые издержки и сложность тестирования. Использование докеризации и балансировщика нагрузки позволяет распределить нагрузку между компьютерами вычислительного кластера.

Кеширование. При решении задач аппроксимации и математического моделирования часто базисные функции можно выбрать таким образом, чтобы при упрощении итогового функционала или другого уравнения, которое включает в себя функциональные зависимости, состоящие в том числе из аппроксимирующих функций, большая часть итераций сводилась к использованию уже рассчитанных значений.

Одним из примеров кеширования является использование хеш-таблиц типа «ключ – значение». В языке программирования Java подобные таблицы реализуются в том числе через класс потокобезопасной коллекции `ConcurrentHashMap`.

Многопоточное программирование. Одним из способов повышения скорости расчета является выполнение вычислений параллельно на нескольких компьютерах. В рамках одного компьютера повышение скорости расчета достигается за счет параллельных вычислений на разных ядрах процессора. Существует несколько стратегий параллельных вычислений. В рамках данной статьи рассматривается подход *work stealing*. Он заключается в разделении задачи на минимальные подзадачи, которые разбиваются между возможным в рамках процессора количеством потоков. При освобождении поток забирает следующую подзадачу.

В языке программирования Java данный подход реализуется за счет использования фреймворка `Fork/Join`. Задача разбивается (`fork`), пока ее сложность (объем) не опустится ниже определенного порога, после чего происходит выполнение подзадач и объединение результатов (`join`). Альтернативным способом реализации (в функциональном стиле) многопоточного расчета является использование метода `parallelStream` из интерфейса `Java Stream API`, который также по умолчанию создает потоки `ForkJoinPool`. Для обеспечения максимального быстродействия имеет смысл разбивать входные данные таким образом, чтобы издержки на создание объектов не были слишком высокими. В крайнем случае можно разбить входные данные на количество ядер процессора, обеспечив таким образом минимальные издержки на создание объектов и дальнейшую работу сборщика мусора. Однако подобный подход может привести к простоям ядер процессора.

Алгоритмизация и программирование

Реализация микросервисной архитектуры. Разработанное приложение (ему присвоено название *JPV-math*) состоит из трех микросервисов:

- клиентского приложения, реализованного с использованием программной платформы `Node.js` и фреймворков `Vue.js` и `Vuetify`;
- сервиса прокси, логики и вычисления основных математических задач, реализованного с помощью фреймворка `Java Spring Cloud`;
- вспомогательного сервиса, осуществляющего раскрытие скобок и реализованного с помощью фреймворка `Python Flask`.

Сервисы обмениваются данными через HTTP-запросы. Каждый сервис запускается на отдельном порте. Приложение может быть развернуто с использованием подхода *CI/CD* (*continuous integration / continuous delivery*) на различных устройствах. Работа с `Python`-сервисом и `Java`-сервисом ведется в рамках одного проекта в среде `IntelliJ IDEA`. Код приложения размещен на веб-сервисе *GitHub*¹. Архитектура приложения представлена на рис. 2.

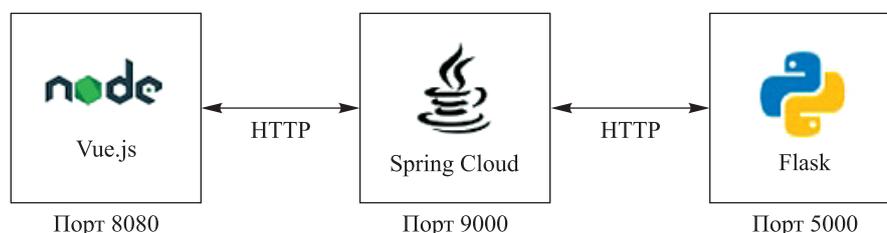


Рис. 2. Архитектура приложения *JPV-math*

Fig. 2. *JPV-math* application architecture

Java-сервис. Данный сервис использует подход *REST* (*representational state transfer*). Таким образом, для моделирования процесса деформирования оболочечной конструкции необходимо передать данные (входные параметры) из слоя представления, который в этом случае заменяет сервис веб-клиента, на слой *DTO*, далее по предоставленному *API* вызывается метод моделирования, задействующий соответствующий сервис. При разработке приложения применялись блочное тестирование (*unit testing*) и методология *test driven development*.

¹*JPV-math* (backend) [Electronic resource]. URL: <https://github.com/ereborDeveloper/math-modeling> (date of access: 11.02.2023); *JPV-math* (frontend) [Electronic resource]. URL: <https://github.com/ereborDeveloper/math-modeling-gui> (date of access: 11.02.2023).

При взятии производной и численном интегрировании используется библиотека символьной алгебры Symja². Алгоритм моделирования представлен на рис. 3.

В основе высокоэффективного расчета лежит представление значений функций, результатов интегрирования и дифференцирования в виде пар «ключ – значение». Таким образом, исходная строка на рис. 4, а, приводится к объекту на рис. 4, б. Основным условием правильного преобразования являются раскрытые скобки (аргументы игнорируются).

Реализованный алгоритм преобразования в виде псевдокода представлен на рис. 5. Алгоритм получения объекта слагаемых с коэффициентами использует алгоритм разбиения строки с игнорированием знаков суммирования и вычитания внутри скобок, который также реализован на основе последовательного перебора символов в строке. Таким образом, после описанного преобразования в объекте не остается повторов по ключу.

При преобразовании исходного функционала изначально выполнялись раскрытие скобок и компоновка слагаемых для дальнейшей подстановки математических формул. Однако Java-сервис не удалось оптимизировать достаточным образом, чтобы раскрытие скобок функционала происходило в допустимое время. Было принято решение использовать Python-сервис с библиотекой SymEngine³, который обеспечил необходимое быстродействие.

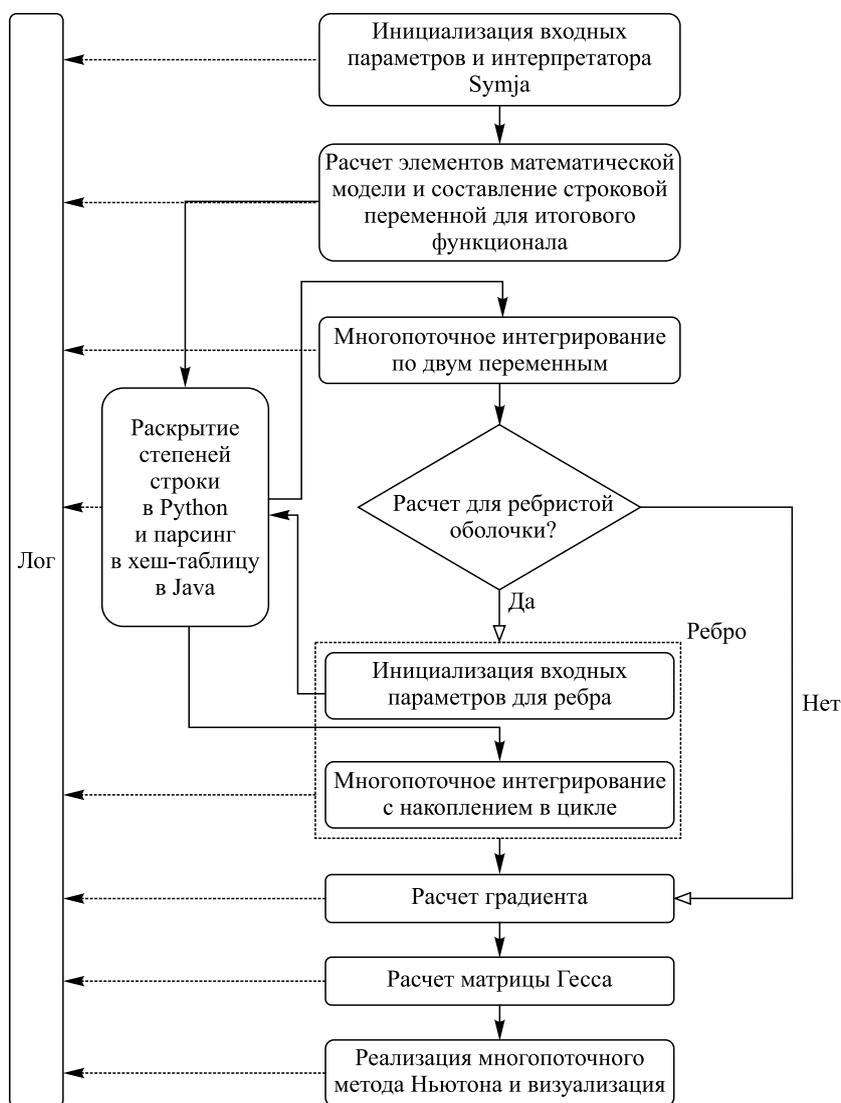


Рис. 3. Алгоритм моделирования
Fig. 3. Simulation algorithm

²Symja library – Java symbolic math system for Android NCalc calculator [Electronic resource]. URL: https://github.com/axkr/symja_android_library (date of access: 11.02.2023).

³SymEngine [Electronic resource]. URL: <https://github.com/symengine/symengine> (date of access: 11.02.2023).

a/a $-2.0*u11 + 3.0*v11 -$ $- 4.0*psi11 + 3.0*u11*v12 -$ $- u11*0.7*v12 + 0.5$	b/b <pre style="font-family: monospace;">{ "u11": -2.0, "v11": 3.0, "psi11": -4.0, "u11*v12": 2.3, "number": 0.5 }</pre>
--	--

Рис. 4. Строка до преобразования (а) и объект после преобразования (б)

Fig. 4. String before conversion (a) and object after conversion (b)

```

Возвращает Объект<Ключ, Значение> методПолученияСлагаемыхИзСтроки(строка)
{
    вывод = новый Объект<Ключ, Значение>;
    сомножители = новый Список<Строка>;
    буфер = "";
    начальныйИндекс = 0;
    конечныйИндекс = строка.длина;
    символКаретки = строка(0);
    ...
    // Обработка краевых случаев
    ...
    Для(целого i = 1; i < строка.длина; i++)
    {
        Если(символКаретки == символ разбиения){
            буфер = строка.подстрока(начальныйИндекс, i);
            сомножители = разделитьСтрокуПоСимволуИПропуститьАргументы(буфер, '*');
            произведение = Число(символКаретки.конкатенация("1.0"));
            ДляКаждого(множитель в сомножители)
            {
                Если(множитель является числом)
                {
                    произведение *= множитель;
                }
            }
            сомножители.удалитьВсеЧисла();
            сомножители.отсортироватьПоАлфавиту();
            ключ = сомножители.записатьЧерезСимвол('*');
            Если(ключ пустой)
            {
                ключ = "number";
            }
            Если(вывод.содержитКлюч(ключ))
            {
                вывод.перезаписатьЗначение(ключ, вывод.значениеПоКлючу(ключ) * произведение);
            }
            Иначе
            {
                вывод.добавить(ключ, произведение);
            }
        }
    }
    вернуть вывод;
}
    
```

Рис. 5. Алгоритм парсинга строки к объекту типа «ключ – значение»

Fig. 5. Algorithm for parsing a string to a key – value object

Python-сервис. Данный сервис представляет собой небольшое Flask-приложение, использующее библиотеку SymEngine для раскрытия скобок. Помимо метода раскрытия скобок, в Python-сервисе также был реализован алгоритм, представленный на рис. 5, но скорость его выполнения оказалась ниже, чем в Java-сервисе. Однако Python-сервис на порядок быстрее Java-сервиса при раскрытии скобок, что подтверждает необходимость выбора инструмента под задачу и преимущества использования микро-сервисного подхода.

Реализация кеширования. Применяя способ хранения математических строк в виде, представленном на рис. 4, б, можно реализовать кеширование результатов интегрирования по такому же принципу: сохранять значения посчитанных интегралов и повторно использовать их вместо нового расчета, получая значение по ключу. Алгоритм кеширования при взятии интеграла заключается в применении потокобезопасной неблокируемой коллекции пар «ключ – значение». Подобный подход при сложности обращения к значению по ключу $O(1)$ позволяет существенно ускорить вычисления даже без использования внешнего хранилища за счет интегрирования только сомножителей, зависящих от переменной интегрирования.

Например, при вычислении интеграла для объекта, приведенного на рис. 4, б, по переменной `u11` в пределах от 0 до 2 получим объект, представленный на рис. 6.

```
{
    "v11": 6.0,
    "psiy11": -8.0,
    "v12": 4.6,
    "number": -3.0
}
```

Рис. 6. Объект после интегрирования

Fig. 6. Object after integration

При реальном расчете в качестве базисных функций в аппроксимации применяются синусы и косинусы с подобными аргументами. Стоит отметить, что при $N = 2$ время выполнения интегрирования с использованием кеширования составило 1 с, а без использования кеширования – 30 с. Характеристики компьютера, на котором производился расчет, будут представлены далее. При увеличении числа N интегрирование без использования кеширования становится крайне неэффективным.

Реализация многопоточного расчета. В случае применения многопоточного расчета необходимо тестировать скорость выполнения задач. Для различных стратегий в зависимости от задачи и способа ее решения эффективность будет различной.

Основная вычислительная сложность в методе Ньютона заключается в символьной подстановке получаемых на каждой итерации значений вместо переменных в градиент и матрицу Гессе для получения численных значений. В целях повышения скорости вычислений используется параллельная подстановка значений.

Оптимизация проводилась последовательно. В методе Ньютона первым оптимизационным решением является многопоточная подстановка значений интеграла в точку: последовательно берется значение градиента, и уже это значение в несколько потоков суммируется по переменным и значению этих переменных в хеш-таблице значения градиента.

Были рассмотрены следующие варианты расчета градиента:

- 1) в цикле (без многопоточности);
- 2) с использованием метода `parallelStream` из интерфейса `Java Stream API`;
- 3) с использованием подхода `ForkJoinPool`;
- 4) с разбиением исходного объекта на количество подобъектов, равное количеству ядер процессора.

Параметры оболочки фиксированные (подробнее см. в разделе «Результаты и их обсуждение»). Расчет выполнен для $N = 2$. Максимальное число итераций в методе Ньютона составляет 300, шаг нагрузки – 0,1 МПа, точность – 10^{-4} . Результаты замеров приведены в табл. 1.

Таблица 1

Время выполнения цикла в методе Ньютона

Table 1

Cycle execution time in Newton's method

Вариант расчета	Время выполнения, с
Обычный цикл	28
<code>parallelStream</code>	22
<code>ForkJoinPool</code>	36
Разбиение	18

Использование метода `parallelStream` и конструкции `forEach` позволило дополнительно увеличить скорость перебора при вычислении градиента (15 с) по сравнению с последовательным пере-

бором градиента и разбиением (18 с). Применение аналогичного алгоритма при расчете матрицы Гессе также показало свою эффективность (12 с при использовании схемы «parallelStream.forEach + parallelStream.forEach + разбиение» против 15 с при использовании обычных циклов).

После данных преобразований нахождение прогиба конструкции W уже не является ресурсозатратной задачей. Способ разбиения по количеству ядер процессора был выбран и для многопоточного интегрирования.

Результаты и их обсуждение

Эффективность предложенного подхода продемонстрируем на примере расчета полой оболочки двойкой кривизны, квадратной в плане.

Расчет напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций является вычислительно сложной задачей. В итоговый функционал для ребристой полой оболочки двойкой кривизны в зависимости от точности аппроксимации функций (2) входит минимум 51 слагаемое. При увеличении точности аппроксимации количество слагаемых в функционале возрастает экспоненциально, и при наличии 5 неизвестных функций, состоящих из 25 слагаемых каждая (т. е. при $N = 25$), общее количество слагаемых в функционале после упрощения составляет более 1,5 млн.

Будем рассматривать стальные конструкции, находящиеся под действием внешней равномерно распределенной поперечной нагрузки q (т. е. компоненты нагружения $P_x = P_y = 0$) и шарнирно-неподвижно закрепленные по контуру (граничные условия $U = V = W = M_x = \Psi_y = 0$ при $x = 0, x = a$ и $U = V = W = \Psi_x = M_y = 0$ при $y = 0, y = b$). Для данного вида закрепления с учетом симметрии конструкции в формулах (2) можно взять следующие аппроксимирующие функции:

$$U = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} U_{kl} \sin\left(2k\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left((2l-1)\pi \frac{y}{b}\right), V = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} V_{kl} \sin\left((2k-1)\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(2l\pi \frac{y}{b}\right),$$

$$W = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} W_{kl} \sin\left((2k-1)\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left((2l-1)\pi \frac{y}{b}\right),$$

$$\Psi_x = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \Psi_{x,kl} \cos\left((2k-1)\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left((2l-1)\pi \frac{y}{b}\right),$$

$$\Psi_y = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \Psi_{y,kl} \sin\left((2k-1)\pi \frac{x}{a}\right) \cos\left((2l-1)\pi \frac{y}{b}\right).$$

При наличии ребер жесткости используется ортогональная сетка ребер, равномерно распределенных по конструкции. Ширина ребер $r^j = r^i = 2h$, высота ребер $h^j = h^i = 3h$. Расстояние между ребрами обозначим через x_r и будем полагать, что крайние ребра находятся на расстоянии $0,5x_r$ от края конструкции. Входные параметры представлены в табл. 2.

Таблица 2

Входные параметры

Table 2

Input parameters

Параметры	Значение	Расшифровка
$E_1 = E_2$, МПа	210 000	Модули упругости материала
$\mu_{12} = \mu_{21}$	0,3	Коэффициенты Пуассона
G , МПа	80 769,23	Модуль сдвига материала
a , м	5,4	Линейный размер вдоль оси x
b , м	5,4	Линейный размер вдоль оси y
$R_1 = R_2$, м	20,25	Радиусы кривизны
h , м	0,09	Толщина
N	1–25	Количество слагаемых в методе Рунге
Δq , МПа	0,01	Шаг нагрузки

Окончание табл. 2
Ending table 2

Параметры	Значение	Расшифровка
q_{\max} , МПа	3,3 (без ребер) 4,3 (с ребрами)	Значение нагрузки, до которой выполняется расчет
Steps	50	Максимальное количество итераций в цикле метода Ньютона
ε	10^{-6}	Точность, при достижении которой в методе Ньютона происходит переход к следующей точке

Устойчивость пологой оболочки двоякой кривизны. В качестве критерия потери устойчивости оболочек будем использовать критерий Ляпунова: нагрузка, при которой малому изменению нагрузки соответствует существенное изменение прогиба, считается критической нагрузкой.

В табл. 3 представлены значения критических нагрузок потери устойчивости q_{cr} для рассматриваемой конструкции без ребер и с сеткой ребер размером 1×1 , а также значения прогиба конструкции W_c в центральной точке $\left(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}\right)$ и значения прогиба конструкции W_4 в четвертой части $\left(x = \frac{a}{4}, y = \frac{b}{4}\right)$ в момент достижения критической нагрузки, полученные с использованием разработанного микросервисного приложения *JPV-math* и математического пакета *Maple*.

Для пакета *Maple* значения при $\sqrt{N} \geq 4$ не приводятся в связи со слишком долгим временем выполнения расчета.

Таблица 3

Результаты расчета для оболочки без ребер и с сеткой ребер размером 1×1

Table 3

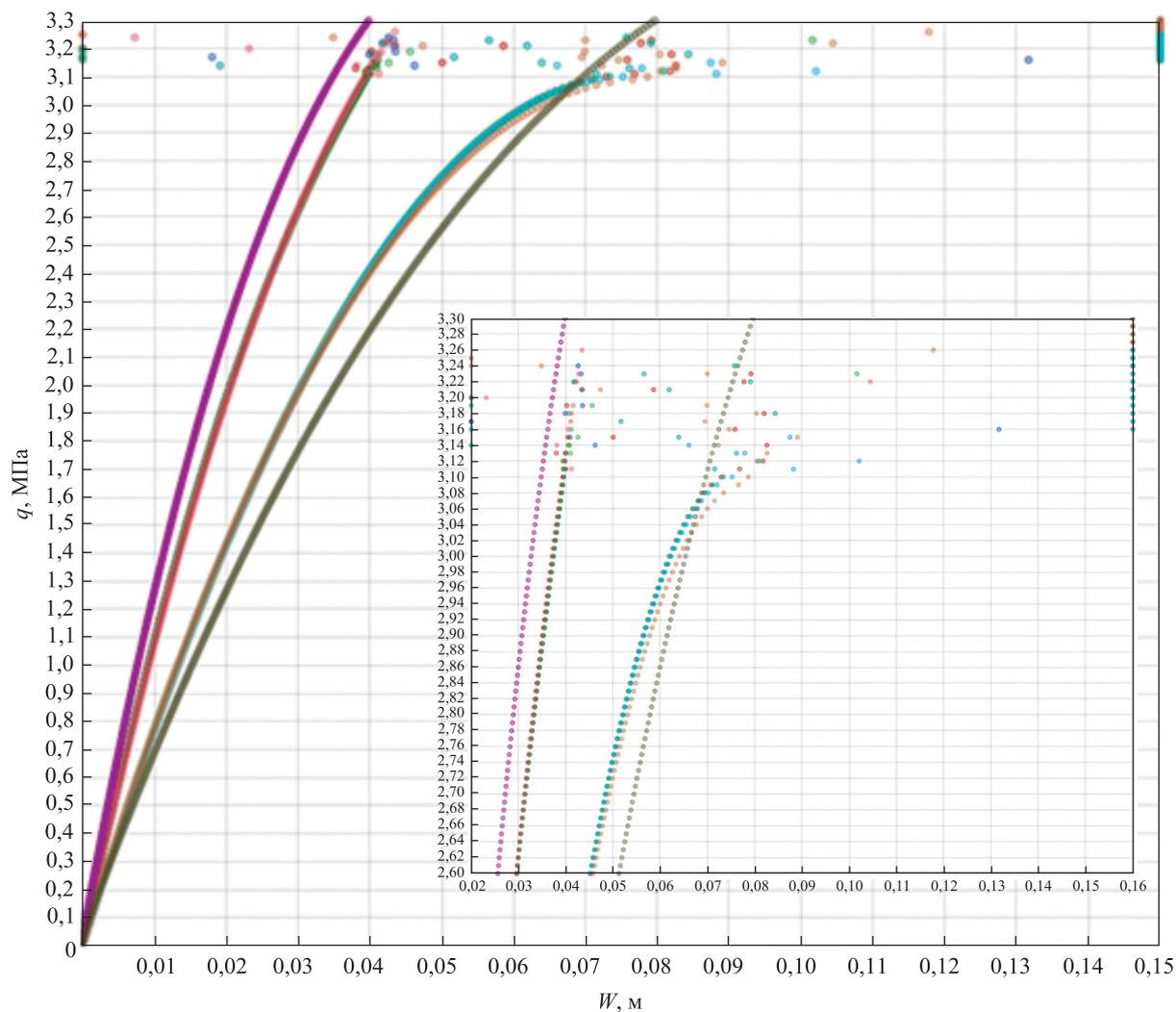
Calculation results for a shell without ribs and with stiffeners grid 1×1

\sqrt{N}	Maple			JPV-math		
	q_{cr} , МПа	W_c , м	W_4 , м	q_{cr} , МПа	W_c , м	W_4 , м
<i>Расчет для оболочки без ребер</i>						
1	3,31	0,106	0,054	3,30	0,104	0,052
2	3,10	0,079	0,040	3,10	0,078	0,039
3	3,10	0,076	0,040	3,10	0,075	0,039
4	–	–	–	3,10	0,073	0,040
5	–	–	–	3,10	0,072	0,040
<i>Расчет для оболочки с сеткой ребер размером 1×1</i>						
1	–	–	–	–	–	–
2	4,80	0,1396	0,0932	4,79	0,1387	0,0905
3	4,47	0,1325	0,0831	4,45	0,1317	0,0827
4	–	–	–	4,36	0,1252	0,0758
5	–	–	–	4,33	0,1264	0,0757

Графики зависимости прогиба W_c и W_4 от нагрузки q представлены на рис. 7 и 8. Для удобства анализа данных также показан укрупненный фрагмент, соответствующий потере устойчивости.

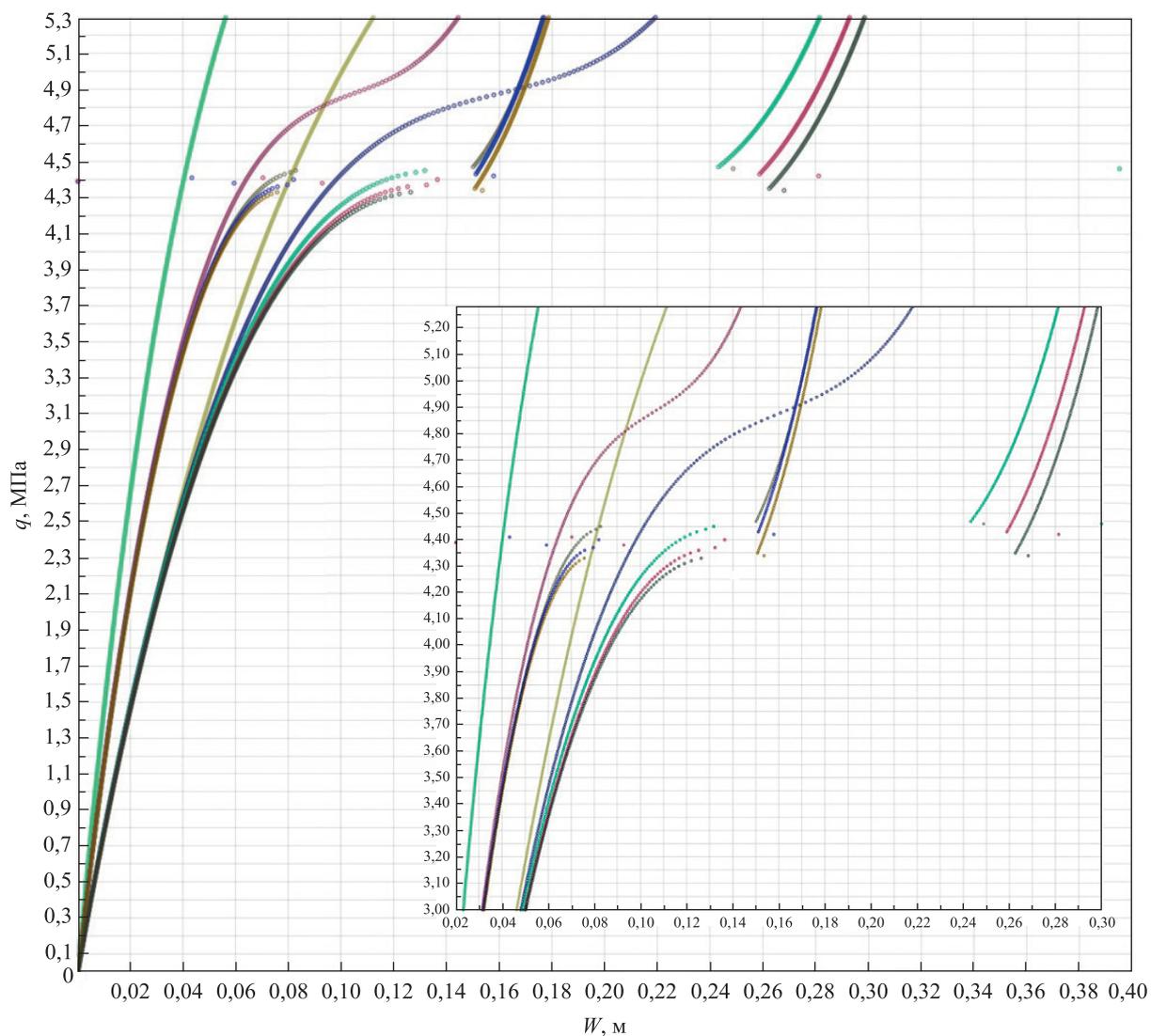
Как показывают результаты расчетов, уже при $\sqrt{N} = 3$ и $\sqrt{N} = 4$ вид кривых и значения критических нагрузок становятся близки, что говорит о сходимости метода Ритца. Тем не менее для других видов конструкций может понадобиться большее, чем здесь, количество неизвестных коэффициентов в формулах (2), что требует отдельного исследования.

Для рассмотренных конструкций наблюдается общая потеря устойчивости без образования локальных вмятин. Кроме того, добавление двух ортогонально расположенных ребер жесткости увеличивает значение критической нагрузки на 39 %. В данном случае такой существенный эффект объясняется достаточно высокой жесткостью обшивки и массивностью подкрепляющих элементов.



- | | |
|--|--|
| $\bullet \sqrt{N}=1 \left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}\right)$ | $\bullet \sqrt{N}=1 \left(x=\frac{a}{4}, y=\frac{b}{4}\right)$ |
| $\bullet \sqrt{N}=2 \left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}\right)$ | $\bullet \sqrt{N}=2 \left(x=\frac{a}{4}, y=\frac{b}{4}\right)$ |
| $\bullet \sqrt{N}=3 \left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}\right)$ | $\bullet \sqrt{N}=3 \left(x=\frac{a}{4}, y=\frac{b}{4}\right)$ |
| $\bullet \sqrt{N}=4 \left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}\right)$ | $\bullet \sqrt{N}=4 \left(x=\frac{a}{4}, y=\frac{b}{4}\right)$ |
| $\bullet \sqrt{N}=5 \left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}\right)$ | $\bullet \sqrt{N}=5 \left(x=\frac{a}{4}, y=\frac{b}{4}\right)$ |

Рис. 7. График зависимости прогиба от нагрузки для конструкции без ребер
 Fig. 7. Graph of deflection versus load for a structure without ribs



- | | |
|---|---|
| \bullet $\sqrt{N}=1$ ($x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$) | \bullet $\sqrt{N}=1$ ($x = \frac{a}{4}, y = \frac{b}{4}$) |
| \bullet $\sqrt{N}=2$ ($x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$) | \bullet $\sqrt{N}=2$ ($x = \frac{a}{4}, y = \frac{b}{4}$) |
| \bullet $\sqrt{N}=3$ ($x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$) | \bullet $\sqrt{N}=3$ ($x = \frac{a}{4}, y = \frac{b}{4}$) |
| \bullet $\sqrt{N}=4$ ($x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$) | \bullet $\sqrt{N}=4$ ($x = \frac{a}{4}, y = \frac{b}{4}$) |
| \bullet $\sqrt{N}=5$ ($x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$) | \bullet $\sqrt{N}=5$ ($x = \frac{a}{4}, y = \frac{b}{4}$) |

Рис. 8. График зависимости прогиба от нагрузки для конструкции с ребрами
Fig. 8. Graph of deflection versus load for a structure with ribs

Сравнение скорости вычислений. В качестве тестового стенда использовался компьютер, характеристики и результаты бенчмарка которого (на основе сайта *UserBenchmark*) представлены в табл. 4.

Таблица 4

Характеристики и результаты бенчмарка тестового стенда

Table 4

Characteristics and results of the benchmark test bench

Устройство	Торговая марка и основные характеристики	Бенчмарк, %
CPU	AMD Ryzen 5, модель 2600	79,5
GPU	AMD Radeon, модель RX550	13,9
SSD	Intel 660p, интерфейс NVMe PCIe, формфактор M.2, объем 512 Гб	132,4
	HP EX900, интерфейс NVMe PCIe, формфактор M.2, объем 500 Гб	123,1
HDD	WD Blue, объем 1 Тб	83,2
RAM	G. SKILL Ripjaws V, тип DDR4, частота 3200 ГГц, тайминг C16, объем 16 Гб (2×8 Гб)	100,6

Примечание. CPU – процессор; GPU – графический процессор; SSD – твердотельный накопитель; HDD – накопитель на жестких магнитных дисках; RAM – оперативная память.

Первым вычислительным экспериментом является сравнение результатов и скорости вычислений при использовании приложения *JPV-math* и пакета *Maple*. Для этого проводятся замеры времени выполнения расчета для одной и той же оболочки с теми же параметрами в пакете *Maple* и приложении *JPV-math*. Для повышения информативности полученных результатов используется цветовая карта (табл. 5).

Таблица 5

Замеры производительности этапов вычисления в пакете Maple и приложении JPV-math

Table 5

Performance measurements of calculation steps in the Maple package and JPV-math application

\sqrt{N}	Время выполнения, с				Цветовая карта
	Расчет без ребер		Расчет с ребрами		
	<i>Maple</i>	<i>JPV-math</i>	<i>Maple</i>	<i>JPV-math</i>	
1	4	<1	5	2	1 с и менее
2	34	18	36	25	До 10 с
3	655	102	748	186	До 100 с
4	–	384	–	979	До 250 с
5	–	1799	–	5195	До 500 с
					500 с и более

Результаты замеров времени выполнения различных этапов расчета на основе входных данных из табл. 2 представлены в табл. 6.

Разработанная программа использует 100 % процессорного времени, однако наибольшая производительность может быть достигнута при разделении сервисов по вычислительным мощностям. Тогда процессор не будет распределен между вычислениями и визуализацией. Результаты замеров времени вычислений без использования визуализации также приведены в табл. 6.

Таблица 6

Замеры производительности этапов моделирования
в приложении *JPV-math*

Table 6

Performance measurements of simulation steps
in the *JPV-math* application

\sqrt{N}	Время выполнения, с					
	Et + Rt	It	E	Dt	NWt	At
<i>Расчет без ребер</i>						
1	<1	<1	–	<1	<1	<1
2	<1	<1	–	<1	18	18
3	4	<1	–	3	95	102
4	32	1	–	24	324	384
5	199	6	–	131	1463	1799
<i>Расчет с ребрами</i>						
1	<1	<1	<1	<1	2	2
2	<1	<1	<1	1	24	25
3	4	<1	5	5	172	186
4	33	1	33	48	864	979
5	199	6	269	300	4421	5195
<i>Расчет без ребер и без визуализации</i>						
1	<1	<1	–	<1	2	2
2	<1	1	–	<1	5	6
3	1	3	–	<1	30	34
4	10	8	–	2	136	156
5	54	18	–	11	530	615

Примечания: 1. Et + Rt – время преобразования данных в рамках оптимизации и раскрытия всех скобок под знаком интеграла, замены посчитанных производных и аппроксимирующих функций в строке; It – время взятия двойного интеграла; E – время расчета ребра (раскрытие скобок и преобразование); Dt – время нахождения градиента и матрицы Гессе; NWt – время выполнения оптимизированного метода Ньютона и визуализации данных; At – общее время вычисления. 2. Цветовую карту см. в табл. 5.

Python-модуль для раскрытия скобок при $\sqrt{N} = 5$ потребовал около 12 Гб оперативной памяти, а Java-модуль – всего 2,56 Гб.

Заключение

В ходе исследования разработано микросервисное приложение, позволяющее моделировать деформирование оболочечных конструкций. Оно оказалось в несколько раз более эффективным, чем подход, реализованный в математическом пакете *Maple*. Разработанное приложение обеспечивает взятие двойного интеграла по заданному числу слагаемых на процессоре AMD Ryzen 5 (модель 2600) без использования режима Turbo Boost, внешних файлов или баз данных с уже посчитанными значениями за 18 с.

Взяв за основу идею сервисно ориентированной архитектуры и вдохновившись фреймворком Java Spring Cloud, авторы показали, каким образом от сервисной архитектуры можно перейти к эффективной микросервисной архитектуре, заменив один из недостаточно производительных Java-модулей на Python-модуль.

Проведена оптимизация вычислительного алгоритма для реализации многопоточного расчета всех стадий вычисления, включая метод Ньютона. Выполнены замеры производительности расчета при различных подходах к реализации многопоточного расчета, а именно `parallelStream` и `ForkJoinPool`. Затронуто использование концепции `MapReduce` в рамках фреймворка `Java Stream API`.

Получены графические результаты вычисления, а также выполнены замеры времени выполнения всех этапов расчета и сравнение предложенного программного решения с математическим пакетом *Maple*. Проект представляет собой готовое к развертыванию микросервисное приложение с клиентской и серверной частями.

Приложение может быть как развернуто в локальной сети, так и доступно извне в зависимости от действий `DevOps`.

Библиографические ссылки

1. Zeybek Ö, Topkaya C, Rotter JM. Requirements for intermediate ring stiffeners placed below the ideal location on discretely supported shells. *Thin-Walled Structures*. 2017;115:21–33. DOI: 10.1016/j.tws.2017.02.003.
2. Старовойтов ЭИ, Нестерович АВ. Неосесимметричное нагружение упругопластической трехслойной пластины в своей плоскости. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2022;2:57–69. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-2-57-69.
3. Raeesi A, Ghaednia H, Zohrehheydariha J, Das S. Failure analysis of steel silos subject to wind load. *Engineering Failure Analysis*. 2017;79:749–761. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2017.04.031.
4. Chen Bo, Zhong Pengpeng, Cheng Weihua, Chen Xinzhong, Yang Qingshan. Correlation and combination factors of wind forces on cylindrical roof structures. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2017;17(9):1750104. DOI: 10.1142/S0219455417501048.
5. Yin Caiyu, Jin Zeyu, Chen Yong, Hua Hongxing. Effects of sacrificial coatings on stiffened double cylindrical shells subjected to underwater blasts. *International Journal of Impact Engineering*. 2020;136:103412. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2019.103412.
6. Ren Shaofei, Song Ying, Zhang A-Man, Wang Shiping, Li Pengbo. Experimental study on dynamic buckling of submerged grid-stiffened cylindrical shells under intermediate-velocity impact. *Applied Ocean Research*. 2018;74:237–245. DOI: 10.1016/j.apor.2018.02.018.
7. Seo Jung Kwan, Song Chan Hee, Park Joo Shin, Paik Jeom Kee. Nonlinear structural behaviour and design formulae for calculating the ultimate strength of stiffened curved plates under axial compression. *Thin-Walled Structures*. 2016;107:1–17. DOI: 10.1016/j.tws.2016.05.003.
8. Грачев ВА, Найштут ЮС. Задачи устойчивости тонких упругих оболочек. *Компьютерные исследования и моделирование*. 2018;10(6):775–787. DOI: 10.20537/2076-7633-2018-10-6-775-787.
9. Yankovskii AP. Refined deformation model for metal-composite plates of regular layered structure in bending under conditions of steady-state creep. *Mechanics of Composite Materials*. 2017;52(6):715–732. DOI: 10.1007/s11029-017-9622-7.
10. Stupishin L, Nikitin K, Kolesnikov A. Numerical research orthotropic geometrically nonlinear shell stability using the mixed finite element method. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2017;201:012019. DOI: 10.1088/1757-899X/201/1/012019.
11. Maksimyuk VA, Storozhuk EA, Chernyshenko IS. Nonlinear deformation of thin isotropic and orthotropic shells of revolution with reinforced holes and rigid inclusions. *International Applied Mechanics*. 2013;49(6):685–692. DOI: 10.1007/s10778-013-0602-x.
12. Huang Sixin, Qiao Pizhong. A new semi-analytical method for nonlinear stability analysis of stiffened laminated composite doubly-curved shallow shells. *Composite Structures*. 2020;251:112526. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112526.
13. Wang Jingchao, Li Zheng Liang, Yu Wei. Structural similitude for the geometric nonlinear buckling of stiffened orthotropic shallow spherical shells by energy approach. *Thin-Walled Structures*. 2019;138:430–457. DOI: 10.1016/j.tws.2018.02.006.
14. Obodan NI, Gromov VA. The complete bifurcation structure of nonlinear boundary problem for cylindrical panel subjected to uniform external pressure. *Thin-Walled Structures*. 2016;107:612–619. DOI: 10.1016/j.tws.2016.07.020.
15. Евдокимов АА. Методика использования многопоточного программирования для автоматизированных систем многопроцессорных гальванических линий. *Вестник Нижегородского университета имени Н. И. Лобачевского*. 2013;1(3):306–312.
16. Мизин СВ, Махмутов ВС, Максумов ОС, Квашнин АН. Применение многоконвейерного программирования для физического эксперимента. *Краткие сообщения по физике Физического института имени П. Н. Лебедева Российской академии наук*. 2011;2:8–18.
17. Пазников АА, Павский КВ, Павский ВА, Куприянов МС. Моделирование алгоритмов оптимизации выполнения критических секций на выделенных процессорных ядрах в многоядерных вычислительных системах. В: *Труды II Международной научной конференции по проблемам управления в технических системах (CTS-2017); 25–27 октября 2017 г.; Санкт-Петербург, Россия*. Санкт-Петербург: СПбГЭТУ «ЛЭТИ»; 2017. с. 54–57.
18. Кадомский АА, Захаров ВА. Эффективность многопоточных приложений. *Научный журнал*. 2016;7:26–28.
19. Файрушин РН, Якупов ИМ. Повышение эффективности программ с помощью параллельного вычисления задач. *Вестник современных исследований*. 2018;6(3):583–585.
20. Karpov VV, Semenov AA. Refined model of stiffened shells. *International Journal of Solids and Structures*. 2020;199:43–56. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.03.019.
21. Бакусов ПА, Семенов АА. Устойчивость сегментов тороидальных оболочек при изменении угла отклонения от вертикальной оси. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2017;3:17–36. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.02.
22. Назарков ДА, Тельшев АВ. Сравнительный анализ монолитной и микросервисной архитектур информационных систем. *Дневник науки [Интернет]*. 2019 [прочитано 20 февраля 2022 г.];5:48–55. Доступно по: http://www.dnevniknauki.ru/images/publications/2019/5/technics/Nazarkov_Telyshev.pdf.

References

1. Zeybek Ö, Topkaya C, Rotter JM. Requirements for intermediate ring stiffeners placed below the ideal location on discretely supported shells. *Thin-Walled Structures*. 2017;115:21–33. DOI: 10.1016/j.tws.2017.02.003.
2. Starovoitov EI, Nesterovich AV. The non-axisymmetric loading of an elastoplastic three-layer plate in its plane. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2022;2:57–69. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-2-57-69.
3. Raeesi A, Ghaednia H, Zohrehyehdariha J, Das S. Failure analysis of steel silos subject to wind load. *Engineering Failure Analysis*. 2017;79:749–761. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2017.04.031.
4. Chen Bo, Zhong Pengpeng, Cheng Weihua, Chen Xinzhong, Yang Qingshan. Correlation and combination factors of wind forces on cylindrical roof structures. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2017;17(9):1750104. DOI: 10.1142/S0219455417501048.
5. Yin Caiyu, Jin Zeyu, Chen Yong, Hua Hongxing. Effects of sacrificial coatings on stiffened double cylindrical shells subjected to underwater blasts. *International Journal of Impact Engineering*. 2020;136:103412. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2019.103412.
6. Ren Shaofei, Song Ying, Zhang A-Man, Wang Shiping, Li Pengbo. Experimental study on dynamic buckling of submerged grid-stiffened cylindrical shells under intermediate-velocity impact. *Applied Ocean Research*. 2018;74:237–245. DOI: 10.1016/j.apor.2018.02.018.
7. Seo Jung Kwan, Song Chan Hee, Park Joo Shin, Paik Jeom Kee. Nonlinear structural behaviour and design formulae for calculating the ultimate strength of stiffened curved plates under axial compression. *Thin-Walled Structures*. 2016;107:1–17. DOI: 10.1016/j.tws.2016.05.003.
8. Grachev VA, Neustadt YuS. Buckling problems of thin elastic shells. *Computer Research and Modeling*. 2018;10(6):775–787. Russian. DOI: 10.20537/2076-7633-2018-10-6-775-787.
9. Yankovskii AP. Refined deformation model for metal-composite plates of regular layered structure in bending under conditions of steady-state creep. *Mechanics of Composite Materials*. 2017;52(6):715–732. DOI: 10.1007/s11029-017-9622-7.
10. Stupishin L, Nikitin K, Kolesnikov A. Numerical research orthotropic geometrically nonlinear shell stability using the mixed finite element method. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2017;201:012019. DOI: 10.1088/1757-899X/201/1/012019.
11. Maksimiyuk VA, Storozhuk EA, Chernyshenko IS. Nonlinear deformation of thin isotropic and orthotropic shells of revolution with reinforced holes and rigid inclusions. *International Applied Mechanics*. 2013;49(6):685–692. DOI: 10.1007/s10778-013-0602-x.
12. Huang Sixin, Qiao Pizhong. A new semi-analytical method for nonlinear stability analysis of stiffened laminated composite doubly-curved shallow shells. *Composite Structures*. 2020;251:112526. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112526.
13. Wang Jingchao, Li Zheng Liang, Yu Wei. Structural similitude for the geometric nonlinear buckling of stiffened orthotropic shallow spherical shells by energy approach. *Thin-Walled Structures*. 2019;138:430–457. DOI: 10.1016/j.tws.2018.02.006.
14. Obodan NI, Gromov VA. The complete bifurcation structure of nonlinear boundary problem for cylindrical panel subjected to uniform external pressure. *Thin-Walled Structures*. 2016;107:612–619. DOI: 10.1016/j.tws.2016.07.020.
15. Evdokimov AA. Methodology of use multithreaded programming for automated systems multiprocess galvanic lines. *Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod*. 2013;1(3):306–312. Russian.
16. Mizin SV, Makhmutov VS, Maksumov OS, Kvashnin AN. [Application of multipipeline programming for a physical experiment]. *Kratkie soobshcheniya po fizike Fizicheskogo instituta imeni P. N. Lebedeva Rossiiskoi akademii nauk*. 2011;2:8–18. Russian.
17. Paznikov AA, Pavsky KV, Pavsky VA, Kupriyanov MS. [Modeling algorithms for optimizing the execution of critical sections on dedicated processor cores in multicore computing systems]. In: *Trudy II Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii po problemam upravleniya v tekhnicheskikh sistemakh (CTS-2017); 25–27 oktyabrya 2017 g.; Sankt-Peterburg, Rossiya* [Proceedings of the 2nd International scientific conference on control problems in technical systems (CTS-2017); 2017 October 25–27; Saint Petersburg, Russia]. Saint Petersburg: Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»; 2017. p. 54–57. Russian.
18. Kadomskii AA, Zakharov VA. [Efficiency of multithreaded applications]. *Nauchnyi zhurnal*. 2016;7:26–28. Russian.
19. Fairushin RN, Yakupov IM. [Increasing the efficiency of programs using parallel computation of problems]. *Vestnik sovremennykh issledovaniy*. 2018;6(3):583–585. Russian.
20. Karpov VV, Semenov AA. Refined model of stiffened shells. *International Journal of Solids and Structures*. 2020;199:43–56. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.03.019.
21. Bakusov PA, Semenov AA. Stability of toroidal shell segments at variation of a deflection angle. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2017;3:17–36. Russian. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.02.
22. Nazarkov DA, Telyshev AV. [Comparative analysis of monolithic and microservice architectures of information systems]. *Dnevnik nauki*. 2019 [cited 2022 February 20];5:48–55. Available from: http://www.dnevniknauki.ru/images/publications/2019/5/technics/Nazarkov_Telyshev.pdf. Russian.

Получена 11.01.2023 / исправлена 19.03.2023 / принята 02.06.2023.
Received 11.01.2023 / revised 19.03.2023 / accepted 02.06.2023.

ДВУХЭТАПНЫЙ ПОДХОД К ПРОГНОЗИРОВАНИЮ РАСХОЖДЕНИЯ ШКАЛ ВРЕМЕНИ НА ОСНОВЕ СКОРРЕКТИРОВАННОЙ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ

О. С. ЧЕРНИКОВА¹⁾, Т. А. МАРАРЕСКУЛ²⁾

¹⁾Новосибирский государственный технический университет,
пр. Карла Маркса, 20, 630073, г. Новосибирск, Россия

²⁾Информационные спутниковые системы им. академика М. Ф. Решетнева,
ул. Ленина, 52, 662972, г. Железногорск, Россия

Приводятся результаты исследования точности двухэтапного подхода к прогнозированию расхождения шкал времени космических аппаратов ГЛОНАСС относительно системной шкалы времени на интервалы длительностью до 2 ч. На первом этапе по результатам измерений расхождения шкал времени на выбранном мерном интервале с использованием метода наименьших квадратов строится линейная модель и определяется смещение сглаженной оценки расхождения шкал времени в конце мерного интервала относительно линейного тренда, найденного на всем мерном интервале, после чего постоянный коэффициент линейной модели корректируется на величину полученного смещения. На втором этапе определяется неучтенная остаточная составляющая временного ряда значений расхождения шкал времени и строится описывающая ее авторегрессионная модель. Проводится сравнительная оценка точности прогноза расхождения шкал времени на основе линейной модели со скорректированным постоянным коэффициентом и ее комбинации с авторегрессионной моделью. Анализ численных результатов, полученных на годовом интервале наблюдения, показал, что для всех космических аппаратов применение двухэтапного подхода позволяет уменьшить среднеквадратическое отклонение прогноза расхождения шкал времени, а также увеличить количество реализаций прогноза, для которых среднеквадратическое отклонение не превышает 0,3–0,5 нс.

Ключевые слова: расхождение шкал времени; бортовая шкала времени; синхронизация; измерение времени; метод наименьших квадратов; частотно-временные поправки; прогнозирование.

Образец цитирования:

Черникова ОС, Марарескул ТА. Двухэтапный подход к прогнозированию расхождения шкал времени на основе скорректированной линейной модели. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;2:80–93.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-80-93>
EDN: ARRPXE

For citation:

Chernikova OS, Marareskul TA. A two-stage approach to forecasting the divergence of time scales based on an adjusted linear model. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;2:80–93. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-80-93>
EDN: ARRPXE

Авторы:

Оксана Сергеевна Черникова – кандидат технических наук, доцент; доцент кафедры теоретической и прикладной информатики факультета прикладной математики и информатики.
Татьяна Александровна Марарескул – кандидат технических наук; начальник сектора разработки баллистического и навигационного обеспечения космических аппаратов и космических систем.

Authors:

Oksana S. Chernikova, PhD (engineering), docent; associate professor at the department of theoretical and applied informatics, faculty of applied mathematics and informatics.
chernikova@corp.nstu.ru
<https://orcid.org/0000-0003-2532-8566>
Tatiana A. Marareskul, PhD (engineering); head of the sector for the development of ballistic and navigation support for spacecraft and space systems.
mta@iss-reshetnev.ru
<https://orcid.org/0000-0003-4707-6101>

A TWO-STAGE APPROACH TO FORECASTING THE DIVERGENCE OF TIME SCALES BASED ON AN ADJUSTED LINEAR MODEL

O. S. CHERNIKOVA^a, T. A. MARARESKUL^b

^aNovosibirsk State Technical University, 20 Karla Marksa Avenue, Novosibirsk 630073, Russia

^bAcademician M. F. Reshetnev Information Satellite System,
52 Lenina Street, Zheleznogorsk 662972, Russia

Corresponding author: O. S. Chernikova (chernikova@corp.nstu.ru)

This paper presents the results of a study of the accuracy of a two-stage approach to forecasting the divergence of time scales of GLONASS spacecraft relative to the system time scale for intervals of up to 2 h. At the first stage a linear model is constructed on the results of measurements of the divergence of time scales on the selected dimensional interval based on the least squares method, the offset of the smoothed estimate of the divergence of time scales at the end of the dimensional interval relative to the linear trend found over the entire dimensional interval is determined, the constant coefficient of the linear model is corrected. At the second stage the unaccounted residual component of the time series of the time scale divergence values is determined and an AR model describing it is constructed. A comparative analysis of the accuracy of the forecast of the divergence of time scales according to a linear model with an adjusted constant coefficient and the forecast using its combination with an AR model is carried out. The analysis of the numerical results obtained during the annual observation interval showed that for all spacecraft, the use of a two-stage approach makes it possible to reduce the standard deviation of the forecast of time scale divergence, as well as to increase the number of forecast implementations for which the standard deviation does not exceed 0.3–0.5 ns.

Keywords: divergence of time scales; onboard time scale; synchronisation; time measurement; least squares method; time-frequency corrections; forecasting.

Введение

Задача синхронизации разнесенных в пространстве стандартов частоты, устанавливаемых на космические аппараты, является одной из актуальных задач для развития глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС). В большинстве случаев достаточно обеспечить высокоточную математическую привязку временных шкал космических аппаратов к выбранной опорной шкале времени без физического приведения их в состояние синхронных. Для этого необходимо определять величину расхождения шкал времени (РШВ) космических аппаратов относительно опорной шкалы времени и прогнозировать ее поведение. В рамках данного исследования под РШВ будем понимать отклонение показаний бортовых часов космических аппаратов относительно системной шкалы времени ГНСС. В связи с этим одним из актуальных вопросов является выбор математической модели, описывающей РШВ и обеспечивающей необходимую точность прогнозирования на заданный интервал времени [1; 2].

На современном этапе развития ГНСС, в частности ГЛОНАСС, для ряда приложений представляет интерес возможность прогнозирования РШВ на интервал от 0,5 до 2 ч с погрешностью не более 0,3–0,5 нс и доверительной вероятностью 0,95. Как следствие, актуальной задачей становится построение математической модели, обеспечивающей указанные точностные характеристики.

В настоящее время для прогнозирования РШВ применяются различные подходы: экстраполяция степенным полиномом [3–5], построение моделей авторегрессии и интегрированного скользящего среднего (*autoregressive integrated moving average*, ARIMA) [6–9], моделей «серого прогноза» (*grey prediction models*, GMs) [10; 11], моделей спектрального анализа (*spectrum analysis (SA) models*) [12], прогнозирование на основе фильтра Калмана и его модификаций [13; 14]. Каждая из указанных модельных структур имеет свои преимущества и недостатки. Так, например, модели, в основе которых лежат степенные полиномы, отличаются простой структурой и являются легко реализуемыми, однако с увеличением интервала прогноза существенно возрастают ошибки модели, что приводит к значительному снижению точности и стабильности прогнозирования. Точность прогнозирования РШВ на основе моделей спектрального анализа, моделей авторегрессии и интегрированного скользящего среднего и моделей «серого прогноза» намного выше, но стабильность результатов прогнозирования существенно зависит от оптимизации параметров моделей. Точность кратковременного прогноза РШВ с применением аппарата калмановской фильтрации увеличивается, но в значительной степени определяется характеристиками движения атомных часов.

В работе исследуется двухэтапный подход к прогнозированию РШВ космических аппаратов ГЛОНАСС относительно системной шкалы времени, основанный на сочетании линейной модели со скорректированным постоянным коэффициентом [15] и авторегрессионной модели, а также приводятся результаты исследования точности соответствующего математического алгоритма прогнозирования РШВ на интервалы длительностью до 2 ч.

Материалы и методы исследования

Апостериорные данные о поведении бортовой шкалы времени (БШВ) космических аппаратов ГЛОНАСС относительно системной шкалы времени предоставляются различными аналитическими центрами, в том числе системой высокоточного определения эфемерид и временных поправок (СВОЭВП)¹, и могут использоваться для исследований, связанных с анализом поведения трендовой и случайной составляющих процесса, решения задачи относительной калибровки измерительных средств [16].

Поправки к БШВ рассчитываются в виде прогнозов ухода БШВ относительно эталонной шкалы центрального синхронизатора системы. Причинами ухода БШВ являются собственная нестабильность квантового перехода стандарта частоты и регулярные гравитационные воздействия на частоту часов совокупности факторов, таких как неоднородность гравитационного поля Земли (приводит к смещению шкалы собственного времени часов спутника), приливные потенциалы Луны и Солнца (вызывают смещение шкалы собственного времени наземных и (или) бортовых часов), неравномерность вращения Земли (обуславливает смещение времени и частоты задающего генератора наземных часов).

Апостериорные данные (см., например, рис. 1) представляют собой временные ряды значений РШВ космического аппарата относительно системной шкалы времени на равномерной сетке узлов вида $y(t_k)$, $k = 0, 1, \dots$

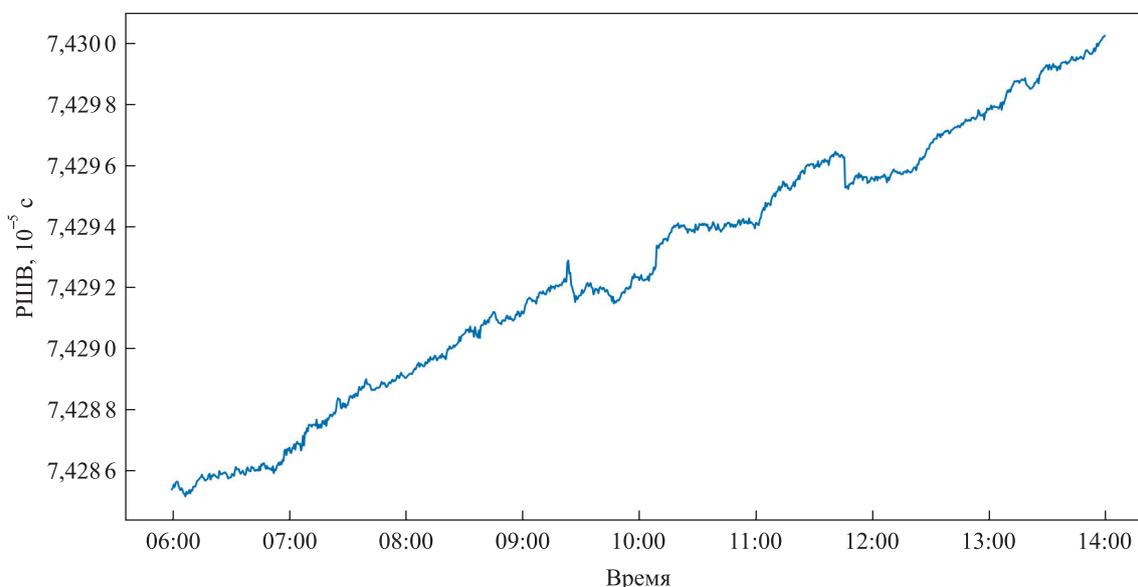


Рис. 1. Апостериорные данные РШВ космического аппарата R01 (с 06:00 до 14:00 31.01.2021 г.)

Fig. 1. A posteriori data of time scale divergence for spacecraft R01 (from 6 a. m. to 2 p. m. 2021 January 31)

Проведем предварительный анализ данных для космического аппарата R01 на годовом интервале наблюдения (с 00:00 01.01.2021 г. до 23:59 31.12.2021 г.), разбитом на мерные интервалы длиной 6 ч (для остальных космических аппаратов результаты являются аналогичными).

Для проверки стационарности исследуемых временных рядов воспользуемся расширенным тестом Дики – Фуллера (ADF-тестом) и тестом Квятковского – Филлипса – Шмидта – Шина (KPSS-тестом), которые в качестве нулевой гипотезы рассматривают принадлежность ряда к определенному типу стационарных рядов (табл. 1 и 2). ADF-тест является более эффективным в сравнении с традиционным тестом Дики – Фуллера (DF-тестом) при наличии автокорреляции в остатках (количество включаемых в модель лагов определялось на основе коррелограммы остатков). Для вычисления максимального и минимального значений статистики при проведении ADF-теста и KPSS-теста интервал наблюдения был разбит на 1454 мерных интервала по 721 измерению в каждом.

¹Система высокоточного определения эфемерид и временных поправок [Электронный ресурс]. URL: <http://www.glonass-svoevr.ru> (дата обращения: 08.02.2022).

Таблица 1

Результаты ADF-теста

Table 1

ADF test results

Показатели	Спецификация теста		
	Авторегрессионная модель со свободным членом	Авторегрессионная модель со свободным членом и линейным трендом	Модель случайного блуждания без дрейфа
Минимальное значение статистики на мерных интервалах	-8,21	-22,27	-3,33
Максимальное значение статистики на мерных интервалах	4,11	19,53	9,99
Значение статистики на интервале наблюдения	2,37	-1,78	43,94
Критические значения статистики: при уровне значимости 1 % при уровне значимости 5 % при уровне значимости 10 %	-3,44 -2,87 -2,57	-3,97 -3,42 -3,13	-2,57 -1,94 -1,62
Процент мерных интервалов, значения на которых являются стационарным временным рядом: при уровне значимости 1 % при уровне значимости 5 % при уровне значимости 10 %	0,14 1,11 2,20	1,72 8,05 14,18	0,34 1,03 1,17

Таблица 2

Результаты KPSS-теста

Table 2

KPSS test results

Показатели	Спецификация теста	
	Авторегрессионная модель со свободным членом	Авторегрессионная модель со свободным членом и линейным трендом
Минимальное значение статистики на мерных интервалах	0,260	0,006
Максимальное значение статистики на мерных интервалах	4,140	0,990
Значение статистики на интервале наблюдения	8,690	8,390
Критические значения статистики: при уровне значимости 1 % при уровне значимости 5 % при уровне значимости 10 %	0,740 0,460 0,350	0,220 0,146 0,119
Процент мерных интервалов, значения на которых являются стационарным временным рядом: при уровне значимости 1 % при уровне значимости 5 % при уровне значимости 10 %	0,140 1,110 2,200	1,720 8,050 14,180

Таким образом, проведенные тесты показывают, что на большей части мерных интервалов исследуемые ряды являются нестационарными.

Следует упомянуть, что ADF-тест и KPSS-тест не допускают возможности резкого изменения, включая изменение среднего значения или других характеристик ряда. Однако как нестабильность квантового перехода стандарта частоты, так и воздействия гравитации могут привести к появлению структурного сдвига

в анализируемых данных. Для проверки временных рядов на наличие эндогенного структурного сдвига воспользуемся тестом Эндрюса – Зивота. Рассмотрим модель А (допускает разовое измерение уровня), модель В (допускает разовое изменение наклона функции тренда) и модель С (допускает разовое изменение как уровня, так и наклона функции тренда). Для вычисления максимального и минимального значений статистики интервал наблюдения был разбит на 1454 мерных интервала по 721 измерению в каждом. Результаты представлены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты теста Эндрюса – Зивота

Table 3

Andrews – Zivot test results

Показатели	Спецификация теста		
	Модель А	Модель В	Модель С
Минимальное значение статистики на мерных интервалах	–36,440	–11,240	–45,810
Максимальное значение статистики на мерных интервалах	–0,004	–0,250	–0,003
Значение статистики на интервале наблюдения	–4,950	–5,110	–5,190
Критические значения статистики:			
при уровне значимости 1 %	–5,280	–5,030	–5,580
при уровне значимости 5 %	–4,810	–4,410	–5,070
при уровне значимости 10 %	–4,570	–4,140	–4,830

В настоящее время существует ряд методов анализа временных рядов, которые не требуют проверки предположения о стационарности анализируемого ряда, в том числе метод сингулярного спектрального анализа (*singular spectrum analysis, SSA*), вейвлет-преобразование (*wavelet transform, WT*) и преобразование Гильберта – Хуанга (*Hilbert – Huang transform, ННТ*). Метод сингулярного спектрального анализа позволяет разложить временной ряд на сумму компонент и выделить отдельные аддитивные составляющие исходного ряда, такие как тренд, различные колебательные и периодические компоненты, а также шумовая компонента. На рис. 2 представлены первые четыре компоненты разложения исходного ряда значений РШВ, а на рис. 3 приведены логарифмы собственных чисел сингулярного разложения траекторной матрицы.

Из рис. 3 видно, что содержательный смысл несут в основном первые главные компоненты.

Для описания трендовой составляющей используют полиномиальные или квазиполиномиальные модели, в том числе с экспоненциальными множителями, дробно-рациональными и линейно-логарифмическими функциями, а также их комбинации. Подобный подход дает возможность создавать многопараметрические модели, которые с требуемой точностью обеспечивают аппроксимацию исследуемых временных рядов, однако результаты прогнозирования на основе данных моделей далеко не всегда оказываются удовлетворительными, поскольку подбираемые аппроксимирующие функции не во всех случаях отражают реальную зависимость наблюдаемой величины от времени или иных параметров.

С содержательной (физической) точки зрения в работах [1; 2] показано, что при прогнозировании РШВ на длительные интервалы основной составляющей ухода БШВ для цезиевых часов является линейный тренд, обусловленный отклонением частоты генератора от номинального значения, для рубидиевых часов – квадратичный тренд, связанный с отклонением частоты генератора от номинального значения и линейным дрейфом частоты.

Задача прогнозирования РШВ космических аппаратов на короткие интервалы с точностью 0,3–0,5 нс, с одной стороны, требует расширения класса применяемых математических моделей, в том числе использования многоступенчатых алгоритмов, позволяющих определять как трендовую составляющую, так и недетерминированную (остаточную) составляющую временного ряда значений РШВ, а с другой стороны, должна быть реализуемой в короткие сроки с наименьшими вычислительными затратами.

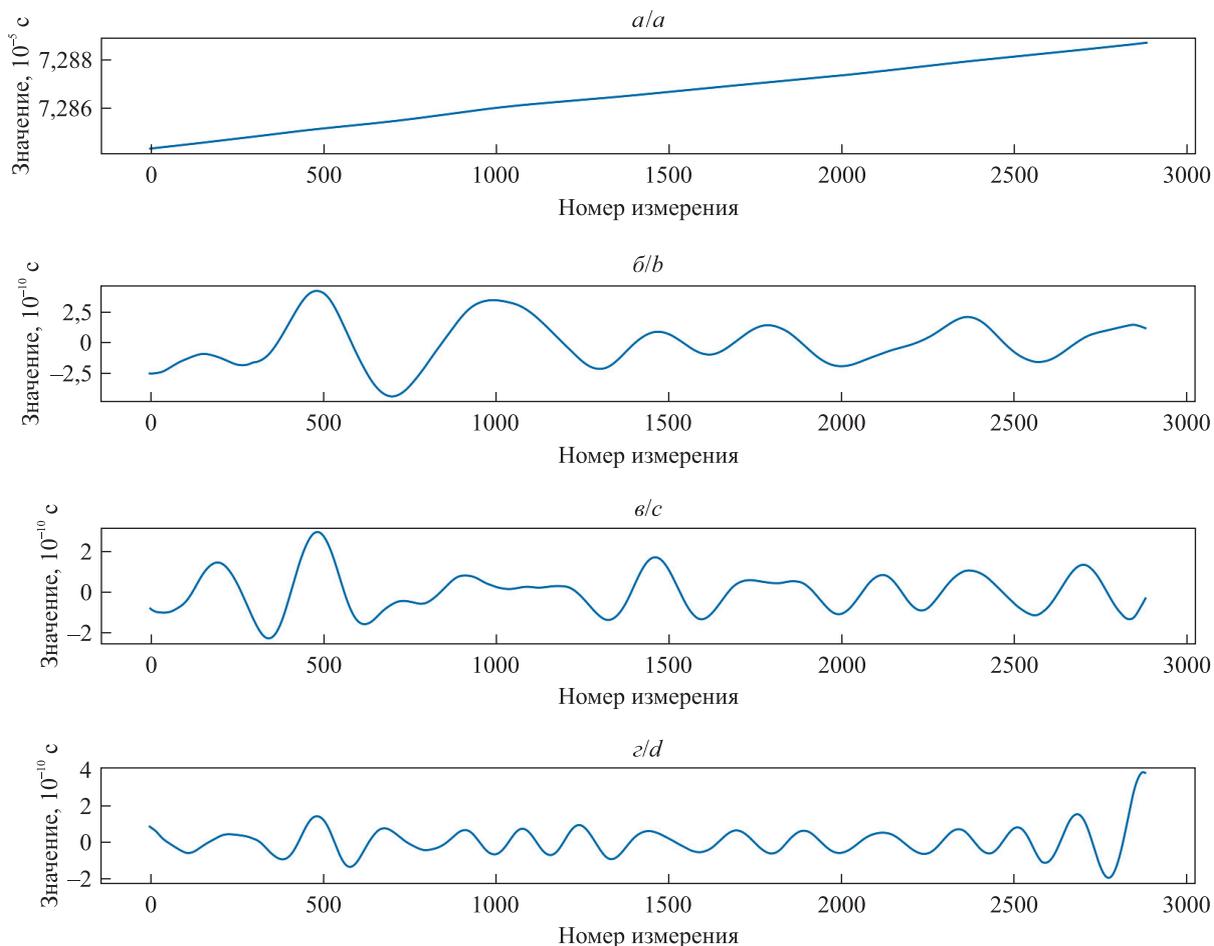


Рис. 2. Графическое изображение первых четырех компонент разложения исходного ряда значений РШВ: $a - 99,996\%$; $b - 0,003\%$; $c - 0,0002\%$; $d - 0,0001\%$
Fig. 2. Graphic representation of the first four components of the expansion of the initial series of values of divergence of time scales: $a - 99,996\%$; $b - 0,003\%$; $c - 0,0002\%$; $d - 0,0001\%$

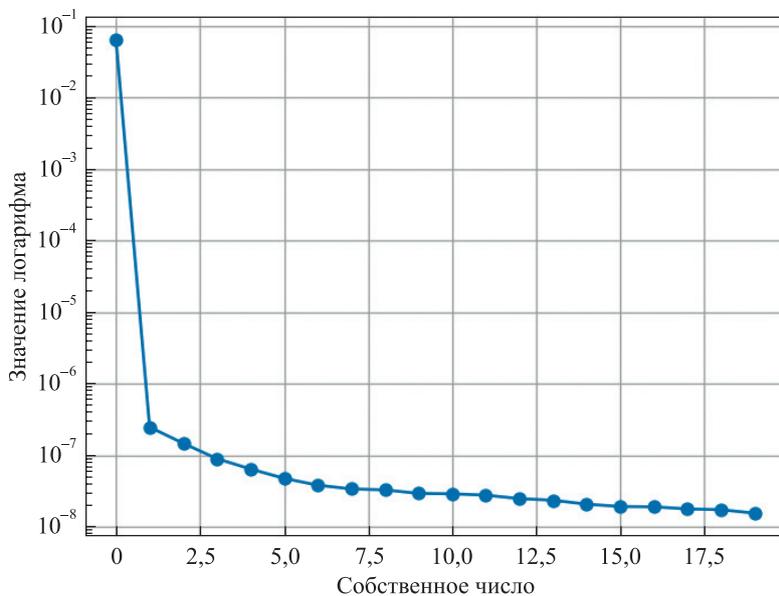


Рис. 3. Логарифмы собственных чисел сингулярного разложения траекторной матрицы
Fig. 3. Logarithms of the eigenvalues of the singular expansion of the trajectory matrix

В настоящей работе предлагается двухэтапный подход к построению модели прогнозирования РШВ. На первом этапе строится линейная модель. В рамках данного этапа выполняются следующие операции:

- методом наименьших квадратов (МНК) находятся коэффициенты полинома первой степени, аппроксимирующие временной ряд значений РШВ на мерном интервале выбранной длины;
- формируется сглаженная оценка РШВ по некоторому подмножеству значений в конце мерного интервала;
- определяется смещение сглаженной оценки РШВ относительно линейного тренда, найденного на всем мерном интервале;
- корректируется постоянный член линейной модели на величину смещения.

На втором этапе строится модель прогноза путем добавления к линейной модели аддитивного члена, описывающего модель остатков. В рамках данного этапа выполняются следующие операции:

- определяется неучтенная остаточная составляющая временного ряда путем исключения из исходного ряда тренда, определяемого линейной моделью;
- строится авторегрессионная модель, описывающая неучтенную остаточную составляющую;
- формируется модель прогноза путем сложения линейной модели и авторегрессионной модели остатков.

Таким образом, предлагаемый двухэтапный алгоритм построения модели прогнозирования РШВ имеет следующий вид.

Этап 1: построение и коррекция линейной модели тренда на основе МНК.

Подэтап 1.1: определение модели на мерном интервале.

Шаг 1. Задать мерный интервал $I_{\text{опред}} = [t_0, t_N]$, где N – количество измерений на мерном интервале.

Шаг 2. Вычислить по измерительным данным $y(t_0), \dots, y(t_N)$ МНК-коэффициенты a_0, a_1 и записать модель, описывающую РШВ на мерном интервале, в виде

$$y^M(t) = a_0 + a_1(t - t_0), t \in I_{\text{опред}} \quad (1)$$

Подэтап 1.2: определение смещения оценки РШВ на основе измерений последнего сеанса.

Шаг 3. Задать интервал для уточнения коэффициента a_0 модели (1) $I_{\text{уточ}} = [t_{N-M}, t_N]$.

Шаг 4. Представить РШВ на интервале $I_{\text{уточ}}$ линейной комбинацией полиномов в виде

$$\tilde{y}(t) = \alpha_0 T_0(t) + \alpha_1 T_1(t) + \dots + \alpha_m T_m(t), t \in I_{\text{уточ}} \quad (2)$$

и найти МНК-коэффициенты α_i в соотношении (2). Отметим, что МНК, применяемый при построении полиномиальной модели (2) по наблюдаемым значениям, для достижения необходимой точности и повышения порядка многочленов потребует пересчета найденных коэффициентов многочлена меньшей степени. Для многочленов Чебышева справедлива рекуррентная формула

$$T_0(t) = 1, T_1(t) = t, T_2(t) = 2t^2 - 1, \dots, T_m(t) = 2tT_{m-1}(t) - T_{m-2}(t),$$

что позволяет существенно упростить процесс построения приближающего многочлена и, как следствие, сократить время на построение прогнозирующей модели (это очень важно при разработке соответствующего программного обеспечения).

Шаг 5. Скорректировать постоянный член линейной модели по формуле

$$\bar{a}_0 = \bar{y} - a_1(t_{\tilde{N}} - t_0), \tilde{N} = N - \frac{M}{2}, \bar{y} = \tilde{y}(t_{\tilde{N}}),$$

и записать уточненную модель для прогнозирования РШВ в виде

$$\bar{y}^M(t) = \bar{a}_0 + a_1(t - t_0), t \in I_{\text{прог}} \quad (3)$$

Этап 2: построение модели остаточной составляющей временного ряда.

Шаг 6. Найти остаточную составляющую $z(t_k) = y(t_k) - y^M(t_k)$, $k = 0, 1, \dots, N$, где $y(t_k)$ – величины РШВ космического аппарата относительно системной шкалы времени; $y^M(t_k)$ – значения, вычисленные с помощью модели (1).

Шаг 7. Вычислить по полученным на шаге 6 остаткам $z(t_0), \dots, z(t_N)$ параметры авторегрессионной модели $\alpha_1, \dots, \alpha_p$:

$$z^M(t_k) = \sum_{j=1}^p \alpha_j z^M(t_{k-j}) + \varepsilon(t_k), \quad (4)$$

где p – порядок модели; $\varepsilon(t_k)$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией. Для определения параметров модели (4) применялся метод взвешенных наименьших квадратов, учитывающий наличие аддитивных ошибок измерений [17]. Порядок модели определялся на основе информационного критерия Акаике, исходя из выбранной точности.

Шаг 8. Сформировать результирующую модель прогноза следующим образом:

$$y^{\text{прогноз}}(t_k) = \bar{y}^M(t_k) + z^M(t_k), t_k \in I_{\text{прог}}. \quad (5)$$

Построение на этапе 1 линейной модели, описывающей РШВ на мерном интервале, может использоваться для восстановления пропущенных данных, а ее коррекция на этапе 2 позволяет без дополнительных вычислительных затрат построить прогноз РШВ. Графическая иллюстрация двухэтапного подхода к прогнозированию РШВ приведена на рис. 4.

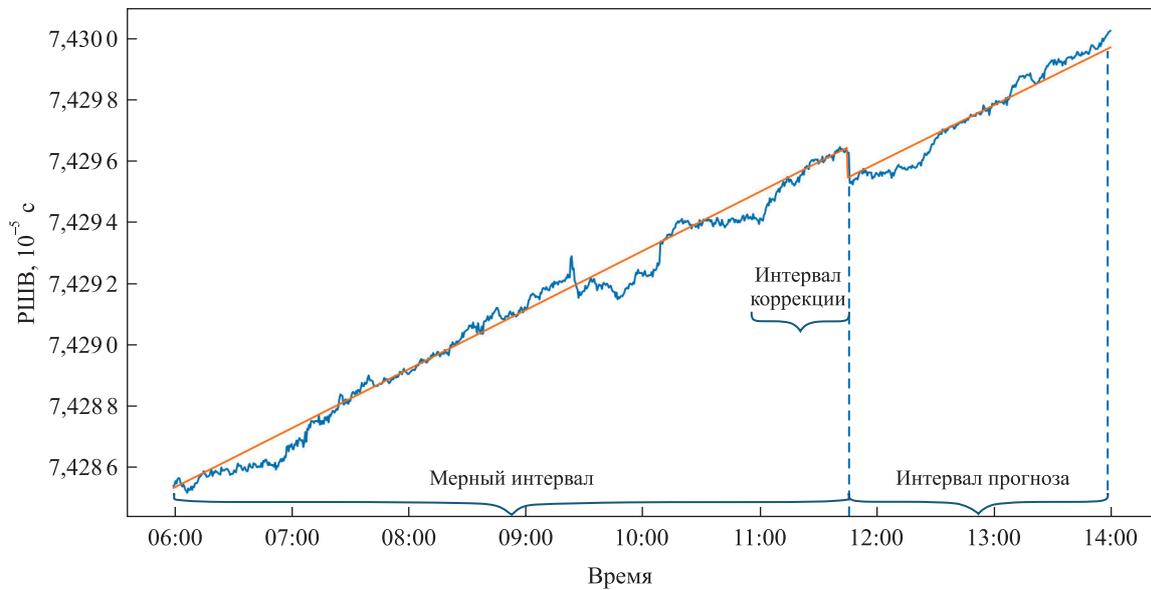


Рис. 4. Графическая иллюстрация двухэтапного подхода к построению модели прогноза РШВ по апостериорным данным РШВ космического аппарата R01 (см. рис. 1)

Fig. 4. Graphic illustration of a two-stage approach to the construction of the forecast model of time scale divergence by a posteriori data of time scale divergence for spacecraft R01 (see fig. 1)

Результаты и их обсуждение

Для численного исследования эффективности двухэтапного алгоритма построения модели прогнозирования РШВ использовались апостериорные данные РШВ, предоставленные СВОЭВП для космических аппаратов R01 – R24 (за исключением космических аппаратов R06, R09, R10, R23) на годовом интервале наблюдения.

Были выбраны следующие параметры моделирования: интервал наблюдения – с 00:00 01.01.2021 г. до 23:59 31.12.2021 г.; мерный интервал – $I_{\text{опред}} = 6$ ч; интервал для уточнения коэффициента a_0 – $I_{\text{уточ}} = 0,25$ ч; интервал прогноза – $I_{\text{прог}} = 0,5$ ч, $I_{\text{прог}} = 1$ ч и $I_{\text{прог}} = 2$ ч.

Для построения линейной модели (1) годовой интервал наблюдения разбивался на k некоррелированных мерных интервалов $I_{\text{опред}}$. В качестве характеристик точности построения модели на интервале наблюдения использовались максимальное, среднее и минимальное значения среднеквадратического отклонения (СКО) по уровню доверительной вероятности 0,95, определяемые на всех k мерных интервалах. Также было рассчитано процентное отношение количества интервалов, для которых СКО не превышало 0,3 и 0,5 нс, к общему количеству интервалов k .

В табл. 4 и 5 и на рис. 5–7 для различных космических аппаратов приведены величины минимального, среднего, максимального СКО по уровню доверительной вероятности 0,95 для разных интервалов прогноза при использовании одноэтапной процедуры прогнозирования (на основе модели (3)) и двухэтапной процедуры прогнозирования (на основе модели (5)).

Характеристики точности построения модели прогнозирования РШВ
на различных интервалах прогноза (одноэтапный подход)

Table 4

Characteristics of the accuracy of constructing a model
for prediction the divergence of time scales at different intervals (one-stage approach)

Характеристики	Интервал прогноза, ч	Космический аппарат																							
		R01	R02	R03	R04	R05	R07	R08	R11	R12	R13	R14	R15	R16	R17	R18	R19	R20	R21	R22	R24				
Минимальное СКО, 10^{-8} нс	0,5	2,76	28,90	2,91	0,01	2,58	2,33	2,87	0,001	28,70	2,84	2,73	28,50	0,51	28,60	2,84	28,50	2,89	28,60	2,86	2,89	2,89			
	1	2,80	28,90	2,89	0,01	2,88	2,88	2,88	0,001	28,80	2,87	2,89	28,70	0,82	28,60	2,86	28,70	2,94	28,90	2,89	2,89	2,88			
	2	2,87	28,90	2,89	0,01	2,88	2,75	2,89	0,006	28,90	2,88	2,87	28,80	0,84	28,90	2,87	28,80	2,91	28,90	2,89	2,89	2,89			
Максимальное СКО, нс	0,5	0,97	1,75	0,89	0,81	0,88	0,99	1,21	1,14	0,81	2,18	0,79	0,78	1,22	0,81	0,94	1,31	1,10	0,77	1,40	1,11				
	1	1,26	2,39	1,16	1,14	1,17	1,31	1,60	1,58	1,11	2,91	1,07	1,06	1,63	1,12	1,24	1,81	1,51	1,03	2,0	1,45				
	2	1,92	3,62	1,72	1,83	1,82	1,94	2,37	2,41	1,75	4,32	1,61	1,64	2,40	1,68	1,95	2,73	2,22	1,58	3,41	2,17				
Среднее СКО, нс	0,5	0,39	0,74	0,39	0,32	0,36	0,40	0,51	0,39	0,33	0,88	0,33	0,32	0,48	0,32	0,38	0,53	0,43	0,31	0,53	0,42				
	1	0,52	1,0	0,48	0,45	0,49	0,55	0,69	0,55	0,45	1,20	0,44	0,43	0,65	0,43	0,52	0,73	0,57	0,42	0,78	0,58				
	2	0,77	1,47	0,71	0,68	0,72	0,80	1,0	0,84	0,66	1,74	0,64	0,64	0,95	0,64	0,75	1,06	0,85	0,63	1,31	0,84				
Процент мерных интервалов с СКО < 0,3 нс	0,5	40,8	7,0	45,2	55,0	44,3	39,1	22,5	46,5	51,6	5,5	53,1	53,6	29,5	53,5	40,8	22,9	37,6	54,5	25,8	34,7				
	1	22,5	1,7	28,1	35,5	26,3	21,5	9,2	31,2	32,5	1,8	33,0	35,8	15,6	36,2	23,2	8,6	21,3	35,7	11,8	18,3				
	2	9,1	0,5	12,3	16,2	10,0	7,1	1,8	14,1	14,6	0,8	16,4	17,2	7,4	17,5	8,7	2,3	8,3	17,3	2,8	6,6				
Процент мерных интервалов с СКО < 0,5 нс	0,5	72,8	30,8	78,7	83,0	77,4	69,7	55,6	70,1	82,5	23,5	83,0	82,7	59,0	84,8	74,2	53,3	67,1	85,3	54,4	67,9				
	1	53,5	15,1	61,1	65,6	59,0	50,5	35,9	52,2	64,1	10,0	64,5	64,7	40,1	66,7	56,5	34,1	51,1	67,4	33,1	49,5				
	2	31,6	4,7	37,0	38,2	35,4	29,3	16,8	31,6	41,0	2,5	42,3	42,4	21,4	44,7	34,4	14,6	28,5	43,4	12,9	27,3				

Характеристики точности построения модели прогнозирования РШВ
на различных интервалах прогноза (двухэтапный подход)

Table 5

Characteristics of the accuracy of constructing a model
for prediction the divergence of time scales at different intervals (two-stage approach)

Характеристики	Интервал прогноза, ч	Космический аппарат																						
		R01	R02	R03	R04	R05	R07	R08	R11	R12	R13	R14	R15	R16	R17	R18	R19	R20	R21	R22	R24			
Минимальное СКО, 10^{-8} нс	0,5	2,76	28,70	2,73	0,10	2,54	2,02	2,84	0,002	28,60	2,88	2,58	28,50	0,51	28,60	2,84	28,50	2,89	28,6	2,86	2,89			
	1	2,80	28,80	2,80	0,10	2,88	2,88	2,87	0,002	28,70	2,90	2,89	28,70	0,82	28,60	2,86	28,70	2,94	28,9	2,89	2,88			
	2	2,87	28,80	2,83	0,08	2,84	2,70	2,89	0,001	28,80	2,89	2,90	28,80	0,84	28,90	2,87	28,80	2,91	28,9	2,89	2,89			
Максимальное СКО, нс	0,5	0,97	1,72	0,87	0,80	0,87	0,97	1,19	1,13	0,81	2,18	0,77	0,78	1,22	0,81	0,94	1,31	1,10	0,77	1,40	1,11			
	1	1,26	2,36	1,15	1,12	1,15	1,31	1,59	1,57	1,11	2,89	1,0	1,06	1,63	1,12	1,24	1,81	1,51	1,03	2,0	1,45			
	2	1,92	3,60	1,71	1,82	1,81	1,94	2,35	2,41	1,73	4,27	1,60	1,64	2,4	1,68	1,95	2,73	2,22	1,58	3,41	2,17			
Среднее СКО, нс	0,5	0,39	0,72	0,35	0,31	0,35	0,39	0,49	0,38	0,33	0,87	0,32	0,32	0,48	0,32	0,38	0,53	0,43	0,31	0,53	0,42			
	1	0,52	0,97	0,47	0,44	0,48	0,54	0,68	0,54	0,44	1,19	0,44	0,43	0,65	0,43	0,52	0,73	0,57	0,42	0,78	0,58			
	2	0,77	1,46	0,71	0,69	0,72	0,79	0,98	0,84	0,66	1,73	0,63	0,64	0,95	0,64	0,75	1,06	0,85	0,63	1,31	0,84			
Процент мерных интервалов с СКО < 0,3 нс	0,5	40,8	7,7	46,4	55,5	46,2	40,4	23,9	47,3	51,9	5,9	54,4	53,6	29,5	53,5	40,8	22,9	37,6	54,5	25,8	34,7			
	1	22,5	1,7	28,7	35,8	26,8	22,2	10,0	31,5	32,7	1,8	34,3	35,8	15,6	36,2	23,2	8,6	21,3	35,7	11,8	18,3			
	2	9,1	0,6	12,3	16,2	10,3	7,5	2,3	14,3	14,6	0,7	17,0	17,2	7,4	17,5	8,7	2,3	8,3	17,3	2,8	6,6			
Процент мерных интервалов с СКО < 0,5 нс	0,5	72,8	32,1	79,3	83,7	78,7	70,7	57,1	70,6	83,1	24,2	84,0	82,7	59	84,8	74,2	53,3	67,1	85,3	54,4	67,9			
	1	53,5	15,6	61,6	65,7	59,6	51,6	36,9	52,7	64,7	10,0	65,4	64,7	40,1	66,7	56,5	34,1	51,1	67,4	33,1	49,5			
	2	31,6	4,9	37,4	38,6	35,4	29,7	17,0	31,7	41,5	2,5	42,6	42,4	21,4	44,7	34,4	14,6	28,5	43,4	12,9	27,3			

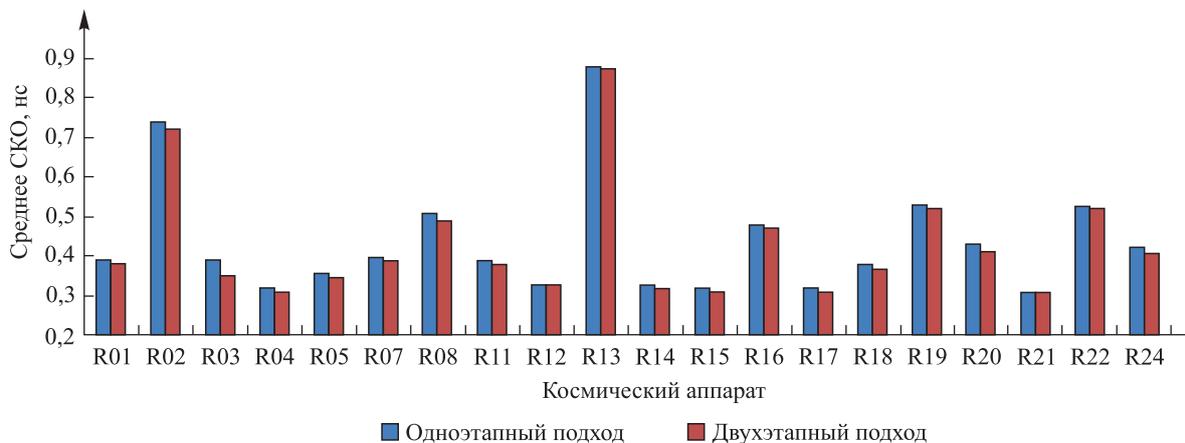


Рис. 5. Среднее СКО при $I_{\text{прог}} = 0,5$ ч
 Fig. 5. Average RMSE at $I_{\text{predict}} = 0.5$ h

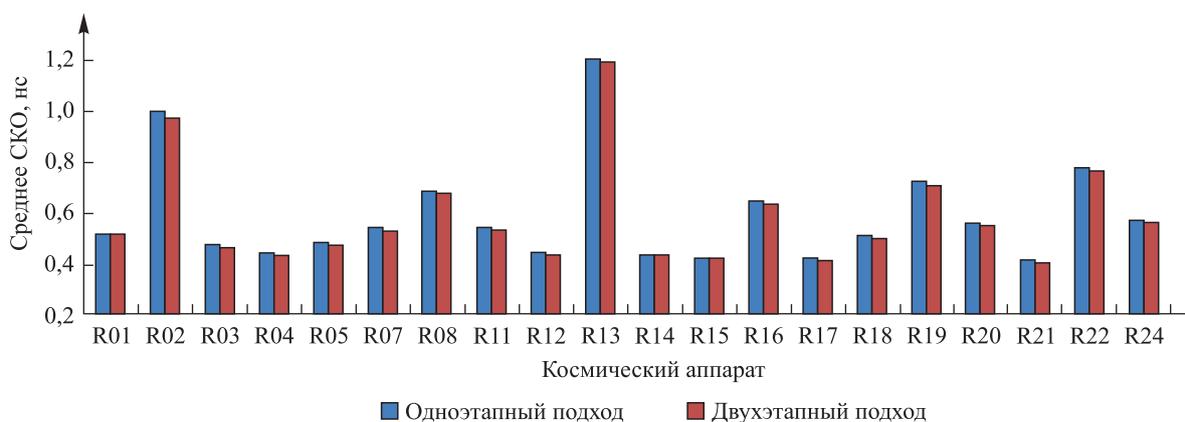


Рис. 6. Среднее СКО при $I_{\text{прог}} = 1$ ч
 Fig. 6. Average RMSE at $I_{\text{predict}} = 1$ h

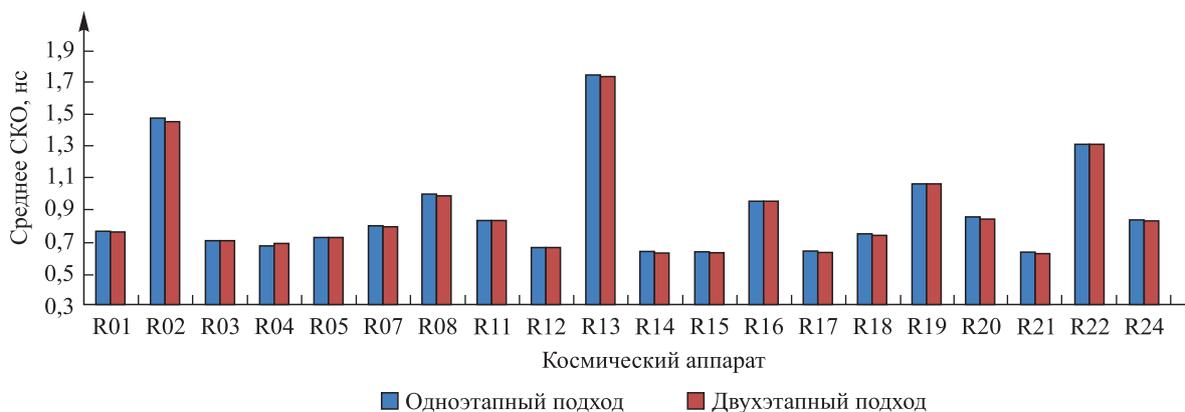


Рис. 7. Среднее СКО при $I_{\text{прог}} = 2$ ч
 Fig. 7. Average RMSE at $I_{\text{predict}} = 2$ h

Как видно из рис. 8, ошибки прогнозирования при двухэтапном построении модели хорошо описываются нормальным законом распределения. Параметры нормального закона распределения, характеризующие отклонения наблюдаемых значений от прогнозных, приведены в табл. 6.

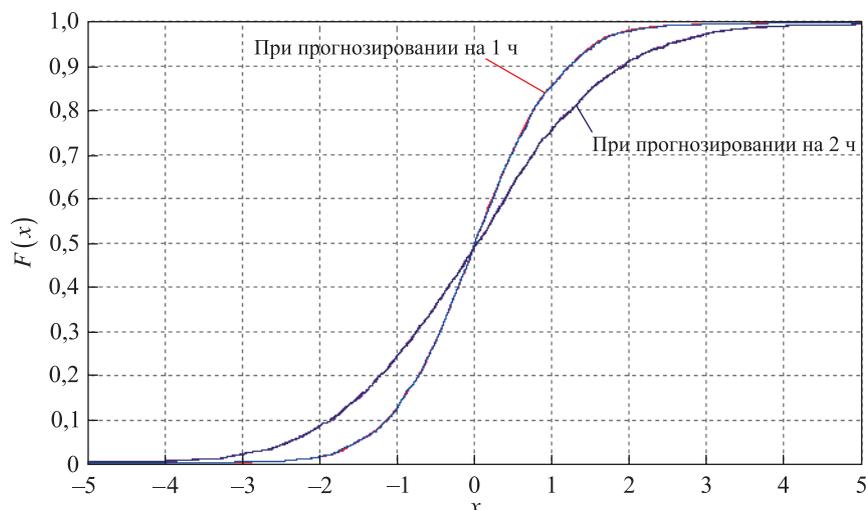


Рис. 8. Функция распределения ошибок прогнозирования

Fig. 8. Prediction error distribution function

Таблица 6

Параметры нормального закона распределения

Table 6

Parameters of normal distribution

Интервал прогноза, ч	Одноэтапный подход		Двухэтапный подход	
	$\sigma, 10^{-9}$	$\mu, 10^{-9}$	$\sigma, 10^{-9}$	$\mu, 10^{-9}$
1	0,916	0,028	0,908	0,026
2	1,465	0,035	1,453	0,027

Примечание. Используемые обозначения: σ – дисперсия; μ – математическое ожидание.

Таким образом, для всех космических аппаратов ГЛОНАСС двухэтапный подход к построению модели прогнозирования РШВ обеспечивает меньшее значение погрешности прогноза, чем одноэтапный подход.

Анализ полученных результатов оценки СКО прогноза РШВ космических аппаратов ГЛОНАСС позволяет сделать следующие выводы.

1. При использовании двухэтапного подхода увеличивается количество интервалов прогноза, для которых СКО не превышает 0,3 и 0,5 нс (для некоторых космических аппаратов рост данного показателя составляет до 2 % при прогнозе на 0,5 ч и до 1 % при прогнозе на 1 и 2 ч).

2. Наилучшая точность прогноза достигается на интервале 0,5 ч, наихудшая – на интервале 2 ч (как для одноэтапного, так и для двухэтапного подхода).

3. Для 76 % космических аппаратов среднее значение СКО прогноза на 0,5 ч не превышает 0,5 нс, для остальных космических аппаратов – 0,9 нс.

4. Количество реализаций прогноза РШВ, для которых СКО не превышает 0,5 нс, находится в диапазонах от 24 до 86 % при прогнозе на 0,5 ч, от 10 до 68 % при прогнозе на 1 ч, от 3 до 45 % при прогнозе на 2 ч.

5. Для 67 % космических аппаратов максимальное значение СКО прогноза на 0,5 ч не превышает 1 нс, для остальных космических аппаратов этот показатель находится в диапазоне от 1,0 до 2,2 нс.

6. Можно выделить группу космических аппаратов (R02, R13, R22), для которых СКО заметно выше, чем для остальных космических аппаратов, как при использовании модели (3), так и при использовании модели (5).

Заключение

Предложен двухэтапный подход к прогнозированию РШВ космических аппаратов ГЛОНАСС относительно системной шкалы времени на основе комбинации линейной модели со скорректированным постоянным коэффициентом, построенной для трендовой составляющей ряда РШВ, и авторегрессионной модели, описывающей остаточную составляющую ряда РШВ.

В целом применение двухэтапного подхода к прогнозированию РШВ позволяет на каждом мерном интервале уменьшить значение СКО, что приводит к увеличению на 1–2 % количества интервалов прогноза, для которых СКО не превышает 0,3–0,5 нс на годовом интервале наблюдения. Однако задача построения математической модели прогнозирования поведения РШВ космических аппаратов ГЛОНАСС относительно системной шкалы времени с погрешностью не более 0,3–0,5 нс по уровню вероятности 0,95 остается актуальной.

Библиографические ссылки

1. Montenbruck O, Steigenberger P, Schönemann E, Hauschild A, Hugentobler U, Dach R, et al. Flight characterization of new generation GNSS satellite clocks. *Navigation*. 2012;59(4):291–302. DOI: 10.1002/navi.22.
2. Сальцберг АВ, Шупен КГ. Роль синхронизации времени в ГНСС и особенности построения высокоточного прогноза расхождения шкал времени. В: Системный анализ, управление и навигация. Тезисы докладов XXV Международной научной конференции; 4–11 июля 2021 г.; Евпатория, Крым. Москва: Издательство Московского авиационного института; 2021. с. 50–51.
3. Liu Xiaogang, Wu Xiaoping, Tian Yanfeng, Deng Yu. [Study on automic prediction of time based on interpolation model with Tchebychev polynomials]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*. 2010;30(1):77–82. Chinese.
4. Zhu Lingfeng, Li Chao, Liu Li, Chen Liucheng, Dong Enqiang. [Research on methods for predicting clock error based on domestic hydrogen atomic clock]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*. 2009;29(1):148–151. Chinese.
5. Wang Yupu, Lu Zhiping, Sun Dashuang, Wang Ning. [A new navigation satellite clock bias prediction method based on modified clock-bias quadratic polynomial model]. *Acta Astronomica Sinica*. 2016;57(1):78–90. Chinese.
6. Xu Xueqing, Hu Xiaogong, Zhou Yonghong, Song Yezhi. Research on high accuracy prediction model of satellite clock bias. In: Sun Jiadong, Jiao Wenhai, Wu Haitao, Lu Mingquan, editors. *China satellite navigation conference (CSNC) 2014 proceedings. Volume 3*. Berlin: Springer; 2014. p. 155–164 (Lecture notes in electrical engineering; volume 305). DOI: 10.1007/978-3-642-54740-9_14.
7. Liu Qiang, Sun Jizhe, Chen Xihong, Liu Jiye, Zhang Qun. [Application analysis of CPSO-LSSVM algorithm in AR clock error prediction]. *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)*. 2014;44(3):807–811. Chinese. DOI: 10.13229/j.cnki.jdxbgxb201403036.
8. Xu Junyi, Zeng Anmin. [Application of ARIMA (0, 2, q) model to prediction of satellite clock error]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*. 2009;29(5):116–120. Chinese.
9. Huang Guanwen, Zhang Qin, Xu Guo Chang. Real-time clock offset prediction with an improved model. *GPS Solution*. 2014; 18(1):95–104. DOI: 10.1007/s10291-013-0313-0.
10. Liang Yueji, Ren Chao, Yang Xiufa, Pang Guangfeng, Lan Lan. A grey model based on first differences in the application of satellite clock bias prediction. *Chinese Astronomy and Astrophysics*. 2016;40(1):79–93. DOI: 10.1016/j.chinastron.2016.01.008.
11. Yu Ye, Huang Mo, Duan Tao, Wang Changyuan, Hu Rui. Enhancing satellite clock bias prediction accuracy in the case of jumps with an improved grey model. *Mathematical Problems in Engineering*. 2020;8186568. DOI: 10.1155/2020/8186568.
12. Zheng Zuoya, Dang Yamin, Lu Xiushan, Xu Weimei. [Prediction model with periodic item and its application to the prediction of GPS satellite clock bias]. *Acta Astronomica Sinica*. 2010;51(1):95–102. Chinese.
13. Сальцберг АВ, Шупен КГ. Возможности использования фильтра Калмана для синхронизации и прогнозирования частотно-временных поправок бортовых шкал времени космических аппаратов системы ГЛОНАСС. *Альманах современной метрологии*. 2017;10:167–179.
14. Huang Guanwen, Zhang Qin. Real-time estimation of satellite clock offset using adaptively robust Kalman filter with classified adaptive factors. *GPS Solutions*. 2012;16(4):531–539. DOI: 10.1007/s10291-012-0254-z.
15. Черникова ОС, Марарескул ТА. Прогнозирование расхождения шкал времени на основе скорректированной линейной модели. *Системы анализа и обработки данных*. 2022;87(3):37–58. DOI: 10.17212/2782-2001-2022-3-37-58.
16. Ганжа ВС, Марарескул ТА, Муратов ДС. Калибровка бортовой аппаратуры измерения псевдодальности между космическими аппаратами для повышения точности определения расхождения их шкал времени. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2021;12:100–106. DOI: 10.18698/0536-1044-2021-12-100-106.
17. Жданов АИ, Кацюба ОА. Идентификация по методу наименьших квадратов параметров уравнений авторегрессии при аддитивных ошибках измерений. *Автоматика и телемеханика*. 1982;2:29–38.

References

1. Montenbruck O, Steigenberger P, Schönemann E, Hauschild A, Hugentobler U, Dach R, et al. Flight characterization of new generation GNSS satellite clocks. *Navigation*. 2012;59(4):291–302. DOI: 10.1002/navi.22.
2. Salzberg AV, Shupen KG. [The role of time synchronization in GNSS and the features of constructing a high-precision prediction of time scale divergence]. In: Sistemnyi analiz, upravlenie i navigatsiya. Tezisy dokladov XXV Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii; 4–11 iyulya 2021 g.; Evpatoriya, Krym [System analysis, management and navigation. Proceedings of the 25th International scientific conference; 2021 July 4–11; Evpatoria, Crimea]. Moscow: Publishing House of the Moscow Aviation Institute; 2021. p. 50–51. Russian.
3. Liu Xiaogang, Wu Xiaoping, Tian Yanfeng, Deng Yu. [Study on automic prediction of time based on interpolation model with Tchebychev polynomials]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*. 2010;30(1):77–82. Chinese.
4. Zhu Lingfeng, Li Chao, Liu Li, Chen Liucheng, Dong Enqiang. [Research on methods for predicting clock error based on domestic hydrogen atomic clock]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*. 2009;29(1):148–151. Chinese.
5. Wang Yupu, Lu Zhiping, Sun Dashuang, Wang Ning. [A new navigation satellite clock bias prediction method based on modified clock-bias quadratic polynomial model]. *Acta Astronomica Sinica*. 2016;57(1):78–90. Chinese.
6. Xu Xueqing, Hu Xiaogong, Zhou Yonghong, Song Yezhi. Research on high accuracy prediction model of satellite clock bias. In: Sun Jiadong, Jiao Wenhai, Wu Haitao, Lu Mingquan, editors. *China satellite navigation conference (CSNC) 2014 proceedings. Volume 3*. Berlin: Springer; 2014. p. 155–164 (Lecture notes in electrical engineering; volume 305). DOI: 10.1007/978-3-642-54740-9_14.

7. Liu Qiang, Sun Jizhe, Chen Xihong, Liu Jiye, Zhang Qun. [Application analysis of CPSO-LSSVM algorithm in AR clock error prediction]. *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)*. 2014;44(3):807–811. Chinese. DOI: 10.13229/j.cnki.jdxbgxb201403036.
8. Xu Junyi, Zeng Anmin. [Application of ARIMA (0, 2, q) model to prediction of satellite clock error]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*. 2009;29(5):116–120. Chinese.
9. Huang Guan Wen, Zhang Qin, Xu Guo Chang. Real-time clock offset prediction with an improved model. *GPS Solution*. 2014; 18(1):95–104. DOI: 10.1007/s10291-013-0313-0.
10. Liang Yueji, Ren Chao, Yang Xiufa, Pang Guangfeng, Lan Lan. A grey model based on first differences in the application of satellite clock bias prediction. *Chinese Astronomy and Astrophysics*. 2016;40(1):79–93. DOI: 10.1016/j.chinastron.2016.01.008.
11. Yu Ye, Huang Mo, Duan Tao, Wang Changyuan, Hu Rui. Enhancing satellite clock bias prediction accuracy in the case of jumps with an improved grey model. *Mathematical Problems in Engineering*. 2020:8186568. DOI: 10.1155/2020/8186568.
12. Zheng Zuoya, Dang Yamin, Lu Xiushan, Xu Weimei. [Prediction model with periodic item and its application to the prediction of GPS satellite clock bias]. *Acta Astronomica Sinica*. 2010;51(1):95–102. Chinese.
13. Salzberg AV, Shupen KG. The possibility of using the Kalman filter for synchronization and prediction of the time and frequency correction of the on-board time scale of GLONASS system spacecraft. *Al'manac of Modern Metrology*. 2017;10:167–179. Russian.
14. Huang Guanwen, Zhang Qin. Real-time estimation of satellite clock offset using adaptively robust Kalman filter with classified adaptive factors. *GPS Solutions*. 2012;16(4):531–539. DOI: 10.1007/s10291-012-0254-z.
15. Chernikova OS, Marareskul TA. Prediction of time scale divergence based on an adjusted linear model. *Analysis and Data Processing Systems*. 2022;87(3):37–58. Russian. DOI: 10.17212/2782-2001-2022-3-37-58.
16. Ganzha VS, Marareskul TA, Muratov DS. Calibration of onboard equipment for measuring pseudo-range between spacecraft to improve the accuracy of determining their time scales discrepancy. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 2021;12:100–106. Russian. DOI: 10.18698/0536-1044-2021-12-100-106.
17. Zhdanov AI, Katsyuba OA. Identification by the method of least squares of autoregression equation parameters with additive measurement errors. *Avtomatika i telemekhanika*. 1982;2:29–38. Russian.

Получена 07.02.2023 / исправлена 23.05.2023 / принята 02.06.2023.
Received 07.02.2023 / revised 23.05.2023 / accepted 02.06.2023.

ОСОБЕННОСТИ МАШИННОЙ АРИФМЕТИКИ ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ МОДУЛЯРНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СТРУКТУР

А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ¹⁾, Е. И. КОЗЛОВА¹⁾, А. А. КОЛЯДА¹⁾

¹⁾Институт прикладных физических проблем им. А. Н. Севченко БГУ,
ул. Академика Курчатова, 7, 220045, г. Минск, Беларусь

Рассмотрены процедуры формирования модулярного кода для различных вариантов модулярных систем счисления. Определены особенности машинной арифметики базовых интегральных характеристик модулярного кода. Предложено доказательство теоремы о минимально избыточном модулярном кодировании как эффективном способе снижения времени вычисления интегральных характеристик модулярного кода. Показано, что введение в модулярный код минимальной избыточности существенно упрощает расчет интервально-индексных характеристик и связанных с ними форм представления целых чисел при реализации ряда немодульных операций. Отмечено некоторое уменьшение эффективности минимально избыточных модулярных систем счисления по мере увеличения в используемых приложениях количества интегральных характеристик модулярного кода, а также при изменении знака числа или цифр полиадического кода. Это обстоятельство не снижает целесообразности применения минимально избыточных модулярных систем счисления в широкой сфере приложений минимально избыточной модулярной арифметики, включая системы цифровой обработки сигналов, защиты информации, информационные технологии и др.

Ключевые слова: модулярная арифметика; минимально избыточный модулярный код; интегральные характеристики модулярного кода.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Цифровые и космические технологии, безопасность общества и государства» (подпрограмма «Цифровые технологии и космическая информатика», задание 5.1.6.3).

Образец цитирования:

Чернявский АФ, Козлова ЕИ, Коляда АА. Особенности машинной арифметики высокопроизводительных модулярных вычислительных структур. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023; 2:94–101.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-94-101>
EDN: EQLSUS

For citation:

Chernyavsky AF, Kozlova EI, Kolyada AA. Features of machine arithmetics of high-performance modular computing structures. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;2:94–101. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-94-101>
EDN: EQLSUS

Авторы:

Александр Федорович Чернявский – доктор технических наук, академик НАН Беларуси, профессор; заведующий лабораторией специализированных вычислительных систем.
Елена Ивановна Козлова – кандидат физико-математических наук, доцент; научный сотрудник лаборатории специализированных вычислительных систем.
Андрей Алексеевич Коляда – доктор физико-математических наук; главный научный сотрудник лаборатории специализированных вычислительных систем.

Authors:

Alexander F. Chernyavsky, doctor of science (engineering), academician of the National Academy of Sciences of Belarus, full professor; head of the laboratory of specialised computer systems.
Elena I. Kozlova, PhD (physics and mathematics), docent; researcher at the laboratory of specialised computer systems.
kozlova@bsu.by
<https://orcid.org/0000-0003-0317-7429>
Andrey A. Kolyada, doctor of science (physics and mathematics); chief researcher at the laboratory of specialised computer systems.

FEATURES OF MACHINE ARITHMETICS OF HIGH-PERFORMANCE MODULAR COMPUTING STRUCTURES

A. F. CHERNYAVSKY^a, E. I. KOZLOVA^a, A. A. KOLYADA^a

^aA. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems,
Belarusian State University, 7 Akademika Kurchatava Street, Minsk 220045, Belarus

Corresponding author: E. I. Kozlova (kozlova@bsu.by)

The procedures for generating a modular code for various variants of modular number systems are herein considered. The features of machine arithmetic of the basic integral characteristics of the modular code are noted. Proof of the theorem on minimally redundant modular coding is proposed as an effective way to reduce the time of computing the integral characteristics of a modular code. It is shown that the introduction of minimal redundancy into a modular code greatly simplifies the calculation of interval-index characteristics and related forms of representing integers when implementing a number of non-modular operations. We noted a certain decrease in the efficiency of minimally redundant modular number systems if the number of integral characteristics of the modular code, the sign of the number or digits of the polyadic code increases in the used applications. This circumstance does not reduce the expediency of using minimally redundant modular number systems in a wide range of applications of minimally redundant modular arithmetics, including digital signal processing, information security, information technology, etc.

Keywords: modular arithmetics; minimally redundant modular code; integral characteristics of minimally redundant modular code.

Acknowledgements. This work was supported by the state programme of scientific research «Digital and space technologies, security of society and the state» (subprogramme «Digital technologies and space informatics»), assignment 5.1.6.3).

Введение

Существующие формы параллельной обработки информации реализуются различными числовыми системами с параллельной структурой. В последние годы наблюдается рост внимания к исследованиям в области теории и приложений модулярных систем счисления (МСС), которые характеризуются максимальным уровнем внутреннего параллелизма. С точки зрения принципов высокоскоростных вариантов построения машинной арифметики наиболее существенными достоинствами МСС являются табличная структура алгоритмов, параллелизм базовых немодульных процедур, их модульность и простота конвейеризации на уровне операций над малоразрядными вычетами, высокая эффективность корректирующих кодовых конструкций.

В работе рассматриваются процедуры формирования модулярного кода для различных вариантов МСС [1–9]. Отмечаются особенности машинной арифметики базовых интегральных характеристик модулярного кода (ИХМК). Намеренно редко используется специальная математическая терминология, характерная для большинства публикаций выбранной тематики. По мнению авторов, это обеспечит положительную заинтересованность в прочтении статьи широким кругом специалистов радиофизического и инженерно-технического профиля.

Формирование модулярного кода

Устройства модулярного типа реализуют вычислительные процессы в виде последовательностей модульных операций сложения, вычитания и умножения целых чисел без анализа на переполнение. Арифметические процедуры над элементами диапазона \mathbf{M} в МСС производятся независимыми друг от друга операциями по ее основаниям (каждому из модулей), что и определяет параллелизм таких систем. Обычно эти процессы сопровождаются операциями деления на константу (масштабирования), одиночными немодульными операциями и др.

Фундаментальную значимость в модулярной арифметике имеет процедура формирования модулярного кода (x_1, x_2, \dots, x_k) , отвечающего множеству целых чисел \mathbf{X} и удовлетворяющего системе сравнений

$$\begin{aligned} X &\equiv x_1 \pmod{m_1}, \\ X &\equiv x_2 \pmod{m_2}, \\ &\dots\dots\dots \\ X &\equiv x_k \pmod{m_k}. \end{aligned} \tag{1}$$

Если натуральные числа m_1, m_2, \dots, m_k попарно просты (каждый модуль m_i имеет по крайней мере два положительных делителя – m_i и 1), то решением этой системы является класс вычетов по модулю

$M_k = \prod_{i=1}^k m_i$, который задается сравнением

$$X_{i=1}^k \equiv \sum_{i=1}^k M_{i,k} \mu_{i,k} x_i \pmod{M_k}, \quad (2)$$

где главные компоненты

$$M_{i,k} = \frac{M_k}{m_i}, \quad \mu_{i,k} = \left| M_{i,k}^{-1} \right|_{m_i}, \quad x_i = [X]_{m_i}, \quad i = \overline{1, k}.$$

Параметр $\left| M_{i,k}^{-1} \right|_{m_i} = x$, являющийся мультипликативной инверсией, т. е. обратным элементом по модулю m_i величины $M_{i,k}^{-1} (i, l) = X$, определяется по стандартной формуле:

$$x_i = |X|_{m_i},$$

где

$$|X|_m = 1, \quad m \in m_i. \quad (3)$$

В избыточных МСС каждому модулярному коду (x_1, x_2, \dots, x_k) отвечает целое число, а не класс вычетов, при этом взаимная однозначность обеспечивается выбором рабочего диапазона \mathbf{D} на основе различных множеств вычетов. Эту роль, как правило, выполняют множества

$$Z_{M_k} = \{0, 1, \dots, M_k - 1\}$$

или

$$Z_{M_k}^- = \left\{ -\left\lfloor \frac{M_k}{2} \right\rfloor, -\left\lfloor \frac{M_k}{2} \right\rfloor + 1, \dots, \left\lfloor \frac{M_k}{2} \right\rfloor - 1 \right\}.$$

При модулярном кодировании каждому $X \in \mathbf{D}$ ставится в соответствие код, представляющий собой набор (x_1, x_2, \dots, x_k) остатков $x_i = |X|_{m_i}$ от деления X на m_i , где $i = \overline{1, k}$. Используется запись $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$.

Декодирующее отображение выполняется по правилам

$$X = \left| \sum_{i=1}^k M_{i,k} \mu_{i,k} x_i \right|_{M_k} \quad \text{при } X \in Z_{M_k},$$

$$X = \left| \sum_{i=1}^k M_{i,k} \mu_{i,k} x_i \right|_{M_k^-} \quad \text{при } X \in Z_{M_k}^-.$$

Пример 1. Решение системы сравнений (1) на основании класса вычетов по модулю M_k .

Представим целое число $X = 18$ модулярным кодом простых чисел ($m_1 = 2, m_2 = 3, m_3 = 11, m_4 = 13$). Соответствующая система сравнений имеет вид

$$\begin{aligned} 18 &\equiv 0 \pmod{m_1 = 2}, \\ 18 &\equiv 0 \pmod{m_2 = 3}, \\ 18 &\equiv 7 \pmod{m_3 = 11}, \\ 18 &\equiv 5 \pmod{m_4 = 13}. \end{aligned} \quad (4)$$

На основании сравнения (2) для главных компонент системы сравнений (4) получаем

$$M_4 = 858, M_{1,4} = 429, M_{2,4} = 286, M_{3,4} = 78, M_{4,4} = 66,$$

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 7, x_4 = 5,$$

$$\mu_{3,4} = 1, \mu_{4,4} = 1.$$

Главные компоненты $\mu_{1,4}$ и $\mu_{2,4}$ не имеют значений.

Проверка: $X \equiv \sum_{i=1}^4 M_{i,4} \mu_{i,4} x_i \pmod{858} = (78 \cdot 7 + 66 \cdot 5) \pmod{858} = 876 \pmod{858} = 18$.

Когда целое число $X \in Z_{M_k}^-$ представляется модулярным кодом элемента $|X|_{M_k}$ диапазона Z_{M_k} , соответствие между ними описывается выражением

$$X = |X|_{M_k} - \text{sn}(X)M_k, \quad (5)$$

где $\text{sn}(X)$ – знак данного числа.

Наряду с другими версиями модулярной арифметики на практике часто применяется версия, использующая полиадическую форму целого числа, которая имеет вид

$$|X|_{M_k} = \sum_{i=1}^k M_{i-1}x_i, \quad X \in Z, \quad M_0 = 1, \quad x_i \in Z_{m_i}.$$

С учетом выражения (5) получаем равенство

$$\text{sn}(X) = \left\lfloor \frac{2[X]_{M_k}}{M_k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2x_k}{m_k} \right\rfloor,$$

где x_k – старший коэффициент полиадической формы целого числа $|X|_{M_k}$.

Алгоритм расчета ИХМК (ранга $\rho_k(X)$ интервального индекса $I_k(X)$ и полиадического кода (x_k, \dots, x_2, x_1) числа X) позволяет также определять знак числа из симметричного диапазона $Z_{M_k}^-$.

Модулярный код (x_1, x_2, \dots, x_k) в явном виде не содержит информацию о величине элементов его рабочего диапазона \mathbf{D} . Для выполнения операций, каким-либо образом зависящих от местоположения элементов во множестве или за пределом диапазона \mathbf{D} , в МСС используются определенные формы и операции представления целого числа через цифры модулярного кода. Базовые формы целого числа для немодульных операций включают одну или несколько ИХМК.

Для выполнения сложных немодульных операций (контроль переполнения, сравнение чисел, определение знака числа, округление, деление и др.) в МСС используются базовые ИХМК – ранг, ядро, минимальный след, коэффициенты полиадического представления чисел. Выбор ИХМК и методов их формирования определяет сложность соответствующих алгоритмов реализации немодульных процедур. Различные ИХМК позволяют в рамках определенного базового представления чисел выделять из модулярного кода числа искомую информацию о его величине.

Базовые интегральные характеристики МСС

Ранговая форма целого числа $|X|_{M_l}$ l -го порядка в МСС с основаниями m_1, m_2, \dots, m_l и диапазоном $Z_{M_l} = \{0, 1, \dots, M_l - 1\}$ описывается выражениями [2]

$$|X|_{M_l} = \sum_{i=1}^l M \left| M_{i,l}^{-1} x_i \right|_{m_i} - M_l \rho_l(X) \sum_{i=1}^l M_{i,l} x_{i,l} - M_l \rho_l(X), \quad x_{i,l} = \left| M_{i,l}^{-1} x_i \right|_{m_i}. \quad (6)$$

Следует отметить, что для каждого числа $|X|_{M_l} \in Z_{M_l}$ существует единственное значение рангового числа $\rho_l(X) = \rho(x_1, x_2, \dots, x_l)$. Поскольку вычисления по выражению (6) легко распараллеливаются, оно широко используется для выполнения немодульных операций модулярными конвейерными структурами, при этом основной операцией является определение рангового числа $\rho(x)$.

Учитывая широкое распространение системного формирования базовых ИХМК на основе последовательностей значений $M_{i,l}^{-1}$, рассмотрим процедуру вычисления структуры и элементов одной из таких последовательностей.

Пример 2. Формирование последовательности структурных значений $\left| M_{i,k}^{-1} \right|_{m_i}$, являющихся мультипликативной инверсией по модулям m_i соответствующих элементов исходной последовательности модулей $M_{i,k}$.

Для МСС с основаниями $m_1 = 11, m_2 = 13, m_3 = 15, m_4 = 16$ получены следующие значения модулей $M_{i,k}$:

$$M_k = M_4 = m_1 m_2 m_3 m_4 = 34\,320,$$

$$M_{1,k} = M_{1,4} = \frac{M_k}{m_1} = 3120, \quad M_{2,4} = \frac{M_k}{m_2} = 2640, \quad M_{3,4} = \frac{M_k}{m_3} = 2288,$$

$$M_{4,4} = \frac{M_k}{m_4} = 2145, M_{1,3} = \frac{M_3}{m_1} = \frac{m_1 m_2 m_3}{m_1} = 195,$$

$$M_{2,3} = \frac{M_3}{m_2} = 165, M_{3,3} = \frac{M_3}{m_3} = 143,$$

$$M_{1,2} = \frac{m_1 m_2}{m_1} = 13, M_{2,2} = \frac{m_1 m_2}{m_2} = 11.$$

Используем выражение (3) для определения последовательности значений $|M_{i,l}^{-1}|$, являющихся обратными элементами по модулю m_i значений $M_{i,l}$, $i, l = \overline{1, k}$, исходной последовательности, в результате получаем

$$|M_{1,4}^{-1}|_{1,1} = 8, |M_{2,4}^{-1}|_{1,3} = 1, |M_{3,4}^{-1}|_{1,5} = 2, |M_{4,4}^{-1}|_{1,6} = 1, |M_{2,2}^{-1}|_{1,3} = 6,$$

$$|M_{1,3}^{-1}|_{1,1} = 7, |M_{2,3}^{-1}|_{1,3} = 3, |M_{3,3}^{-1}|_{1,5} = 2, |M_{1,2}^{-1}|_{1,1} = 6.$$

Величина $N_l(X) = \left\lfloor \frac{X}{M_l} \right\rfloor$ является интервальным номером целого числа X относительно модулей $m_1, m_2, m_3, \dots, m_l, l \geq 1$.

В МСС с основаниями $m_1, m_2, m_3, \dots, m_l > l - 2, l > 1$, и диапазоном Z_{M_l} ранг $\rho_l(|X|_{M_l})$ числа $|X|_{M_l} = (x_1, x_2, \dots, x_l), X \in Z$, представляется в виде

$$\rho_l(X) = \hat{\rho}(X) + \Theta_l(X), \quad (7)$$

где

$$\hat{\rho}_l(X) = \left\lfloor m_l^{-1} \sum_{i=1}^l R_{i,l}(x_i) \right\rfloor,$$

$$R_{i,l}(x_i) = \left\lfloor \frac{m_l}{m_i} |M_{i,l}^{-1} x_i|_{m_i} \right\rfloor = \left\lfloor -m_i^{-1} |M_{i,l-1}^{-1} x_i|_{m_i} \right\rfloor, i = \overline{1, l-1}, \quad (8)$$

$$R_{l,l}(x_{l,l}) = \left\lfloor \frac{x_l}{M_{l-1}} \right\rfloor. \quad (9)$$

В МСС с основаниями m_1, m_2, \dots, m_l для числа $|X|_{M_l} = (x_1, x_2, \dots, x_l), X \in Z, l > 1$, максимальное значение ранга $\rho_l(X) = \rho_l(|X|_{M_l})$ удовлетворяет условию

$$\rho_l(X) \leq \rho_{l, \max} = \max \{ \rho_l(A) \mid A \in Z_{M_l} \} \leq l - 1, l > 1.$$

Величина $\Theta_l(X)$ является минимальной ИХМК для целого числа X в МСС с основаниями $m_1, m_2, \dots, m_{l-1}, m_l \geq l - 2, l > 1$, и принимает значение 0 или 1.

Интервальный индекс $I_l(X)$ произвольного элемента $X = (x_1, x_2, \dots, x_l)$ диапазона Z_{M_l} МСС с основаниями $m_1, m_2, \dots, m_l > l - 2, l > 1$, описывается формулой

$$I_l(X) = \hat{I}_l(X) + m_l \Theta_l(X),$$

$$\hat{I}_l(X) = \left\lfloor \sum_{i=1}^l R_{i,l}(x_i) \right\rfloor.$$

Для интервального индекса $I(X)$ и его эвклидовых составляющих – компьютерного интервального индекса $\hat{I}(X)$ и главного интервального индекса $J(X)$ произвольного элемента $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ симметричного диапазона Z_{2M}^- МСС с основаниями $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}, m_k = 2m_0, m_k \geq k - 2$, – действительны следующие соотношения [5; 6; 9]:

$$I(X) = \left\lfloor \frac{X}{M_{k-1}} \right\rfloor - \rho_{k-1}(X), \quad (10)$$

$$\hat{I}(X) = \hat{I}(X) - m_k(Q_k(X) + \text{sn}(X)),$$

$$\hat{I}(X) = |I(X)|_{m_0} = |\hat{I}_k(X)|_{m_0},$$

$$J(X) = \left\lfloor \frac{I(X)}{m_0} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\hat{I}_k(X)}{m_0} \right\rfloor - 2(Q_k(X) + \text{sn}(X)),$$

$$\hat{I}_k(X) = I(|X|_{2M})_{m_k} = \left\lfloor \sum_{i=1}^k R_{i,k}(x_i) \right\rfloor_{m_k}.$$

Вычеты $R_{i,k}$ рассчитываются по формулам (8) и (9).

Алгоритм вычисления ИХМК с применением интервально-индексного метода четного модуля рассмотрен в работе [9].

Для улучшения арифметических и иных свойств числовых систем часто используется кодовая избыточность. Применение избыточности кодирования элементов рабочего диапазона в модулярных структурах существенно упрощает выполнение немодульных операций. Однако это обеспечивается только при введении относительно большой избыточности и, как следствие, требует значительных аппаратных затрат. Отмеченный недостаток в значительной мере устраняется при использовании специфического способа введения избыточности, положенного в основу минимально избыточной МСС [1; 3; 4; 7].

В избыточной МСС интервально-модульная форма (ИМФ) целого числа X задается соотношением

$$X = \sum_{i=1}^{l-1} M_{i,l-1} \left[M_{i,l-1}^{-1} x_i \right]_{m_i} + M_{l-1} I_l(X) = \sum_{i=1}^{l-1} M_{i,l-1} x_{i,l-1} + M_{l-1} I(X), \quad (11)$$

$$I(X) = - \sum_{i=1}^{k-1} m_i^{-1} \left[M_{i,k-1}^{-1} x_i \right]_{m_i} + M_{k-1}^{-1} X.$$

Набор величин $(x_{1,l-1}, x_{2,l-2}, \dots, x_{l-1,l-1})$ и интервальный индекс $I(X)$ формируют интервально-модулярный код целого числа X .

С помощью ранговой и интервально-индексной характеристик, а также связанных с ними форм целого числа можно реализовать все немодульные операции.

Минимально избыточная МСС (МИМСС)

Основой минимально избыточной конфигурации процедуры расчета ИХМК служат ИМФ (11), евклидовы составляющие – компьютерный интервальный индекс $\hat{I}(X)$ и главный интервальный индекс $J(X)$, а также интервальный номер $N(X) = \left\lfloor \frac{X}{M} \right\rfloor$, минимальная ИХМК $\Theta_l(X)$ и вспомогательный модуль m_0 .

При минимально избыточном модулярном кодировании применяется диапазон \mathbf{D} , мощность которого меньше мощности диапазона $Z_{M_k}^-$ классической неизбыточной МСС с базисом $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$.

В соответствии с китайской теоремой об остатках при любом $l > 1$ задаваемое ИМФ (11) отображение $I_l(X)$ числа X однозначно как на множестве \mathbf{Z} , так и на диапазоне $Z_{M_k}^-$.

Теорема (о минимально избыточном модулярном кодировании как эффективном способе снижения времени вычисления ИХМК). *Чтобы в МСС с попарно простыми основаниями m_1, m_2, \dots, m_k интервальный индекс $I(X)$ каждого элемента $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $x_i = |X|_{m_i}$, $i = \overline{1, k}$, диапазона $\mathbf{D} = Z_{2M}^- = (-M, -M+1, \dots, M-1)$ ($M = m_0 M_{r-1} = m_0 m_1 \dots m_{k-1}$; m_0 – вспомогательный модуль) полностью определялся компьютерным интервальным индексом – вычетом $\hat{I}_k(X)$, необходимо и достаточно выполнить следующее условие [9]:*

$$m_k \geq 2m + \rho, \quad m_0 > \rho, \quad \rho = \rho_{k-1, \max},$$

где $\rho = \rho_{k-1, \max}$ – максимальное значение ранговой характеристики $\rho_{k-1}(X)$ (при $l = k-1$ в формуле (7)).

Проанализируем следующие расчетные значения для интервального индекса $I(X)$ целого числа X :

$$I(X) = \hat{I}_k(X) - m_k \operatorname{sn}(m_0 - 1 - \hat{I}_k(X)) = \hat{I}_k(X), \text{ если } \hat{I}_k(X) < m_0, \quad (12)$$

$$I(X) = \hat{I}_k(X) - m_k, \text{ если } \hat{I}_k(X) \geq m_k.$$

Вычеты $R_{i,k}(x)$ и $R_{k,k}(x)$ рассчитываются по формулам (8) и (9).

На основании формулы (10) получены следующие экстремальные значения интервального индекса $I(X)$:

$$I_{\min} = \left\{ \left\lfloor \frac{X}{M_{k-1}} \right\rfloor - \rho_{k-1}(X) \mid X \in D \right\} = \left\lfloor \frac{-M + X_0}{M_{k-1}} \right\rfloor - \rho_{k-1}(-M - X_0) = -m_0 - \rho_0, \quad (13)$$

$$I_{\max} = \left\{ \left\lfloor \frac{X}{M_{k-1}} \right\rfloor - \rho_{k-1}(X) \mid X \in D \right\} = \left\lfloor \frac{-M - M_{k-1}}{M_{k-1}} \right\rfloor - \rho_{k-1}(-M - M_{k-1}) = m_0 - 1.$$

С учетом выражений (13) расчетные значения (12) для интервального индекса $I(X)$ целого числа X можно представить в виде

$$I(X) = \hat{I}_k(X) - m_k \operatorname{sn}(m_0 - 1 - \hat{I}_k(X)) = \hat{I}_k(X), \text{ если } \hat{I}_k(X) \leq I_{\max},$$

$$I(X) = \hat{I}_k(X) - m_k, \text{ если } \hat{I}_k(X) > I_{\max}. \quad (14)$$

Теорема полностью доказана.

Сравнение формул (7) и (14) показывает, что переход к минимально избыточному кодированию позволяет при оценке интервального индекса $I_k(X)$ вместо трудоемкой процедуры сужения ИМФ целого числа X применять относительно простое выражение $\operatorname{sn}(m_0 - 1 - \hat{I}_k(X))$.

Использование МИМСС с кодовой избыточностью значительно уменьшает вычислительную сложность определения значений интервального индекса $I(X)$ целого числа X , компьютерного интервального индекса $\hat{I}(X) = |I(X)|_{m_0}$ и главного интервального индекса $J(X) = \left\lfloor \frac{I(X)}{m_0} \right\rfloor$. Так, вычисление интервального индекса $I_k(X)$ целого числа X , заданного неизбыточным модулярным кодом (x_1, x_2, \dots, x_k) , требует $0,5(k^2 + 5k - 12)$ модульных операций и $0,5k(k-1)$ таблиц для хранения вычетов (8) и (9). В МИМСС соответствующие затраты по формулам (12) составляют k модульных операций и k таблиц для хранения вычетов [9]. В случае минимальной избыточности коэффициенты информационной эффективности за счет снижения вычислительных затрат на определение интегральных характеристик оцениваются значениями

$$K_{\text{МО}} = \frac{k^2 + 5k - 12}{2k}$$

для числа модульных операций,

$$K_{\text{Т}} = \frac{k-1}{2}$$

для количества необходимых таблиц.

Таким образом, с увеличением числа k оснований МИМСС коэффициенты информационной эффективности $K_{\text{МО}}$ и $K_{\text{Т}}$ алгоритмических структур возрастают, асимптотически приближаясь к величине $\frac{k}{2}$.

Практическую важность имеет обеспечиваемая в МИМСС простота выполнения вычислительных процедур в симметричных диапазонах. В отличие от неизбыточных МСС идентификация отрицательных и неотрицательных компонент рабочего диапазона $\mathbf{D} = Z_{2M}^-$ производится с помощью интервального номера $N(X) = \left\lfloor \frac{X}{M} \right\rfloor$, формируемого по главному интервальному индексу $J(X) = \left\lfloor \frac{I(X)}{m_0} \right\rfloor$ и минимальной ИХМК $\Theta(X)$, которые отвечают числу $X \in Z_{2M}^-$ в МСС с базисом $\{m_1, m_2, \dots, m_{k-1}, m_0\}$ и диапазоном Z_M , без использования четного модуля m_k .

Заключение

Введение в модулярный код минимальной избыточности существенно упрощает расчет интервально-индексных характеристик и связанных с ними форм представления целого числа при реализации ряда немодульных операций. Алгоритм расчета ИХМК можно рекомендовать в качестве эффективной основы синтеза немодульных процедур, включая расширение кода, масштабирование, деление целого числа (общий случай), преобразование модулярного кода в позиционную систему счисления, контроль ошибок и др. Однако следует отметить уменьшение эффективности МИМСС по мере увеличения в используемых приложениях количества ИХМК, а также при изменении знака числа или цифр полиадического кода. Отмеченное обстоятельство не снижает целесообразности применения МИМСС в широкой сфере приложений минимально избыточной модулярной арифметики, таких как системы цифровой обработки сигналов, защиты информации, информационные технологии и др.

Библиографические ссылки

1. Чернявский АФ, Аксенов АМ, Коляда АА, Ревинский ВВ, Шабинская ЕВ. Мультипроцессорная реализация алгоритма Винограда для ДПФ на основе минимально избыточной модулярной арифметики. *Информатика*. 2005;4:78–86.
2. Коляда АА, Чернявский АФ. Общая технология вычисления интегральных характеристик модулярного кода. *Доклады Национальной академии наук Беларуси*. 2008;52(4):38–44.
3. Чернявский АФ, Коляда АА. Метод и алгоритм масштабирования в минимально избыточной модулярной системе счисления. *Доклады Национальной академии наук Беларуси*. 2009;53(3):29–37.
4. Чернявский АФ, Коляда АА. Умножение по большим простым модулям на основе минимально избыточной модулярной схемы Барретта. *Доклады Национальной академии наук Беларуси*. 2010;54(2):40–53.
5. Коляда АА, Чернявский АФ. Интегрально-характеристическая база модулярных систем счисления. *Информатика*. 2013;1:106–119.
6. Чернявский АФ, Коляда АА, Коляда НА, Шабинская ЕВ. Интервально-индексная технология расширения модулярного кода. *Электроника инфо*. 2010;6:66–71.
7. Чернявский АФ, Коляда АА, Коляда НА, Шабинская ЕВ. Умножение по большим модулям методом Монгюмери с применением минимально избыточной модулярной арифметики. *Нейрокомпьютеры: разработка, применение*. 2010;9:3–8.
8. Коляда АА, Чернявский АФ. Интервально-индексный метод четного модуля для расчета интегральных характеристик кода неизбыточной МСС с симметричным диапазоном. *Доклады Национальной академии наук Беларуси*. 2013;57(1):38–45.
9. Червяков НИ, Коляда АА, Ляхов ПА. *Модулярная арифметика и ее приложения в инфокоммуникационных технологиях*. Москва: Физматлит; 2017. 400 с.

References

1. Chernyavsky AF, Aksenov AM, Kolyada AA, Revinsky VV, Shabinskaya HV. Multiprocessor realization of Winograd's algorithm for DFT on the basis of minimally superfluous modular arithmetics. *Informatics*. 2005;4:78–86. Russian.
2. Kolyada AA, Chernyavsky AF. [The general technology of calculation of integral characteristics of a modular code]. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 2008;52(4):38–44. Russian.
3. Chernyavsky AF, Kolyada AA. [Scaling method and algorithm in the minimally superfluous modular number system]. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 2009;53(3):29–37. Russian.
4. Chernyavsky AF, Kolyada AA. Multiplication on big simple modules on the basis of Barrett's minimally superfluous modular scheme. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 2010;54(2):40–53. Russian.
5. Kolyada AA, Chernyavsky AF. Integrated characteristic base of modular number systems. *Informatics*. 2013;1:106–119. Russian.
6. Chernyavsky AF, Kolyada AA, Kolyada NA, Shabinskaya EV. [Interval-index technology of extension of modular code]. *Elektronika info*. 2010;6:66–71. Russian.
7. Chernyavsky AF, Kolyada AA, Kolyada NA, Shabinskaya EV. Montgomery's method for multiplication of large modules with application of the minimally redundant modular arithmetic. *Neurocomputers*. 2010;9:3–8. Russian.
8. Kolyada AA, Chernyavsky AF. Interval-index method of the even module for calculation of integrated characteristics of the code irredundant modular number system with the symmetric range. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 2013;57(1):38–45. Russian.
9. Chervyakov NI, Kolyada AA, Lyakhov PA. *Modulyarnaya arifmetika i ee prilozheniya v infokommunikatsionnykh tekhnologiyakh* [Modular arithmetic and its applications in infocommunication technologies]. Moscow: Fizmatlit; 2017. 400 p. Russian.

Получена 06.04.2023 / исправлена 10.05.2023 / принята 15.05.2023.
Received 06.04.2023 / revised 10.05.2023 / accepted 15.05.2023.

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ В БГУ РАБОТ INDICATIVE ABSTRACTS OF THE PAPERS DEPOSITED IN BSU

УДК 316:517(075.8)

Мартон М. В. **Основы математического анализа в социально-экономической сфере** [Электронный ресурс] : учеб.-метод. пособие / М. В. Мартон, О. А. Велько, Н. А. Моисеева ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 79 с. : ил. Библиогр.: с. 78–79. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/295970>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 29.03.2023, № 002229032023.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов факультета философии и социальных наук БГУ специальностей «социология», «социальные коммуникации». Каждая тема содержит исторические сведения, теоретический материал, примеры решения, задачи для самостоятельного решения и вопросы для самоконтроля. Многие математические понятия иллюстрируются примерами из социологии и экономики.

УДК 316:512.64(075.8)

Велько О. А. **Элементы линейной алгебры и их применение в социально-экономической сфере** [Электронный ресурс] : учеб.-метод. пособие / О. А. Велько, М. В. Мартон, Н. А. Моисеева ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 74 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 73–74. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/295977>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 29.03.2023, № 002329032023.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов факультета философии и социальных наук БГУ специальностей «социология», «социальные коммуникации». Каждая тема содержит исторические сведения, теоретический материал, примеры решения, задачи для самостоятельного решения и вопросы для самоконтроля. В каждой главе приведены лабораторные работы с использованием *MS Excel*. Многие математические понятия иллюстрируются примерами из социологии и экономики.

УДК 519.2(075.8)

Велько О. А. **Элементы теории вероятностей** [Электронный ресурс] : учеб.-метод. пособие / О. А. Велько, М. В. Мартон, Н. А. Моисеева ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 104 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 99–101. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/295981>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 29.03.2023, № 002429032023.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов факультета философии и социальных наук БГУ специальностей «социология», «социальные коммуникации». Каждая тема содержит исторические сведения, теоретический материал, примеры решения, задачи для самостоятельного решения и вопросы для самоконтроля. Многие математические понятия иллюстрируются примерами из социологии и экономики.

УДК 316:51(075.8)

Мартон М. В. **Элементы теории вероятностей в социологических исследованиях: элементы комбинаторики** [Электронный ресурс] : учеб.-метод. пособие / М. В. Мартон, О. А. Велько, Н. А. Моисеева ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 46 с. : ил. Библиогр.: с. 45–46. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/295983>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 29.03.2023, № 002529032023.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов факультета философии и социальных наук БГУ специальностей «социология», «социальные коммуникации». Каждая тема содержит исторические сведения, теоретический материал, примеры решения, задачи для самостоятельного решения и вопросы для самоконтроля. Многие математические понятия иллюстрируются примерами из социологии и экономики.

УДК 510.3(075.8)

Велько О. А. **Элементы теории множеств** [Электронный ресурс] : учеб.-метод. пособие / О. А. Велько, М. В. Мартон, Н. А. Моисеева ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 49 с. : ил. Библиогр.: с. 48–49. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/295984>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 29.03.2023, № 002629032023.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов факультета философии и социальных наук БГУ специальностей «социология», «социальные коммуникации». Каждая тема содержит исторические сведения, теоретический материал, примеры решения, задачи для самостоятельного решения и вопросы для самоконтроля. Многие математические понятия иллюстрируются примерами из социологии и экономики.

УДК 316:519.2(075.8)

Велько О. А. **Основы математической статистики и их применение в социологических исследованиях** [Электронный ресурс] : учеб.-метод. пособие / О. А. Велько, М. В. Мартон, Н. А. Моисеева ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 110 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 102–104. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/295986>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 29.03.2023, № 002729032023.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов факультета философии и социальных наук БГУ специальностей «социология», «социальные коммуникации». Каждая тема содержит исторические сведения, теоретический материал, примеры решения, задачи для самостоятельного решения и вопросы для самоконтроля. В каждой главе приведены лабораторные работы с использованием *MS Excel*. Многие математические понятия иллюстрируются примерами из социологии и экономики.

УДК 004.42(075.8)

Расолько Г. А. **Методы программирования** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)», направление спец. 1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)» / Г. А. Расолько, Е. В. Кремень, Ю. А. Кремень ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 226 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 225. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/296006>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 03.04.2023, № 002803042023.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Методы программирования» предназначен для студентов специальности 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)», направление специальности 1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)». ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, тесты, списки рекомендованной литературы.

УДК 004.42(075.8)

Расолько Г. А. **Технологии программирования** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)», направление спец. 1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)» / Г. А. Расолько, Е. В. Кремень, Ю. А. Кремень ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 352 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 351–352. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/296007>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 03.04.2023, № 002903042023.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Технологии программирования» предназначен для студентов специальности 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)», направление специальности 1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)». ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, тесты, списки рекомендованной литературы.

УДК 517(075.8)(076.5)

Кепчик Н. В. **Введение в математический анализ** [Электронный ресурс] : практикум для студентов спец. 1-26 02 02-06 «Менеджмент (в сфере международного туризма)» / Н. В. Кепчик, С. Н. Барановская ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 68 с. : ил. Библиогр.: с. 67. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/296539>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 27.04.2023, № 003927042023.

Практикум предназначен для студентов факультета международных отношений БГУ специальности «менеджмент в сфере международного туризма». Каждый раздел содержит перечень основных понятий и теорем, примеры решения типовых задач, задачи для самостоятельного решения на практических занятиях, а также задачи для подготовки к контрольным и самостоятельным работам. В пособии в каждом разделе также представлены задачи, связанные со специализацией студентов.

УДК 004.432.045:004.738.5Java(075.8)

Кравчук А. С. **ООП в языке Java. Сборник заданий и тематических примеров** [Электронный ресурс] : учеб. материалы для студентов спец. 1-31 03 08 «Математика и информационные технологии (по направлениям)» / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук, Е. В. Кремень ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 150 с. : ил. Библиогр.: с. 149–150. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/296927>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 10.05.2023, № 004210052023.

Сборник заданий предназначен для проработки приемов объектно ориентированного программирования в языке Java. Издание содержит задачи на обработку массивов, реализацию интерфейсов, наследование, использование коллекций, дженериков и лямбда-выражений. В каждой теме приводятся примеры решения типовых задач и варианты индивидуальных заданий. Издание ориентировано в первую очередь на тех, кто не имеет опыта практического программирования на языке Java, и адресуется студентам, а также всем, кто хотел бы научиться приемам программирования стандартных задач.

УДК 004.432.045C++(075.8)

Кравчук А. С. **Язык C++. Императивное программирование** [Электронный ресурс] : учеб. материалы для студентов спец. 1-31 03 08 «Математика и информационные технологии (по направлениям)» / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук, Е. В. Кремень ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 389 с. : ил. Библиогр.: с. 389. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/296928>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 10.05.2023, № 004310052023.

Издание ориентировано на развитие и закрепление у студентов профессиональных навыков использования императивного программирования как одного из основных инструментов решения прикладных задач. Это объясняется тем, что студент обязан хорошо освоить методологию использования функций, прежде чем он начнет понимать, как используются методы при создании объектов классов и работе с ними. В пособие включен такой методический материал, как таблицы ручного счета простейших алгоритмов и сопоставление кода простейших программ на C++ и Pascal. Издание адресуется прежде всего студентам, а также всем, кто хотел бы научиться приемам программирования при решении стандартных задач.

УДК 004(075.8)

Моисеева Н. А. **Информационные технологии** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-25 01 03 «Мировая экономика» : в 2 ч. Ч. 1 / Н. А. Моисеева, О. А. Велько ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 131 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 130–131. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/297259>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 17.05.2023, № 004417052023.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Информационные технологии. Часть 1» предназначен для студентов специальности 1-25 01 03 «Мировая экономика». В ЭУМК содержатся лекционный материал, планы лабораторных работ, примерные тестовые задания, примерные промежуточные контрольные работы, вопросы для подготовки к зачету, примерный тематический план, содержание учебного материала, список литературы.

УДК 004(075.8)

Моисеева Н. А. **Информационные технологии** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-25 01 03 «Мировая экономика» : в 2 ч. Ч. 2 / Н. А. Моисеева, О. А. Велько ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 124 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 122–124. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/297260>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 17.05.2023, № 004517052023.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Информационные технологии. Часть 2» предназначен для студентов специальности 1-25 01 03 «Мировая экономика». В ЭУМК содержатся лекционный материал, тематика и планы лабораторных работ, примерные тестовые задания, примерные промежуточные контрольные работы, вопросы для подготовки к экзамену, примерный тематический план, содержание учебного материала, список литературы.

УДК 517.9(075.8)(076.3)

Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс] : тесты для студентов учреждений высш. образования, обучающихся по спец. «радиофизика и информационные технологии», «прикладная информатика», «физика», «прикладная физика», «кибербезопасность», «фундаментальная физика», «ядерная физика и технология», «медицинская физика», «компьютерная физика» / М. А. Глецевич [и др.] ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 109 с. Библиогр.: с. 108. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/298248>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 07.06.2023, № 005607062023.

В данное издание включено более 200 тестовых вопросов различной сложности, охватывающих все темы дисциплины «Дифференциальные уравнения», читаемой на физическом факультете и факультете радиофизики и компьютерных технологий БГУ. В вопросах может быть как один, так и несколько правильных вариантов ответа. Уровень сложности заданий и их содержание полностью соответствуют требованиям государственного образовательного стандарта по высшей математике для физических специальностей учреждений высшего образования Республики Беларусь.

УДК 004.432.045C++(0.75.8)+004.428(075.8)

Кравчук А. С. Язык C++. Объектно ориентированное программирование. Библиотека STL [Электронный ресурс] : учеб. материалы для студентов спец. 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки (по профилизациям)» / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук, Е. В. Кремень ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 291 с. : ил. Библиогр.: с. 291. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/299941>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 28.06.2023, № 006528062023.

Рассматриваются классы, различные аспекты работы с ними. Подробно рассматривается механизм наследования, использования виртуальных функций, а также абстрактных классов. Даются основы построения диаграмм классов, использования лямбда-функций и обработки исключительных ситуаций. Обширный раздел посвящен описанию основ работы с STL: рассмотрены некоторые контейнеры и алгоритмы, правила создания функторов и основы работы с ними. В каждой теме приводятся необходимый теоретический материал и код программ, что существенно ускоряет усваивание материала. Издание адресуется прежде всего студентам, а также всем, кто хотел бы научиться приемам объектно ориентированного программирования.

СОДЕРЖАНИЕ

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

- Старовойтов А. П., Кечко Е. П., Оснач Т. М.* О существовании тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышева..... 6

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

- Гладков А. Л.* Начально-краевая задача с нелокальным граничным условием для нелинейного параболического уравнения с памятью..... 18

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

- Лю Амин-Мин, Го Вэньбинь, Сафонова И. Н., Скиба А. Н.* Об одной открытой проблеме теории модулярных подгрупп..... 28

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

- Кирлица В. П.* D- и A-оптимальные планы экспериментов для тригонометрической регрессии с неравноточными наблюдениями 35
Русилко Т. В. G-сеть как стохастическая модель сети передачи данных..... 45

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

- Расолько Г. А., Шешко С. М.* К численному решению слабосингулярного интегрального уравнения второго рода методом ортогональных многочленов 55

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

- Буйолов Е. А., Семенов А. А.* Многопоточное программирование и кеширование в рамках микросервисной архитектуры для исследования оболочечных конструкций 63
Черникова О. С., Марарескул Т. А. Двухэтапный подход к прогнозированию расхождения шкал времени на основе скорректированной линейной модели 80
Чернявский А. Ф., Козлова Е. И., [Коляда А. А.] Особенности машинной арифметики высокопроизводительных модулярных вычислительных структур..... 94
Аннотации депонированных в БГУ работ 102

CONTENTS

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

- Starovoitov A. P., Kechko E. P., Osnach T. M.* On the existence of trigonometric Hermite – Jacobi approximations and non-linear Hermite – Chebyshev approximations..... 6

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

- Gladkov A. L.* Initial boundary value problem with nonlocal boundary condition for a nonlinear parabolic equation with memory 18

MATHEMATICAL LOGIC, ALGEBRA AND NUMBER THEORY

- Liu Aming-Ming, Guo Wenbin, Safonova I. N., Skiba A. N.* On an open problem in the theory of modular subgroups..... 28

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

- Kirlitsa V. P.* *D*- and *A*-optimal designs of experiments for trigonometric regression with heteroscedastic observations 35
Rusilko T. V. The G-network as a stochastic data network model 45

COMPUTATIONAL MATHEMATICS

- Rasolko G. A., Sheshko S. M.* On the numerical solution to a weakly singular integral equation of the second kind by the method of orthogonal polynomials..... 55

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

- Buyvolov E. A., Semenov A. A.* Multithreaded programming and caching within the framework of microservice architecture for the research of shell structures 63
Chernikova O. S., Marareskul T. A. A two-stage approach to forecasting the divergence of time scales based on an adjusted linear model..... 80
Chernyavsky A. F., Kozlova E. I., [Kolyada A. A.] Features of machine arithmetics of high-performance modular computing structures 94
Indicative abstracts of the papers deposited in BSU..... 102

Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области математики и информатики), техническим наукам (в области информатики).

Журнал включен в наукометрические базы данных Scopus, Mathematical Reviews, Ulrichsweb, Google Scholar, zbMath, Russian Science Citation Index, ПИИЦ, China National Knowledge Infrastructure.

**Журнал Белорусского
государственного университета.
Математика. Информатика.
№ 2. 2023**

Учредитель:
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск, Республика Беларусь.
Почтовый адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск, Республика Беларусь.
Тел. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.
E-mail: jmathinf@bsu.by
URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Журнал Белорусского государственного
университета. Математика. Информатика»
издается с января 1969 г.
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»
(ISSN 1561-834X).

Редактор *О. А. Семенец*
Технические редакторы *В. В. Пишкова, Д. Ф. Козут*
Корректор *Л. А. Меркуль*

Подписано в печать 31.07.2023.
Тираж 55 экз. Заказ 657.

Республиканское унитарное предприятие
«СтройМедиаПроект».
ЛП № 02330/71 от 23.01.2014.
Ул. В. Хоружей, 13/61, 220123,
г. Минск, Республика Беларусь.

© БГУ, 2023

**Journal
of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics.
No. 2. 2023**

Founder:
Belarusian State University

Registered address: 4 Niezaliezhnasci Ave.,
Minsk 220030, Republic of Belarus.
Correspondence address: 4 Niezaliezhnasci Ave.,
Minsk 220030, Republic of Belarus.
Tel. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.
E-mail: jmathinf@bsu.by
URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Journal of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics»
published since January, 1969.
Until 2017 named «Vestnik BGU.
Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika»
(ISSN 1561-834X).

Editor *O. A. Semenets*
Technical editors *V. V. Pishkova, D. F. Kogut*
Proofreader *L. A. Merkul'*

Signed print 31.07.2023.
Edition 55 copies. Order number 657.

Republic Unitary Enterprise
«StroiMediaProekt».
License for publishing No. 02330/71, 23 January, 2014.
13/61 V. Haruzhaj Str.,
Minsk 220123, Republic of Belarus.

© BSU, 2023