



БЕЛОРУССКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ЖУРНАЛ
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА ИНФОРМАТИКА

JOURNAL
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

MATHEMATICS and INFORMATICS

Издается с января 1969 г.
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)

Выходит три раза в год

2

2024

МИНСК
БГУ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор ХАРИН Ю. С. – доктор физико-математических наук, академик НАН Беларуси, профессор; директор Научно-исследовательского института прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: kharin@bsu.by

**Заместители
главного редактора** КРОТОВ В. Г. – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: krotov@bsu.by

ДУДИН А. Н. – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий лабораторией прикладного вероятностного анализа факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: dudin@bsu.by

**Ответственный
секретарь** МАТЕЙКО О. М. – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: matseika@bsu.by

- Абламейко С. В.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Альтенбах Х. Магдебургский университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия.
Антоневич А. Б. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Бауэр С. М. Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
Беняш-Кривец В. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Берник В. И. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Бухштабер В. М. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Вабищевич П. Н. Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук, Москва, Россия.
Волков В. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Гладков А. Л. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Го В. Китайский университет науки и технологий, Хэфэй, провинция Аньхой, Китай.
Гогинава У. Тбилисский государственный университет им. Иванэ Джавахишвили, Тбилиси, Грузия.
Головко В. А. Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь.
Гороховик В. В. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Громак В. И. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Демидо Г. Институт математики и информатики Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва.
Егоров А. Д. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Еремеев В. А. Гданьский политехнический университет, Гданьск, Польша.
Жоландек Х. Институт математики Варшавского университета, Варшава, Польша.
Журавков М. А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Залесский П. А. Бразильский университет, Бразилиа, Бразилия.
Зубков А. М. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.
Каплунов Ю. Д. Университет Кииле, Кииле, Великобритания.
Кашин Б. С. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Келлерер Х. Грацский университет им. Карла и Франца, Грац, Австрия.
Кожанов А. И. Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.
Котов В. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.

- Краснопрошин В. В.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Лауринчикас А. П.** Вильнюсский университет, Вильнюс, Литва.
- Мадани К.** Университет Париж-Эст Марн-ла-Валле, Марн-ла-Валле, Франция.
- Макаров Е. К.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Матус П. П.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Медведев Д. Г.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Михасев Г. И.** Харбинский политехнический университет, Харбин, Китай.
- Нестеренко Ю. В.** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
- Никопоров Ю. Г.** Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук, Владикавказ, Россия.
- Освальд П.** Боннский университет, Бонн, Германия.
- Романовский В. Г.** Мариборский университет, Марибор, Словения.
- Рязанов В. В.** Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук, Москва, Россия.
- Сафонов В. Г.** Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь.
- Скиба А. Н.** Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель, Беларусь.
- Сотсков Ю. Н.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Трофимов В. А.** Южно-Китайский университет технологий, Гуанчжоу, Китай.
- Тузиков А. В.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Фильцмозер П.** Венский технический университет, Вена, Австрия.
- Черноусов В. И.** Альбертский университет, Эдмонтон, Канада.
- Чижик С. А.** Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Шешок Д.** Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса, Вильнюс, Литва.
- Шубэ А. С.** Институт математики и информатики Академии наук Республики Молдова, Кишинев, Молдова.
- Янчевский В. И.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

EDITORIAL BOARD

- Editor-in-chief** **KHARIN Y. S.**, doctor of science (physics and mathematics), academician of the National Academy of Sciences of Belarus, full professor; director of the Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: kharin@bsu.by
- Deputy editors-in-chief** **KROTOV V. G.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: krotov@bsu.by
- DUDIN A. N.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the laboratory of applied probabilistic analysis, faculty of applied mathematics and computer science, Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: dudin@bsu.by
- Executive secretary** **MATEIKO O. M.**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of general mathematics and computer science, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: matseika@bsu.by
- Ablameyko S. V.* Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Altenbach H. Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany.
Antonevich A. B. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Bauer S. M. Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia.
Beniash-Kryvets V. V. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Bernik V. I. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Buchstaber V. M. Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Chernousov V. I. University of Alberta, Edmonton, Canada.
Chizhik S. A. National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Dzemyda G. Institute of Mathematics and Informatics of the Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
Egorov A. D. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Eremeyev V. A. Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland.
Filzmoser P. Vienna University of Technology, Vienna, Austria.
Gladkov A. L. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Goginava U. Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia.
Golovko V. A. Brest State Technical University, Brest, Belarus.
Gorokhovich V. V. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Gromak V. I. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Guo W. University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, China.
Kaplunov J. D. Keele University, Keele, United Kingdom.
Kashin B. S. Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Kellerer H. University of Graz, Graz, Austria.
Kotov V. M. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Kozhanov A. I. Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia.
Krasnoproshin V. V. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Laurinchikas A. P. Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
Madani K. Université Paris-Est, Marne-la-Vallée, France.
Makarov E. K. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Matus P. P. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Medvedev D. G. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Mikhasev G. I. Harbin Institute of Technology, Harbin, China.
Nesterenko Y. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Nikonorov Y. G. Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia.

- Oswald P.** University of Bonn, Bonn, Germany.
- Romanovskij V. G.** University of Maribor, Maribor, Slovenia.
- Ryazanov V. V.** Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
- Safonov V. G.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Šešok D.** Vilnius Gediminas Technical University, Vilnius, Lithuania.
- Skiba A. N.** Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus.
- Sotskov Y. N.** United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Suba A. S.** Institute of Mathematics and Computer Science of the Academy of Sciences of Moldova, Kishinev, Moldova.
- Trofimov V. A.** South China University of Technology, Guangzhou, China.
- Tuzikov A. V.** Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Vabishchevich P. N.** Institute for the Safe Development of Atomic Energy of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
- Volkov V. M.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Yanchevskii V. I.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Zaleskii P. A.** University of Brazilia, Brazilia, Brazil.
- Zhuravkov M. A.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Zoladek H.** Mathematics Institute of the University of Warsaw, Warsaw, Poland.
- Zubkov A. M.** Lomonosov Moscow State University, Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

УДК 513.5

ОБ АППРОКСИМАЦИЯХ СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ НА ОТРЕЗКЕ ЧАСТИЧНЫМИ СУММАМИ РЯДОВ ФУРЬЕ – ЧЕБЫШЕВА

П. Г. ПОЦЕЙКО¹⁾, Е. А. РОВБА¹⁾, К. А. СМОТРИЦКИЙ¹⁾

¹⁾Гродненский государственный университет им. Я. Купалы,
ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Беларусь

Аннотация. Изучены аппроксимации сопряженных функций на отрезке $[-1, 1]$ с плотностью $f \in H^{(\alpha)}[-1, 1]$, $\alpha \in (0, 1]$, сопряженными рядами Фурье – Чебышева. Установлены порядковые оценки приближений, зависящие от положения точки на отрезке. Отмечено, что приближения на концах отрезка имеют большую скорость убывания

Образец цитирования:

Поцейко ПГ, Ровба ЕА, Смотрицкий КА. Об аппроксимациях сопряженных функций и их производных на отрезке частичными суммами рядов Фурье – Чебышева. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;2:6–18 (на англ.).
EDN: ZITNRS

For citation:

Patseika PG, Rouba YA, Smatrytski KA. On the approximation of conjugate functions and their derivatives on the segment by partial sums of Fourier – Chebyshev series. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024; 2:6–18.
EDN: ZITNRS

Авторы:

Павел Геннадьевич Поцейко – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики факультета математики и информатики.

Евгений Алексеевич Ровба – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной математики факультета математики и информатики.

Константин Анатольевич Смотрицкий – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики факультета математики и информатики.

Authors:

Pavel G. Patseika, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of fundamental and applied mathematics, faculty of mathematics and informatics.
pahamatby@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-7835-0500>

Yauheni A. Rouba, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of fundamental and applied mathematics, faculty of mathematics and informatics.
rovba.ea@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-1265-1965>

Konstantin A. Smatrytski, PhD (physics and mathematics), doцент; associate professor at the department of fundamental and applied mathematics, faculty of mathematics and informatics.
k_smotritski@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0001-9054-8691>

в сравнении со всем отрезком. Введены классы функций, которые можно в некотором смысле ассоциировать с производной сопряженной функции на отрезке $[-1, 1]$, и изучены приближения функций из этих классов частичными суммами рядов Фурье – Чебышева. Найдено интегральное представление приближений. При плотности $f \in W^1H^{(\alpha)}[-1, 1]$, $\alpha \in (0, 1]$, устанавливаются порядковые оценки приближений, также зависящие от положения точки на отрезке. Рассмотрен случай, когда плотность $f(t) = |t|^s$, $s > 1$. При этом получены интегральное представление приближений, оценки поточечных и равномерных приближений, асимптотическая оценка равномерных приближений. Отмечено, что порядки равномерных приближений изучаемой функции частичными суммами ряда Фурье – Чебышева и соответствующей ей сопряженной функции сопряженными суммами совпадают.

Ключевые слова: сингулярный интеграл на отрезке; сопряженная функция; условие Липшица; ряд Фурье – Чебышева; равномерные оценки; асимптотические оценки.

Благодарность. Авторы выражают искреннюю благодарность профессору, доктору физико-математических наук А. Пекарскому за ряд ценных замечаний и советов, которые были учтены в окончательной редакции статьи.

ON THE APPROXIMATION OF CONJUGATE FUNCTIONS AND THEIR DERIVATIVES ON THE SEGMENT BY PARTIAL SUMS OF FOURIER – CHEBYSHEV SERIES

P. G. PATSEIKA^a, Y. A. ROUBA^a, K. A. SMATRYTSKI^a

^aYanka Kupala State University of Grodno, 22 Azheshka Street, Grodno 230023, Belarus

Corresponding author: K. A. Smatrytski (k_smotritski@mail.ru)

Abstract. In this paper, we study the approximation of conjugate functions with the density $f \in H^{(\alpha)}[-1, 1]$, $\alpha \in (0, 1]$, on the segment $[-1, 1]$ by the conjugate Fourier – Chebyshev series. We establish the order estimations of the approximation depending on the location of a point on the segment. It is noted that approximation at the endpoints of the segment has a higher rate of decrease in comparison with the whole segment. We introduce classes of functions, which, in a certain sense, can be associated with the derivative of a conjugate function on the segment $[-1, 1]$, and the approximation of functions from these classes by partial sums of the Fourier – Chebyshev series is studied. An integral representation of the approximation is found. In the case when the density $f \in W^1H^{(\alpha)}[-1, 1]$, $\alpha \in (0, 1]$, the order estimations of the approximation, depending on the location of the point on the segment, are established. The case, when the density $f(t) = |t|^s$, $s > 1$, is considered. In this case, an integral representation of the approximation, estimations for pointwise and uniform approximations, as well as an asymptotic estimation for the uniform approximation are obtained. It is noted that the order of the uniform approximations of the function under study by partial sums of the Fourier – Chebyshev series and the corresponding conjugate function by conjugate sums coincide.

Keywords: singular integral on a segment; conjugate function; Lipschitz condition; Fourier – Chebyshev series; uniform estimations; asymptotic estimations.

Acknowledgements. The authors would like to express their sincere gratitude to full professor, doctor of science (physics and mathematics) A. Pekarskii for a number of valuable comments and advice, which were taken into account in the final edition of the paper.

Introduction

The integral (in the sense of the Cauchy principal value) with a Cauchy-type kernel

$$\hat{f}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in [-1, 1], \quad (1)$$

plays an important role in various fields of mathematics and physics (see, for example, [1; 2]). For its existence it suffices to assume that the density $f(t)$ satisfies the Lipschitz condition of any order on the segment $[-1, 1]$. It is known (see [3]) that the transformation \hat{f} can be considered as one of the ways for defying the conjugate function on the segment $[-1, 1]$. We also associate \hat{f} with the conjugate Fourier – Chebyshev series (this series converges under the above said constrains):

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(n \arccos x), \quad (2)$$

where

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} f(t) T_n(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad T_n(t) = \cos(n \arccos t), \quad n = 1, 2, \dots,$$

are the Fourier – Chebyshev coefficients. Note that $\hat{f}(\cos \theta)$ can be expressed in terms of the conjugate function to $f(\cos \theta)$ using the singular integral with a Hilbert kernel

$$\hat{f}(\cos \theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos \tau) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \theta}{2} d\tau, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Also it can be associated with the corresponding conjugate trigonometric Fourier series.

The study of conjugate functions in the trigonometric case began with the works of J. Priwaloff [4; 5], A. Kolmogoroff [6], M. Riesz [7; 8]. Here we put special emphasis on the following result. Let $\bar{H}^{(\alpha)}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, be a class of conjugate functions with a density that satisfies the Lipschitz condition of order α . The exact upper bounds of the deviations of partial sums of the conjugate 2π -periodic Fourier series from the functions of classes $\bar{H}^{(\alpha)}$ were found by S. Nikol'skii [9].

V. Motorny (see, for example, [10; 11]) studied approximations of singular integrals of the form (1) with a density belonging to certain classes of continuous functions on the interval $[-1, 1]$. V. Misiuk and A. Pekar'skii [12] solved the classical problem of N. Bari [13] and S. Stechkin [14] about the best approximation of functions and their conjugates on a segment by algebraic polynomials.

The method of approximation of continuous functions on the segment $[-1, 1]$, based on the Fourier – Chebyshev series, has wide applications. Here we should mention the works of S. Nikol'skii [15], A. Timan [16], I. Ganzburg [17], Yu. Rusetskii [18], I. Ganzburg and A. Timan [19]. At the same time, the study of the approximation properties of the conjugate Fourier – Chebyshev series (2) was episodic. For example, pointwise and uniform approximations of the singular integral with a Hilbert kernel with a density having a power singularity by partial sums of the conjugate Fourier – Chebyshev series were studied in [20].

In the first part of this work, we study the approximation of the conjugate functions of form (1) with the density $f \in H^{(\alpha)}[-1, 1]$, $0 < \alpha \leq 1$, by partial sums of the conjugate Fourier – Chebyshev series

$$\hat{s}_n(f, x) = \sum_{k=1}^n c_k \sin(k \arccos x), \quad c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} f(t) T_k(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in [-1, 1].$$

Let the series

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k c_k \cos(k \arccos x), \quad x \in [-1, 1],$$

be the Fourier – Chebyshev series of a summable on the segment $[-1, 1]$ function. We consider the class of functions that can be represented as follows:

$$\tilde{f}(x) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k c_k \cos(k \arccos x), \quad x \in [-1, 1]. \quad (3)$$

Interest in the study of such functions is due to their relationship with conjugate series (2). Indeed, in this case (2) and (3) clearly imply the relation

$$\tilde{f}(x) = \sqrt{1-x^2} \hat{f}'(x), \quad x \in [-1, 1].$$

Functions of form (3) have, in a certain sense, a periodic analogue. Let r and β be fixed real numbers ($r > 0$) and the series

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^r \left[a_k \cos\left(kt + \frac{\pi\beta}{2}\right) + b_k \sin\left(kt + \frac{\pi\beta}{2}\right) \right], \quad (4)$$

be a Fourier series of some summable function. Then this function is called (r, β) -derivative of the function f in the Weyl – Nagy sense, it is denoted by $f_\beta^r(\cdot)$ (see, for example, [21; 22]), and in addition, $a_k, b_k, k \in \mathbb{N}$, are Fourier coefficients of the function f . The set of functions f that satisfy such a condition is denoted by W_β^r . If, in addition, $f_\beta^r \in H^{(\alpha)}$, $0 < \alpha \leq 1$, that is, it satisfies the Lipschitz condition of order α , then we say that f belongs

to the class $W_{\beta}^r H^{(\alpha)}$. The classes W_{β}^r , $r > 0$, were introduced by S. Stechkin [23]. Approximation problems on them were the subject of research by many specialists in the theory of functions [24]. For example, the approximation properties of various summation methods of the trigonometric Fourier series on classes W_{β}^r were studied by the representatives of the Ukrainian mathematical school (see [25; 26]).

The conjugate function (2) can be written as follows:

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cos\left(k \arccos x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Taking into account the expression (4) we say, that functions of form (3) are algebraic analogue of its $(1, -1)$ -derivatives in the Weyl – Nagy sense on the segment $[-1, 1]$.

In the second part of the paper, approximations of functions from class (3) by partial sums of the Fourier – Chebyshev series

$$s_n(\tilde{f}, x) = \frac{\tilde{c}_0}{2} + \sum_{k=1}^n \tilde{c}_k T_k(x), \quad \tilde{c}_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \tilde{f}(t) T_k(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

are considered. Integral representations of the approximation are established. Also, we obtain estimations of the approximation when the density $f \in W^1 H^{(\alpha)}[-1, 1]$, $\alpha \in (0, 1]$. It should be mentioned that here we use the methods proposed by O. Besov (see, for example, [27; 28]). The obtained estimations depend on the location of the point on the segment $[-1, 1]$. Moreover, it appears that approximation at the endpoints of the segment is better in order than on the entire segment.

In the third part of the work, approximations of individual functions belonging to functional class (3), when the density $f(t) = |t|^s$, $s > 1$, are investigated. For the study of the asymptotic behaviour of integrals the Laplace method [29; 30] is used.

Approximation of conjugate functions with a density satisfying Lipschitz condition

Let

$$\hat{\varepsilon}_n(f, x) = \hat{f}(x) - \hat{s}_n(f, x), \quad x \in [-1, 1], \quad (5)$$

$$\hat{\varepsilon}_n(f) = \left\| \hat{f}(x) - \hat{s}_n(f, x) \right\|_{C[-1, 1]}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

where $\hat{s}_n(f, x)$ are partial sums of its conjugate Fourier – Chebyshev series defined in (2).

Theorem 1. For approximation of conjugate function (1) with the density $f \in H^{(\alpha)}[-1, 1]$, $0 < \alpha \leq 1$, on the segment $[-1, 1]$ by partial sums of its conjugate Fourier – Chebyshev series the following estimation holds for sufficiently large n :

$$|\hat{\varepsilon}_n(f, x)| \leq \begin{cases} 2\pi^{\alpha} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{\alpha} \frac{\ln n}{n^{\alpha}} + \frac{\pi^{2\alpha}|x|^{\alpha}}{2\alpha n^{\alpha}} + \frac{\pi^{2\alpha} \ln n}{2^{1+\alpha} n^{2\alpha}}, & \alpha \in (0, 1), \\ \pi^2 \sqrt{1-x^2} \frac{\ln n}{n} + \frac{\pi^2|x|}{2n} + \pi^2 \frac{\ln n}{4n^2}, & \alpha = 1. \end{cases} \quad (7)$$

Proof. Let us consider the deviation

$$\hat{\varepsilon}_n(f, x) = \hat{f}(x) - \hat{s}_n(f, x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} c_k \sin(k \arccos x), \quad x \in [-1, 1],$$

of partial sums of conjugate series (2) from conjugate function (1). It is well-known (see [20]) that for the series remainder the following integral representation holds:

$$\hat{\varepsilon}_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos \tau) \hat{D}_n(\tau - \theta) d\tau, \quad x = \cos \theta, \quad x \in [-1, 1],$$

where

$$\hat{D}_n(\tau) = \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau}{\sin \frac{\tau}{2}}. \quad (8)$$

It is not difficult to see that

$$\hat{\varepsilon}_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [f(\cos(\theta + \tau)) - f(\cos(\theta - \tau))] \hat{D}_n(\tau) d\tau, \quad x = \cos \theta, \quad x \in [-1, 1]. \quad (9)$$

Here the integrand is even, 2π -periodic with respect to the integration variable. Therefore

$$\hat{\varepsilon}_n(f, x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \psi_\theta(\tau) \cos \lambda_1 \tau d\tau, \quad \lambda_1 = n + \frac{1}{2},$$

where

$$\psi_\theta(\tau) = \frac{f(\cos(\theta + \tau)) - f(\cos(\theta - \tau))}{\sin \frac{\tau}{2}}.$$

For the further proof we use the methods proposed by O. Besov (see, for example, [27; 28]). Taking into account the properties of the integrand, the latter representation can be written as

$$\hat{\varepsilon}_n(f, x) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left[\psi_\theta(\tau) - \psi_\theta\left(\tau + \frac{\pi}{\lambda_1}\right) \right] \cos \lambda_1 \tau d\tau, \quad \lambda_1(n) = n + \frac{1}{2}.$$

Further for brevity we will write simply λ_1 , assuming that λ_1 depends on n .

We split the integral in the right-hand side into three integrals over the segments $\left[0, \frac{\pi}{\lambda_1}\right]$, $\left[\frac{\pi}{\lambda_1}, 2\pi - \frac{\pi}{\lambda_1}\right]$ and $\left[2\pi - \frac{\pi}{\lambda_1}, 2\pi\right]$, so that

$$\hat{\varepsilon}_n(f, x) = \frac{1}{8\pi} [I_1 + I_2 + I_3], \quad x = \cos \theta, \quad x \in [-1, 1], \quad (10)$$

where

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{\lambda_1}} \left[\psi_\theta(\tau) - \psi_\theta\left(\tau + \frac{\pi}{\lambda_1}\right) \right] \cos \lambda_1 \tau d\tau,$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{\lambda_1}}^{2\pi - \frac{\pi}{\lambda_1}} \left[\psi_\theta(\tau) - \psi_\theta\left(\tau + \frac{\pi}{\lambda_1}\right) \right] \cos \lambda_1 \tau d\tau,$$

$$I_3 = \int_{2\pi - \frac{\pi}{\lambda_1}}^{2\pi} \left[\psi_\theta(\tau) - \psi_\theta\left(\tau + \frac{\pi}{\lambda_1}\right) \right] \cos \lambda_1 \tau d\tau.$$

Since $\left(\frac{2}{\pi}\right)\tau \leq \sin \tau \leq \tau$, $\tau \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, for the function $\psi_\theta(\tau)$ we have

$$|\psi_\theta(\tau)| \leq \frac{2^\alpha \pi |\sin \theta|^\alpha |\sin \tau|^\alpha}{\tau}.$$

Then for the integral I_1 the following estimation holds:

$$|I_1| \leq 2^\alpha \pi |\sin \theta|^\alpha \left(\int_0^{\frac{\pi}{\lambda_1}} \tau^{\alpha-1} d\tau + \int_0^{\frac{\pi}{\lambda_1}} \left(\tau + \frac{\pi}{\lambda_1}\right)^{\alpha-1} d\tau \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2^\alpha \pi |\sin \theta|^\alpha \left(\left(\frac{\pi}{\lambda_1} \right)^\alpha + \left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \right)^\alpha - \left(\frac{\pi}{\lambda_1} \right)^\alpha \right)}{\alpha} = \\
 &= \frac{2^{2\alpha} \pi^{1+\alpha} |\sin \theta|^\alpha}{\alpha \lambda_1^\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1], \lambda_1 = n + \frac{1}{2}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Substituting $\tau \mapsto 2\pi - \tau$ in the integral I_3 and applying the same considerations we obtain

$$|I_3| \leq \frac{2^{2\alpha} \pi^{1+\alpha} |\sin \theta|^\alpha}{\alpha \lambda_1^\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1], \lambda_1 = n + \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Now we pay attention to the integral I_2 . Since the integrand is 2π -periodic, estimations of the integrals over the segments $\left[\frac{\pi}{\lambda_1}, \pi \right]$ and $\left[\pi, 2\pi - \frac{\pi}{\lambda_1} \right]$ coincide. We have

$$\int_{\frac{\pi}{\lambda_1}}^{\pi} \left[\psi_\theta(\tau) - \psi_\theta\left(\tau + \frac{\pi}{\lambda_1}\right) \right] \cos \lambda_1 \tau d\tau = I_4 + I_5, \tag{13}$$

where

$$I_4 = \int_{\frac{\pi}{\lambda_1}}^{\pi} \frac{f(\cos(\theta + \tau)) - f(\cos(\theta - \tau)) - f\left(\cos\left(\theta + \tau + \frac{\pi}{\lambda_1}\right)\right) + f\left(\cos\left(\theta - \tau - \frac{\pi}{\lambda_1}\right)\right)}{\sin \frac{\tau + \frac{\pi}{\lambda_1}}{2}} \cos \lambda_1 \tau d\tau,$$

$$I_5 = \int_{\frac{\pi}{\lambda_1}}^{\pi} \left[f(\cos(\theta + \tau)) - f(\cos(\theta - \tau)) \right] \left[\frac{1}{\sin \frac{\tau}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\tau + \frac{\pi}{\lambda_1}}{2}} \right] \cos \lambda_1 \tau d\tau.$$

Taking into account that $f \in H^{(\alpha)}[-1, 1]$, $0 < \alpha \leq 1$, we obtain

$$\begin{aligned}
 &\left| f(\cos(\theta \pm \tau)) - f\left(\cos\left(\theta \pm \tau \pm \frac{\pi}{\lambda_1}\right)\right) \right| \leq \\
 &\leq \left| 2 \sin\left(\theta \pm \tau \pm \frac{\pi}{2\lambda_1}\right) \sin \frac{\pi}{2\lambda_1} \right|^\alpha = \left| \sin(\theta \pm \tau) \sin \frac{\pi}{\lambda_1} \pm 2 \cos(\theta \pm \tau) \sin^2 \frac{\pi}{2\lambda_1} \right|^\alpha = \\
 &= \left| \sin \theta \cos \tau \sin \frac{\pi}{\lambda_1} \pm \cos \theta \sin \tau \sin \frac{\pi}{\lambda_1} + 2 \cos(\theta \pm \tau) \sin^2 \frac{\pi}{2\lambda_1} \right|^\alpha \leq \\
 &\leq |\sin \theta|^\alpha \sin^\alpha \frac{\pi}{\lambda_1} + |\cos \theta|^\alpha \tau^\alpha \sin^\alpha \frac{\pi}{\lambda_1} + 2^\alpha \sin^{2\alpha} \frac{\pi}{2\lambda_1}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Therefore, for the integral I_4 the following estimation holds:

$$\begin{aligned}
 |I_4| &\leq 2\pi \left(|\sin \theta|^\alpha \left(\frac{\pi}{\lambda_1} \right)^\alpha + 2^\alpha \left(\frac{\pi}{2\lambda_1} \right)^{2\alpha} \right) \int_{\frac{\pi}{\lambda_1}}^{\pi} \frac{d\tau}{\tau} + 2\pi |\cos \theta|^\alpha \left(\frac{\pi}{\lambda_1} \right)^\alpha \int_{\frac{\pi}{\lambda_1}}^{\pi} \tau^{\alpha-1} d\tau \leq \\
 &\leq 2\pi^{1+\alpha} |\sin \theta|^\alpha \frac{\ln \lambda_1}{\lambda_1^\alpha} + \frac{2\pi^{2\alpha+1} |\cos \theta|^\alpha}{\alpha \lambda_1^\alpha} + 2^{1-\alpha} \pi^{1+2\alpha} \frac{\ln \lambda_1}{\lambda_1^{2\alpha}}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Consider the integral I_5 . Since

$$|f(\cos(\theta + \tau)) - f(\cos(\theta - \tau))| \leq 2^\alpha |\sin \theta|^\alpha \tau^\alpha,$$

and

$$\frac{1}{\sin \frac{\tau}{2}} - \frac{1}{\tau + \frac{\pi}{\lambda_1}} \leq \frac{\pi^3}{2\lambda_1 \tau^2},$$

we get

$$|I_5| \leq \frac{2^{\alpha-1} \pi^3}{\lambda_1} |\sin \theta|^\alpha \int_{\frac{\pi}{\lambda_1}}^{\pi} \tau^{\alpha-2} d\tau.$$

The last relation leads to the estimation

$$|I_5| \leq \begin{cases} \frac{\pi^{2+\alpha} |\sin \theta|^\alpha}{2^{1-\alpha} (1-\alpha) \lambda_1^\alpha}, & \alpha \in (0, 1), \\ \pi^3 |\sin \theta| \frac{\ln \lambda_1}{\lambda_1}, & \alpha = 1. \end{cases} \quad (16)$$

Substituting (15) and (16) into (13), we obtain for the integral I_2

$$|I_2| \leq \begin{cases} 8\pi^{1+\alpha} |\sin \theta|^\alpha \frac{\ln \lambda_1}{\lambda_1} + \frac{4\pi^{2\alpha+1} |\cos \theta|^\alpha}{\alpha \lambda_1^\alpha} + 2^{2-\alpha} \pi^{1+2\alpha} \frac{\ln \lambda_1}{\lambda_1^{2\alpha}}, & \alpha \in (0, 1), \\ 4\pi^3 |\sin \theta| \frac{\ln \lambda_1}{\lambda_1} + \frac{4\pi^3 |\cos \theta|}{\lambda_1} + 2\pi^3 \frac{\ln \lambda_1}{\lambda_1^2}, & \alpha = 1. \end{cases} \quad (17)$$

Using inequalities (11), (12) and (17), it follows from (10)

$$|\hat{\varepsilon}_n(f, x)| \leq \begin{cases} \pi^\alpha |\sin \theta|^\alpha \frac{\ln \lambda_1}{\lambda_1} + \frac{\pi^\alpha |\sin \theta|^\alpha}{2^{2-2\alpha} \alpha \lambda_1^\alpha} + \frac{\pi^{2\alpha} |\cos \theta|^\alpha}{2\alpha \lambda_1^\alpha} + \frac{\pi^{2\alpha} \ln \lambda_1}{2^{1+\alpha} \lambda_1^{2\alpha}}, & \alpha \in (0, 1), \\ \pi^2 |\sin \theta| \frac{\ln \lambda_1}{2\lambda_1} + \frac{\pi |\sin \theta|}{\lambda_1} + \frac{\pi^2 |\cos \theta|}{2\lambda_1} + \pi^2 \frac{\ln \lambda_1}{4\lambda_1^2}, & \alpha = 1. \end{cases} \quad (18)$$

Finally, we choose n that $\lambda_1 = n + \frac{1}{2}$ satisfies the following conditions: $\ln \lambda_1 > \frac{1}{\alpha 2^{2-2\alpha}}$, $\alpha \in (0, 1)$, and $\ln \lambda_1 > \frac{\pi}{2}$, $\alpha = 1$. Then, taking into account that $x = \cos \theta$, from estimation (18), we get (7). Theorem 1 is proved.

Approximation of functions $\tilde{f}(x)$

Let

$$\tilde{\varepsilon}_n(f, x) = \tilde{f}(x) - s_n(\tilde{f}, x), \quad x \in [-1, 1],$$

$$\tilde{\varepsilon}_n(f) = \left\| \tilde{f}(x) - s_n(\tilde{f}, x) \right\|_{C[-1, 1]}, \quad n \in \mathbb{N},$$

see also (5) and (6).

Theorem 2. For approximation of function (3) with the density $f \in W^1 H^{(\alpha)}[-1, 1]$, $\alpha \in (0, 1]$, by partial sums of its Fourier – Chebyshev series, the following integral representation holds for $n \in \mathbb{N}$:

$$\tilde{\varepsilon}_n(f, x) = \frac{-1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f'(\cos(\theta + \tau)) \sin(\theta + \tau) - f'(\cos(\theta - \tau)) \sin(\theta - \tau)] \hat{D}_n(\tau) d\tau, \quad (19)$$

where $x = \cos \theta$ and $\hat{D}_n(\tau)$ is from (8).

Proof. Let us use the integral representation of approximation (9). We assume that the density $f \in C^{(1)}[-1, 1]$ and $f' \in H^{(\alpha)}[-1, 1]$, $\alpha \in (0, 1]$. Therefore, the integral in the right-hand side can be differentiated with respect to $x \in (-1, 1)$, $x = \cos \theta$. Then

$$\hat{\varepsilon}'_n(f, x) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{1-x^2}} \int_0^\pi [f'(\cos(\theta + \tau))\sin(\theta + \tau) - f'(\cos(\theta - \tau))\sin(\theta - \tau)] \hat{D}_n(\tau) d\tau.$$

In addition, from the previous considerations it follows that

$$\tilde{\varepsilon}_n(f, x) = \sqrt{1-x^2} \hat{\varepsilon}'_n(f, x), \quad x \in (-1, 1).$$

Since the integrand is 2π -periodic, we get representation (19). Theorem 2 is proved.

Now we apply theorem 2 for the approximation of functions \tilde{f} , defined by (3), whose density f satisfies the condition $f' \in H^{(\alpha)}[-1, 1]$, $\alpha \in (0, 1]$, on the interval $[-1, 1]$.

Theorem 3. For approximation of function (3) with the density $f \in W^1H^{(\alpha)}[-1, 1]$, $\alpha \in (0, 1]$, by partial sums of its Fourier – Chebyshev series, the following estimation holds for sufficiently large n :

$$|\tilde{\varepsilon}_n(f, x)| \leq \begin{cases} 4\pi^\alpha (1-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}} \frac{\ln n}{n^\alpha} + \frac{c_\alpha(x)}{n^\alpha} + \frac{\pi^{2\alpha}|x|}{2^\alpha n^{2\alpha}}, & \alpha \in (0, 1), \\ 2\pi^2 (1-x^2) \frac{\ln n}{n} + \frac{c_1(x)}{n^\alpha} + \frac{\pi^2|x|}{2n^2}, & \alpha = 1, \end{cases} \quad (20)$$

where

$$c_\alpha(x) = \frac{\pi^{2\alpha} \sqrt{1-x^2} |x|^\alpha}{2\alpha} + \pi^\alpha (\sqrt{1-x^2})^\alpha |x| + \frac{2^\alpha \pi^{2\alpha} |x|^{1+\alpha}}{1+\alpha}.$$

Proof. We get from (19)

$$\tilde{\varepsilon}_n(f, x) = \frac{1}{4\pi} [\sin \theta I_6 + 2 \cos \theta I_7], \quad x = \cos \theta, \quad x \in [-1, 1], \quad (21)$$

where

$$I_6 = \int_0^{2\pi} [f'(\cos(\theta + \tau)) - f'(\cos(\theta - \tau))] \cos \tau \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau}{\sin \frac{\tau}{2}} d\tau,$$

$$I_7 = \int_0^{2\pi} [f'(\cos(\theta + \tau)) + f'(\cos(\theta - \tau))] \cos \frac{\tau}{2} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau d\tau.$$

Let us study each of these integrals. To estimate the integral I_6 we use the same idea as for the proof of theorem 1. So, for sufficiently large n we have

$$|I_6| \leq \begin{cases} 8\pi^{1+\alpha} |\sin \theta|^\alpha \frac{\ln n}{n^\alpha} + \frac{2\pi^{2\alpha+1} |\cos \theta|^\alpha}{\alpha n^\alpha} + 2^{1-\alpha} \pi^{1+2\alpha} \frac{\ln n}{n^{2\alpha}}, & \alpha \in (0, 1), \\ 4\pi^3 |\sin \theta| \frac{\ln n}{n} + \frac{2\pi^3 |\cos \theta|}{n} + \pi^3 \frac{\ln n}{n^2}, & \alpha = 1. \end{cases} \quad (22)$$

We represent the integral I_7 as follows:

$$I_7 = \frac{1}{2} [I_{71} + I_{72}], \quad (23)$$

where

$$I_{71} = \int_0^{2\pi} [f'(\cos(\theta + \tau)) + f'(\cos(\theta - \tau))] \cos n\tau d\tau,$$

$$I_{72} = \int_0^{2\pi} [f'(\cos(\theta + \tau)) + f'(\cos(\theta - \tau))] \cos(n+1)\tau d\tau.$$

We estimate integrals I_{71} and I_{72} similarly. Bearing in mind the properties of the integrand, we have for the integral I_{71}

$$I_{71} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} -[f'(\cos(\theta + \tau)) + f'(\cos(\theta - \tau))] -$$

$$- \left[f' \left(\cos \left(\theta + \tau + \frac{\pi}{n} \right) \right) + f' \left(\cos \left(\theta - \tau - \frac{\pi}{n} \right) \right) \right] \cos n\tau d\tau.$$

Taking into account estimation (14), we obtain from the latter representation

$$|I_{71}| \leq \frac{2\pi^{1+\alpha} |\sin \theta|^\alpha}{n^\alpha} + \frac{2^{1+\alpha} \pi^{1+2\alpha} |\cos \theta|^\alpha}{(1+\alpha)n^\alpha} + \frac{2^{1-\alpha} \pi^{1+2\alpha}}{n^{2\alpha}}.$$

Similarly,

$$|I_{72}| \leq \frac{2\pi^{1+\alpha} |\sin \theta|^\alpha}{(n+1)^\alpha} + \frac{2^{1+\alpha} \pi^{1+2\alpha} |\cos \theta|^\alpha}{(1+\alpha)(n+1)^\alpha} + \frac{2^{1-\alpha} \pi^{1+2\alpha}}{(n+1)^{2\alpha}}.$$

Substituting the estimations for integrals I_{71} and I_{72} into (23), we get

$$|I_7| \leq \frac{2\pi^{1+\alpha} |\sin \theta|^\alpha}{n^\alpha} + \frac{2^{1+\alpha} \pi^{1+2\alpha} |\cos \theta|^\alpha}{(1+\alpha)n^\alpha} + \frac{2^{1-\alpha} \pi^{1+2\alpha}}{n^{2\alpha}}, \quad x = \cos \theta, \quad x \in [-1, 1]. \quad (24)$$

Let us return to the proof of theorem 3. Estimation (20) follows directly from (21), if we use inequalities (22) and (24). Theorem 3 is proved.

Remark. It is important to note that approximation of functions of classes (3) with the density $f \in W^1 H^{(\alpha)}[-1, 1]$, $\alpha \in (0, 1]$, by partial sums of their Fourier – Chebyshev series depends on the location of a point on the segment. Moreover, the approximation at the endpoints of the segment has a higher rate of decrease than on the whole segment.

Approximation of the function $\tilde{f}(x)$ with the density $|t|^s$, $s > 1$

In paper [20], the authors studied the approximations of conjugate functions (1) with the density $f(t) = |t|^s$, $s > 1$, by partial sums of their conjugate Fourier – Chebyshev series. Here we consider a similar problem on classes of functions (3). Since there is a certain relationship between the elements of these functional classes, it is interesting to compare the orders of their approximations and the corresponding constants. For these approximations we have (see also (5) and (6))

$$\tilde{\varepsilon}_{2n}(|\cdot|^s, x) = \tilde{f}(x) - s_{2n}(\tilde{f}, x), \quad x \in [-1, 1], \quad (25)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{2n}(|\cdot|^s) = \left\| \tilde{f}(x) - s_{2n}(\tilde{f}, x) \right\|_{C[-1,1]}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (26)$$

Theorem 4. *Approximation of the function $\tilde{f}(x)$ with the density $|t|^s$, $s > 1$, on the segment $[-1, 1]$ by partial sums of its Fourier – Chebyshev series satisfies the following properties.*

1. *Integral representation:*

$$\tilde{\varepsilon}_{2n}(|\cdot|^s, x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{s-2}\pi} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 (1-t^2)^s t^{2n+3-s} \frac{p_6(t, x)}{(1+2t^2T_2(x)+t^4)^2} dt, \quad x \in [-1, 1], \quad (27)$$

where

$$p_6(t, x) = nt^6 T_{2n}(x) + t^4 (2nT_{2n+2}(x) + (n+1)T_{2n-2}(x)) + t^2 (nT_{2n+4}(x) + 2(n+1)T_{2n}(x)) + (n+1)T_{2n+2}(x), \quad (28)$$

$T_{2n}(\cdot)$ are Chebyshev polynomials of the first kind.

2. *Estimations for pointwise approximation:*

$$\left| \tilde{\varepsilon}_{2n}(|\cdot|^s, x) \right| \leq \frac{1}{2^{s-2}\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^1 (1-t^2)^{s-2} t^{2n+3-s} \frac{p_6(t, x)}{(1-t^2)^2} dt, \quad x \in [-1, 1]. \quad (29)$$

3. *Representation for uniform approximation:*

$$\tilde{\varepsilon}_{2n}(|\cdot|^s) = \frac{1}{2^{s-2}\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^1 (1-t^2)^{s-2} t^{2n+3-s} [(n+1) - nt^2] dt, \quad s > 1, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (30)$$

4. *Asymptotic estimation for uniform approximation:*

$$\tilde{\varepsilon}_{2n}(|\cdot|^s) \sim \frac{1}{\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \frac{s \Gamma(s-1)}{(2(n+1))^{s-1}}, \quad s \in (1, +\infty) \setminus \mathbb{N}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (31)$$

where $\Gamma(\cdot)$ is a gamma function.

Estimation (29) is exact. It turns into equality when $x = 0$.

Proof. From representation (3) it follows that approximations (25) have the form

$$\tilde{\varepsilon}_{2n}(|\cdot|^s, x) = - \sum_{k=n+1}^{+\infty} k c_{2k} T_{2k}(x), \quad x \in [-1, 1], \quad n \in \mathbb{N}, \quad (32)$$

where c_{2k} are polynomial Fourier – Chebyshev coefficients of the function $|x|^s$, $s > 0$. It is known (see [31, theorem 5]) that for c_{2k} the following integral representation holds:

$$c_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{s-2} \pi} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 (1-t^2)^s t^{2k+1-s} dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

Applying the Laplace method (see, for example, [29; 30]) for the study of integrals' asymptotic behaviour, we can show that

$$c_{2k} \sim \frac{(-1)^{k-1}}{2^{s-1} \pi} \sin \frac{\pi s}{2} \frac{\Gamma(s+1)}{k^{s+1}}, \quad s > 1, \quad k = n+1, n+2, \dots, \quad k \rightarrow \infty,$$

$\Gamma(\cdot)$ is a gamma function. The series

$$\frac{\Gamma(s+1)}{2^{s-1} \pi} \sin \frac{\pi s}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}, \quad s > 1,$$

is a convergent majorant series to the series on the right-hand side of (32), which converges uniformly on the entire segment $[-1, 1]$. Then plugging the integral representation for coefficients c_{2k} into (32) and interchanging the summation and the integration, we have

$$\tilde{\varepsilon}_{2n}(|\cdot|^s, x) = \frac{1}{2^{s-2} \pi} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 (1-t^2)^s t^{1-s} \Phi_n(t, x) dt, \quad x \in [-1, 1], \quad n \in \mathbb{N}, \quad (33)$$

where

$$\Phi_n(t, x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k k t^{2k} T_{2k}(x), \quad T_{2k}(x) = \cos(2k \arccos x).$$

The following equality follows from the properties of the sum of the geometric series

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k k q^k = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)q^{n+1} + nq^{n+2}}{(1+q)^2}, \quad |q| < 1. \quad (34)$$

Assuming here $q = t^2 e^{2i\theta}$, $x = \cos \theta$ and separating the real and imaginary parts we obtain

$$\Phi_n(t, x) = (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2} p_6(t, x)}{(1 + 2t^2 T_2(x) + t^4)^2},$$

where $p_6(t, x)$ is defined in (28).

The integral representation (27) follows from the last relation and (33). Note, that

$$p_6(t, 0) = (-1)^n (t-1)^2 [nt^4 + 2nt^3 - t^2 - 2(n+1)t - (n+1)].$$

In other words, the polynomial $p_6(t, 0)$ has $t = 1$ as a zero of the second order. Thus, (29) immediately follows from this fact and inequality

$$\sqrt{1 + 2t^2 \cos 2\theta + t^4} \geq 1 - t^2, \quad t \in [0, 1], \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

The exactness of estimation (29) can be verified directly by substituting $x = 0$ into (27).

Relation (30) for the uniform approximations (26) can be easily established with the help of integral representation (33). Indeed, it is obvious that

$$\tilde{\varepsilon}_{2n}(|\cdot|^s) \leq \frac{1}{2^{s-2} \pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^1 (1-t^2)^s t^{1-s} \sum_{k=n+1}^{+\infty} k t^{2k} dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Using (34), we get

$$\tilde{\varepsilon}_{2n}(|\cdot|^s) \leq \frac{1}{2^{s-2}\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^1 (1-t^2)^s t^{2n+3-s} \frac{(n+1) - nt^2}{(1-t^2)^2} dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Then, relation (30) follows from the last inequality and the exactness of estimation (29).

In order to establish asymptotic estimation (31) we study the behaviour of the integral on the right side of (30) when $n \rightarrow \infty$. To solve this problem, we again use the Laplace method [29; 30]. We write the integral as follows:

$$\int_0^1 (1-t^2)^{s-2} t^{2n+3-s} [(n+1) - nt^2] dt = (n+1)J_1 + J_2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (35)$$

where

$$J_1 = \int_0^1 (1-t^2)^{s-1} t^{1-s} e^{2(n+1)\ln t} dt, \quad J_2 = \int_0^1 (1-t^2)^{s-2} t^{3-s} e^{2(n+1)\ln t} dt.$$

The asymptotic behaviour of these integrals is studied similarly. Consider the first of them. The function $S(t) = \ln t$ monotonically decreases for $0 < t < 1$ and reaches its maximal value for $t = 1$. Since $\ln t \sim (t-1)$ and $(1-t^2)^{s-2} t^{1-s} \sim 2^{s-2}(1-t)^{s-2}$ when $t \rightarrow 1$, for sufficiently small $\varepsilon > 0$ and $n \rightarrow \infty$ we get

$$J_1 \sim 2^{s-1} \int_{1-\varepsilon}^1 (1-t)^{s-1} e^{2(n+1)(t-1)} dt.$$

After the substitution $2(n+1)(1-t) \mapsto u$, we have

$$J_1 \sim \frac{1}{2(n+1)^s} \int_0^{2(n+1)\varepsilon} u^{s-1} e^{-u} du \sim \frac{\Gamma(s)}{2(n+1)^s}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Similarly,

$$J_2 \sim \frac{\Gamma(s-1)}{2(n+1)^{s-1}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Taking into account the obtained results, from (35) we find that

$$\int_0^1 (1-t^2)^{s-2} t^{2n+3-s} [(n+1) - nt^2] dt \sim \frac{s\Gamma(s-1)}{2(n+1)^{s-1}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

The last asymptotic equality, representation (30), and the accuracy of estimation (29) lead us to relation (31). Theorem 4 is proved.

It is interesting to compare asymptotic estimation (31) for uniform approximations of function (3) with the density $|t|^s$, $s > 1$, by partial sums of its Fourier – Chebyshev series with the corresponding uniform estimation for the approximation of function (1) by the conjugate Fourier – Chebyshev series established in [20]:

$$\left| \hat{\varepsilon}_{2n}(|\cdot|^s, x) \right| \leq \frac{|\sin 2u|}{\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \frac{s\Gamma(s-1)}{(2(n+1))^{s-1}}, \quad x = \cos u, \quad s \in (1, +\infty) \setminus 2\mathbb{N}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Conclusions

In this paper, approximations on the interval $[-1, 1]$ of conjugate functions (1) with the density $f \in H^{(\alpha)}[-1, 1]$, $\alpha \in (0, 1]$, by the conjugate Fourier – Chebyshev series are studied. Order estimations of the approximation depending on the location of a point on a segment are established. It is noted that the approximation at the ends of the segment has a higher rate of decrease in comparison with the whole segment.

Classes of functions (3), which can be associated in a certain sense with the derivative of conjugate function (1) are introduced. Approximations of functions from these classes by partial sums of the Fourier – Chebyshev series are studied. An integral representation of the approximation is found. In the case when the density $f \in W^1 H^{(\alpha)}[-1, 1]$, $\alpha \in (0, 1]$, the order estimations of the approximation are established, also depending on the location of the point on the segment. Similarly, approximations at the endpoints of a segment have a higher rate of decrease compared to the whole segment.

The case when the density $f(t) = |t|^s$, $s > 1$, is considered. An integral representation of the approximation, estimations for the pointwise and uniform approximation, and an asymptotic estimation for the uniform approximation are obtained. It is noted that the order of uniform approximations of the function under study by partial sums of the Fourier – Chebyshev series and the corresponding conjugate function by conjugate sums coincide.

Библиографические ссылки

1. Гахов ФД. *Краевые задачи*. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы; 1958. 545 с.
2. Мусхелишвили НИ. *Сингулярные интегральные уравнения*. 3-е издание. Москва: Наука; 1968. 600 с.
3. Butzer PL, Stens RL. The operational properties of the Chebyshev transform. II. Fractional derivatives. В: Стечкин СБ, Теляковский СА, редакторы. *Теория приближения функций. Труды Международной конференции по теории приближения функций; 24–28 июля 1975 г.; Калуга, Россия*. Москва: Наука; 1977. с. 49–61.
4. Priwaloff J. Sur les fonctions conjuguées. *Bulletin de la Société Mathématique de France*. 1916;44:100–103. DOI: 10.24033/bsmf.965.
5. Привалов ИИ. К теории сопряженных тригонометрических рядов. *Математический сборник*. 1923;31(2):224–228.
6. Kolmogoroff A. Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier. *Fundamenta Mathematicae*. 1925;7:24–29. DOI: 10.4064/fm-7-1-24-29. French.
7. Riesz M. Les fonctions conjuguées et les series de Fourier. *Comptes rendus de l'Academie des Sciences*. 1924;178:1464–1467. French.
8. Riesz M. Sur les fonctions conjuguées. *Mathematische Zeitschrift*. 1928;27:218–244. DOI: 10.1007/BF01171098.
9. Никольский СМ. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами. *Труды Математического института имени В. А. Стеклова*. 1945;15:3–76.
10. Моторный ВП. Приближение некоторых классов сингулярных интегралов алгебраическими многочленами. *Украинский математический журнал*. 2001;53(3):331–345.
11. Моторный ВП. Приближение одного класса сингулярных интегралов алгебраическими многочленами с учетом положения точки на отрезке. *Труды Математического института имени В. А. Стеклова*. 2001;232:268–285.
12. Мисюк ВР, Пекарский АА. Сопряженные функции на отрезке и соотношения для их наилучших равномерных полиномиальных приближений. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2015;2:37–40.
13. Бари НК. О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций. *Известия Академии наук СССР. Серия математическая*. 1955;19(5):285–302.
14. Стечкин СБ. О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами. *Известия Академии наук СССР. Серия математическая*. 1956;20(2):197–206.
15. Никольский СМ. О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица. *Известия Академии наук СССР. Серия математическая*. 1946;10(4):295–322.
16. Тиман АФ. Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица, обыкновенными многочленами. *Доклады Академии наук СССР*. 1951;77(6):969–972.
17. Ганзбург ИМ. Обобщение некоторых результатов С. М. Никольского и А. Ф. Тимана. *Доклады Академии наук СССР*. 1957;116(5):727–730.
18. Русецкий ЮИ. О приближении непрерывных на отрезке функций суммами Абеля – Пуассона. *Сибирский математический журнал*. 1968;9(1):136–144.
19. Ганзбург ИМ, Тиман АФ. Линейные процессы приближения функций, удовлетворяющих условию Липшица, алгебраическими многочленами. *Известия Академии наук СССР. Серия математическая*. 1958;22(6):771–810.
20. Ровба ЕА, Поцейко ПГ. Приближения сопряженных функций частичными суммами сопряженных рядов Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2020;9:68–84.
21. Степанец АИ. Приближение периодических функций суммами Фурье. *Труды Математического института имени В. А. Стеклова*. 1987;180:202–204.
22. Кальчук ИВ, Степанюк ТА, Грабова УЗ. Приближение дифференцируемых функций бигармоническими интегралами Пуассона. *Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Матэматыка. Фізіка*. 2010;1:83–92.
23. Стечкин СБ. О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими многочленами. *Известия Академии наук СССР. Серия математическая*. 1956;20(5):643–648.
24. Дзядык ВК. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер. *Математические заметки*. 1974;16(5):691–701.
25. Жигалло КМ, Харкевич ЮИ. Наближення бігармонічними інтегралами Пуассона класів (ψ, β) диференційованих функцій в інтегральній метриці. *Проблеми теорії наближення та суміжні питання. Праць Інституту математики НАН України*. 2004;1(1):144–170.
26. Харкевич ЮИ, Степанюк ТА. Аппроксимативные свойства интегралов Пуассона на классах $S_{\beta}^{\psi} H^{\alpha}$. *Математические заметки*. 2014;96(6):939–952.
27. Бесов ОВ. Оценка приближения периодических функций суммами Фурье. *Математические заметки*. 2006;79(5):784–787.
28. Бесов ОВ. *Лекции по математическому анализу*. 4-е издание. Москва: Физматлит; 2020. 476 с.
29. Евграфов МА. *Асимптотические оценки и целые функции*. Москва: Наука; 1979. 320 с.
30. Федорюк МВ. *Асимптотика. Интегралы и ряды*. Москва: Наука; 1987. 544 с.
31. Поцейко ПГ. О сопряженных суммах Абеля – Пуассона на отрезке и их аппроксимационных свойствах. *Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальна тэхніка і кіраванне*. 2021;11(2):15–29.

References

1. Gakhov FD. *Kraevye zadachi* [Boundary value problems]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury; 1958. 545 p. Russian.
2. Muskhelishvili NI. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equations]. 3rd edition. Moscow: Nauka; 1968. 600 p. Russian.
3. Butzer PL, Stens RL. The operational properties of the Chebyshev transform. II. Fractional derivatives. In: Stechkin SB, Telyakovskii SA, editors. *Teoriya priblizheniya funktsii. Trudy Mezhdunarodnoi konferentsii po teorii priblizheniya funktsii; 24–28 iyulya 1975 g.; Kaluga, Rossiya* [Function approximation theory. Proceedings of the International conference on the theory of approximation of functions; 1975 July 24–28; Kaluga, Russia]. Moscow: Nauka; 1977. p. 49–61.
4. Priwaloff J. Sur les fonctions conjuguées. *Bulletin de la Société Mathématique de France*. 1916;44:100–103. French. DOI: 10.24033/bsmf.965.
5. Priwaloff J. Sur les séries trigonométriques conjuguées. *Matematicheskii sbornik*. 1923;31(2):224–228. Russian.
6. Kolmogoroff A. Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier. *Fundamenta Mathematicae*. 1925;7:24–29. French. DOI: 10.4064/fm-7-1-24-29.
7. Riesz M. Les fonctions conjuguées et les séries de Fourier. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. 1924;178:1464–1467. French.
8. Riesz M. Sur les fonctions conjuguées. *Mathematische Zeitschrift*. 1928;27:218–244. DOI: 10.1007/BF01171098. French.
9. Nikol'skii SM. Approximations of periodic functions by trigonometrical polynomials. *Trudy Matematicheskogo instituta imeni V. A. Steklova*. 1945;15:3–76. Russian.
10. Motornyi VP. Approximation of certain classes of singular integrals by algebraic polynomials. *Ukrains'kyi matematychnyi zhurnal*. 2001;53(3):331–345. Russian.
11. Motornyi VP. Approximation of a class of singular integrals by algebraic polynomials with regard to the location of a point on an interval. *Trudy Matematicheskogo instituta imeni V. A. Steklova*. 2001;232:268–285. Russian.
12. Misiuk VR, Pekarskii AA. Conjugate functions on a segment and relations for their best uniform polynomial approximations. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2015;2:37–40. Russian.
13. Bari NK. On best approximation of two conjugate functions by trigonometric polynomials. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya matematicheskaya*. 1955;19(5):285–302. Russian.
14. Stechkin SB. On best approximation of conjugate functions by trigonometric polynomials. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya matematicheskaya*. 1956;20(2):197–206. Russian.
15. Nikolsky SM. On the best approximation of functions satisfying Lipschitz's conditions by polynomials. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya matematicheskaya*. 1946;10(4):295–322. Russian.
16. Timan AF. Approximation of functions satisfying the Lipschitz condition by ordinary polynomials. *Doklady Akademii nauk SSSR*. 1951;77(6):969–972. Russian.
17. Ganzburg IM. A generalization of some results obtained by S. M. Nikolsky and A. F. Timan. *Doklady Akademii nauk SSSR*. 1957;116(5):727–730. Russian.
18. Rusetskii YuI. The approximation of functions continuous on an interval by Abel – Poisson sums. *Sibirskii matematicheskii zhurnal*. 1968;9(1):136–144. Russian.
19. Ganzburg IM, Timan AF. Linear processes of approximation by algebraic polynomials to functions satisfying a Lipschitz condition. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya matematicheskaya*. 1958;22(6):771–810. Russian.
20. Rovba YA, Patseika PG. Approximations of conjugate functions by partial sums of conjugate Fourier series with respect to a certain system of Chebyshev – Markov algebraic fractions. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika*. 2020;9:68–84. Russian.
21. Stepanets AI. Approximation of periodic functions by Fourier sums. *Trudy Matematicheskogo instituta imeni V. A. Steklova*. 1987;180:202–204. Russian.
22. Kalchuk IV, Stepaniuk TA, Grabova UZ. Approximation of differentiable functions by Poisson's biharmonic integrals. *Vesnik Brjesskaga universiteta. Seryja 4, Matjematyka. Fizika*. 2010;1:83–92. Russian.
23. Stechkin SB. On best approximation of certain classes of periodic functions by trigonometric polynomials. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya matematicheskaya*. 1956;20(5):643–648. Russian.
24. Dzyadyk VK. On best approximation in classes of periodic functions defined by integrals of a linear combination of absolutely monotonic kernels. *Matematicheskie zametki*. 1974;16(5):691–701. Russian.
25. Zhigallo KM, Kharkevich YuI. Approximation by biharmonic Poisson integrals of classes (ψ, β) of differential functions in the integral metric. *Problemy teorii nablyzhennja ta sumizhni pytannja. Prac' Instytutu matematyky NAN Ukrainy*. 2004;1(1):144–170. Ukrainian.
26. Kharkevich YuI, Stepanyuk TA. Approximation properties of Poisson integrals for the classes $C_B^{\psi} H^{\alpha}$. *Matematicheskie zametki*. 2014;96(6):939–952. Russian.
27. Besov OV. Estimate of the approximation of periodic functions by Fourier series. *Matematicheskie zametki*. 2006;79(5):784–787. Russian.
28. Besov OV. *Leksii po matematicheskomu analizu* [Lectures on mathematical analysis]. 4th edition. Moscow: Fizmatlit; 2020. 476 p. Russian.
29. Evgrafov MA. *Asimptoticheskie otsenki i tselye funktsii* [Asymptotic estimates and entire functions]. Moscow: Nauka; 1979. 320 p. Russian.
30. Fedoryuk MV. *Asimptotika. Integraly i ryady* [Asymptotics. Integrals and series]. Moscow: Nauka; 1987. 544 p. Russian.
31. Potseiko PG. On conjugate Abel – Poisson means on a segment and their approximation properties. *Vesnik Grodzenskaga dzjarzhavnaga vniwersitjeta imja Janki Kupaly. Seryja 2, Matjematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naja tjehnika i kiravanne*. 2021;11(2):15–29. Russian.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

MATHEMATICAL LOGIC, ALGEBRA AND NUMBER THEORY

УДК 512.554

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПРОСТЫХ ТРЕХМЕРНЫХ АНТИКОММУТАТИВНЫХ АЛГЕБР

С. В. ПЧЕЛИНЦЕВ¹⁾, М. С. ДУБРОВИН²⁾

¹⁾Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,
пр. Ленинградский, 49/2, 125167, г. Москва, Россия

²⁾Московский городской педагогический университет,
2-й Сельскохозяйственный проезд, 4, корп. 1, 129226, г. Москва, Россия

Аннотация. Исследуются алгебры дифференцирований простых трехмерных антикоммутативных алгебр над алгебраически замкнутым полем. Главное утверждение статьи заключается в том, что алгебры дифференцирований простых трехмерных антикоммутативных алгебр имеют размерности 0, 1 и 3, в последнем случае они изоморфны простой алгебре Ли sl_2 бесследных матриц порядка 2.

Ключевые слова: алгебры дифференцирований; алгебры Ли; простые трехмерные антикоммутативные алгебры.

Благодарность. Авторы выражают благодарность рецензенту за внимательное прочтение статьи и предложения по ее улучшению.

Образец цитирования:

Пчелинцев СВ, Дубровин МС. Дифференцирования простых трехмерных антикоммутативных алгебр. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;2:19–26 (на англ.).
EDN: ZRXBQZ

For citation:

Pchelintsev SV, Dubrovin MS. Derivations of simple three-dimensional anticommutative algebras. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;2:19–26.
EDN: ZRXBQZ

Авторы:

Сергей Валентинович Пчелинцев – доктор физико-математических наук; профессор кафедры анализа данных и машинного обучения факультета информационных технологий и анализа больших данных.

Максим Станиславович Дубровин – аспирант кафедры математической логики, алгебры, теории чисел и дискретной математики Института цифрового образования. Научный руководитель – С. В. Пчелинцев.

Authors:

Sergey V. Pchelintsev, doctor of science (physics and mathematics); professor at the department of data analysis and machine learning, faculty of information technology and big data analysis.
pchelintzev@mail.ru

Maxim S. Dubrovin, postgraduate student at the department of mathematical logic, algebra, number theory and discrete mathematics, Institute of Digital Education.
m.s.dubrovin@yandex.ru



DERIVATIONS OF SIMPLE THREE-DIMENSIONAL ANTICOMMUTATIVE ALGEBRAS

S. V. PCHELINTSEV^a, M. S. DUBROVIN^b

^aFinancial University under the Government of the Russian Federation,
49/2 Leningradskij Avenue, Moscow 125167, Russia

^bMoscow City University, 4 Vtoroj Selskohoziastvenny proezd,
1 building, Moscow 129226, Russia

Corresponding author: M. S. Dubrovin (m.s.dubrovin@yandex.ru)

Abstract. In this paper, we investigate the derivation algebras of simple three-dimensional anticommutative algebras over algebraically closed fields. The main statement of the article is that the derivation algebras of simple three-dimensional anticommutative algebras have dimensions 0, 1 and 3, for the latter case they are isomorphic to a simple Lie algebra of traceless matrices of the 2nd order.

Keywords: derivation algebras; Lie algebras; simple three-dimensional anticommutative algebras.

Acknowledgements. The authors are thankful to the reviewer for the careful reading of the article and for a series of remarks contributing to its improvement.

Introduction

The study of derivation algebras is an important aspect of modern mathematics [1–9]; when discussing algebras, it is assumed that they are considered over an algebraically closed field even if it is not explicitly stated.

It is well known that any derivation of a simple finite-dimensional associative algebra is internal [8]. Similar results are valid for simple finite-dimensional alternative, Jordan and Lie algebras [5–7]. For a simple algebra A from the indicated classes, the Lie algebra $\text{Der}(A)$, which is a derivation algebra for A , is simple.

In particular, the derivation algebra $\text{Der}(A)$ of a simple split three-dimensional Lie algebra A is isomorphic to the algebra A .

In this paper, we study the derivation algebras of simple three-dimensional anticommutative algebras over algebraically closed fields. Additionally, algebraic structures on finite-dimensional algebras, similar to those examined in this paper, are studied, for example, in [9].

Any one-dimensional anticommutative algebra has zero multiplication, thus, it is not simple. Let us first demonstrate that there are no two-dimensional simple anticommutative algebras.

Let A be such an algebra, in particular. Consider $a \in A$ such that its right multiplication operator $R_a : A \rightarrow A$, $xR_a = xa$ is non-zero. In some basis (e_1, e_2) , this operator is either diagonal or a Jordan block, i. e.,

$$M_{e_1, e_2}(R_a) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \text{ or } M_{e_1, e_2}(R_a) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Examine each of these cases:

1) $M_{e_1, e_2}(R_a) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$. One of the scalars α_1, α_2 is non-zero; let $\alpha_1 \neq 0$. Then, due to anticommutativity,

the vectors e_1, a are not proportional. Consequently, they form a basis for A , and the linear span $\langle e_1 \rangle$ is a proper ideal in A , contradicting the simplicity of algebra A ;

2) $M_{e_1, e_2}(R_a) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. If $\lambda \neq 0$, then $\langle e_2 \rangle$ is a proper ideal in A . If $\lambda = 0$, then $e_1 a = e_2$. Decompose a along

the basis (e_1, e_2) : $a = \alpha e_1 + \beta e_2$. Due to anticommutativity, $\beta \neq 0$ and $e_2 = e_1 a = e_1(\alpha e_1 + \beta e_2) = \beta e_1 e_2$. Thus, $\langle e_2 \rangle$ is a proper ideal in A .

The main goal of this paper is to prove the following theorem.

Theorem. Let M be a simple three-dimensional anticommutative algebra over an algebraically closed field of a characteristic different from 2. Then its derivation algebra, denoted as $\text{Der}(M)$, has a dimension of 0, 1 or 3. If $\dim \text{Der}(M) = 3$, then the algebra $\text{Der}(M)$ is isomorphic to the simple three-dimensional Lie algebra sl_2 .

It is known [10] that every simple three-dimensional anticommutative algebra is isotopically simple and isomorphic to one of the algebras with basis (a, b, c) :

$$A = A(\lambda, \alpha, \beta, \gamma): ba = \lambda b + c, ca = \lambda c, bc = \alpha a + \beta b + \gamma c, \alpha\lambda \neq 0,$$

$$B = B(\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma): ba = \lambda b, ca = \mu c, bc = \alpha a + \beta b + \gamma c, \alpha\lambda\mu \neq 0.$$

Lemma. *The algebra $A = A(\lambda, \alpha, \beta, \gamma)$ is not a Lie algebra. The algebra $B = B(\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma)$ is a Lie algebra if and only if $\beta = \gamma = \lambda + \mu = 0$.*

Proof. Let us calculate the Jacobian in the algebra A for the basis elements:

$$\begin{aligned} J(a, b, c) &= (ab)c + (bc)a + (ca)b = -(\lambda b + c)c + (\alpha a + \beta b + \gamma c)a + (\lambda c)b = \\ &= -\lambda bc + \beta ba + \gamma ca + (\lambda c)b = -2\lambda bc + \beta ba + \gamma ca. \end{aligned}$$

Since in the algebra A , the elements bc , ba , ca are linearly independent, it follows from $J(a, b, c) = 0$ that $\lambda = 0$. However, according to the condition, $\lambda \neq 0$, which means that A is not a Lie algebra.

The second statement is proved in a similar manner:

$$\begin{aligned} J(a, b, c) &= (ab)c + (bc)a + (ca)b = -(\lambda b)c + (\alpha a + \beta b + \gamma c)a + (\mu c)b = \\ &= -\lambda bc + \beta ba + \gamma ca + \mu cb = \beta ba + \gamma ca + (\lambda + \mu)cb. \end{aligned}$$

Therefore $J(a, b, c) = 0$ if and only if $\beta = \gamma = \lambda + \mu = 0$.

Remark. All simple three-dimensional Lie algebras over an algebraically closed field are isomorphic to sl_2 .

Let the derivation D in the basis (a, b, c) have the form $D = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$.

Algebra $\text{Der}(A)$. Let us consider the algebra

$$A = A(\lambda, \alpha, \beta, \gamma): ba = \lambda b + c, ca = \lambda c, bc = \alpha a + \beta b + \gamma c, \alpha\lambda \neq 0.$$

We shall now write down the right multiplication operators in this algebra:

$$R_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, R_b = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}, R_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

We observe that the linear mapping D is a derivation if and only if

$$[R_v, D] = R_{vD}$$

for any basis element v . Writing down this equation for $v = a, b, c$, we obtain the following system of equations:

$$\begin{cases} -\alpha x_3 + \lambda y_1 + z_1 = 0, & -\lambda x_1 - \beta x_3 + z_2 = 0, & -x_1 - \gamma x_3 - y_2 + z_3 = 0, \\ \alpha x_2 + \lambda z_1 = 0, & \beta x_2 = 0, & -\lambda x_1 + \gamma x_2 - z_2 = 0, \\ \alpha x_3 - \lambda y_1 - z_1 = 0, & \lambda x_1 + \beta x_3 - z_2 = 0, & x_1 + \gamma x_3 + y_2 - z_3 = 0, \\ -\alpha x_1 - \beta y_1 + \alpha y_2 - \gamma z_1 + \alpha z_3 = 0, & -\alpha x_2 + \lambda z_1 - \gamma z_2 + \beta z_3 = 0, \\ -\alpha x_3 - \lambda y_1 + \gamma y_2 - \beta y_3 + z_1 = 0, \\ -\alpha x_2 - \lambda z_1 = 0, & -\beta x_2 = 0, & \lambda x_1 - \gamma x_2 + z_2 = 0, \\ \alpha x_1 + \beta y_1 - \alpha y_2 + \gamma z_1 - \alpha z_3 = 0, & \alpha x_2 - \lambda z_1 + \gamma z_2 - \beta z_3 = 0, \\ \alpha x_3 + \lambda y_1 - \gamma y_2 + \beta y_3 - z_1 = 0. \end{cases}$$

By removing the obvious consequences of the equations, we obtain an equivalent system of nine equations:

$$\begin{cases} \alpha x_2 + \lambda z_1 = 0, & \beta x_2 = 0, & -\lambda x_1 + \gamma x_2 - z_2 = 0, \\ -\alpha x_3 + \lambda y_1 + z_1 = 0, & -\lambda x_1 - \beta x_3 + z_2 = 0, & x_1 + \gamma x_3 + y_2 - z_3 = 0, \\ 2\lambda z_1 - \gamma z_2 + \beta z_3 = 0, & 2\lambda y_1 - \gamma y_2 + \beta y_3 = 0, \\ -\alpha \gamma x_3 + \beta y_1 - 2\alpha y_2 - \gamma z_1 = 0. \end{cases}$$

Let us recall that $\alpha\lambda \neq 0$.

I. If $\beta \neq 0$, then $x_2 = 0, z_1 = 0$ and

$$\begin{cases} \lambda x_1 + z_2 = 0, \alpha x_3 - \lambda y_1 = 0, \lambda x_1 + \beta x_3 - z_2 = 0, x_1 + \gamma x_3 + y_2 - z_3 = 0, \\ -\gamma z_2 + \beta z_3 = 0, 2\lambda y_1 - \gamma y_2 + \beta y_3 = 0, \gamma z_2 - \beta z_3 = 0, \\ -\alpha \gamma x_3 + \beta y_1 - 2\alpha y_2 = 0. \end{cases}$$

After the transformations, we have

$$\begin{cases} \lambda x_1 + z_2 = 0, \alpha x_3 - \lambda y_1 = 0, \beta x_3 - 2z_2 = 0, x_1 + \gamma x_3 + y_2 - z_3 = 0, \\ -\alpha \gamma x_3 + \beta y_1 - 2\alpha y_2 = 0, \gamma z_2 - \beta z_3 = 0, 2\lambda y_1 - \gamma y_2 + \beta y_3 = 0. \end{cases}$$

The determinant of this system with respect to the variables $x_1, x_3, y_1, y_2, y_3, z_2, z_3$ is equal to $\alpha\beta^3(\beta + 2\lambda)$.

If the system has nontrivial solutions, then $\beta = -2\lambda$ and we obtain the following system of equations:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + z_2 = 0, \alpha x_3 - \lambda y_1 = 0, -2\lambda x_3 - 2z_2 = 0, x_1 + \gamma x_3 + y_2 - z_3 = 0, \\ -\alpha \gamma x_3 - 2\lambda y_1 - 2\alpha y_2 = 0, 2\lambda y_1 - \gamma y_2 - 2\lambda y_3 = 0, \\ \gamma z_2 + 2\lambda z_3 = 0. \end{cases}$$

Continuing with $z_2 = -\lambda x_1$, we have

$$\begin{cases} \alpha x_3 - \lambda y_1 = 0, 2\lambda x_1 - 2\lambda x_3 = 0, x_1 + \gamma x_3 + y_2 - z_3 = 0, \\ -\alpha \gamma x_3 - 2\lambda y_1 - 2\alpha y_2 = 0, 2\lambda y_1 - \gamma y_2 - 2\lambda y_3 = 0, \\ -\lambda \gamma x_1 + 2\lambda z_3 = 0. \end{cases}$$

Note that $x_3 = x_1$ and $\lambda \gamma x_1 = 2z_3, \gamma x_1 = 2z_3$, hence,

$$\begin{cases} \alpha x_1 - \lambda y_1 = 0, (2 + \gamma)x_1 + 2y_2 = 0, \\ \alpha \gamma x_1 + 2\lambda y_1 + 2\alpha y_2 = 0, 2\lambda y_1 - \gamma y_2 - 2\lambda y_3 = 0. \end{cases}$$

The rank of the fundamental matrix of this system with respect to variables x_1, y_1, y_2, y_3 is 3, since its determinant is 0, and

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2\lambda & -\gamma & -2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^2 \neq 0.$$

The last homogeneous system of linear equations depends on four variables and has a rank of 3, indicating it has one free variable. Thus, it is proved that the original system of equations has a unique free variable. This implies that $\dim \text{Der}(A) = 1$.

II. If $\beta = 0$, we obtain the system

$$\begin{cases} \alpha x_2 + \lambda z_1 = 0, -\lambda x_1 + \gamma x_2 - z_2 = 0, \\ \alpha x_3 - \lambda y_1 - z_1 = 0, \lambda x_1 - z_2 = 0, x_1 + \gamma x_3 + y_2 - z_3 = 0, \\ 2\lambda z_1 - \gamma z_2 = 0, -2\lambda y_1 + \gamma y_2 = 0, \\ -\alpha \gamma x_3 - 2\alpha y_2 + \gamma z_1 = 0. \end{cases}$$

There is no y_3 among the variables. After transformations, we have

$$\begin{cases} \alpha x_2 + \lambda z_1 = 0, \gamma x_2 - 2z_2 = 0, \\ \alpha x_3 - \lambda y_1 - z_1 = 0, \lambda x_1 - z_2 = 0, x_1 + \gamma x_3 + y_2 - z_3 = 0, \\ 2\lambda z_1 - \gamma z_2 = 0, \\ -\alpha \gamma x_3 - 2\alpha y_2 + \gamma z_1 = 0, 2\lambda y_1 - \gamma y_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

A. If $\gamma \neq 0$, then the matrix P of the system with respect to the eight variables $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3$ has a determinant equal to $\alpha\lambda^3(\gamma^2 + 4\alpha)^2$. If this determinant is non-zero, then system (1) has only the trivial solution, and $\dim \text{Der}(A) = 0$.

If $4\alpha = -\gamma^2$, then the rank of matrix P is 6 since it has a non-zero minor of order 6:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \gamma^2 & 4\lambda & 0 & 4 \\ -4\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -4\gamma & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -\gamma^2 & 0 & 0 & 0 & 4\lambda \\ -4\lambda & 4\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma^2 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 & -4\gamma \end{vmatrix} = -2^{10} \lambda^3 \gamma^4.$$

Let us consider a special case with $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $\gamma = 2$, $\lambda = 1$ (the general case is examined following the same procedure). Thus, A has the multiplication:

$$ba = b + c, ca = c, bc = -a + 2c.$$

System (1) takes the form

$$\begin{cases} -x_2 + z_1 = 0, x_2 - z_2 = 0, \\ x_3 + y_1 + z_1 = 0, x_1 - z_2 = 0, x_1 + 2x_3 + y_2 - z_3 = 0, \\ z_1 - z_2 = 0, \\ x_3 + y_2 + z_1 = 0, y_1 - y_2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

It is easy to verify that system (2) has a general solution:

$$x_2 = x_1, y_1 = y_2 = x_1 - x_3, z_1 = z_2 = x_1, z_3 = x_3,$$

where x_1, x_3 are free variables. Therefore, the general form of the derivation algebra is

$$D = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 & x_3 \\ (-x_1 - x_3) & (-x_1 - x_3) & y_3 \\ x_1 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Then the algebra $\text{Der}(A)$ has an additive basis of elements

$$X = e_{11} + e_{12} - e_{21} - e_{22} + e_{31} + e_{32}, Y = e_{13} - e_{21} - e_{22} + e_{33}, Z = e_{23}.$$

It can be readily verified that $[XY] = -2X + Y - Z$, $[XZ] = Y - Z$, $[YZ] = -2Z$. Since these specified commutators are linearly independent, $\text{Der}(A)$ is isomorphic to the algebra sl_2 .

B. If $\gamma = 0$, then system (1) takes the form

$$\begin{cases} \alpha x_2 + \lambda z_1 = 0, z_2 = 0, \\ \alpha x_3 - z_1 = 0, \lambda x_1 - z_2 = 0, \\ x_1 + y_2 - z_3 = 0, \\ z_1 = 0, y_2 = 0, y_1 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Thus, $y_1 = y_2 = 0$ и $z_1 = z_2 = 0$. Then $x_1 = x_2 = x_3 = z_3 = 0$, meaning system (3) has only the trivial solution then, $D = 0$ and $\dim \text{Der}(A) = 0$.

Algebra $\text{Der}(B)$. Let us recall that

$$B = B(\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma): ba = \lambda b, ca = \mu c, bc = \alpha a + \beta b + \gamma c, \alpha \lambda \mu \neq 0.$$

Let us write down the right multiplication operators in the algebra B :

$$R_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, R_b = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}, R_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mu \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

The linear mapping D is a derivation if and only if $[R_v, D] = R_{vD}$ for any basis element v . Writing down this equation for $v = a, b, c$, we obtain the following system of equations:

$$\begin{cases} -\alpha x_3 + \lambda y_1 = 0, -\lambda x_1 - \beta x_3 = 0, \lambda y_3 - \gamma x_3 - \mu y_3 = 0, \\ \alpha x_2 + \mu z_1 = 0, \beta x_2 - \lambda z_2 + \mu z_2 = 0, -\mu x_1 + \gamma x_2 = 0, \\ \alpha x_3 - \lambda y_1 = 0, \lambda x_1 + \beta x_3 = 0, -\lambda y_3 + \gamma x_3 + \mu y_3 = 0, \\ -\alpha x_1 - \beta y_1 + \alpha y_2 - \gamma z_1 + \alpha z_3 = 0, -\alpha x_2 + \lambda z_1 - \gamma z_2 + \beta z_3 = 0, \\ -\alpha x_3 - \mu y_1 + \gamma y_2 - \beta y_3 = 0, \\ -\alpha x_2 - \mu z_1 = 0, -\beta x_2 + \lambda z_2 - \mu z_2 = 0, \mu x_1 - \gamma x_2 = 0, \\ \alpha x_1 + \beta y_1 - \alpha y_2 + \gamma z_1 - \alpha z_3 = 0, \alpha x_2 - \lambda z_1 + \gamma z_2 - \beta z_3 = 0, \\ \alpha x_3 + \mu y_1 - \gamma y_2 + \beta y_3 = 0. \end{cases}$$

This system is equivalent to the following system of nine equations:

$$\begin{cases} \alpha x_3 - \lambda y_1 = 0, \lambda x_1 + \beta x_3 = 0, \gamma x_3 - \lambda y_3 + \mu y_3 = 0, \\ \alpha x_2 + \mu z_1 = 0, \beta x_2 - \lambda z_2 + \mu z_2 = 0, \mu x_1 - \gamma x_2 = 0, \\ \alpha x_1 + \beta y_1 - \alpha y_2 + \gamma z_1 - \alpha z_3 = 0, \\ \alpha x_2 - \lambda z_1 + \gamma z_2 - \beta z_3 = 0, \\ \alpha x_3 + \mu y_1 - \gamma y_2 + \beta y_3 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

I. Let us assume that $\beta = 0$. Then system (4) takes the form

$$\begin{cases} \alpha x_3 - \lambda y_1 = 0, \lambda x_1 = 0, \gamma x_3 - \lambda y_3 + \mu y_3 = 0, \\ \alpha x_2 + \mu z_1 = 0, -\lambda z_2 + \mu z_2 = 0, \mu x_1 - \gamma x_2 = 0, \\ \alpha x_1 - \alpha y_2 + \gamma z_1 - \alpha z_3 = 0, \\ \alpha x_2 - \lambda z_1 + \gamma z_2 = 0, \\ \alpha x_3 + \mu y_1 - \gamma y_2 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

1. If $\gamma = 0$, taking into account $\alpha\lambda\mu \neq 0$, we obtain

$$\begin{cases} \alpha x_3 - \lambda y_1 = 0, x_1 = 0, \\ \alpha x_2 + \mu z_1 = 0, (\lambda - \mu)z_2 = 0, \\ y_2 + z_3 = 0, \\ \alpha x_2 - \lambda z_1 = 0, \alpha x_3 + \mu y_1 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

A. If $\lambda = \mu$, then system (6) takes the form

$$\begin{cases} \alpha x_3 - \lambda y_1 = 0, \alpha x_2 + \lambda z_1 = 0, \\ y_2 + z_3 = 0, \\ \alpha x_2 - \lambda z_1 = 0, \alpha x_3 + \lambda y_1 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

In (7) we have $x_1 = x_2 = x_3 = y_1 = z_1 = 0, z_3 = -y_2$. There remain three free variables y_2, y_3, z_2 , indicating that the mapping has the form

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & z_2 & -y_2 \end{pmatrix}.$$

This implies that the algebra $\text{Der}(B)$ is isomorphic to the algebra sl_2 .

B. If $\lambda \neq \mu$, then system (6) takes the form

$$\begin{cases} \alpha x_3 - \lambda y_1 = 0, y_3 = 0, \\ \alpha x_2 + \mu z_1 = 0, z_2 = 0, y_2 + z_3 = 0, \\ \alpha x_2 - \lambda z_1 = 0, \alpha x_3 + \mu y_1 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

In (8) $y_3 = z_2 = 0, z_3 = -y_2$, indicating that

$$\begin{cases} y_3 = z_2 = 0, z_3 = -y_2, \\ \alpha x_3 - \lambda y_1 = 0, \alpha x_2 + \mu z_1 = 0, \\ \alpha x_2 - \lambda z_1 = 0, \alpha x_3 + \mu y_1 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

It is worth noting that if B is a Lie algebra, then it is isomorphic to the algebra sl_2 , and every derivation of B is inner, meaning it coincides with the right multiplication operator R_a by a suitable element $a \in B$. In this case $\text{Der}(B) \cong sl_2$.

Let the algebra B not be a Lie algebra. Then, according to lemma and the conditions $\beta = \gamma = 0$ we have $\lambda + \mu \neq 0$. Then from (9) $\alpha x_3 - \lambda y_1 = 0, \alpha x_3 + \mu y_1 = 0$. Hence it follows $y_1 = 0$. Similarly, $z_1 = 0$. Consequently, we have

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, y_1 = y_3 = 0, z_1 = z_2 = 0, z_3 = -y_2.$$

In this case, there is one free variable y_2 . This implies that the derivation algebra is one-dimensional.

2. Let $\gamma \neq 0$, then taking into account that $\alpha\gamma\lambda\mu \neq 0$, from (5) we obtain

$$\begin{cases} \alpha x_3 - \lambda y_1 = 0, x_1 = 0, \gamma x_3 - \lambda y_3 + \mu y_3 = 0, \\ \alpha x_2 + \mu z_1 = 0, (\lambda - \mu)z_2 = 0, \mu x_1 - \gamma x_2 = 0, \\ -\alpha y_2 + \gamma z_1 - \alpha z_3 = 0, \\ \alpha x_2 - \lambda z_1 + \gamma z_2 = 0, \\ \alpha x_3 + \mu y_1 - \gamma y_2 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

A. If $\lambda = \mu$, then system (10) takes the form

$$\begin{cases} \alpha x_3 - \lambda y_1 = 0, x_1 = 0, \gamma x_3 = 0, \\ \alpha x_2 + \mu z_1 = 0, \gamma x_2 = 0, \\ -\alpha y_2 + \gamma z_1 - \alpha z_3 = 0, \\ \alpha x_2 - \lambda z_1 + \gamma z_2 = 0, \\ \alpha x_3 + \mu y_1 - \gamma y_2 = 0. \end{cases}$$

It is easy to understand that this system has only the trivial solution.

B. If $\lambda \neq \mu$, then from the equations $\alpha x_2 + \mu z_1 = 0$ and $\alpha x_2 - \lambda z_1 = 0$ follows $x_2 = z_1 = 0$. Then

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 0, z_1 = z_2 = 0, y_2 + z_3 = 0, \\ \alpha x_3 - \lambda y_1 = 0, \gamma x_3 + (\mu - \lambda)y_3 = 0, \alpha x_3 + \mu y_1 - \gamma y_2 = 0. \end{cases}$$

It is easy to understand that all variables are expressed in terms of x_3 , indicating that the algebra $\text{Der}(B)$ is one-dimensional.

II. Let $\beta \neq 0$.

1. If $\gamma = 0$, then system (4) takes the form

$$\begin{cases} \alpha x_3 - \lambda y_1 = 0, \lambda x_1 + \beta x_3 = 0, (\lambda - \mu)y_3 = 0, \\ \alpha x_2 + \mu z_1 = 0, \beta x_2 - (\lambda - \mu)z_2 = 0, x_1 = 0, \\ \alpha x_1 + \beta y_1 - \alpha y_2 - \alpha z_3 = 0, \\ \alpha x_2 - \lambda z_1 - \beta z_3 = 0, \\ \alpha x_3 + \mu y_1 + \beta y_3 = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Assuming that $x_1 = 0$ in the equation $\lambda x_1 + \beta x_3 = 0$, we obtain $x_3 = 0$. From the last equation in system (11), we can find $y_1 = 0$. Assuming in (11) that $x_1 = x_3 = y_1 = 0$, we have $z_3 = -y_2$. In this case, system (11) takes the form

$$\begin{cases} (\lambda - \mu)y_3 = 0, \\ \alpha x_2 + \mu z_1 = 0, \beta x_2 - (\lambda - \mu)z_2 = 0, \\ z_3 = -y_2, \\ \alpha x_2 - \lambda z_1 - \beta z_3 = 0, \\ \alpha x_3 + \mu y_1 + \beta y_3 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

A. If $\lambda = \mu$ then it is easy to understand that system (12) implies the following equalities:

$$x_1 = x_2 = x_3 = y_1 = y_2 = y_3 = z_1 = z_3 = 0,$$

meaning the solution space of system (12) is one-dimensional.

B. If $\lambda \neq \mu$, then $x_1 = x_3 = y_1 = y_3 = 0$. Thus, system (12) takes the form

$$\begin{cases} \alpha x_2 + \mu z_1 = 0, \beta x_2 - (\lambda - \mu) z_2 = 0, \\ y_2 + z_3 = 0, \alpha x_2 - \lambda z_1 - \beta z_3 = 0, \\ x_1 = x_3 = y_1 = y_3 = 0. \end{cases}$$

It can be easily verified that the rank of this system is 8, as

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & \mu & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & -\lambda & -\beta \end{vmatrix} = -\beta^2 \mu \neq 0.$$

It means that $D = 0$ and $\dim \text{Der}(A) = 0$.

2. If $\gamma \neq 0$, then $\alpha\beta\gamma\lambda\mu \neq 0$ and it can be verified that the rank of system (4) is 8. It also means that $D = 0$ and $\dim \text{Der}(A) = 0$.

Conclusions

It is proved that derivation algebras of simple three-dimensional anticommutative algebras over algebraically closed fields have limited dimension variability, and in the case when the dimension is 3, they are isomorphic to a simple three-dimensional Lie algebra. In connection with the obtained result, the question arises: what numbers can be realised in the form of the dimension of the derivation algebras of a simple anticommutative n -dimensional algebra? In particular, can the dimension of the derivation algebra be greater than the dimension of a simple anticommutative algebra?

References

1. Kaygorodov IB, Popov YuS. Alternative algebras admitting derivations with invertible values and invertible derivations. *Izvestiya. Mathematics*. 2014;78(5):922–936. DOI: 10.4213/im8146.
2. Gorbatsievich VV. Anticommutative finite-dimensional algebras of the first three levels of complexity. *Algebra i analiz*. 1993; 5(3):100–118. Russian.
3. Elisova AP. Local derivations and local automorphisms of nilpotent algebras of matrices of small orders. *Siberian Aerospace Journal*. 2012;13(4):17–22.
4. Ayupov ShA, Arzikulov FN. 2-Local derivations on algebras of matrix-valued functions on a compactum. *Vladikavkazskii matematicheskii zhurnal*. 2018;20(1):38–49. DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11396.
5. Jacobson N. *Lie algebras*. New York: Interscience; 1962. 331 p.
6. Jacobson N. *Structure and representations of Jordan algebras*. Providence: American Mathematical Society; 1968. 461 p.
7. Schafer RD. *An introduction to nonassociative algebras*. New York: Academic Press; 1966. 177 p.
8. Herstein IN. *Noncommutative rings*. [S. l.]: Mathematical Association of America; 1968. 199 p.
9. Arzikulov F, Samsaqov O. Description of local multipliers on finite-dimensional associative algebras. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2023;3:32–41. EDN: MXICZS.
10. Krylov AA, Pchelintsev SV. The isotopically simple algebras with a nil-basis. *Communications in Algebra*. 2020;48(4):1697–1712. DOI: 10.1080/00927872.2019.1705467.

Received 13.12.2023 / revised 01.07.2024 / accepted 01.07.2024.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

УДК 51-77:336.6

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИНАНСОВЫХ ПИРАМИД, УЧИТЫВАЮЩИЕ СТОХАСТИЧЕСКУЮ ПРИРОДУ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Г. А. КЕСИЯН¹⁾, А. В. КОВАЛЕНКО¹⁾,
М. А. Х. УРТЕНОВ¹⁾, З. М. ЛАЙПАНОВА²⁾, А. В. ОВСЯННИКОВА³⁾

¹⁾Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, 350040, г. Краснодар, Россия

²⁾Карачаево-Черкесский государственный университет им. У. Д. Алиева,
ул. Ленина, 29, 369202, г. Карачаевск, Россия

³⁾Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,
пр. Ленинградский, 49/2, 125167, г. Москва, Россия

Аннотация. Развиваются известные подходы к моделированию деятельности финансовых пирамид и проводится их обобщение с помощью стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито. Представленные модели учитывают зависимость времени существования пирамиды от начисляемой процентной ставки и роста числа клиентов, а также разные варианты ведения рекламной кампании. Приводятся полученные формулы и результаты соответствующих экспериментов.

Ключевые слова: математическое моделирование; финансовая пирамида; схема Понци; стохастические дифференциальные уравнения; процессы Ито; численная схема Рунге – Кутты.

Образец цитирования:

Кесиян ГА, Коваленко АВ, Уртенов МАХ, Лайпанова ЗМ, Овсянникова АВ. Математические модели финансовых пирамид, учитывающие стохастическую природу принятия решений. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;2:27–39. EDN: OGJSND

For citation:

Kesiyan GA, Kovalenko AV, Urtenov MAKh, Laipanova ZM, Ovsyannikova AV. Mathematical models of Ponzi schemes that consider the stochastic nature of decision-making. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;2:27–39. Russian. EDN: OGJSND

Сведения об авторах см. на с. 39

Information about the authors see p. 39



MATHEMATICAL MODELS OF PONZI SCHEMES THAT CONSIDER THE STOCHASTIC NATURE OF DECISION-MAKING

G. A. KESIYAN^a, A. V. KOVALENKO^a,
M. A. Kh. URTENOV^a, Z. M. LAIPANOVA^b, A. V. OVSYANNIKOVA^c

^aKuban State University, 149 Stavropolskaja Street, Krasnodar 350040, Russia

^bKarachay-Cherkessian State University named after U. D. Aliev, 29 Lenina Street, Karachaeavsk 369202, Russia

^cFinancial University under the Government of the Russian Federation,
49/2 Leningradskij Avenue, Moscow 125167, Russia

Corresponding author: A. V. Ovsyannikova (anna_ovsyannikov@bk.ru)

Abstract. In this paper, we further develop well-known approaches to modelling the functioning of Ponzi schemes and generalise them using stochastic differential equations in the Ito form. The applied models take into account the dependence of the scheme's existence time on the accrued interest rate and the growth of the number of clients, as well as different variants of the advertising campaign. The obtained formulas and results of the corresponding experiments are given.

Keywords: mathematical modelling; financial pyramid; Ponzi scheme; stochastic differential equations; Ito processes; numerical Runge – Kutta scheme.

Введение

Исследованию деятельности финансовых пирамид посвящено множество работ. При этом существует несколько подходов к математическому моделированию деятельности финансовых пирамид: подход «экономически рациональный субъект», игровой подход и подход Дубовского. Кроме того, одни модели выражаются детерминированными уравнениями, а другие – стохастическими.

В работах [1–3] предложены дискретные и непрерывные детерминированные модели, лишенные недостатков модели Дубовского [4; 5], в которой отсутствовал учет таких затрат, как затраты на рекламу.

В статье [6] для описания схемы Понци используется линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Модель основана на обещанной (нереалистичной) процентной ставке, фактической (реализованной) номинальной процентной ставке, скорости накопления новых депозитов и скорости снятия средств. Обнаружение схемы Понци изучают и современные авторы (см., например, [7–9]).

Далее рассмотрим работы, учитывающие случайность.

Вероятностная модель финансовой пирамиды, описанная в статье [10], демонстрирует, что потенциальные выгоды от инвестиций искажаются учредителями. Основные последствия заключаются в том, что у подавляющего большинства участников есть менее чем десятипроцентный шанс окупить свои первоначальные инвестиции, когда достигается небольшая прибыль, как только они нанимают трех человек, и что в среднем половина участников больше никого не наймут и потеряют все свои деньги.

В работе [11] финансовые пирамиды моделируются как стохастическая игра при неполной информации между фирмой Понци – предполагаемым строителем пирамиды – и группой разнородных индивидуальных инвесторов. Показано, что, хотя равновесные стратегии, включающие индивидуальное решение инвестировать, могут существовать в сценических играх, во всей динамической игре нет равновесия, кроме тривиального, в которое никто не инвестирует, и, следовательно, пирамида не растет. Таким образом, индивидуальные решения инвестировать объясняются либо наивной верой в честность фирмы, либо неадекватными параметрами задачи динамической оптимизации.

В статье [12] авторы предлагают математическую модель процессов притока и оттока капитала в структуре финансовой пирамиды, учитывающую возможность привлечения новых клиентов с помощью рекламы и сарафанного радио. Результатами являются окончательные распределения притока и оттока капитала, а также графическое представление прибыли финансовой пирамиды в каждый момент времени.

Стохастическое моделирование прибыли финансовых пирамид

В данной работе предлагаются стохастические модели, содержащие преимущества непрерывных моделей и учитывающие как детерминированные, так и случайные факторы [13].

Общая модель. Общая формула в непрерывном детерминированном случае в текущий момент времени t имеет вид

$$S(t)^{\text{det}} = S_0 - mN_0 + mN(t) - \int_0^t \alpha(\tau) d\tau - \beta m \int_0^t N(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad (1)$$

где $S(t)^{\text{det}}$ – прибыль финансовой компании в текущий момент времени t ; $S_0 = S(0)$; m – фиксированная сумма вклада (предполагаем, что используется один тип вклада); $N_0 = N(0)$; $N(t)$ – количество клиентов в текущий момент времени t ; $mN(t)$ – денежные поступления от клиентов; $\alpha(t)$ – расходы на рекламу в текущий момент времени t ; β – процент по вкладу, который начисляется ежемесячно (предполагаем месяц в качестве базового периода); $\beta m \int_0^t N(\tau) d\tau$ – выплата дивидендов клиентам.

Уравнение (1) в дифференциальной форме записывается следующим образом:

$$\frac{dS}{dt} = m \frac{dN}{dt} - \alpha(t) - \beta m N(t). \quad (2)$$

Учтем правую часть уравнения (2) как детерминированный коэффициент сноса $a(S, t)$ общего процесса Ито

$$dS = a(S, t) dt + b(S, t) \delta W,$$

где δW – бесконечно малый винеровский шум. Получим общую формулу для процесса Ито, описывающего прибыль финансовых пирамид:

$$dS = \left(m \frac{dN}{dt} - \alpha(t) - \beta m N(t) \right) dt + b(S, t) \delta W. \quad (3)$$

Уравнение (3) в интегральной форме записывается как

$$S(t) = S_0 - mN_0 + mN(t) - \int_0^t \alpha(\tau) d\tau - \beta m \int_0^t N(\tau) d\tau + \int_0^t b(S(\tau), \tau) \delta W_\tau.$$

Если коэффициент волатильности $b(S, t)$ зависит только от времени, т. е. $b(S, t) = b(t)$, то имеем точное решение в неявной форме:

$$S(t) = S_0 - mN_0 + mN(t) - \int_0^t \alpha(\tau) d\tau - \beta m \int_0^t N(\tau) d\tau + \sqrt{\int_0^t b^2(\tau) d\tau} \cdot \varepsilon,$$

где ε – случайная величина, распределенная по нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Характеристики процесса. Среднее значение процесса (3) можно получить из следующего динамического уравнения для средних значений:

$$\langle \dot{S} \rangle = \langle a(S, t) \rangle.$$

Так как $a(S, t)$ не зависит от S , то среднее значение процесса S при любом коэффициенте волатильности $b(S, t)$ совпадает с детерминированным уравнением (1):

$$\langle \dot{S} \rangle = \left\langle m \frac{dN}{dt} - \alpha(t) - \beta m N(t) \right\rangle,$$

$$\langle \dot{S} \rangle = m \frac{dN}{dt} - \alpha(t) - \beta m N(t),$$

$$\langle S \rangle = m \int_0^t \frac{dN}{dt} d\tau - \int_0^t \alpha(\tau) d\tau - \beta m \int_0^t N(\tau) d\tau + C_1,$$

$$\langle S \rangle = mN(t) - mN_0 - \int_0^t \alpha(\tau) d\tau - \beta m \int_0^t N(\tau) d\tau + S_0.$$

Далее, полагая, что $C_1 = S_0$, получаем решение, аналогичное детерминированному:

$$\langle S \rangle = mN(t) - mN_0 - \int_0^t \alpha(\tau) d\tau - \beta m \int_0^t N(\tau) d\tau + S_0. \quad (4)$$

Волатильность процесса получим из следующего соотношения:

$$\sigma_S = \sqrt{\sigma_S^2} = \sqrt{\langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2}. \quad (5)$$

Чтобы вычислить выражение (5), требуется найти $\langle S^2 \rangle$, для этого можно воспользоваться леммой Ито

$$\frac{d\langle F(S, t) \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial t} - \alpha(S, t) \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{b^2(S, t)}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right\rangle.$$

Подставим $F(S, t) = S^2$:

$$\begin{aligned} \langle \dot{S}^2 \rangle &= \left\langle 0 - 2S \left(m \frac{dN}{dt} - \alpha(t) - \beta m N(t) \right) + 2 \frac{b^2(S, t)}{2} \right\rangle, \\ \langle \dot{S}^2 \rangle &= \left\langle 2S \left(m \frac{dN}{dt} - \alpha(t) - \beta m N(t) \right) + b^2(S, t) \right\rangle, \\ \langle \dot{S}^2 \rangle &= 2 \left(m \frac{dN}{dt} - \alpha(t) - \beta m N(t) \right) \langle S \rangle + \langle b^2(S, t) \rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

где $b^2(S, t)$ – диффузия.

Для последующего интегрирования уравнения (6) надо учесть явный вид $b(S, t)$ и подставить $\langle S \rangle$ из формулы (4).

Методы анализа. Один из распространенных подходов при исследовании процессов Ито заключается в анализе плотности вероятности, которая удовлетворяет уравнению Фоккера – Планка. Однако данный подход содержит ряд недостатков: уравнение Фоккера – Планка сложно решить (кроме линейного и градиентного случаев), плотность не дает информации о корреляциях во времени, и отдельные траектории могут сильно отклоняться от среднего процесса. По этой причине в данной работе делается упор на коридор волатильности и траекторное описание процессов, моделирующих деятельность финансовых пирамид.

Под коридором волатильности будем понимать область внутри верхней (σ_S^+) и нижней (σ_S^-) границ коридора, которые определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_S^+ &= \langle S \rangle + \sigma_S, \\ \sigma_S^- &= \langle S \rangle - \sigma_S. \end{aligned}$$

Определение параметров моделей. Для определения параметров моделей и проведения экспериментов в качестве примера финансовой пирамиды будем использовать МММ-2012. Основной принцип в МММ-2012 гласит: чем больше срок вложения, тем больше доходность.

Указанная система предоставляет вклады трех типов.

1. Основной вклад (процент по вкладу составляет 30 % в месяц, снятие денежных средств можно осуществить в любой момент).

2. Простой депозит (может быть на 3 мес. (40 %), 6 мес. (50 %) и 12 мес. (60 %), позволяет получить минимальные проценты (30 % в месяц) даже при досрочном снятии).

3. Сверхдоходный депозит (также может быть на 3 мес. (55 %), 6 мес. (65 %) и 12 мес. (75 %), как видно, имеет более высокие проценты по вкладу, чем простой депозит, но при досрочном снятии участник теряет все накопленные проценты и получает только вложенную сумму).

Участник МММ-2012 проходил регистрацию на специальном сайте, за ним закреплялись десятник (прямой руководитель) и сотник (руководитель руководителя). Все деньги конвертировались в виртуальную валюту МАВРО. Операции с МАВРО учитывались в личном кабинете, а также согласовывались с десятником. Курсы менялись по вторникам и четвергам в 00:00 по Гринвичу (04:00 по Москве).

Таким образом, для моделирования в настоящей работе будем использовать основной вклад (30 % в месяц) МММ-2012, т. е. параметр $\beta = 0,3$ (30 %). Период моделирования выберем исходя из продолжительности деятельности МММ-2012: с июня 2012 по январь 2013 г. (8 мес.). Предположим, что участники снимают накопленные проценты в конце каждого месяца. Остальные параметры определяем исходя из здравого смысла и специальной литературы.

Курс покупки МАВРО-RUR для вкладов под 30 % на 31.05.2012 г. составлял 1,0 руб. С учетом этого, чтобы не производить конвертацию валют и упростить вычисления, прибыль финансовой пирамиды будем считать в валюте МАВРО-RUR.

По данным Росстата, среднемесячная номинальная начисленная заработная плата работников по полному кругу организаций в 2012 г. составила 26 629 руб. На основании этого будем предполагать, что средняя сумма вклада (m) в МММ-2012 достигала приблизительно 30 000 руб., т. е. была соразмерна одной накопленной заработной плате.

Примеры моделей и эксперименты. Рассмотрим модель с постоянным количеством клиентов и постоянными расходами на рекламу.

Пусть число клиентов не меняется:

$$\frac{dN}{dt} = 0, \quad N(t) = N^* = \text{const.}$$

Обозначим расходы на рекламу:

$$\alpha(t) = \text{const} = R_0.$$

Тогда детерминированное уравнение (1) примет вид

$$S(t)^{\text{det}} = S_0 - mN^* + mN^* - \int_0^t R_0 d\tau - \beta m \int_0^t N^* d\tau,$$

$$S(t)^{\text{det}} = S_0 + (-R_0 - \beta mN^*)t.$$

В форме процесса Ито с постоянной волатильностью $b(S, t) = \sigma$ получаем

$$dS = (-R_0 - \beta mN^*)dt + \sigma dW. \quad (7)$$

Процесс (7) представляет собой винеровское блуждание со сносом.

Заметим сразу, что из-за отрицательного коэффициента сноса процесс (7) будет убывать, хотя старт процесса может находиться в положительной области (зависит от S_0).

Точное решение уравнения (7) имеет вид

$$S(t) = S_0 + (-R_0 - \beta mN^*)t + \sigma\sqrt{t} \cdot \varepsilon. \quad (8)$$

Среднее значение процесса (7) рассчитывается по формуле

$$\langle S \rangle = S(t)^{\text{det}} = S_0 + (-R_0 - \beta mN^*)t.$$

Дисперсия процесса (7) определяется как

$$\sigma_S^2(t) = \int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau = \sigma^2 t.$$

Тогда волатильность процесса (7) равна

$$\sigma_S = \sigma\sqrt{t}.$$

Для реализации формул и проведения экспериментов была разработана программа «Анализ стохастических финансовых пирамид (*StochasticFPyramidsBuilder*)» на языке Python.

Для моделирования процесса (7) заданы следующие исходные данные: сумма вклада $m = 10^5$ МАВРО, процент по вкладу $\beta = 0,3$ (30 %), количество участников до начала деятельности финансовой пирамиды $N_0 = 10$ человек (организаторы распространяли свои финансовые инструменты среди знакомых или «нужных» людей), постоянные расходы на рекламу $R_0 = 5 \cdot 10^5$ МАВРО, интенсивность шума того же порядка, что и коэффициент сноса, т. е. $\sigma = 10^5$, сумма вкладов на начало деятельности финансовой пирамиды, определяемая как денежные поступления от первых клиентов (близких, знакомых, «нужных» людей) минус сумма, потраченная финансовой пирамидой на рекламную кампанию до начала деятельности, т. е. $S_0 = mN_0 - R_0$, начальный момент времени моделирования процесса $t_0 = 0$, конечный момент времени моделирования процесса $t_1 = 18$ мес. (1,5 года), шаг моделирования $h = 0,1$ (достаточен, так как используем точное решение (8)). Для моделирования описанных ниже процессов задаются такие же начальные параметры, если не оговорено иное.

Результаты моделирования в программе *StochasticFPyramidsBuilder* 1000 траекторий для точного решения (8) в случае постоянного количества клиентов, постоянных расходов на рекламу и постоянной волатильности представлены на рис. 1.

Как видно из рис. 2, который аналогичен рис. 1 (но увеличен масштаб и ограничены интервалы отображения по осям абсцисс и ординат), верхняя граница коридора волатильности достигает значения 0 до $t = 0,8$. То есть банкротство наступит раньше, чем за 1 мес.

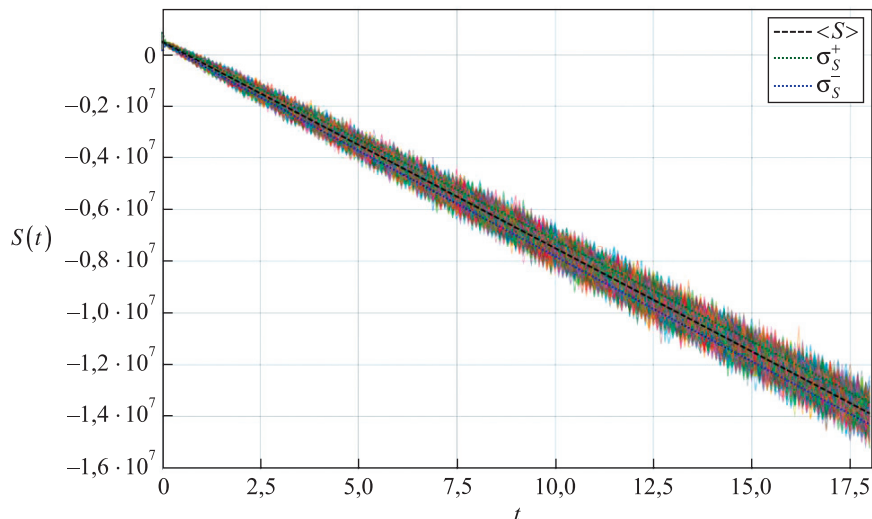


Рис. 1. Динамика прибыли финансовой пирамиды при постоянном количестве клиентов, постоянных расходах на рекламу и постоянной волатильности (точное решение)

Fig. 1. Profit dynamics of a financial pyramid at constant number of clients, constant advertising costs and constant volatility (exact solution)

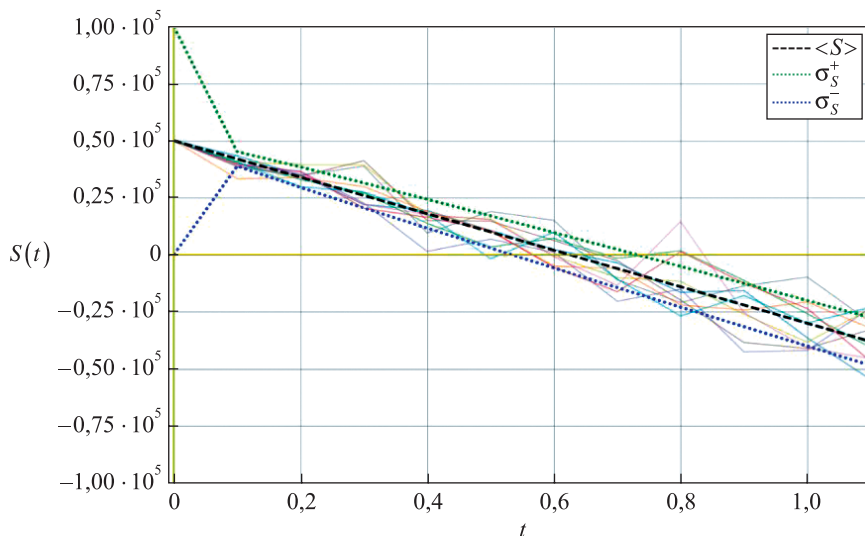


Рис. 2. Динамика прибыли финансовой пирамиды при постоянном количестве клиентов, постоянных расходах на рекламу и постоянной волатильности (точное решение) (увеличен масштаб и ограничены интервалы отображения по осям абсцисс и ординат)

Fig. 2. Profit dynamics of a financial pyramid at constant number of clients, constant advertising costs and constant volatility (exact solution) (the scale is enlarged and the display intervals on the abscissa and ordinate axes are limited)

Далее рассмотрим модель с постоянным приростом клиентов и постоянными расходами на рекламу. Пусть прирост клиентов определяется формулами

$$\frac{dN}{dt} = q, \quad N(t) = N^* = N_0 + qt.$$

Обозначим расходы на рекламу:

$$\alpha(t) = \text{const} = R_0.$$

Тогда детерминированное уравнение примет вид

$$S(t)^{\text{det}} = -\frac{1}{2}\beta mqt^2 + m\left(q - \beta N_0 - \frac{R_0}{m}\right)t + S_0.$$

В форме процесса Ито с постоянной волатильностью $b(S, t) = \sigma$ получаем

$$dS(t) = \left(-\beta mqt + m\left(q - \beta N_0 - \frac{R_0}{m}\right)\right)dt + \sigma\delta W. \quad (9)$$

Точное решение уравнения (9) при $t_0 = 0$ имеет вид

$$S(t) = -\frac{1}{2}\beta mqt^2 + m\left(q - \beta N_0 - \frac{R_0}{m}\right)t + S_0 + \sigma\sqrt{t} \cdot \varepsilon. \quad (10)$$

Среднее значение процесса (9) рассчитывается по формуле

$$\langle S \rangle = S(t)^{\text{det}} = -\frac{1}{2}\beta mqt^2 + m\left(q - \beta N_0 - \frac{R_0}{m}\right)t + S_0.$$

Дисперсия и волатильность процесса (9) определяются как

$$\begin{aligned} \sigma_S^2(t) &= \sigma^2 t, \\ \sigma_S &= \sigma\sqrt{t}. \end{aligned}$$

Для моделирования процесса (9) зададим следующие исходные данные: прирост участников $q = 10^2$ человек, интенсивность шума того же порядка, что и коэффициент сноса, т. е. $\sigma = 10^7$ ($0,3 \cdot 10^5 \cdot 10^2 t$). Остальные параметры не изменились.

Результаты моделирования в программе *StochasticFPyramidsBuilder* 1000 траекторий для точного решения (10) в случае постоянного прироста клиентов, постоянных расходов на рекламу и постоянной волатильности представлены на рис. 3.

Как видно из рис. 4, который аналогичен рис. 3 (но увеличен масштаб и ограничены интервалы отображения по осям абсцисс и ординат), верхняя граница коридора волатильности достигает значения 0 до $t = 9$. То есть в случае постоянного прироста клиентов банкротство наступит за 9 мес.

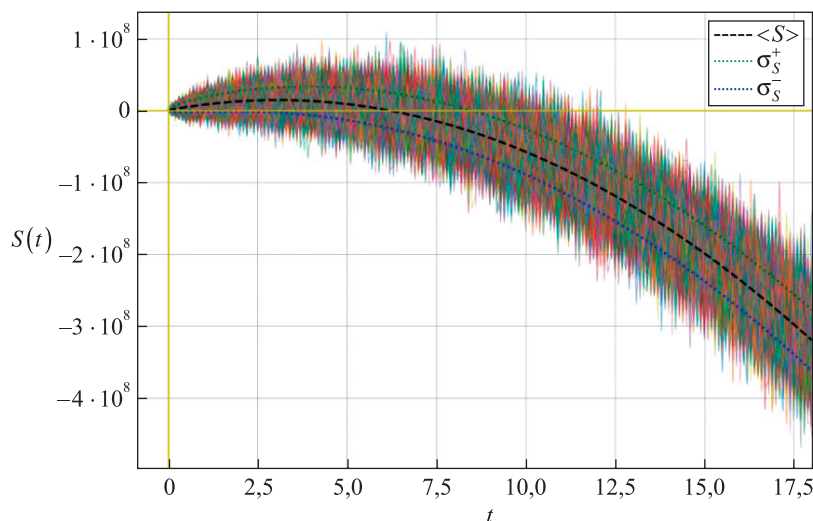


Рис. 3. Динамика прибыли финансовой пирамиды при постоянном приросте клиентов, постоянных расходах на рекламу и постоянной волатильности (точное решение)

Fig. 3. Profit dynamics of a financial pyramid at constant growth of clients, constant advertising costs and constant volatility (exact solution)

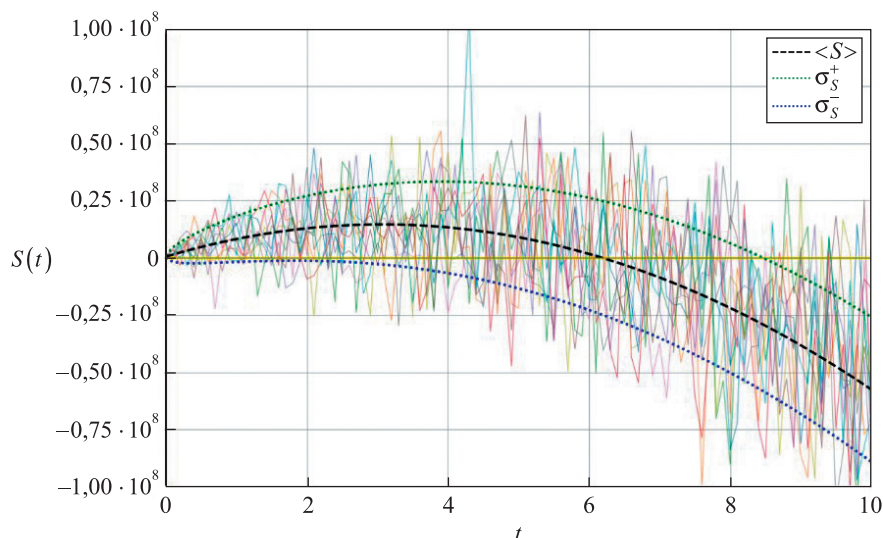


Рис. 4. Динамика прибыли финансовой пирамиды при постоянном приросте клиентов, постоянных расходах на рекламу и постоянной волатильности (точное решение) (увеличен масштаб и ограничены интервалы отображения по осям абсцисс и ординат)

Fig. 4. Profit dynamics of a financial pyramid at constant growth of clients, constant advertising costs and constant volatility (exact solution) (the scale is enlarged and the display intervals on the abscissa and ordinate axes are limited)

Теперь рассмотрим модель с линейным приростом клиентов и постоянными расходами на рекламу. Пусть системе удастся удержать линейный приток клиентов. В этом случае прирост клиентов определяется формулами

$$\frac{dN}{dt} = q_0 + qt, \quad N(t) = N_0 + q_0t + \frac{1}{2}qt^2.$$

Обозначим расходы на рекламу:

$$\alpha(t) = \text{const} = R_0.$$

Тогда детерминированное уравнение примет вид

$$S(t)^{\text{det}} = -\frac{1}{6}\beta mqt^3 + \frac{1}{2}m(q - \beta q_0)t^2 + m\left(q - \beta N_0 - \frac{R_0}{m}\right)t + S_0.$$

В форме процесса Ито с постоянной волатильностью $b(S, t) = \sigma$ получаем

$$dS(t) = \left(-\frac{1}{2}\beta mqt^2 + m(q - \beta q_0)t + m\left(q - \beta N_0 - \frac{R_0}{m}\right)\right)dt + \sigma\delta W. \quad (11)$$

Точное решение уравнения (11) при $t_0 = 0$ имеет вид

$$S(t) = -\frac{1}{6}\beta mqt^3 + \frac{1}{2}m(q - \beta q_0)t^2 + m\left(q - \beta N_0 - \frac{R_0}{m}\right)t + S_0 + \sigma\sqrt{t} \cdot \varepsilon. \quad (12)$$

Среднее значение процесса (11) рассчитывается по формуле

$$\langle S \rangle = S(t)^{\text{det}} = -\frac{1}{6}\beta mqt^3 + \frac{1}{2}m(q - \beta q_0)t^2 + m\left(q - \beta N_0 - \frac{R_0}{m}\right)t + S_0. \quad (13)$$

Дисперсия и волатильность процесса (11) определяются как

$$\sigma_S^2(t) = \sigma^2 t,$$

$$\sigma_S = \sigma\sqrt{t}.$$

Для моделирования процесса (11) параметры m , β , N_0 , R_0 , t_0 и h не изменились. Конечный момент времени моделирования $t_1 = 9$ мес. Для расчета параметров q_0 и q составим систему из двух уравнений. Для этого подставим в уравнение (13) предполагаемую прибыль 1 млрд руб. через 4 мес., т. е. $S^{\det}(t = 4, q, q_0) = 10^9$, и прибыль из соображения банкротства через 8 мес., т. е. $S^{\det}(t = 8, q, q_0) = 0$. Все остальные параметры уже заданы. В результате решения системы получим коэффициенты $q = \frac{200\,245}{104}$, $q_0 = \frac{899\,185}{312}$. Интенсивность шума имеет тот же порядок, что и коэффициент сноса, т. е. $\sigma = 10^8$.

Результаты моделирования в программе *StochasticFPyramidsBuilder* 10 траекторий для точного решения (12) в случае линейного прироста клиентов, постоянных расходов на рекламу и постоянной волатильности представлены на рис. 5.

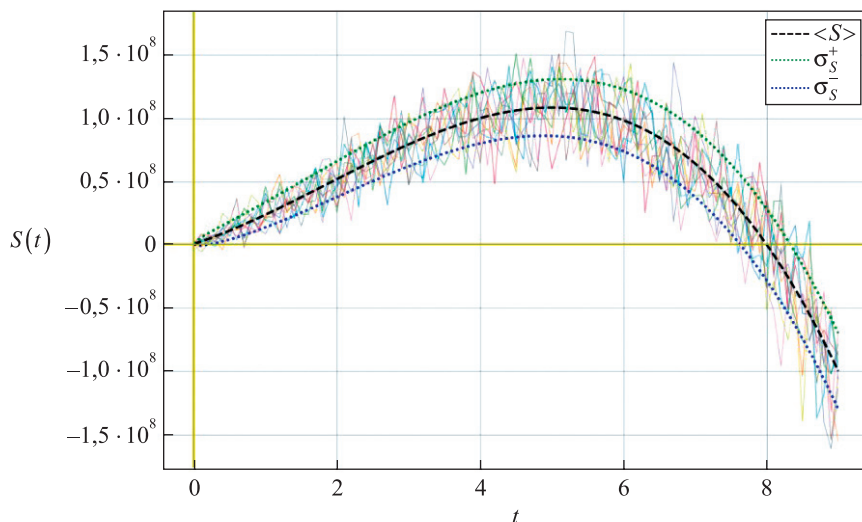


Рис. 5. Динамика прибыли финансовой пирамиды при линейном приросте клиентов, постоянных расходах на рекламу и постоянной волатильности (точное решение)

Fig. 5. Profit dynamics of a financial pyramid with a linear growth of clients, constant advertising costs and constant volatility (exact solution)

Для соразмерности шума и исследуемого процесса удобно задать линейную волатильность $b(S, t) = \sigma S$. Тогда вместо модели (9) получим

$$dS(t) = \left(-\beta mqt + m \left(q - \beta N_0 - \frac{R_0}{m} \right) \right) dt + \sigma S \delta W. \quad (14)$$

Можно предположить, что случайные факторы, такие как заинтересованность потенциальных участников и доверие настоящих участников, линейно зависят от прибыли и, например, составляют 30 % от нее, т. е. $\sigma = 0,3$. Для проведения экспериментов в разработанной программе *StochasticFPyramidsBuilder* реализована схема Рунге – Кутты 4-го порядка численного решения стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Результаты моделирования 1000 траекторий процесса (14) с параметром $\sigma = 0,3$ представлены на рис. 6.

Таким образом, если участники будут принимать случайные решения с учетом прибыли финансовой пирамиды (что вполне вероятно), то, исходя из рис. 6, можно сделать следующие выводы:

- в самом начале деятельности финансовой пирамиды влияние случайных факторов минимальное (в отличие от предыдущих моделей (7), (9) и (11));
- отдельные траектории прибыли могут существенно отличаться от большинства (выше максимальная прибыль);
- верхняя граница коридора волатильности процесса (9) достигает значения 0 после $t = 8$, в то время как в модели (14) верхняя граница коридора волатильности достигает значения 0 вблизи $t = 7$.

Приведенные выводы говорят о том, что случайные факторы могут существенно влиять на процесс, так как изменилась структура модели и детерминированная часть стала зависеть от волатильности.

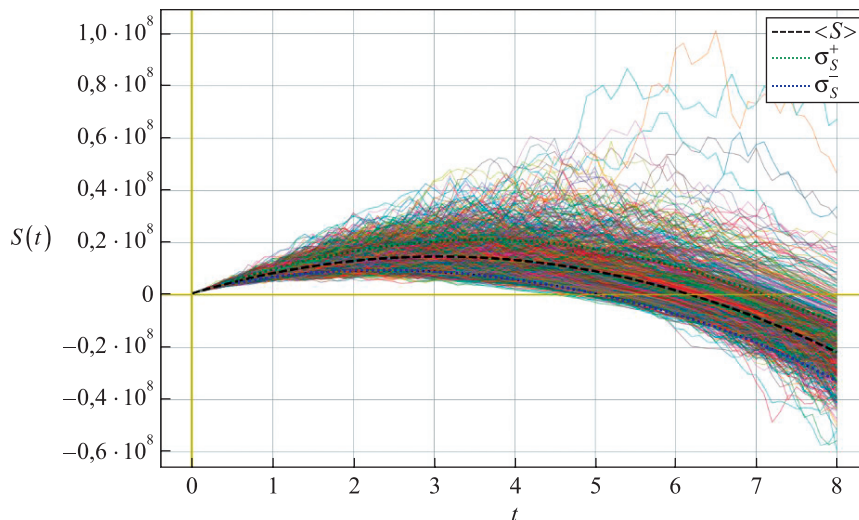


Рис. 6. Динамика прибыли финансовой пирамиды при постоянном приросте клиентов, постоянных расходах на рекламу и линейной волатильности (схема Рунге – Кутты 4-го порядка)

Fig. 6. Profit dynamics of a financial pyramid at constant growth of clients, constant advertising costs and linear volatility (Runge – Kutta scheme of 4th order)

Далее выведем СДУ для модели с постоянным приростом клиентов, процентными расходами на рекламу и линейной волатильностью.

В отличие от предыдущей модели в данной модели расходы на рекламу задаются формулой $a(t) = gm \frac{dN}{dt}$, где g ($0 < g < 1$) – процент, который определяет сумму расходов на рекламу от вновь поступивших средств. Тогда $S(t) = -\frac{1}{2}\beta mqt^2 + m((1-g)q - \beta N_0)t + S_0$.

В форме процесса Ито с линейным шумом получаем

$$dS(t) = (-\beta mqt + m((1-g)q - \beta N_0))dt + \sigma S \delta W. \quad (15)$$

Результаты моделирования в программе *StochasticFPyramidsBuilder* 1000 траекторий процесса (15) с процентом на рекламу от вновь поступивших средств $g = 0,2$ представлены на рис. 7.

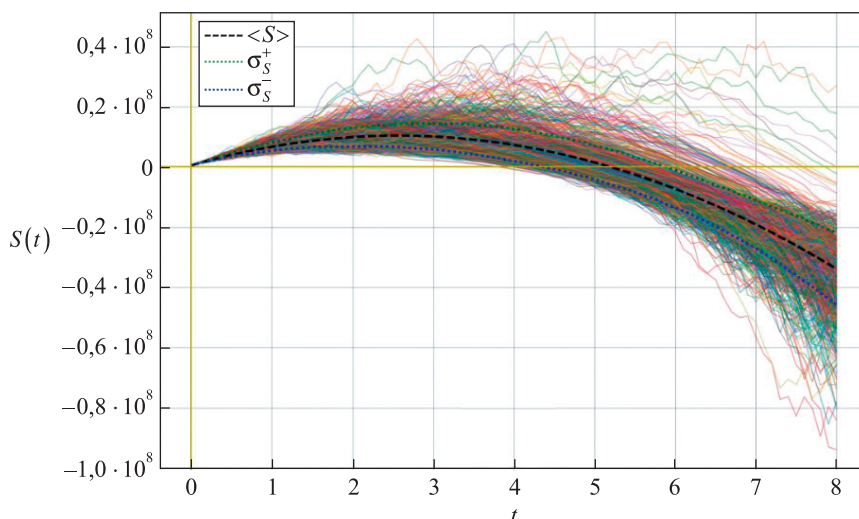


Рис. 7. Динамика прибыли финансовой пирамиды при постоянном приросте клиентов, процентных расходах на рекламу и линейной волатильности (схема Рунге – Кутты 4-го порядка)

Fig. 7. Profit dynamics of a financial pyramid at constant growth of clients, interest expenses on advertising and linear volatility (Runge – Kutta scheme of 4th order)

Из рис. 7 можно сделать вывод о том, что процентные затраты на рекламу приводят к более быстрому краху пирамиды. Однако в данной модели не учтено, что, возможно, при такой рекламной кампании удастся удержать не постоянный, а линейный прирост клиентов.

Следовательно, в случае линейного прироста клиентов

$$\frac{dN}{dt} = q_0 + qt, \quad N(t) = N_0 + q_0t + \frac{1}{2}qt^2.$$

После приведения подобных имеем

$$S(t) = -\frac{1}{6}\beta mqt^3 + \frac{1}{2}m((1-g)q - \beta q_0)t^2 + m((1-g)q - \beta N_0)t + S_0.$$

В форме СДУ получаем процесс для линейного прироста клиентов и процентных расходов на рекламу:

$$dS(t) = \left(-\frac{1}{2}\beta mqt^2 + m((1-g)q - \beta q_0)t + m((1-g)q - \beta N_0) \right) dt + \sigma S \delta W. \quad (16)$$

Результаты моделирования в программе *StochasticFPyramidsBuilder* 1000 траекторий процесса (16) с линейным приростом клиентов и процентными расходами на рекламу при $q_0 = 1$ представлены на рис. 8.

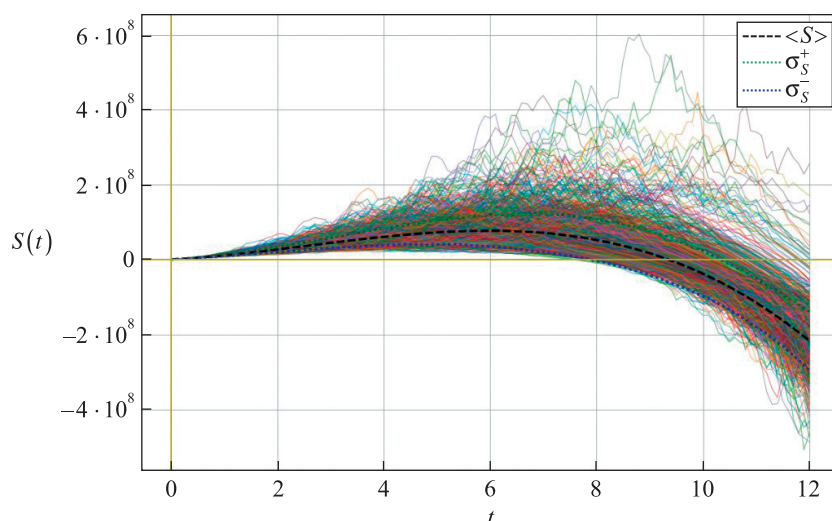


Рис. 8. Динамика прибыли финансовой пирамиды при линейном приросте клиентов, процентных расходах на рекламу и линейной волатильности (схема Рунге – Кутты 4-го порядка)

Fig. 8. Profit dynamics of a financial pyramid under linear growth of clients, interest expenses on advertising and linear volatility (Runge – Kutta scheme of 4th order)

Как показывает рис. 8, процентные затраты на рекламу оправдываются (максимальная прибыль выше и продолжительность функционирования финансовой пирамиды дольше), если при такой рекламной кампании удастся удержать линейный прирост клиентов.

Заключение

Таким образом, создан программный продукт, который позволяет моделировать прибыль финансовой пирамиды с использованием СДУ в форме процессов Ито с помощью точного решения и схемы Рунге – Кутты 4-го порядка численного решения СДУ.

В программе реализованы следующие модели с постоянной волатильностью:

- модель с постоянным количеством клиентов и постоянными расходами на рекламу;
- модель с постоянным приростом клиентов и постоянными расходами на рекламу;
- модель с линейным приростом клиентов и постоянными расходами на рекламу.

Также в программе реализованы модели с линейной волатильностью:

- модель с постоянным приростом клиентов и постоянными расходами на рекламу;
- модель с постоянным приростом клиентов и процентными расходами на рекламу;
- модель с линейным приростом клиентов и процентными расходами на рекламу.

Результаты анализа траекторий прибыли финансовой пирамиды позволяют сделать следующие выводы:

- случайные факторы могут существенно влиять на детерминированную часть формирования прибыли;
- отдельные траектории таких моделей могут существенно отличаться от большинства.

Библиографические ссылки

1. Коваленко АВ, Уртенев МХ, Чагаров РХ. Математическое моделирование деятельности финансовой пирамиды. Часть 1, Основные понятия. *Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета* [Электронный ресурс]. 2012 [процитировано 17 июля 2023 г.];8. Доступно по: <http://ej.kubagro.ru/2012/08/pdf/29.pdf>.
2. Коваленко АВ, Уртенев МХ, Чагаров РХ. Математическое моделирование деятельности финансовой пирамиды. Часть 2, Дискретные модели. *Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета* [Электронный ресурс]. 2012 [процитировано 17 июля 2023 г.];8. Доступно по: <http://ej.kubagro.ru/2012/08/pdf/30.pdf>.
3. Коваленко АВ, Уртенев МХ, Чагаров РХ. Математическое моделирование деятельности финансовой пирамиды. Часть 3, Непрерывные модели. *Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета* [Электронный ресурс]. 2012 [процитировано 17 июля 2023 г.];8. Доступно по: <http://ej.kubagro.ru/2012/08/pdf/31.pdf>.
4. Дубовский СВ. *Прогнозирование инфляции и обменного курса рубля в российской нестационарной экономике*. Москва: УРСС; 2001. 40 с. (Труды Института системного анализа РАН).
5. Дубовский СВ. Обменный курс рубля как результат денежной эмиссии, внешней торговли и блуждающих финансовых потоков. *Экономика и математические методы*. 2002;38(2):84–96.
6. Artzrouni M. The mathematics of Ponzi schemes. *Mathematical Social Sciences*. 2009;58(2):190–201. DOI: 10.1016/j.mathsocsci.2009.05.003.
7. Huynh PD, Dau SH, Li X, Luong P, Viterbo E. Improving robustness and accuracy of Ponzi scheme detection on Ethereum using time-dependent features. arXiv:2308.16391 [Preprint]. 2023 [cited 2023 August 31]: [17 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/2308.16391>.
8. Fan S, Fu S, Xu H, Cheng X. AI-SPSD: anti-leakage smart Ponzi schemes detection in blockchain. *Information Processing & Management*. 2021;58(4):102587. DOI: 10.1016/j.ipm.2021.102587.
9. van de Voort J, Coneys S. *Classifying bitcoin Ponzi schemes with machine learning* [Internet]. Shanghai: New York University Shanghai; 2018 December 1 [cited 2023 July 17]. [about 8 p.]. Available from: <http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.13091.58405>.
10. Gastwirth JL. A probability model of a pyramid scheme. *The American Statistician*. 1977;31(2):79–82. DOI: 10.1080/00031305.1977.10479200.
11. Belianin A, Issoupova O. *Financial pyramids in transitional economies: a game-theoretic approach*. Moscow: EERC; 2001. 70 p. (Education and research consortium working paper series; number 2K/10).
12. Новиков АК, Осадчий АА. *Математическое моделирование процессов притока и оттока капитала в структуре финансовой пирамиды и реализация модели на ЭВМ* [Интернет]. Москва: Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; 7 января 2022 г. [процитировано 17 июля 2023 г.]. 41 с. Доступно по: https://www.researchgate.net/publication/358771924_Matematicheskoe_modelirovanie_processov_pritoka_i_ottoka_kapitala_v_strukture_finansovoj_piramidy_i_realizacia_modeli_na_EVM.
13. Кесиян ГА, Уртенев МХ, Коваленко АВ. *Математические модели ценообразования на российском рынке ценных бумаг*. Краснодар: Кубанский государственный университет; 2014. 158 с.

References

1. Kovalenko AV, Urtenov MKh, Chagarov RH. Mathematical modeling of financial pyramid scheme. Part 1, Definitions. *Polythematic Online Scientific Journal of Kuban State Agrarian University* [Internet]. 2012 [cited 2023 July 17];8. Available from: <http://ej.kubagro.ru/2012/08/pdf/29.pdf>. Russian.
2. Kovalenko AV, Urtenov MKh, Chagarov RH. Mathematical modeling of financial pyramid scheme. Part 2, Discrete models. *Polythematic Online Scientific Journal of Kuban State Agrarian University* [Internet]. 2012 [cited 2023 July 17];8. Available from: <http://ej.kubagro.ru/2012/08/pdf/30.pdf>. Russian.
3. Kovalenko AV, Urtenov MKh, Chagarov RH. Mathematical modeling of financial pyramid scheme. Part 3, Continuous models. *Polythematic Online Scientific Journal of Kuban State Agrarian University* [Internet]. 2012 [cited 2023 July 17];8. Available from: <http://ej.kubagro.ru/2012/08/pdf/31.pdf>. Russian.
4. Dubovsky SV. *Prognozirovanie inflyatsii i obmennogo kursa rublya v rossiiskoi nestatsionarnoi ekonomike* [Forecasting inflation and the ruble exchange rate in the Russian non-stationary economy]. Moscow: URSS; 2001. 40 p. (Trudy Instituta sistemnogo analiza RAN). Russian.
5. Dubovsky SV. Ruble exchange rate as a result of money issue, foreign trade and wandering financial flows. *Economics and Mathematical Methods*. 2002;38(2):84–96. Russian.
6. Artzrouni M. The mathematics of Ponzi schemes. *Mathematical Social Sciences*. 2009;58(2):190–201. DOI: 10.1016/j.mathsocsci.2009.05.003.
7. Huynh PD, Dau SH, Li X, Luong P, Viterbo E. Improving robustness and accuracy of Ponzi scheme detection on Ethereum using time-dependent features. arXiv:2308.16391 [Preprint]. 2023 [cited 2023 August 31]: [17 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/2308.16391>.
8. Fan S, Fu S, Xu H, Cheng X. AI-SPSD: anti-leakage smart Ponzi schemes detection in blockchain. *Information Processing & Management*. 2021;58(4):102587. DOI: 10.1016/j.ipm.2021.102587.
9. van de Voort J, Coneys S. *Classifying bitcoin Ponzi schemes with machine learning* [Internet]. Shanghai: New York University Shanghai; 2018 December 1 [cited 2023 July 17]. [about 8 p.]. Available from: <http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.13091.58405>.

10. Gastwirth JL. A probability model of a pyramid scheme. *The American Statistician*. 1977;31(2):79–82. DOI: 10.1080/00031305.1977.10479200.
11. Belianin A, Issoupova O. *Financial pyramids in transitional economies: a game-theoretic approach*. Moscow: EERC; 2001. 70 p. (Education and research consortium working paper series; number 2K/10).
12. Novikov AK, Osadchii AA. *Matematicheskoe modelirovanie protsessov pritoka i ottoka kapitala v strukture finansovoi piramidy i realizatsiya modeli na EVM* [Mathematical modelling of processes of inflow and outflow of capital in the structure of the financial pyramid and realization of the model on the computer] [Internet]. Moscow: Lomonosov Moscow State University; 2022 January 7 [cited 2023 July 17]. 41 p. Available from: https://www.researchgate.net/publication/358771924_Matematicheskoe_modelirovanie_processov_pritoka_i_otтока_kapitala_v_strukture_finansovoj_piramidy_i_realizatsiya_modeli_na_EVM. Russian.
13. Kesiyan GA, Urtenov MKh, Kovalenko AV. *Matematicheskie modeli tseenoobrazovaniya na rossiiskom rynke tsennykh bumag* [Mathematical models of pricing in the Russian securities market]. Krasnodar: Kuban State University; 2014. 158 p. Russian.

Получена 02.05.2024 / исправлена 12.06.2024 / принята 12.06.2024.
Received 02.05.2024 / revised 12.06.2024 / accepted 12.06.2024.

Авторы:

Грант Арутович Кесиян – старший преподаватель кафедры анализа данных и искусственного интеллекта факультета компьютерных технологий и прикладной математики.

Анна Владимировна Коваленко – доктор технических наук, доцент; заведующий кафедрой анализа данных и искусственного интеллекта факультета компьютерных технологий и прикладной математики.

Махамед Али Хусеевич Уртенов – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры прикладной математики факультета компьютерных технологий и прикладной математики.

Зульфа Мисаровна Лайпанова – кандидат физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой математического анализа физико-математического факультета, исполняющий обязанности декана физико-математического факультета.

Анна Вячеславовна Овсянникова – кандидат педагогических наук, доцент; доцент кафедры математики факультета информационных технологий и анализа больших данных.

Authors:

Grant A. Kesiyan, senior lecturer at the department of data analysis and artificial intelligence, faculty of computer technology and applied mathematics.

grant.kesiyan@mail.ru
<https://orcid.org/0009-0001-1635-110X>

Anna V. Kovalenko, doctor of science (engineering), docent; head of the department of data analysis and artificial intelligence, faculty of computer technology and applied mathematics.

savanna-05@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0002-3991-3953>

Makhamet Ali Kh. Urtenov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of applied mathematics, faculty of computer technology and applied mathematics.

urtenovmax@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0002-0252-6247>

Zulfa M. Laipanova, PhD (physics and mathematics), docent; head of the department of mathematical analysis, faculty of physics and mathematics, and acting dean of the faculty of physics and mathematics.

laipanovazulfa@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0003-3051-6078>

Anna V. Ovsyannikova, PhD (pedagogics), docent; associate professor at the department of mathematics, faculty of information technology and big data analysis.

anna_ovsyannikov@bk.ru
<https://orcid.org/0000-0002-1716-3100>

УДК 519.872

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ С ЭЛЕКТРОННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ

О. С. ДУДИНА¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Рассматривается система массового обслуживания типа $MAP/GPH/N/K$ как модель системы с электронной очередью. Предполагается, что прибывающие пользователи после получения талона на обслуживание (номера в очереди) могут покидать систему с вероятностью, зависящей от количества пользователей перед ними, если сочтут очередь слишком длинной. Кроме того, пользователи могут покидать систему во время ожидания из-за нетерпеливости. Система не знает о присутствии (отсутствии) вызываемого пользователя и тратит некоторое время на обслуживание, даже если соответствующий пользователь уже покинул систему. Вычисляется стационарное распределение рассматриваемой системы. Приводятся формулы для нахождения основных характеристик производительности системы, а также численный эксперимент, показывающий возможность использования результатов работы в оптимизационных целях.

Ключевые слова: электронная очередь; коррелированный входной поток; нетерпеливые запросы; обобщенное распределение фазового типа.

ANALYTICAL MODELLING OF SYSTEMS WITH A TICKET QUEUE

O. S. DUDINA^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Abstract. A queuing system of $MAP/GPH/N/K$ type as a model of a ticket queue is herein considered. It is assumed that arriving users, after receiving a service ticket (place in the queue), can leave the system with a probability based on the number of users in front of them if they find the queue too long. In addition, users may leave the system during waiting due to impatience. The system does not know about the presence (absence) of the called users for service and spends some time servicing them, even if the corresponding user has already left the system. The stationary distribution of the system under consideration is calculated. Formulas for finding the main characteristics of the system performance are given. The presented numerical experiment shows the possibility of using the results for optimisation purposes.

Keywords: ticket queue; correlated arrival process; impatience customers; generalised phase-type distribution.

Образец цитирования:

Дудина ОС. Аналитическое моделирование систем с электронной очередью. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;2:40–53. EDN: NSXUQQ

For citation:

Dudina OS. Analytical modelling of systems with a ticket queue. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;2:40–53. Russian. EDN: NSXUQQ

Автор:

Ольга Сергеевна Дудина – кандидат физико-математических наук; ведущий научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории прикладного вероятностного анализа кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики.

Author:

Olga S. Dudina, PhD (physics and mathematics); leading researcher at the laboratory of applied probabilistic analysis, department of probability theory and mathematical statistics, faculty of applied mathematics and computer science. dudina@bsu.by
<https://orcid.org/0000-0002-6788-8783>

Введение

Теория массового обслуживания широко используется для оценки производительности и оптимизации различных промышленных, логистических, телекоммуникационных систем и сетей связи. Классические модели массового обслуживания предполагают, что каждый входящий пользователь принимается в систему при наличии хотя бы одного свободного места в очереди и обслуживается в определенном порядке. Существуют также системы массового обслуживания (СМО) с так называемой видимой очередью, в которых входящий пользователь наблюдает длину очереди и принимает решение присоединиться к очереди или уйти, даже если буфер не полон (см., например, [1]).

В классических СМО предполагается, что принятые пользователи всегда ждут своей очереди и обязательно будут обслужены. Однако в реальных системах пользователи часто могут проявлять нетерпеливость и покинуть систему после некоторого времени ожидания, если их обслуживание не началось. Литература, посвященная исследованию таких систем, достаточно обширна (см., например, [2–4]).

Еще один вид практически важных и интересных СМО – это так называемые СМО с талонами (*ticket systems*), которые могут использоваться для моделирования электронной очереди. В данных СМО каждый пришедший пользователь получает номерной билет (талон, жетон и т. п.) и наблюдает за номером обслуживаемого пользователя, который транслируется на табло. Когда обслуживание пользователя с отображаемым номером завершается, система (оператор) вызывает пользователя со следующим номером, т. е. обслуживание осуществляется по принципу «первым пришел – первым ушел». В СМО с талонами пользователь может видеть только свой номер талона и номер обслуживаемого пользователя. На основании разницы между ними пользователь решает уйти или дожидаться обслуживания. В отличие от обычных СМО в СМО с талонами отказывающийся от ожидания пользователь покидает систему физически, но система (оператор) не имеет никакой информации об этом. Далее поступающих пользователей будем называть активными пользователями, а пользователей, покинувших систему, не дожидаясь обслуживания, – неактивными пользователями. Во время ожидания активный пользователь также может проявить нетерпеливость и уйти из системы. Таким образом, он становится неактивным пользователем, но его талон остается в очереди.

СМО с талонами рассматриваются в литературе из-за их высокой практической значимости и множества преимуществ (см., например, [5]). Электронные очереди получили широкое распространение в финансовых и государственных учреждениях, организациях здравоохранения и розничных магазинах. Более подробную информацию и конкретные примеры можно найти в статьях [5; 6]. В них представлены хорошие обзоры соответствующих исследований и проанализирована СМО с талонами типа $M/M/1$.

В реальных системах уход пользователей из-за отказа ждать и (или) нетерпеливости негативно влияет на доход, получаемый системой. Кроме того, система может понести репутационные потери из-за недовольства пользователей, покинувших ее, не получив обслуживания. По этой причине системные администраторы должны постараться свести к минимуму негативные последствия, связанные с таким поведением пользователей. Наличие видимой очереди, нетерпеливости и необходимости обслуживать запросы ушедших пользователей создает больше проблем для управления системой, чем в классических СМО, и требует более тщательного анализа.

В статье [5] предполагается, что пришедший пользователь отказывается ждать, если разница между его номером и номером обслуживаемого пользователя превышает заранее определенный порог. Уход пользователей из-за нетерпеливости не допускается. Авторы исследуют цепь Маркова (ЦМ), описывающую процесс функционирования СМО с талонами, и разрабатывают эффективные инструменты для приближенной оценки производительности системы.

Похожая модель описана и проанализирована в работе [7], но авторы дополнительно позволяют пользователям уходить из очереди. В статье содержатся аппроксимации показателей производительности системы, основанные на интенсивном трафике, и их сравнение с аналогичными показателями соответствующей классической СМО.

В работе [8] анализ, представленный в статье [7], расширен для использования в управленческих целях. Предполагается, что существует два уровня работы прибора, отличающихся интенсивностью обслуживания и вероятностью отказа в зависимости от текущего уровня.

В публикации [9] рассмотрена СМО с талонами типа $MAP/M/1/K$. В отличие от ранее исследованных моделей в данной системе учитывается время обслуживания неактивных пользователей, предполагается, что любой пользователь может покинуть систему с вероятностью, произвольно зависящей от разницы между собственным номером пользователя и отображаемым на табло номером, а также рассматривается более общая модель входного потока (M AP-поток) вместо стационарного пуассоновского потока. В настоящей статье модель из работы [9] существенно обобщена следующим образом. Предполагается, что

система является многолинейной, а времена обслуживания активных и неактивных пользователей имеют распределение фазового типа, тогда как в работе [9] рассматривались однолинейная система и экспоненциальное распределение времен обслуживания. Данные обобщения существенно усложняют анализ системы и повышают ее адекватность реальным системам.

Математическая модель

Рассмотрим многолинейную СМО, состоящую из N приборов и конечного буфера емкостью K , структура которой представлена на рис. 1.

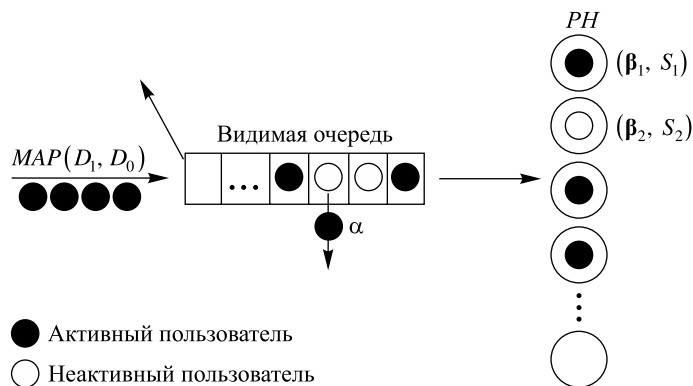


Рис. 1. Структура системы
 Fig. 1. The structure of the queue

В систему поступает MAP -поток пользователей. Этот входной поток задается управляющим процессом $v_t, t \geq 0$, который представляет собой неприводимую ЦМ с непрерывным временем и конечным пространством состояний $\{1, 2, \dots, W\}$, и матрицами D_0, D_1 . Средняя интенсивность поступления пользователей обозначается через λ и рассчитывается как $\lambda = \theta D_1 \mathbf{e}$, где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_W)$ – инвариантный вектор вероятностей ЦМ $v_t, t \geq 0$. Он определяется как единственное решение системы $\theta(D_0 + D_1) = \mathbf{0}, \theta \mathbf{e} = 1$. Здесь и далее \mathbf{e} – вектор-столбец соответствующего размера, состоящий из единиц, а $\mathbf{0}$ – вектор-строка соответствующего размера, состоящая из нулей. Более подробное описание MAP -потока и формулы для определения его характеристик (например, коэффициентов корреляции и вариации) можно найти в работах [10–13].

Если пришедший пользователь обнаруживает, что один из приборов простаивает, он занимает его и начинает обслуживание. Если в момент поступления буфер заполнен, пользователь покидает систему навсегда. В противном случае он берет талон и присоединяется к системе. После этого пользователь может наблюдать длину очереди. Предположим, что пользователь решает, что длина очереди для него слишком велика, и становится неактивным пользователем с вероятностью $q_k, 0 \leq q_k \leq 1$, где k – количество пользователей (активных и неактивных) в буфере в момент прибытия. С дополнительной вероятностью $1 - q_k$ пришедший пользователь остается в буфере как активный. Активных пользователей будем называть запросами первого типа, а неактивных пользователей – запросами второго типа.

Неактивный пользователь занимает место в буфере, но не требует полного обслуживания, и система не получает прибыли от обслуживания такого пользователя. Обратим внимание, что система не может распознать, неактивен ли пользователь, до начала его обслуживания. Считаем, что время обслуживания активного пользователя имеет фазовое распределение (PH) с неприводимым представлением (β_1, S_1) , а время обслуживания неактивного пользователя имеет фазовое распределение с неприводимым представлением (β_2, S_2) . Фазовое распределение времени обслуживания запроса типа $l, l = 1, 2$, означает следующее. Пусть есть ЦМ с непрерывным временем $\eta_t^{(l)}, t \geq 0$, имеющая пространство состояний $1, 2, \dots, M_l, M_l + 1, l = 1, 2$. Состояния $1, 2, \dots, M_l$ называются несущественными, а состояние $M_l + 1$ считается поглощающим. Начальное состояние данной ЦМ выбирается из множества несущественных состояний в соответствии с вероятностным вектором β_l . Интенсивности выходов из текущих состояний и переходов между несущественными состояниями задаются субгенератором S_l . Интенсивности переходов в поглощающее состояние задаются элементами вектора $S_0^{(l)} = -S_l \mathbf{e}$. Время обслуживания интерпретируется как время, за которое данная ЦМ достигнет поглощающего состояния. Подробная информация о распределении фазового типа и его свойствах представлена в работе [12].

Активные пользователи, находящиеся в буфере, могут проявлять нетерпеливость. То есть каждый активный пользователь независимо от других пользователей и собственного места в очереди может стать неактивным через экспоненциально распределенное время с параметром α , $\alpha > 0$.

Исследуем описанную систему.

Процесс изменения состояний системы и его стационарное распределение

Для облегчения исследования системы вместо отдельных распределений времени обслуживания активных и неактивных пользователей предлагаем ввести обобщенное распределение фазового типа (GPH) с неприводимым представлением (β_1, β_2, S) , подробная информация о котором представлена в работе [14]. Данный прием позволяет существенно упростить процесс изменения состояний системы и облегчить его исследование.

Обобщенное время обслуживания можно интерпретировать как время до тех пор, пока управляющий марковский процесс m_t , $t \geq 0$, с конечным пространством состояний $\{1, \dots, M, M + 1\}$ достигнет единственного поглощающего состояния $M + 1$. Здесь $M = M_1 + M_2$, где M_1 и M_2 – размер пространства состояний фазового распределения времени обслуживания активных и неактивных пользователей соответственно. Исходное состояние процесса m_t , $t \geq 0$, выбирается среди состояний $\{1, \dots, M\}$ в зависимости от типа обслуживаемого пользователя. Если для обслуживания выбран активный пользователь, то начальное состояние этого процесса выбирается в соответствии с вероятностной вектор-строкой $\beta_1 = (\beta_1, \mathbf{0}_{M_2})$, а если для обслуживания выбран неактивный пользователь, то согласно вероятностной вектор-строке $\beta_2 = (\mathbf{0}_{M_1}, \beta_2)$. Интенсивности переходов процесса η_t , $t \geq 0$, внутри множества $\{1, \dots, M\}$ определяются субгенератором $S = \begin{pmatrix} S_1 & O \\ O & S_2 \end{pmatrix}$, а интенсивности переходов в поглощающее состояние (что приводит к завершению обслуживания) задаются элементами вектор-столбца $S_0 = -Se$.

Пусть i_t , $i_t = \overline{0, N + K}$, – количество пользователей в системе (в буфере и на приборах); k_t , $k_t = \overline{0, \max\{0, i_t - N\}}$, – количество активных пользователей в буфере; v_t , $v_t = \overline{1, W}$, – состояние управляющего процесса MAP, а $m_t^{(l)}$, $l = \overline{1, M}$, $m_t^{(l)} = \overline{0, \min\{i_t, N\}}$, $\sum_{l=1}^M m_t^{(l)} = \min\{i_t, N\}$ – количество приборов, обеспечивающих обслуживание на l -й фазе обобщенного процесса обслуживания, в момент времени t , $t \geq 0$.

Многомерный случайный процесс $\xi_t = \{i_t, k_t, v_t, m_t^{(1)}, \dots, m_t^{(M)}\}$, $t \geq 0$, является немарковским, поскольку распределение времени обслуживания следующего пользователя зависит от того, активен или неактивен этот пользователь. Следовательно, чтобы получить марковский случайный процесс, введенные компоненты необходимо дополнить компонентами, определяющими статус каждого пользователя в буфере. Самый простой способ – явно указать статус каждого пользователя. Таким образом, можно исключить компоненту k_t . При $i_t > N$ каждый из $i_t - N$ пользователей в буфере помечается номером 1, если он активен, и номером 0 в противном случае. Пространство состояний этого набора компонент для каждого $i_t > N$ равно $2^{i_t - N}$. Соответственно, размер уравнений системы равновесия будет большим для сколь-либо большего значения K , и решение этой системы станет невозможным.

Другой возможный способ получить марковский процесс – дополнить процесс ξ_t , $t \geq 0$, указанием мест в буфере, занимаемых активными пользователями, и количеством неактивных пользователей в буфере, остающихся в очереди после любого активного пользователя. Такой способ обсуждается в статьях [5; 6]. Однако, как упоминается в работе [5], ее авторам не удалось справиться с вычислениями при $K > 9$. Напомним, что модель, рассмотренная в статье [5], существенно проще для анализа, чем исследуемая модель, поскольку предполагает нулевое время обслуживания неактивных пользователей и параметр W , равный единице, тогда как в данной работе допускаются произвольное конечное W и распределение времен обслуживания фазового типа. По этой причине делаем следующее упрощающее предположение. Если количество пользователей в буфере на момент завершения обслуживания пользователя равно i , $i = \overline{1, K}$, а количество активных пользователей равно k , $k = \overline{1, k}$, то с вероятностью $\frac{k}{i}$ следующим будет обслуживаться активный пользователь, а с дополнительной вероятностью будет обслуживаться неактивный пользователь. При этом предположении процесс $\xi_t = \{i_t, k_t, v_t, m_t^{(1)}, \dots, m_t^{(M)}\}$, $t \geq 0$, становится неприводимой ЦМ с непрерывным временем.

Пусть состояния ЦМ $\xi_t, t \geq 0$, пронумерованы в лексикографическом порядке компонент.

Теорема 1. Генератор Q ЦМ $\xi_t, t \geq 0$, имеет следующую блочно-трехдиагональную структуру:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{0,0} & Q_{0,1} & O & \dots & O & O & O \\ Q_{1,0} & Q_{1,1} & Q_{1,2} & \dots & O & O & O \\ O & Q_{2,1} & Q_{2,2} & \dots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \dots & Q_{K+N-1, K+N-2} & Q_{K+N-1, K+N-1} & Q_{K+N-1, K+N} \\ O & O & O & \dots & O & Q_{K+N, K+N-1} & Q_{K+N, K+N} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} Q_{0,0} &= D_0, \\ Q_{i,i} &= D_0 \otimes I_T + I_W \otimes (A_i + \Delta_i), \quad 1 \leq i \leq N, \\ Q_{i,i} &= I_{i-N+1} \otimes D_0 \otimes I_{T_N} + I_{(i-N+1)W} \otimes (A_N + \Delta_N) - \\ &- \alpha C_{i-N+1} \otimes I_{WT_N} + \alpha C_{i-N+1} E_{i-N+1}^- \otimes I_{WT_N}, \quad i = \overline{N+1, N+K-1}, \\ Q_{K+N, K+N} &= I_{K+1} \otimes (D_0 + D_1) \otimes I_{T_N} + I_{(K+1)W} \otimes (A_N + \Delta_N) - \\ &- \alpha C_{K+1} \otimes I_{WT_N} + \alpha C_{K+1} E_{K+1}^- \otimes I_{WT_N}, \\ Q_{i,i+1} &= D_1 \otimes P_i(\beta_1), \quad i = \overline{0, N-1}, \\ Q_{i,i+1} &= (1 - q_{i-N}) E_{i-N+1}^+ \otimes D_1 \otimes I_{T_N} + q_{i-N} \tilde{E}_{i-N+1}^- \otimes D_1 \otimes I_{T_N}, \quad i = \overline{N, N+K-1}, \\ Q_{i,i-1} &= I_W \otimes L_i, \quad i = \overline{1, N}, \\ Q_{i,i-1} &= H_{i-N+1} \tilde{E}_{i-N+1}^- \otimes I_W \otimes L_N P_{N-1}(\beta_1) + \\ &+ (I_{i-N+1} - H_{i-N+1}) \hat{E}_{i-N+1}^- \otimes I_W \otimes L_N P_{N-1}(\beta_2), \quad i = \overline{N+1, N+K}. \end{aligned}$$

Здесь \otimes – символ кронекерова произведения матриц; $C_k = \text{diag}\{0, 1, 2, \dots, k-2, k-1\}$, $k = \overline{2, K+1}$; $\text{diag}\{\dots\}$ – диагональная матрица с диагональными элементами, перечисленными в скобках; $E_k^-, k = \overline{2, K+1}$, – квадратная матрица размера k со всеми нулевыми элементами, кроме элементов $(E_k^-)_{l, l-1}, l = \overline{1, k-1}$, которые равны единице; $E_k^+, k = \overline{1, K}$, – матрица размера $k \times (k+1)$ со всеми нулевыми элементами, кроме элементов $(E_k^+)_{l, l+1}, l = \overline{0, k-1}$, которые равны единице; $\tilde{E}_k, k = \overline{1, K}$, – матрица размера $k \times (k+1)$ со всеми нулевыми элементами, кроме элементов $(\tilde{E}_k)_{l, l}, l = \overline{0, k-1}$, которые равны единице; $\tilde{E}_k^-, k = \overline{2, K+1}$, – матрица размера $k \times (k-1)$ со всеми нулевыми элементами, кроме элементов $(\tilde{E}_k^-)_{l, l-1}, l = \overline{1, k-1}$, которые равны единице; $\hat{E}_k, k = \overline{2, K+1}$, – матрица размера $k \times (k-1)$ со всеми нулевыми элементами, кроме элементов $(\hat{E}_k)_{l, l}, l = \overline{0, k-1}$, которые равны единице; $H_k = \text{diag}\left\{0, \frac{1}{k-1}, \frac{2}{k-1}, \dots, \frac{k-2}{k-1}, 1\right\}$, $k = \overline{2, K+1}$; $T_i = \frac{(i+M-1)!}{i!(M-1)!}$, $i = \overline{1, N}$, – мощность пространства состояний процесса $\{m_t^{(1)}, \dots, m_t^{(M)}\}, t \geq 0$, при одновременном обслуживании i пользователей.

Замечание 1. Матрицы $A_i, i = \overline{1, N}$, определяют интенсивности переходов компонент $\{m_t^{(1)}, \dots, m_t^{(M)}\}$, которые не влекут за собой окончание обслуживания при условии, что в данный момент заняты i при-

боров. Матрицы $L_i, i = \overline{1, N}$, определяют интенсивности переходов компонент $\{m_i^{(1)}, \dots, m_i^{(M)}\}$, которые приводят к окончанию обслуживания в одном из занятых приборов при условии, что в данный момент заняты i приборов. Матрицы $P_i(\beta_i), i = \overline{0, N-1}$, определяют вероятности переходов компонент $\{m_i^{(1)}, \dots, m_i^{(M)}\}$ при условии, что в данный момент заняты i приборов и запрос типа $l, l = 1, 2$, начинает обслуживание. Диагональные элементы диагональной матрицы $\Delta_i, i = \overline{1, N}$, определяют с точностью до знака интенсивности выхода процесса $\{m_i^{(1)}, \dots, m_i^{(M)}\}, t \geq 0$, из соответствующего состояния. Алгоритмы вычисления матриц $A_i, L_i, \Delta_i, i = \overline{1, N}, P_i(\beta_i), i = \overline{0, N-1}, l = 1, 2$, представлены в работе [15].

Доказательство. Теорема доказывается путем анализа интенсивностей всех возможных переходов ЦМ $\xi_p, t \geq 0$, за бесконечно малый интервал времени. Блочно-тредиагональная форма генератора Q легко объясняется тем, что пользователи поступают в систему и уходят из нее по одному.

Если система пуста (буфер пуст, и все приборы простаивают), поведение ЦМ $\xi_p, t \geq 0$, определяется только процессом $v_p, t \geq 0$. Интенсивности его переходов, которые не приводят к изменению числа запросов в системе, задаются недиагональными элементами матрицы D_0 , а интенсивности выхода из соответствующих состояний определяются с точностью до знака диагональными элементами этой матрицы, следовательно, $Q_{0,0} = D_0$.

Далее поясним вид блоков $Q_{i,i}, i = \overline{1, N+K}$. Так как это диагональный блок генератора, то все его диагональные элементы отрицательны, а модули этих элементов определяют интенсивности выхода ЦМ $\xi_p, t \geq 0$, из соответствующих состояний. Выход ЦМ $\xi_p, t \geq 0$, из текущего состояния возможен в следующих случаях.

1. Управляющий процесс $v_p, t \geq 0$, поступления пользователей выходит из текущего состояния. Соответствующие интенсивности переходов определяются с точностью до знака диагональными элементами матриц $D_0 \otimes I_{T_i}$, если $i = \overline{1, N}$, и диагональными элементами матриц $I_{i-N+1} \otimes D_0 \otimes I_{T_N}$, если $i = \overline{N+1, N+K}$.

2. Процесс $\{m_i^{(1)}, \dots, m_i^{(M)}\}, t \geq 0$, в одном из занятых приборов совершает выход из своего текущего состояния. Соответствующие интенсивности переходов определяются с точностью до знака диагональными элементами матриц $I_W \otimes \Delta_i$, если $i = \overline{1, N}$, и диагональными элементами матриц $I_{(i-N+1)W} \otimes \Delta_N$, если $i = \overline{N+1, N+K}$.

3. Активный пользователь, находящийся в буфере, покидает систему из-за нетерпеливости (становится неактивным). Соответствующие интенсивности задаются матрицами $\alpha C_{i-N+1} \otimes I_{WT_N}, i = \overline{N+1, N+K}$.

Недиагональные элементы матриц $Q_{i,i}, i = \overline{1, N+K+1}$, определяют интенсивности переходов ЦМ $\xi_p, t \geq 0$, без изменения значения i первой компоненты. Эти переходы определяются следующими элементами:

- недиагональными элементами матриц $D_0 \otimes I_{T_i}, i = \overline{1, N}$, и $I_{i-N+1} \otimes D_0 \otimes I_{T_N}, i = \overline{N+1, N+K}$, когда управляющий процесс $v_p, t \geq 0$, совершает переход без генерации пользователя;
- элементами матриц $I_W \otimes A_i, i = \overline{1, N}$, и $I_{(i-N+1)W} \otimes A_N, i = \overline{N+1, N+K}$, когда процесс обслуживания в одном из занятых приборов совершает переход, не приводящий к окончанию обслуживания;
- элементами матриц $\alpha C_{i-N+1} E_{i-N+1}^- \otimes I_{WT_N}, i = \overline{N+1, N+K}$, когда активный пользователь становится неактивным из-за нетерпеливости;
- элементами матрицы $I_{K+1} \otimes D_1 \otimes I_{T_N}$, если пользователь поступает в систему при заполненности буфера (когда $i = N+K$) и покидает систему, не получив талон.

В результате имеем блоки $Q_{i,i}, i = \overline{0, N+K}$, представленные выше.

Форма блоков $Q_{i,i+1}, i = \overline{0, N+K-1}$, объясняется следующим образом. Данные блоки содержат интенсивности переходов ЦМ $\xi_p, t \geq 0$, которые приводят к увеличению количества пользователей в системе (в буфере и на приборах) на единицу. Если $i = \overline{0, N-1}$ (есть хотя бы один свободный прибор), эти переходы происходят, когда пользователь приходит в систему и начинает обслуживание. Соответствующие интенсивности определяются элементами матриц $D_1 \otimes P_i(\beta_i)$. Если $i = \overline{N, N+K-1}$ (все приборы заняты, но есть хотя бы одно свободное место в буфере), то увеличение количества пользователей в системе на единицу происходит, когда новый пользователь присоединяется к системе и становится в буфер для ожидания обслуживания. Интенсивности наступления этого события определяются элементами матриц

$(1 - q_{i-N})E_{i-N+1}^+ \otimes D_1 \otimes I_{T_N}$, если поступивший пользователь присоединяется к буферу как активный пользователь, и элементами матриц $q_{i-N}\tilde{E}_{i-N+1}^- \otimes D_1 \otimes I_{T_N}$, если пришедший пользователь становится неактивным.

Теперь рассмотрим блоки $Q_{i,i-1}$, $i = \overline{1, N+K}$. Эти блоки содержат интенсивности переходов ЦМ ξ_t , $t \geq 0$, из состояния со значением i первой компоненты в состояние со значением $i-1$ данной компоненты. Такие переходы возможны только в случае завершения обслуживания. Если в момент завершения обслуживания буфер пуст, интенсивности наступления этого события определяются элементами матриц $I_W \otimes L_i$. В противном случае соответствующие интенсивности задаются элементами матриц $H_{i-N+1}\tilde{E}_{i-N+1}^- \otimes I_W \otimes L_N P_{N-1}(\beta_1)$, если активный пользователь начинает обслуживание, и элементами матриц $(I_{i-N+1} - H_{i-N+1})\hat{E}_{i-N+1} \otimes I_W \otimes L_N P_{N-1}(\beta_2)$, если неактивный пользователь идет на обслуживание. Учитывая все эти пояснения, получаем формулы для блоков $Q_{i,i-1}$, $i = \overline{1, N+K}$, представленные выше. Теорема доказана.

Очевидно, что стационарные вероятности состояний системы $\pi(i, k, v, m^{(1)}, \dots, m^{(M)})$, $i = \overline{0, K+N}$, $k = \overline{0, \max\{0, i-N\}}$, $v = \overline{1, W}$, $m^{(l)} = \overline{0, \min\{i, N\}}$, $\sum_{l=1}^M m^{(l)} = \min\{i, N\}$, $l = \overline{1, M}$, существуют для всех возможных значений параметров системы. Сформируем вектор-строки $\pi_i = (\pi(i, k), k = \overline{0, \max\{0, i-N\}})$ из этих вероятностей, пронумерованных в лексикографическом порядке компонент $k, v, m^{(1)}, \dots, m^{(M)}$. Хорошо известно, что данные векторы удовлетворяют следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{K+N})Q = \mathbf{0}, (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{K+N})\mathbf{e} = 1,$$

где Q – инфинитезимальный генератор ЦМ ξ_t , $t \geq 0$. Для решения этой системы может быть использован эффективный и численно устойчивый алгоритм, разработанный в статье [2].

Характеристики производительности

Среднее количество пользователей в системе рассчитывается по формуле

$$L_{\text{system}} = \sum_{i=1}^{K+N} i\pi_i \mathbf{e}.$$

Среднее количество занятых приборов вычисляется следующим образом:

$$N_{\text{server}} = \sum_{i=1}^{K+N} \min\{i, N\}\pi_i \mathbf{e}.$$

Среднее количество пользователей в буфере определяется как

$$N_{\text{buffer}} = \sum_{i=N+1}^{K+N} (i-N)\pi_i \mathbf{e} = L_{\text{system}} - N_{\text{server}}.$$

Среднее количество активных пользователей в буфере вычисляется по формуле

$$N_{\text{buffer-active}} = \sum_{i=N+1}^{K+N} \sum_{k=1}^{i-N} k\pi(i, k) \mathbf{e}.$$

Среднее количество неактивных пользователей в буфере рассчитывается следующим образом:

$$N_{\text{buffer-inactive}} = \sum_{i=N+1}^{K+N} \sum_{k=0}^{i-N-1} (i-N-k)\pi(i, k) \mathbf{e} = N_{\text{buffer}} - N_{\text{buffer-active}}.$$

Средняя интенсивность обслуживания активных пользователей определяется как

$$\lambda_{\text{out-active}} = \sum_{i=1}^{K+N} \pi_i \left(I_{(\max\{0, i-N\}+1)W} \otimes L_{\min\{i, N\}}^{(1)} \right) \mathbf{e}.$$

Средняя интенсивность обслуживания неактивных пользователей находится по формуле

$$\lambda_{\text{out-inactive}} = \sum_{i=1}^{K+N} \pi_i \left(I_{(\max\{0, i-N\}+1)W} \otimes L_{\min\{i, N\}}^{(2)} \right) \mathbf{e}.$$

Замечание 2. Матрицы $L_i^{(l)} = L_i^{(l)}(\tilde{\mathcal{S}}_0^{(l)})$, $i = \overline{1, N}$, $l = 1, 2$, вычисляются по тому же алгоритму, что и матрицы L_i . Здесь $\tilde{\mathcal{S}}_0^{(1)}$ – вектор-столбец размера M вида $\left(\left(\mathcal{S}_0^{(1)} \right)^T, \mathbf{0}_{M_2} \right)^T$, а $\tilde{\mathcal{S}}_0^{(2)}$ – вектор-столбец размера M вида $\left(\mathbf{0}_{M_1}, \left(\mathcal{S}_0^{(2)} \right)^T \right)^T$.

Вероятность того, что в произвольный момент система простаивает, определяется следующим образом:

$$P_{\text{idle}} = \boldsymbol{\pi}_0 \mathbf{e}.$$

Вероятность того, что пришедший пользователь начнет обслуживание по прибытии, вычисляется как

$$P_{\text{imm}} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{N-1} \boldsymbol{\pi}_i (D_1 \otimes P_i(\boldsymbol{\beta}_1)) \mathbf{e}.$$

Вероятность потери произвольного активного пользователя из буфера из-за нетерпеливости рассчитывается по формуле

$$P_{\text{imp-loss}} = \frac{\alpha}{\lambda} \sum_{i=N+1}^{K+N} \sum_{k=1}^{i-N} k \boldsymbol{\pi}(i, k) \mathbf{e} = \frac{\alpha N_{\text{buffer-active}}}{\lambda}.$$

Вероятность потери произвольного пользователя на входе из-за отказа присоединяться к длинной очереди вычисляется следующим образом:

$$P_{\text{balk-loss}} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=N}^{K+N-1} q_{i-N} \boldsymbol{\pi}_i (I_{i-N+1} \otimes D_1 \otimes I_{T_N}) \mathbf{e}.$$

Вероятность потери произвольного пользователя на входе из-за переполненности буфера определяется по формуле

$$P_{\text{full-buffer-loss}} = \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\pi}_{K+N} (I_{K+1} \otimes D_1 \otimes I_{T_N}) \mathbf{e}.$$

Общая вероятность потери произвольного пользователя рассчитывается как

$$P_{\text{loss}} = 1 - \frac{\lambda_{\text{out-active}}}{\lambda} = P_{\text{imp-loss}} + P_{\text{balk-loss}} + P_{\text{full-buffer-loss}}.$$

Последнее выражение можно использовать для проверки точности при отладке программы, а также вычисления стационарных вероятностей системы и показателей ее производительности.

Численный эксперимент

В численном эксперименте исследуем зависимость основных характеристик системы от числа приборов (N) и емкости буфера (K), а также коснемся вопроса выбора оптимальных параметров системы. Предположим, что входной *MAP*-поток пользователей в систему задается матрицами

$$D_0 = \begin{pmatrix} -1,6 & 0 \\ 0 & -0,4 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 1,5 & 0,1 \\ 0,02 & 0,38 \end{pmatrix}.$$

Средняя интенсивность поступления пользователей составляет 0,6, коэффициенты корреляции и вариации последовательных времен между поступлениями равны 0,170 673 и 1,625 соответственно.

Пусть время обслуживания активного пользователя имеет распределение фазового типа с неприводимым представлением $(\boldsymbol{\beta}_1, S_1)$, где $\boldsymbol{\beta}_1 = (0,7, 0,3)$, а $S_1 = \begin{pmatrix} -0,5 & 0 \\ 0,1 & -0,2 \end{pmatrix}$. Среднее время обслуживания активного пользователя равно 3,2.

Пусть время обслуживания неактивного пользователя имеет распределение фазового типа с неприводимым представлением $(\boldsymbol{\beta}_2, S_2)$, где $\boldsymbol{\beta}_2 = (1, 0)$ и $S_2 = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Среднее время обслуживания неактивного пользователя равно 0,5.

Предположим, что интенсивность ухода пользователей из-за нетерпеливости составляет $\alpha = 0,05$.

В данном численном эксперименте будем изменять емкость буфера в интервале $[1, 30]$ и число приборов в интервале $[1, 5]$ с шагом 1.

Вероятности ухода пользователей из-за нежелания присоединяться к длинной очереди определим как $q_k = \frac{k+1}{31}$, $k = \overline{0, 29}$.

На рис. 2–6 представлены зависимости значений L_{system} , N_{server} , N_{buffer} , $N_{\text{buffer-active}}$ и $N_{\text{buffer-inactive}}$ от параметров N и K .

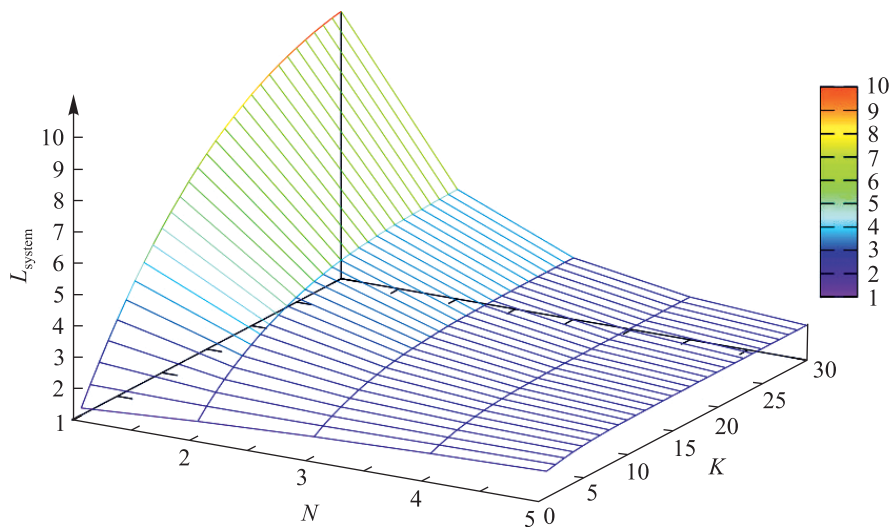


Рис. 2. Зависимость L_{system} от N и K
Fig. 2. Dependence L_{system} on N and K

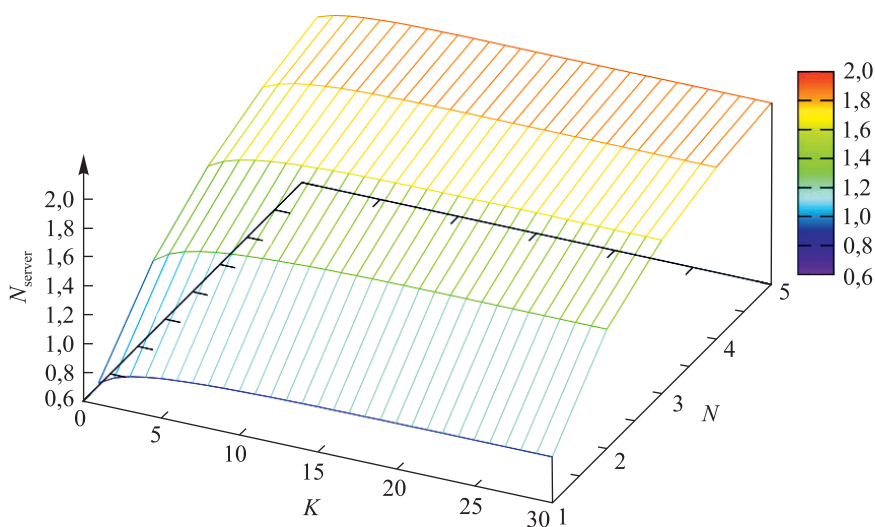


Рис. 3. Зависимость N_{server} от N и K
Fig. 3. Dependence N_{server} on N and K

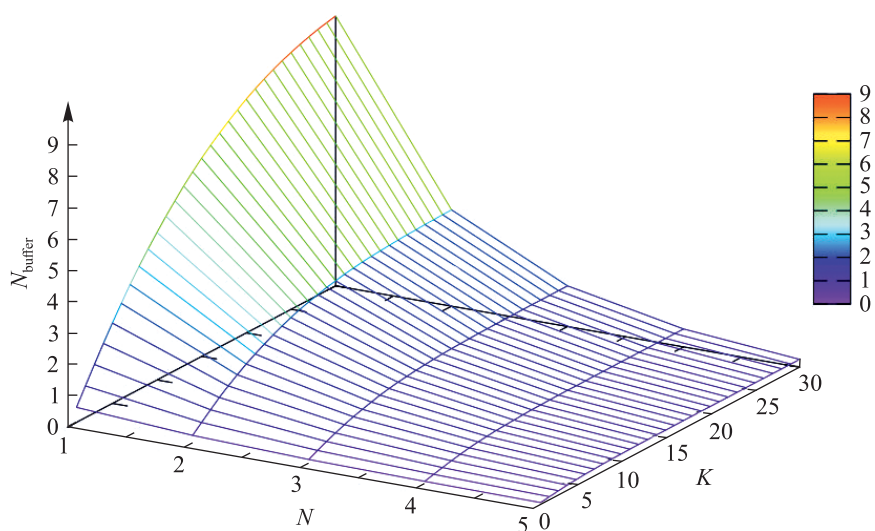


Рис. 4. Зависимость N_{buffer} от N и K
Fig. 4. Dependence N_{buffer} on N and K

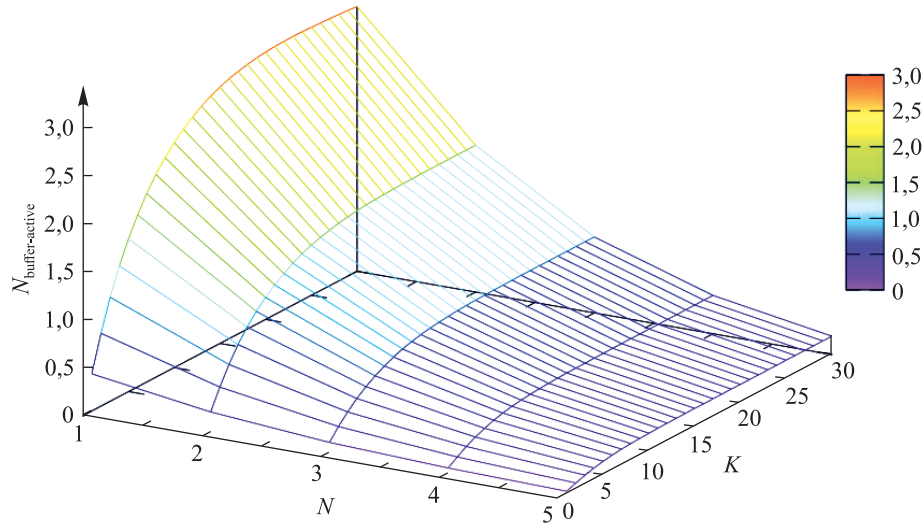


Рис. 5. Зависимость $N_{\text{buffer-active}}$ от N и K
Fig. 5. Dependence $N_{\text{buffer-active}}$ on N and K

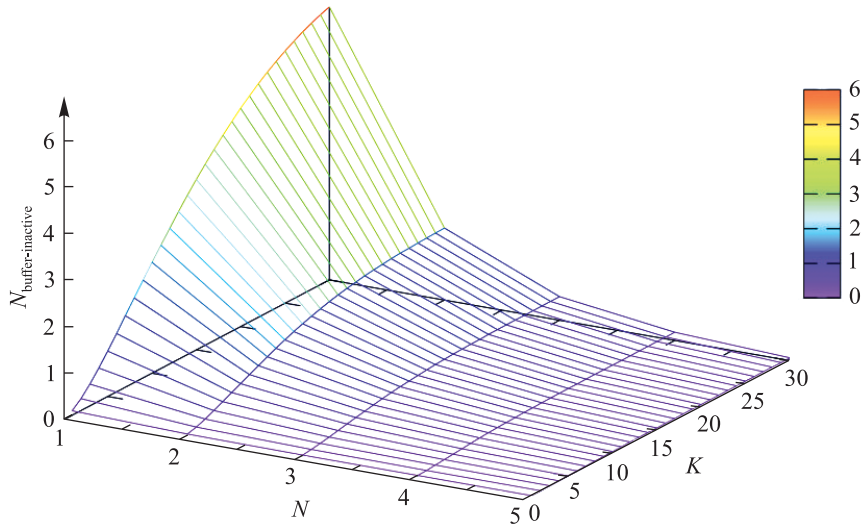


Рис. 6. Зависимость $N_{\text{buffer-inactive}}$ от N и K
Fig. 6. Dependence $N_{\text{buffer-inactive}}$ on N and K

Как видно из рис. 2, значение L_{system} растет с увеличением параметра K , поскольку в результате роста емкости буфера увеличивается емкость системы и уменьшается вероятность того, что пользователь покинет систему из-за занятости буфера. Следовательно, в буфере находится большее количество пользователей, что приводит к увеличению значения L_{system} . В то же время при фиксированной емкости буфера значение L_{system} может как увеличиваться, так и уменьшаться с ростом N . С одной стороны, при увеличении параметра N растет емкость системы и снижается вероятность потери пользователей на входе, следовательно, в системе находится больше запросов. С другой стороны, при увеличении числа приборов пользователи меньше ждут в очереди, что приводит к сокращению их количества в системе.

Как следует из рис. 3, значение N_{server} растет как с увеличением параметра N , так и с увеличением параметра K . В то же время значения N_{buffer} , $N_{\text{buffer-active}}$ и $N_{\text{buffer-inactive}}$ уменьшаются при росте N , но увеличиваются при росте K , что можно объяснить, используя приведенные выше рассуждения. Из рис. 4–6 становится очевидно, что при малых значениях N и больших значениях K существенная часть запросов, находящихся в очереди, являются неактивными, а соответственно, при таких параметрах система работает плохо.

На рис. 7 показана зависимость вероятности P_{imm} от параметров N и K . Очевидно, что данная вероятность увеличивается с ростом числа приборов и уменьшается с ростом емкости буфера.

На рис. 8–11 представлены зависимости вероятностей $P_{\text{balk-loss}}$, $P_{\text{imp-loss}}$, $P_{\text{full-buffer-loss}}$ и P_{loss} от параметров N и K .

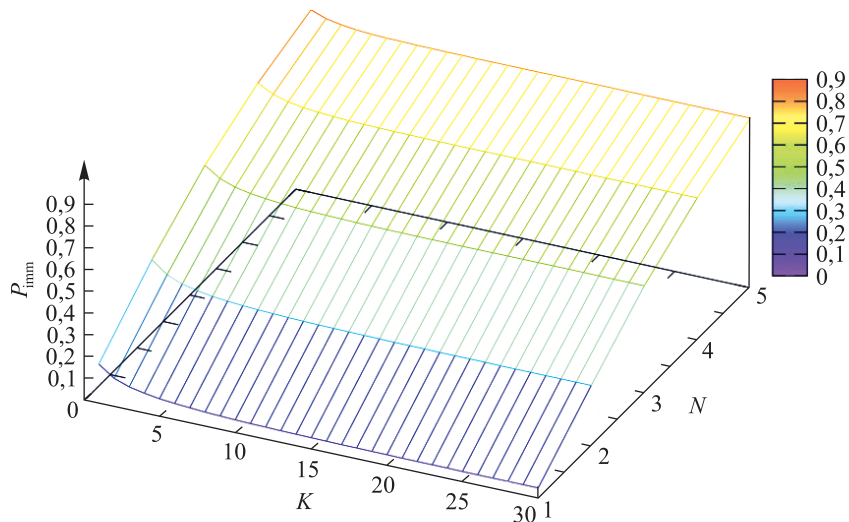


Рис. 7. Зависимость P_{imm} от N и K
Fig. 7. Dependence P_{imm} on N and K

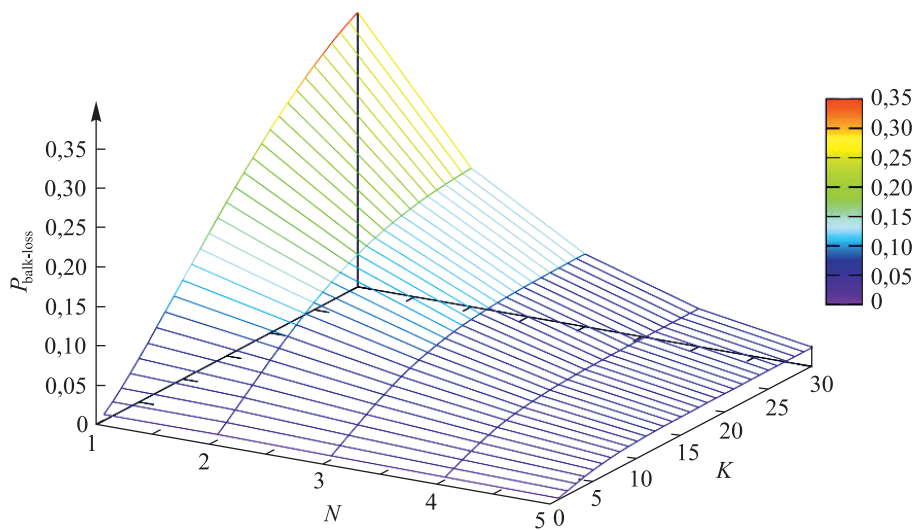


Рис. 8. Зависимость $P_{balk-loss}$ от N и K
Fig. 8. Dependence $P_{balk-loss}$ on N and K

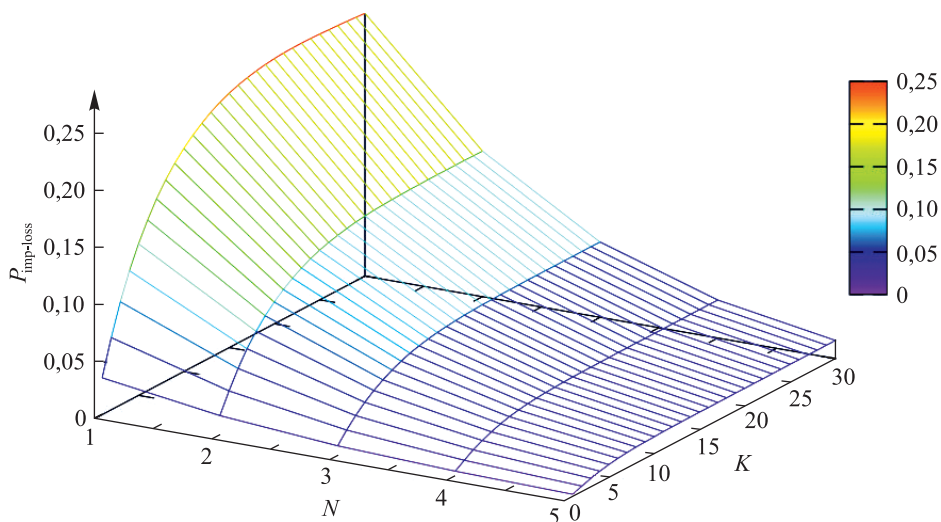


Рис. 9. Зависимость $P_{imp-loss}$ от N и K
Fig. 9. Dependence $P_{imp-loss}$ on N and K

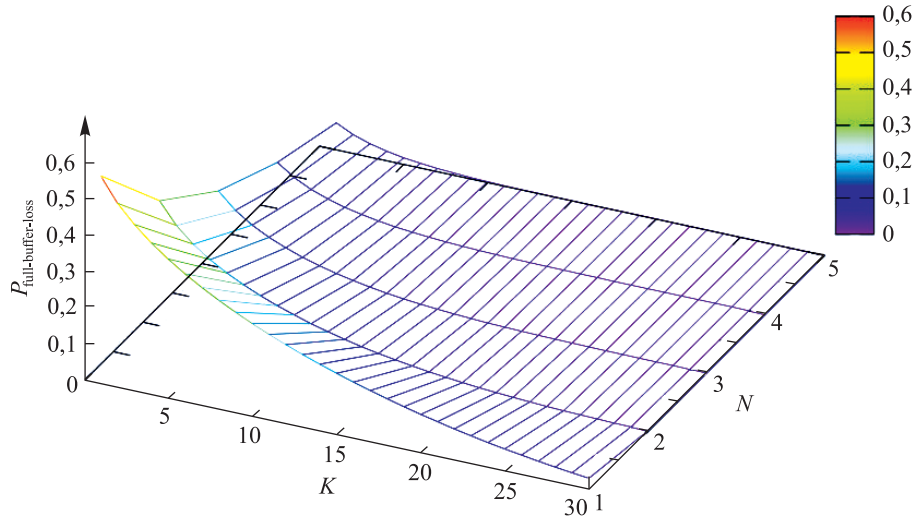


Рис. 10. Зависимость $P_{\text{full-buffer-loss}}$ от N и K
Fig. 10. Dependence $P_{\text{full-buffer-loss}}$ on N and K

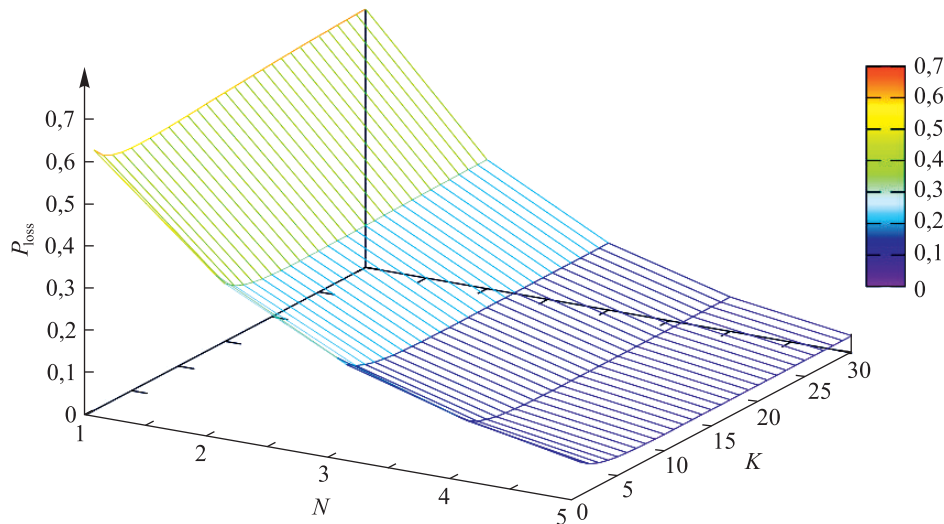


Рис. 11. Зависимость P_{loss} от N и K
Fig. 11. Dependence P_{loss} on N and K

Как видно из рис. 8 и 9, вероятности $P_{\text{balk-loss}}$ и $P_{\text{imp-loss}}$ уменьшаются с ростом N и увеличиваются с ростом K . В то же время, как следует из рис. 10, вероятность $P_{\text{full-buffer-loss}}$ уменьшается при увеличении значений N и K . Вероятность P_{loss} является суммой трех перечисленных вероятностей. В отличие от классических СМО, где с ростом емкости буфера общая вероятность потери произвольного пользователя уменьшается, в данном случае при увеличении значения K вероятность P_{loss} ведет себя немонотонно. Например, при фиксированном значении $N = 1$ ее величина составляет $P_{\text{loss}} = 0,61631$ при $K = 1$, $P_{\text{loss}} = 0,57908$ при $K = 10$ и $P_{\text{loss}} = 0,61101$ при $K = 30$. Рост общей вероятности потери произвольного пользователя с увеличением емкости буфера объясняется следующим образом. При слишком большой емкости буфера и малом числе приборов многие пользователи присоединяются к очереди и не дожидаются начала обслуживания, фактически уходя из системы из-за нетерпеливости, при этом оставляя свой талон. В данном случае длина очереди не уменьшается, а система вынуждена тратить ресурсы на обслуживание большого числа неактивных пользователей. Другими словами, если количество пользователей в очереди достаточно велико и высока вероятность того, что пришедший пользователь не дожидется обслуживания, имеет смысл отказать в обслуживании сразу. В рассматриваемом примере вероятность P_{loss} принимает минимальное значение 0,040371 при $N = 5$ и $K = 18$. С точки зрения минимизации общей вероятности потери произвольного пользователя данные параметры являются оптимальными. Однако в реальных системах содержание каждого прибора требует затрат. К тому же штрафы за потерю пользователя из-за разных причин могут отличаться. Например, репутационные потери системы в случае, когда пользователь не захотел ждать обслуживания по приходу в систему, отличаются от потерь в случае, когда

пользователь ждал обслуживания, но так и не дождался. Чтобы учесть данные аспекты, предположим, что качество функционирования системы задается следующим экономическим критерием:

$$E = E(N, K) = a\lambda_{\text{out-active}} - b\lambda_{\text{out-inactive}} - c_1\lambda P_{\text{balk-loss}} - c_2\lambda P_{\text{full-buffer-loss}} - c_3\lambda P_{\text{imp-loss}} - d_1K - d_2N.$$

Здесь a – прибыль, получаемая системой за обслуживание одного активного пользователя; b – затраты системы на обслуживание неактивного пользователя; c_1 , c_2 и c_3 – штрафы, уплачиваемые системой за потерю пользователя из-за отказа присоединиться к длинной очереди, переполненности буфера и нетерпеливости соответственно; d_1 – плата за содержание одной единицы буферного пространства, а d_2 – плата за использование одного прибора. Экономический критерий $E(N, K)$ определяет среднюю прибыль, получаемую системой в единицу времени. Наша цель – найти оптимальные значения числа приборов и емкости буфера, при которых средняя прибыль системы была бы максимальной.

Зафиксируем следующие значения стоимостных коэффициентов: $a = 5$; $b = 0,5$; $c_1 = 1$; $c_2 = 1,2$; $c_3 = 1,4$; $d_1 = 0,001$; $d_2 = 0,2$.

Зависимость значений экономического критерия $E(N, K)$ от параметров N и K представлена на рис. 12.

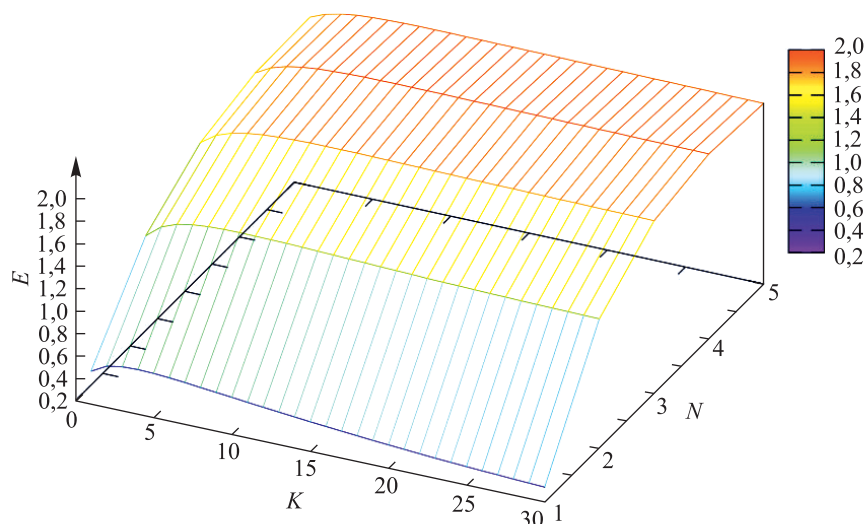


Рис. 12. Зависимость экономического критерия $E(N, K)$ от параметров N и K
Fig. 12. Dependence of the economic criterion $E(N, K)$ on parameters N and K

Как видно из рис. 12, значения экономического критерия $E(N, K)$ ведут себя немонотонно как по N , так и по K . Оптимальное значение критерия качества составляет 1,864 15 и достигается при $N = 4$ и $K = 10$. Другими словами, прибыль описанной системы будет максимальной, если мы зафиксируем число приборов, равное 4, и емкость буфера, равную 10.

Замечание 3. Вычисления проводились на персональном компьютере с процессором Intel Core i7-8700 (CPU, 16 RAM) с использованием программы *Wolfram Mathematica* (версия 13.2). Время расчетов в данном численном эксперименте составило 232 с на 150 различных вариантов пар (N, K) , или в среднем 1,57 с на 1 пару.

Заключение

В настоящей работе исследована СМО с коррелированным входным потоком и нетерпеливыми запросами, моделирующая функционирование систем с электронной очередью. Найдено стационарное распределение состояний системы, вычислены основные характеристики производительности. Приведен численный эксперимент, иллюстрирующий зависимость характеристик производительности от числа приборов и емкости буфера. Полученные результаты могут быть использованы на практике для выбора оптимальных параметров системы с точки зрения заданного критерия качества.

Библиографические ссылки / References

1. Sun B, Dudin A, Dudin S. Queueing system with impatient customers, visible queue and replenishable inventory. *Applied and Computational Mathematics*. 2018;17(2):161–174.
2. Dudin A, Dudina O, Dudin S, Gaidamaka Y. Self-service system with rating dependent arrivals. *Mathematics*. 2022;10(3):297. DOI: 10.3390/math10030297.

3. Garnett O, Mandelbaum A, Reiman M. Designing a call center with impatient customers. *Manufacturing & Service Operations Management*. 2002;4(3):208–227. DOI: 10.1287/msom.4.3.208.7753.
4. Wang K, Li N, Jiang Z. Queueing system with impatient customers: a review. In: *Proceedings of 2010 IEEE International conference on service operations and logistics, and informatics; 2010 July 15–17; QingDao, China*. [S. l.]: IEEE; 2010. p. 82–87. DOI: 10.1109/SOLI.2010.5551611.
5. Xu SH, Gao L, Ou J. Service performance analysis and improvement for a ticket queue with balking customers. *Management Science*. 2007;53(6):971–990. DOI: 10.1287/mnsc.1060.0660.
6. Hanukov G, Hassoun M, Musicant O. On the benefits of providing timely information in ticket queues with balking and calling times. *Mathematics*. 2021;9(21):2753. DOI: 10.3390/math9212753.
7. Jennings OB, Pender J. Comparisons of ticket and standard queues. *Queueing Systems*. 2016;84(1–2):145–202. DOI: 10.1007/s11134-016-9493-y.
8. Xiao L, Xu SH, Yao DD, Zhang H. Optimal staffing for ticket queues. *Queueing Systems*. 2022;102(1–2):309–351. DOI: 10.1007/s11134-022-09854-8.
9. Kim C, Dudin A, Dudina S, Dudina O. Analysis of MAP/M/1/K ticket queue with users balking and renegeing and service of no-show users. In: Vicario E, Bandinelli R, Fani V, Mastroianni M, editors. *Proceedings of the 37th ECMS International conference on modelling and simulation, ECMS 2023; 2023 June 20–23; Florence, Italy*. Saarbrücken: Digitaldruck Pirrot; 2023. p. 26–32 (Communications of the ECMS; volume 37, issue 1).
10. Chakravarthy SR. *Introduction to matrix-analytic methods in queues. Volume 1, Analytical and simulation approach – basics*. London: ISTE; 2022. XV, 341 p. (Limnios N, editor. Mathematics and statistics series). Co-published by the John Wiley & Sons. DOI: 10.1002/9781394165421.
11. Chakravarthy SR. *Introduction to matrix-analytic methods in queues. Volume 2, Analytical and simulation approach – queues and simulation*. London: ISTE; 2022. XV, 415 p. (Limnios N, editor. Mathematics and statistics series). Co-published by the John Wiley & Sons. DOI: 10.1002/9781394174201.
12. Dudin AN, Klimenok VI, Vishnevsky VM. *The theory of queueing systems with correlated flows*. Cham: Springer; 2020. XXII, 410 p. DOI: 10.1007/978-3-030-32072-0.
13. Lucantoni DM. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process. *Communications in Statistics. Stochastic Models*. 1991;7(1):1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174.
14. Kim C, Dudin A, Dudina O, Dudin S. Tandem queueing system with infinite and finite intermediate buffers and generalized phase-type service time distribution. *European Journal of Operational Research*. 2014;235(1):170–179. DOI: 10.1016/j.ejor.2013.12.012.
15. Kim C, Dudin A, Dudin S, Dudina O. Mathematical model of operation of a cell of a mobile communication network with adaptive modulation schemes and handover of mobile users. *IEEE Access*. 2021;9:106933–106946. DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3100561.

Получена 16.04.2024 / исправлена 20.06.2024 / принята 20.06.2024.
Received 16.04.2024 / revised 20.06.2024 / accepted 20.06.2024.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

УДК 519.17

О НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ ИССЛЕДОВАНИЯ F -ИРРЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ В КЛАССЕ ДВУСВЯЗНЫХ ГРАФОВ F

Т. С. ДОВЖЕНОК¹⁾, А. В. ФИЛЮТА¹⁾, Н. Е. ЧУГАЙ¹⁾

¹⁾Средняя школа № 30 г. Гомеля, ул. 50 лет БССР, 6, 246032, г. Гомель, Беларусь

Аннотация. Рассматривается известная проблема F -иррегулярных графов применительно к классу двусвязных графов F . Устанавливается, что для любого натурального $n \geq 8$ существует K_3 -иррегулярный граф порядка n . Вводится понятие почти-почти F -иррегулярного графа, на основе которого для каждого графа F из указанного класса находится достаточное условие существования бесконечного числа F -иррегулярных графов. Доказывается, что для любого двусвязного графа F , минимальная из степеней вершин которого равна 2, существует бесконечно много F -иррегулярных графов.

Ключевые слова: F -степень вершины; F -иррегулярный граф; двусвязный граф; (K_3, K_2) -согласованный граф; почти-почти F -иррегулярный граф; сильная гипотеза об F -иррегулярных графах.

Благодарность. Авторы выражают глубокую признательность рецензенту за ценные замечания по статье.

Образец цитирования:

Довженок ТС, Филюта АВ, Чугай НЕ. О некоторых результатах исследования F -иррегулярных графов в классе двусвязных графов F . Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2024;2:54–64. EDN: ROQOGI

For citation:

Dovzhenok TS, Filuta AV, Chuhai NE. On some results of the study of F -irregular graphs in the class of biconnected graphs F . Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2024;2:54–64. Russian. EDN: ROQOGI

Авторы:

Татьяна Степановна Довженок – кандидат физико-математических наук; учитель.

Артем Витальевич Филюта – учащийся 11-го класса. Научный руководитель – Т. С. Довженок.

Настасья Евгеньевна Чугай – учащаяся 11-го класса. Научный руководитель – Т. С. Довженок.

Authors:

Tatiana S. Dovzhenok, PhD (physics and mathematics); teacher. t.dovzhenok@mail.ru

<https://orcid.org/0009-0000-2420-6028>

Artem V. Filuta, student at the 11th grade.

artfilutah2007@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0001-7844-2381>

Nastassia E. Chuhai, student at the 11th grade.

nastasyachygay@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0005-8824-0483>

ON SOME RESULTS OF THE STUDY OF F -IRREGULAR GRAPHS IN THE CLASS OF BICONNECTED GRAPHS F

T. S. DOVZHENOK^a, A. V. FILUTA^a, N. E. CHUHAI^a

^aSecondary school No. 30 of Gomel, 6 Piacdziasiat gadow BSSR Street, Gomiel 246032, Belarus

Corresponding author: T. S. Dovzhenok (t.dovzhenok@mail.ru)

Abstract. We consider herein the well-known problem of F -irregular graphs in relation to the class of biconnected graphs F . It is established that for any natural $n \geq 8$ there exists a K_3 -irregular graph of order n . The concept of an almost-almost F -irregular graph is introduced, on the basis of which a sufficient condition for the existence of an infinite number of F -irregular graphs is found for each graph F from the specified class. It is proved that for any biconnected graph F , the minimum of whose vertex degrees is 2, there are infinitely many F -irregular graphs.

Keywords: F -degree of a vertex; F -irregular graph; biconnected graph; (K_3, K_2) -consistent graph; almost-almost F -irregular graph; strong hypothesis about F -irregular graphs.

Acknowledgements. The authors express their deep gratitude to the reviewer for his valuable comments on the article.

Введение

Будем рассматривать только простые конечные неориентированные графы на двух и более вершинах.

На рубеже 1980–90-х гг. в теории графов возрос интерес к иррегулярным графам (т. е. графам, в некотором смысле противоположным регулярным). В таких графах любые две вершины отличаются друг от друга по одной и той же характеристике. Наиболее естественным было бы выбрать в качестве этой характеристики степень вершины. Однако, как известно [1], не существует ни одного графа, степени всех вершин которого попарно различны. Подобная ситуация привела к развитию теории локальной иррегулярности. В работе [2] представлены и изучены сильно нерегулярные графы, в которых любые две вершины из окружения произвольной вершины имеют разные степени. Проблема определения иррегулярных графов впервые была исследована в статье [3]. В настоящее время наиболее полный обзор результатов по данной тематике содержится в книге «Irregularity in graphs» [4]. Среди многочисленных подходов к решению указанной проблемы особое место занимает концепция F -иррегулярных графов, которая основана на более общем взгляде на природу степени вершины.

В 1987 г. было предложено следующее обобщение понятия степени вершины и введен в рассмотрение новый класс графов – F -иррегулярные графы [5].

Определение 1. Пусть F и G – графы. F -степенью вершины v в графе G будем называть число подграфов графа G , изоморфных F и содержащих вершину v .

Определение 2. Граф G назовем F -регулярным, если все его вершины имеют одинаковую F -степень. Будем говорить, что граф G является F -иррегулярным, если F -степени всех вершин данного графа попарно различны.

Пусть K_n и $K_{1, n-1}$ – полный граф и звезда на n вершинах соответственно. Как было отмечено ранее, ни один граф не является K_2 -иррегулярным графом (т. е. графом с различными степенями вершин). Однако при $F \neq K_2$ вопрос существования F -иррегулярных графов, за малым исключением случаев, остается открытым.

В работе [5] было установлено, что для любого натурального $n \geq 3$ существуют K_n -иррегулярный и $K_{1, n-1}$ -иррегулярный графы, а также была выдвинута следующая гипотеза.

Гипотеза 1. Для любого связного графа F на трех и более вершинах существует F -иррегулярный граф.

В дальнейшем каких-либо других бесконечных серий графов, отличных от K_n и $K_{1, n-1}$, которые бы подтверждали гипотезу 1, равно как и графов, опровергающих ее, найдено не было. В связи с этим построение таких серий графов, а также разработка методов доказательства F -иррегулярности графов являются важной задачей на пути доказательства гипотезы 1.

Определение 3. Вершина графа называется точкой сочленения, если после удаления из графа этой вершины со всеми инцидентными ей ребрами увеличивается число компонент связности графа. Двусвязным графом будем называть связный граф на трех и более вершинах, не содержащий точек сочленения.

В данной работе проблема F -иррегулярных графов исследуется в классе двусвязных графов F .

В разделе « K_3 -иррегулярные, (K_3, K_2) -согласованные графы» вводится понятие (K_3, K_2) -согласованного графа и для каждого натурального $n \geq 8$ доказываемое существование K_3 -иррегулярного, (K_3, K_2) -согласованного графа порядка n .

В разделе «О достаточном условии существования бесконечного числа F -иррегулярных графов для двусвязных графов F » определяется новый класс графов – почти-почти F -иррегулярные графы. В таких графах число различных F -степеней вершин ровно на 2 отличается от числа всех вершин графа. В терминах почти-почти F -иррегулярных графов для каждого двусвязного графа F находится достаточное условие существования бесконечного числа F -иррегулярных графов.

В разделе «О бесконечности числа F -иррегулярных графов для двусвязных графов F с $\delta(F) = 2$ » показывается, что для любого двусвязного графа F , минимальная из степеней вершин которого равна 2, существует бесконечно много F -иррегулярных графов. В частности, для любого натурального $n \geq 3$ множество C_n -иррегулярных графов, где C_n – простой цикл на n вершинах, бесконечно.

Пусть $G = (V(G), E(G))$ – граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$. В работе используются следующие обозначения:

- $|M|$ – число элементов множества M ;
- $|G| = |V(G)|$ – число вершин в графе G (порядок графа G);
- (u, v) – ребро графа с концами в вершинах $u, v, u \neq v$;
- $N_G(v)$ – окружение вершины v в графе G ;
- $\deg_G v, F \deg_G v$ – степень и F -степень вершины v в графе G соответственно;
- $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} \deg_G v, \Delta(G) = \max_{v \in V(G)} \deg_G v$.

K_3 -иррегулярные, (K_3, K_2) -согласованные графы

Определение 4. Граф G назовем (K_3, K_2) -согласованным, если для любых вершин $i, j \in V(G)$ с разными K_3 -степенями из условия $K_3 \deg_G i > K_3 \deg_G j$ следует, что $\deg_G i \geq \deg_G j$.

Лемма 1. Если существует K_3 -иррегулярный, (K_3, K_2) -согласованный граф G , в котором $\delta(G) = 2$ и каждая вершина имеет положительную K_3 -степень, то на $|G| + 1$ вершинах можно построить K_3 -иррегулярный, (K_3, K_2) -согласованный граф G_1 такой, что $\delta(G_1) = 1$ и $\Delta(G_1) < |G_1| - 1$.

Доказательство. Предположим, что существует граф G , удовлетворяющий условию леммы 1. Поскольку $\delta(G) = 2$, то граф G содержит вершину степени 2 (обозначим ее через v) и не содержит вершин степени 0 или 1. Далее из условия $\deg_G v = 2, K_3 \deg_G v > 0$ следует, что $K_3 \deg_G v = 1$, а так как G является K_3 -иррегулярным графом с положительными K_3 -степенями вершин, то любая вершина $u \in V(G), u \neq v$, удовлетворяет условию

$$K_3 \deg_G u \geq 2, \deg_G u \geq 3. \quad (1)$$

Добавим к графу G вершину w и ребро (v, w) . Полученный граф назовем G_1 . Очевидно, что $\deg_{G_1} w = 1, K_3 \deg_{G_1} w = 0, \deg_{G_1} v = 3, K_3 \deg_{G_1} v = 1$, а степени и K_3 -степени всех вершин графа G , отличных от v , не изменились при переходе от G к G_1 . Тогда с учетом условия (1), а также в силу K_3 -иррегулярности и (K_3, K_2) -согласованности графа G приходим к выводу, что граф G_1 является K_3 -иррегулярным и (K_3, K_2) -согласованным. Осталось заметить, что если $\Delta(G_1) = |G_1| - 1$, то в графе G_1 есть вершина, смежная со всеми остальными вершинами, в частности с вершиной w . По построению такой вершиной может быть только вершина v . Но тогда $G = K_3$, что противоречит K_3 -иррегулярности графа G . Значит, $\Delta(G_1) < |G_1| - 1$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если существует K_3 -иррегулярный, (K_3, K_2) -согласованный граф G такой, что $\delta(G) = 1$ и $\Delta(G) < |G| - 1$, то на $|G| + 1$ вершинах можно построить K_3 -иррегулярный, (K_3, K_2) -согласованный граф G_2 , в котором $\delta(G_2) = 2$ и любая вершина имеет положительную K_3 -степень.

Доказательство. Предположим, что существует граф G , удовлетворяющий условию леммы 2. Добавим к графу G вершину x и соединим ее ребрами со всеми вершинами графа G . Полученный граф назовем G_2 . Легко видеть, что для любой вершины $u \in V(G_2), u \neq x$, справедливы равенства

$$\deg_{G_2} u = \deg_G u + 1, K_3 \deg_{G_2} u = K_3 \deg_G u + \deg_G u. \quad (2)$$

В частности, из равенств (2) и $\delta(G) = 1$ получаем, что $\delta(G_2) = 2$ и все вершины графа G_2 имеют положительную K_3 -степень.

Рассмотрим две произвольные вершины $i, j \in V(G)$, $i \neq j$. В силу K_3 -иррегулярности графа G имеем $K_3 \deg_G i \neq K_3 \deg_G j$. Пусть для определенности $K_3 \deg_G i > K_3 \deg_G j$. Тогда из (K_3, K_2) -согласованности графа G следует, что $\deg_G i \geq \deg_G j$, и с учетом равенств (2) получаем

$$K_3 \deg_{G_2} i > K_3 \deg_{G_2} j, \deg_{G_2} i \geq \deg_{G_2} j. \quad (3)$$

Далее рассмотрим произвольную вершину $u \in V(G)$ и докажем, что

$$K_3 \deg_{G_2} x > K_3 \deg_{G_2} u, \deg_{G_2} x > \deg_{G_2} u. \quad (4)$$

Действительно, поскольку $\Delta(G) < |G| - 1$, то в графе G найдется вершина y такая, что $(u, y) \notin E(G)$ и, следовательно, $(u, y) \notin E(G_2)$, откуда

$$\deg_{G_2} u < |G_2| - 1 = \deg_{G_2} x.$$

Далее для доказательства неравенства $K_3 \deg_{G_2} x > K_3 \deg_{G_2} u$ заметим, что K_3 -степень вершины графа совпадает с числом ребер в подграфе, порожденном окружением этой вершины. Пусть вершина $z \in V(G)$ такова, что $(y, z) \in E(G)$. Тогда подграфу графа G , порожденному окружением вершины u , не принадлежит ребро (y, z) , а также не принадлежат $\deg_G u$ ребер, инцидентных вершине u . Следовательно, $K_3 \deg_G u \leq |E(G)| - \deg_G u - 1$, откуда $K_3 \deg_G u + \deg_G u \leq |E(G)| - 1$. Таким образом, с учетом равенств (2) выполняется неравенство $K_3 \deg_{G_2} u \leq |E(G)| - 1$. С другой стороны, $K_3 \deg_{G_2} x = |E(G)|$. Следовательно, $K_3 \deg_{G_2} x > K_3 \deg_{G_2} u$ для любой вершины $u \in V(G)$. Тем самым завершено доказательство неравенств (4). Наконец, из формул (3) и (4) получаем, что G_2 является K_3 -иррегулярным, (K_3, K_2) -согласованным графом. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. Для любого натурального $n \geq 8$ существует K_3 -иррегулярный, (K_3, K_2) -согласованный граф порядка n .

Доказательство. Рассмотрим граф D_8 с множеством вершин $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, изображенный на рис. 1.

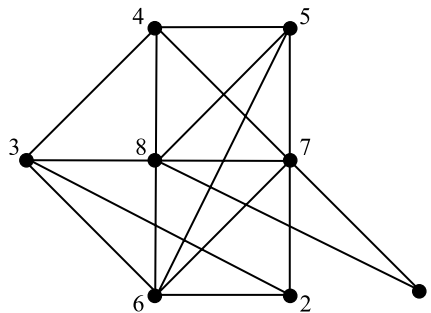


Рис. 1. Граф D_8

Fig. 1. Graph D_8

Докажем, что D_8 является K_3 -иррегулярным, (K_3, K_2) -согласованным графом.

В таблице для каждой вершины v графа D_8 указаны ее степень ($\deg_{D_8} v$), K_3 -степень ($K_3 \deg_{D_8} v$), а также все треугольники (подграфы графа D_8 , изоморфные K_3), в которые она входит, при этом треугольник с вершинами a, b, c записывается как abc .

Степени и K_3 -степени вершин графа D_8
Degrees and K_3 -degrees of the vertices of the graph D_8

$v \in V(D_8)$	Треугольники, в которые входит вершина v	$K_3 \deg_{D_8} v$	$\deg_{D_8} v$
8	178, 348, 368, 458, 478, 568, 578, 678	8	6
7	178, 267, 457, 478, 567, 578, 678	7	6
6	236, 267, 368, 567, 568, 678	6	5

Окончание таблицы
 Ending of the table

$v \in V(D_8)$	Треугольники, в которые входит вершина v	$K_3 \deg_{D_8} v$	$\deg_{D_8} v$
5	457, 458, 567, 568, 578	5	4
4	348, 457, 458, 478	4	4
3	236, 348, 368	3	4
2	236, 267	2	3
1	178	1	2

Из таблицы следует, что D_8 является K_3 -иррегулярным, (K_3, K_2) -согласованным графом. Заметим также, что $\delta(D_8) = 2$ и K_3 -степени всех вершин графа D_8 положительны. Таким образом, согласно лемме 1 существует K_3 -иррегулярный, (K_3, K_2) -согласованный граф D_9 порядка 9, в котором $\delta(D_9) = 1$ и $\Delta(D_9) < |D_9| - 1$. Тогда из леммы 2 следует существование K_3 -иррегулярного, (K_3, K_2) -согласованного графа D_{10} порядка 10, в котором $\delta(D_{10}) = 2$ и K_3 -степени всех вершин положительны. Продолжив чередовать применение лемм 1 и 2, получим, что для любого натурального $n \geq 8$ существует K_3 -иррегулярный, (K_3, K_2) -согласованный граф D_n на n вершинах. При этом для каждого нечетного n выполняется условие $\delta(D_n) = 1$ и $\Delta(D_n) < |D_n| - 1$, а для каждого четного n имеет место равенство $\delta(D_n) = 2$ и K_3 -степени всех вершин графа D_n положительны. Теорема 1 доказана.

О достаточном условии существования бесконечного числа F -иррегулярных графов для двусвязных графов F

Определение 5. Граф G назовем почти-почти F -иррегулярным, если среди F -степеней вершин этого графа есть ровно $|G| - 2$ различные F -степени.

Определение 6. Назовем вершину графа F -проблемной, если в этом графе есть другая вершина с той же F -степенью.

Замечание 1. Почти-почти F -иррегулярный граф имеет либо ровно три F -проблемные вершины, при этом их F -степени равны, либо ровно две пары F -проблемных вершин, причем в каждой паре F -степени вершин совпадают, а вершины из разных пар имеют разные F -степени.

Определение 7. Пусть граф G не является F -регулярным. Через $d(G, F)$ обозначим минимальный из модулей разностей между различными F -степенями вершин графа G .

В следующей теореме для каждого двусвязного графа F получено достаточное условие существования бесконечного числа F -иррегулярных графов.

Теорема 2. Пусть F – двусвязный граф и для любого числа $p > 0$ существует почти-почти F -иррегулярный граф G , удовлетворяющий условиям:

- 1) $d(G, F) > p$;
 - 2) F -степени всех вершин графа G превосходят p .
- Тогда существует бесконечно много F -иррегулярных графов.

Доказательство. Пусть $p > 0$. Рассмотрим последовательность почти-почти F -иррегулярных графов $G_1, G_2, \dots, G_{|F|+1}$ следующего вида:

$$F \deg_{G_1} v > p \quad \forall v \in V(G_1), \tag{5}$$

$$d(G_{i+1}, F) > 2m_i, F \deg_{G_{i+1}} v > 2m_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, |F|\}, v \in V(G_{i+1}),$$

где $m_i = \max_{u \in V(G_i)} F \deg_{G_i} u$.

Существование такой последовательности вытекает из условия теоремы 2.

Из определения последовательности (5) легко установить истинность следующих неравенств:

$$m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_{|F|}, \tag{6}$$

$$F \deg_{G_i} u < F \deg_{G_{i+1}} v \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, |F|\}, u \in V(G_i), v \in V(G_{i+1}). \tag{7}$$

Далее в каждом графе G_i , $i \in \{1, 2, \dots, |F| + 1\}$, выберем две F -проблемные вершины v_i, w_i , $v_i \neq w_i$ (рис. 2), при этом если G_i содержит четыре F -проблемные вершины (замечание 1), то v_i, w_i выбираются из разных пар.

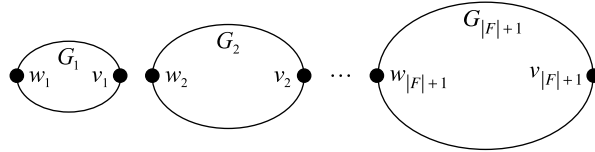


Рис. 2. Графы $G_1, G_2, \dots, G_{|F|+1}$
Fig. 2. Graphs $G_1, G_2, \dots, G_{|F|+1}$

Рассмотрим граф Q , который образуется из графов $G_1, G_2, \dots, G_{|F|+1}$ путем последовательного склеивания вершин v_i и w_{i+1} для каждого $i \in \{1, 2, \dots, |F| + 1\}$, при этом $w_{|F|+2} = w_1$. Вершину графа Q , полученную в результате склеивания вершин v_i и w_{i+1} , будем называть точкой склейки и обозначать через z_i (рис. 3).

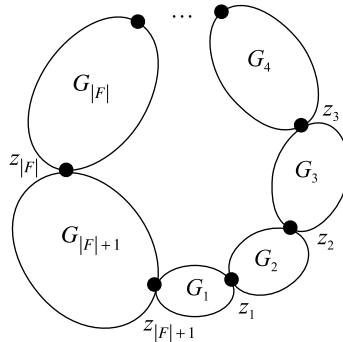


Рис. 3. Граф Q
Fig. 3. Graph Q

В дальнейшем для удобства вершины v_i и w_{i+1} графов G_i и G_{i+1} будем также обозначать через z_i . Тем самым из графа G_i в склейке участвуют две вершины – z_{i-1} и z_i , при этом $z_0 = z_{|F|+1}$.

Тогда в силу выбора вершин z_{i-1} и z_i получим

$$F \deg_{G_i} u \neq F \deg_{G_i} v \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, |F| + 1\}, u, v \in V(G_i), u, v \notin \{z_{i-1}, z_i\}, u \neq v. \quad (8)$$

Докажем, что граф Q является F -иррегулярным. Для начала заметим, что любой подграф графа G_i , $i \in \{1, 2, \dots, |F| + 1\}$, изоморфный F , является также подграфом графа Q . С другой стороны, граф Q не содержит новых подграфов, изоморфных F и отличных от тех, что есть в графах G_i , $i \in \{1, 2, \dots, |F| + 1\}$. Действительно, если это не так, то либо одна из точек склейки является точкой сочленения в новом подграфе, либо новый подграф содержит цикл, проходящий через все точки склейки, т. е. имеет более $|F|$ вершин. В обоих случаях получаем противоречие изоморфности нового подграфа графу F . Значит, для F -степеней вершин графа Q в предположении, что $G_{|F|+2} = G_1$, имеют место соотношения

$$F \deg_Q z_i = F \deg_{G_i} z_i + F \deg_{G_{i+1}} z_i, \quad (9)$$

$$F \deg_Q v = F \deg_{G_i} v \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, |F| + 1\}, v \in V(G_i), v \neq z_{i-1}, z_i.$$

Тогда из формул (7)–(9) следует, что любые две различные вершины графа Q , отличные от точек склейки, имеют разные F -степени.

Пусть $i \in \{1, 2, \dots, |F|\}$. Для точек склейки в графе Q справедливы утверждения:

- 1) $F \deg_Q z_i > F \deg_Q v \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, i\}, v \in V(G_k), v \neq z_i, z_{|F|+1}$;
- 2) $F \deg_Q z_i < F \deg_Q v \quad \forall k \in \{i + 2, i + 3, \dots, |F| + 1\}, v \in V(G_k), i < |F|$;

- 3) $F \deg_Q z_i \neq F \deg_Q v \quad \forall v \in V(G_{i+1}), v \neq z_i$;
- 4) $F \deg_Q z_{|F|+1} > F \deg_Q v \quad \forall v \notin V(G_{|F|+1})$;
- 5) $F \deg_Q z_{|F|+1} \neq F \deg_Q v \quad \forall v \in V(G_{|F|+1}), v \neq z_{|F|+1}$.

Истинность утверждений 1)–5) устанавливается на основании формул (5)–(7) и (9).

Докажем утверждение 1). Если $i = 1$, то для всех $v \in V(G_1), v \neq z_{|F|+1}, z_1$, имеем

$$F \deg_Q v = F \deg_{G_1} v \leq m_1 < 2m_1 < F \deg_{G_2} z_1 < F \deg_{G_1} z_1 + F \deg_{G_2} z_1 = F \deg_Q z_1.$$

Если $i \in \{2, 3, \dots, |F|\}$, то

$$F \deg_Q v \leq F \deg_{G_k} v + m_i \leq m_k + m_i \leq 2m_i < F \deg_{G_{i+1}} z_i < F \deg_Q z_i.$$

Докажем утверждение 2).

$$F \deg_Q v \geq F \deg_{G_k} v > 2m_{k-1} \geq 2m_{i+1} > m_i + m_{i+1} \geq F \deg_{G_i} z_i + F \deg_{G_{i+1}} z_i = F \deg_Q z_i.$$

Докажем утверждение 3). Величину $F \deg_Q u - F \deg_{G_{i+1}} u$ будем называть прыжком вершины $u \in V(G_{i+1})$. Согласно соотношениям (9) все вершины из $V(G_{i+1})$, отличные от z_i, z_{i+1} , совершили нулевой прыжок, поэтому назовем их неподвижными вершинами. В свою очередь, прыжки вершин z_i, z_{i+1} положительны и равны $F \deg_{G_i} z_i, F \deg_{G_{i+2}} z_{i+1}$ соответственно, поэтому будем говорить, что вершины z_i и z_{i+1} подпрыгнули.

Пусть $v \in V(G_{i+1}), v \neq z_i, z_{i+1}$. Если $F \deg_{G_{i+1}} v = F \deg_{G_{i+1}} z_i$, то

$$F \deg_Q z_i > F \deg_{G_{i+1}} z_i = F \deg_{G_{i+1}} v = F \deg_Q v.$$

Если $F \deg_{G_{i+1}} v \neq F \deg_{G_{i+1}} z_i$, то F -степени вершин z_i и v в графе G_{i+1} в силу неравенства $d(G_{i+1}, F) > 2m_i$ отличаются более чем на $2m_i$. Следовательно, для равенства F -степеней вершин z_i и v в графе Q вершина z_i должна «допрыгнуть» до неподвижной вершины v , что невозможно, поскольку прыжок вершины z_i не превосходит m_i .

Докажем, что $F \deg_Q z_i \neq F \deg_Q z_{i+1}$. Действительно, если $i \in \{1, 2, \dots, |F| - 1\}$, то

$$F \deg_Q z_{i+1} > F \deg_{G_{i+2}} z_{i+1} > 2m_{i+1} > m_i + m_{i+1} \geq F \deg_{G_i} z_i + F \deg_{G_{i+1}} z_i = F \deg_Q z_i.$$

Если $i = |F|$, то прыжки вершин $z_{|F|}$ и $z_{|F|+1}$ положительны, различны и не превосходят $m_{|F|}$ и m_1 соответственно. Таким образом, если $F \deg_{G_{|F|+1}} z_{|F|} = F \deg_{G_{|F|+1}} z_{|F|+1}$, то $F \deg_Q z_{|F|} \neq F \deg_Q z_{|F|+1}$ по причине неравенства прыжков вершин $z_{|F|}$ и $z_{|F|+1}$. Если же $F \deg_{G_{|F|+1}} z_{|F|} \neq F \deg_{G_{|F|+1}} z_{|F|+1}$, то F -степени вершин $z_{|F|}$ и $z_{|F|+1}$ в графе $G_{|F|+1}$ в силу неравенства $d(G_{|F|+1}, F) > 2m_{|F|}$ отличаются более чем на $2m_{|F|}$. Следовательно, для равенства F -степеней вершин $z_{|F|}$ и $z_{|F|+1}$ в графе Q одна из этих вершин должна подпрыгнуть на величину, превосходящую $2m_{|F|}$, что невозможно, поскольку $2m_{|F|} > m_{|F|} > m_1$.

Докажем утверждение 4). Пусть $v \in V(G_k), k \in \{1, 2, \dots, |F|\}, v \neq z_{|F|}, z_{|F|+1}$. Тогда

$$F \deg_Q v \leq F \deg_{G_k} v + m_{|F|} \leq m_k + m_{|F|} \leq 2m_{|F|} < F \deg_{G_{|F|+1}} z_{|F|+1} < F \deg_Q z_{|F|+1}.$$

Доказательство утверждения 5) аналогично доказательству утверждения 3).

Из утверждений 1)–5) следует, что точки склейки не являются F -проблемными вершинами в Q . Кроме того, как показано выше, любые две вершины из Q , отличные от точек склейки, имеют разные F -степени в Q . Значит, граф Q является F -иррегулярным.

Осталось заметить, что в графе Q все вершины имеют F -степени, большие p , поэтому при достаточно больших значениях p можно построить F -иррегулярный граф Q со сколь угодно большими значениями F -степеней вершин. Следовательно, F -иррегулярных графов бесконечно много. Теорема 2 доказана.

О бесконечности числа F -иррегулярных графов для двусвязных графов F с $\delta(F) = 2$

В этом разделе будет исследован вопрос о численности F -иррегулярных графов в случае, когда F – двусвязный граф с минимальной степенью вершины, равной 2 ($\delta(F) = 2$).

Определение 8. Будем говорить, что вершины u, v в графе G имеют почти одинаковое окружение, если $(u, v) \in E(G)$ и $N_G(u) \setminus \{v\} = N_G(v) \setminus \{u\}$.

Лемма 3. Если вершины u, v в графе G имеют одинаковое или почти одинаковое окружение, то для любого графа F верно равенство

$$F \deg_G u = F \deg_G v.$$

Доказательство. Истинность леммы 3 непосредственно вытекает из существования автоморфизма $f: V(G) \rightarrow V(G)$ такого, что

$$f(u) = v, f(v) = u, f(w) = w \quad \forall w \in V(G), w \neq u, v.$$

Теорема 3. Для любого двусвязного графа F , минимальная из степеней вершин которого равна 2, существует бесконечно много F -иррегулярных графов.

Доказательство. Пусть $|F| = n$. Поскольку $\delta(F) = 2$, то в графе F есть вершина степени 2. Обозначим эту вершину через w , а смежные с ней вершины через x и y . Заметим, что если $n = 3$, то $F = K_3$ и требуемый результат следует из теоремы 1.

Пусть теперь $n \geq 4$. В этом случае для доказательства существования бесконечного числа F -иррегулярных графов достаточно показать, что для любого $p > 0$ существует почти-почти F -иррегулярный граф, удовлетворяющий условиям 1) и 2) теоремы 2.

Пусть $p > 0$. Выберем такое натуральное l , для которого выполнено условие

$$l > n, l > p(n-3)! + 3. \tag{10}$$

Тогда при $n \geq 4$ в силу условия (10) справедлива оценка

$$C_{l-3}^{n-3} = \frac{(l-3)!}{(n-3)!(l-n)!} = \frac{(l-n+1)(l-n+2)\dots(l-3)}{(n-3)!} \geq \frac{l-3}{(n-3)!} > p. \tag{11}$$

Далее рассмотрим граф T_{2l-2} с множеством вершин $V(T_{2l-2}) = \{1, 2, \dots, 2l-2\}$, в котором вершины $1, 2, \dots, l$ образуют полный подграф, а любая вершина с номером i , где $i \in \{l+1, l+2, \dots, 2l-2\}$, соединена ребрами со всеми вершинами множества $\{i-l+1, i-l+2, \dots, l\}$ и только с ними.

Для наглядности изобразим вершины графа T_{2l-2} на двух уровнях. Вершины $1, 2, \dots, l$ разместим на верхнем уровне, а вершины $l+1, l+2, \dots, 2l-2$ – на нижнем уровне в порядке возрастания их номеров слева направо таким образом, чтобы любая вершина i нижнего уровня располагалась строго под вершиной $i-l+1$ верхнего уровня (рис. 4). Тогда любые две вершины верхнего уровня будут смежны, а каждая вершина i нижнего уровня будет смежна только с вершиной $i-l+1$, расположенной строго над ней, и всеми вершинами верхнего уровня, расположенными правее $i-l+1$.

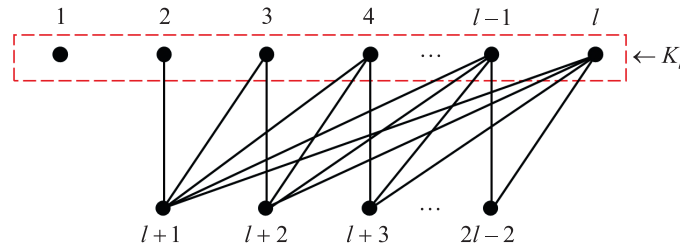


Рис. 4. Граф T_{2l-2}
Fig. 4. Graph T_{2l-2}

Пусть $i \in V(T_{2l-2})$, $t_i = F \deg_{T_{2l-2}} i$.

Заметим, что вершины 1 и $l+1$ в графе T_{2l-2} имеют одинаковое окружение:

$$N_{T_{2l-2}}(1) = N_{T_{2l-2}}(l+1) = \{2, 3, \dots, l\}.$$

Кроме того, смежные вершины $l-1$ и l в графе T_{2l-2} имеют почти одинаковое окружение:

$$N_{T_{2l-2}}(l-1) \setminus \{l\} = N_{T_{2l-2}}(l) \setminus \{l-1\} = V(T_{2l-2}) \setminus \{l-1, l\}.$$

Значит, по лемме 3 получим

$$t_1 = t_{l+1}, t_{l-1} = t_l. \tag{12}$$

Докажем теперь, что справедливы неравенства

$$t_{i+1} > t_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, l-2\}. \tag{13}$$

Пусть $i \in \{1, 2, \dots, l-2\}$. Рассмотрим граф $H = T_{2l-2} \setminus (i+1, l+i)$ (рис. 5).

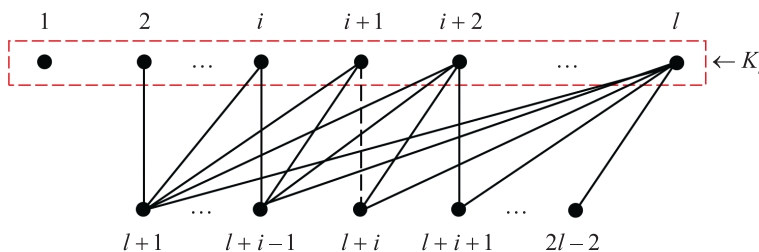


Рис. 5. Граф $H = T_{2l-2} \setminus (i+1, l+i)$
 Fig. 5. Graph $H = T_{2l-2} \setminus (i+1, l+i)$

Заметим, что $N_H(i) \setminus \{i+1\} = N_H(i+1) \setminus \{i\} = \{1, 2, \dots, l+i-1\} \setminus \{i, i+1\}$. Следовательно, смежные вершины i и $i+1$ в графе H имеют почти одинаковое окружение и, значит, по лемме 3 получаем $F \deg_H i = F \deg_H(i+1)$. Другими словами, вершины i и $i+1$ входят в одинаковое число подграфов графа T_{2l-2} , изоморфных F и не содержащих ребро $(i+1, l+i)$. Из этого следует, что $t_{i+1} - t_i = |A|$, где A – множество всех подграфов графа T_{2l-2} , изоморфных F , содержащих ребро $(i+1, l+i)$ и не содержащих вершину i .

Оценим $|A|$. Рассмотрим вершины $i+1, i+2, l+i$ и произвольные $n-3$ различные вершины верхнего уровня графа T_{2l-2} , отличные от $i, i+1, i+2$. Указанный набор вершин обозначим через V_1 . Поскольку любые две различные вершины из $V_1 \setminus \{l+i\}$ смежны в T_{2l-2} и $(i+1, l+i), (i+2, l+i) \in E(T_{2l-2})$, то граф T_{2l-2} содержит подграф L с множеством вершин V_1 , изоморфный F и такой, что вершинам x, y, w графа F соответствуют вершины $i+1, i+2, l+i$ (в указанном порядке) подграфа L . Кроме того, подграфу L принадлежит ребро $(i+1, l+i)$ и не принадлежит вершина i . Значит, $L \in A$. Таким образом, каждому набору из $n-3$ различных вершин верхнего уровня графа T_{2l-2} , отличных от $i, i+1, i+2$, соответствует подграф из A , при этом разным наборам по построению соответствуют разные подграфы из A . Таких наборов ровно C_{l-3}^{n-3} , поэтому $t_{i+1} - t_i = |A| \geq C_{l-3}^{n-3}$ и с учетом оценки (11) получаем

$$t_{i+1} - t_i > p \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, l-2\}. \tag{14}$$

В частности, из формулы (14) при $p > 0$ следует истинность неравенств (13).

Докажем теперь, что справедливы неравенства

$$t_j > t_{j+1} \quad \forall j \in \{l+1, l+2, \dots, 2l-3\}. \tag{15}$$

Пусть $j \in \{l+1, l+2, \dots, 2l-3\}$. Рассмотрим граф $G = T_{2l-2} \setminus (j-l+1, j)$ (рис. 6).

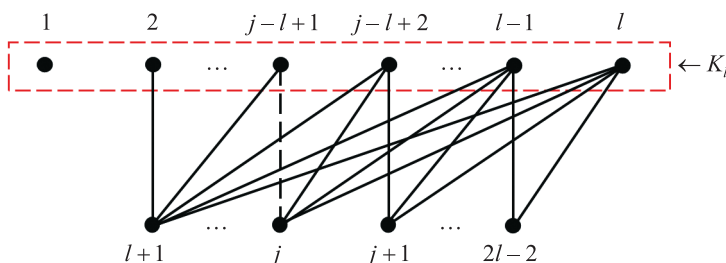


Рис. 6. Граф $G = T_{2l-2} \setminus (j-l+1, j)$
 Fig. 6. Graph $G = T_{2l-2} \setminus (j-l+1, j)$

Поскольку $N_G(j) = N_G(j+1) = \{j-l+2, j-l+3, \dots, l\}$, то из леммы 3 следует, что $F \deg_G j = F \deg_G(j+1)$. Тогда $t_j - t_{j+1} = |\mathbf{B}|$, где \mathbf{B} – множество всех подграфов графа T_{2l-2} , изоморфных F , содержащих ребро $(j-l+1, j)$ и не содержащих вершину $j+1$.

Оценим $|\mathbf{B}|$. Рассмотрим вершины $j-l+1, j-l+2, j$ и произвольные $n-3$ различные вершины верхнего уровня графа T_{2l-2} , отличные от $j-l+1, j-l+2$. Указанный набор вершин обозначим через V_2 . Так как любые две различные вершины из $V_2 \setminus \{j\}$ смежны в T_{2l-2} и $(j-l+1, j), (j-l+2, j) \in E(T_{2l-2})$, то граф T_{2l-2} содержит подграф M с множеством вершин V_2 , изоморфный F и такой, что вершинам x, y, w графа F соответствуют вершины $j-l+1, j-l+2, j$ (в указанном порядке) подграфа M . Кроме того, подграфу M принадлежит ребро $(j-l+1, j)$ и не принадлежит вершина $j+1$. Значит, $M \in \mathbf{B}$. Таким образом, каждому набору из $n-3$ различных вершин верхнего уровня графа T_{2l-2} , отличных от $j-l+1, j-l+2$, соответствует подграф из \mathbf{B} , при этом разным наборам по построению соответствуют разные подграфы из \mathbf{B} . Таких наборов ровно C_{l-2}^{n-3} , поэтому $t_j - t_{j+1} = |\mathbf{B}| \geq C_{l-2}^{n-3}$ и с учетом оценки (11) и истинного при $n \geq 4, l > n$ неравенства $C_{l-2}^{n-3} > C_{l-3}^{n-3}$ получаем

$$t_j - t_{j+1} > p \quad \forall j \in \{l+1, l+2, \dots, 2l-3\}. \quad (16)$$

В частности, из формулы (16) при $p > 0$ следует истинность неравенств (15).
На основании формул (10), (12), (13) и (15) имеем

$$t_l = t_{l-1} > t_{l-2} > \dots > t_2 > t_1 = t_{l+1} > t_{l+2} > \dots > t_{2l-3} > t_{2l-2}. \quad (17)$$

Из соотношений (17) следует, что среди F -степеней вершин графа T_{2l-2} ровно $2l-4 = |T_{2l-2}| - 2$ различных F -степеней. Значит, T_{2l-2} – почти-почти F -иррегулярный граф.

Из формул (14), (16) и (17) получаем, что $d(T_{2l-2}, F) > p$. Следовательно, граф T_{2l-2} удовлетворяет условию 1) теоремы 2.

Докажем, что граф T_{2l-2} удовлетворяет условию 2) теоремы 2. Для этого с учетом соотношений (17) достаточно показать, что верно неравенство

$$t_{2l-2} > p. \quad (18)$$

Как и выше, нетрудно установить, что в графе T_{2l-2} есть хотя бы C_{l-2}^{n-3} подграфов, изоморфных F , содержащих вершину $2l-2$ и $n-1$ вершин верхнего уровня графа T_{2l-2} , включая $l-1$ и l , таких, что вершинам x, y, w графа F соответствуют вершины $l-1, l, 2l-2$ (в указанном порядке) данных подграфов. Следовательно, при $n \geq 4, l > n$ для F -степени вершины $2l-2$ в графе T_{2l-2} в силу неравенства (11) справедлива оценка

$$t_{2l-2} \geq C_{l-2}^{n-3} > C_{l-3}^{n-3} > p.$$

Тем самым истинно неравенство (18).

Таким образом, все условия теоремы 2 соблюдены. Следовательно, существует бесконечно много F -иррегулярных графов в случае, когда F является двусвязным графом порядка $n \geq 4$ с $\delta(F) = 2$. Теорема 3 доказана.

Следствие из теоремы 3. Для любого натурального $n \geq 3$ существует бесконечно много C_n -иррегулярных графов, где C_n – простой цикл на n вершинах.

Заключение

В работе найдено достаточное условие существования бесконечного числа F -иррегулярных графов для любого двусвязного графа F . Также было доказано, что множество F -иррегулярных графов бесконечно в случае, когда F – произвольный двусвязный граф с $\delta(F) = 2$.

Авторы полагают, что наряду с гипотезой 1 справедливо более сильное утверждение, которое назовем сильной гипотезой об F -иррегулярных графах.

Гипотеза 2. Для любого связного графа F на трех и более вершинах существует бесконечно много F -иррегулярных графов.

Библиографические ссылки / References

1. Behzad M, Chartrand G. No graph is perfect. *The American Mathematical Monthly*. 1967;74(8):962–963. DOI: 10.2307/2315277.
2. Alavi Y, Chartrand G, Chung FRK, Erdős P, Graham RL, Oellermann OR. Highly irregular graphs. *Journal of Graph Theory*. 1987;11(2):235–249. DOI: 10.1002/jgt.3190110214.
3. Chartrand G, Erdős P, Oellermann OR. How to define an irregular graph. *The College Mathematics Journal*. 1988;19(1):36–42. DOI: 10.1080/07468342.1988.11973088.
4. Ali A, Chartrand G, Zhang P. *Irregularity in graphs*. Cham: Springer; 2021. X, 109 p. (Bellomo N, Benzi M, Jorgensen P, Li T, Melnik R, Scherzer O, et al., editors. Springer briefs in mathematics). DOI: 10.1007/978-3-030-67993-4.
5. Chartrand G, Holbert KS, Oellermann OR, Swart HC. *F*-degrees in graphs. *Ars Combinatoria*. 1987;24:133–148.

Получена 05.10.2023 / исправлена 17.06.2024 / принята 21.06.2024.
Received 05.10.2023 / revised 17.06.2024 / accepted 21.06.2024.

ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР И ПЛАНИРОВАНИЕ РАБОТ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ДЛИТЕЛЬНОСТЯМИ ДЛЯ ДВУХ СОТРУДНИКОВ

Н. М. МАТВЕЙЧУК¹⁾, Ю. Н. СОТСКОВ²⁾

¹⁾Белорусский государственный аграрный технический университет,
пр. Независимости, 99, 220012, г. Минск, Беларусь

²⁾Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,
ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Количество потенциальных пользователей тайм-менеджмента в мире неуклонно возрастает в связи с необходимостью удаленной работы (в домашних условиях), учебы, преподавания, обслуживания и в целом организации профессиональной деятельности и частной жизни с минимумом личных контактов из-за распространения в 2020 г. коронавирусной инфекции COVID-19 и других опасных инфекций. Требуется совершенствование методик тайм-менеджмента и разработка новых алгоритмов и программных средств, которые позволят учитывать особенности и потребности новых пользователей тайм-менеджмента. Такие задачи возникают в тайм-менеджменте при оптимальном выборе важных работ для двух исполнителей на определенный период времени и при составлении расписаний выполнения выбранных работ в условиях неопределенности длительностей планируемых операций. Представлены достаточные условия, алгоритмы, результаты компьютерных экспериментов по оптимальному выбору и планированию взаимосвязанных работ для двух исполнителей (руководителя и подчиненного).

Ключевые слова: тайм-менеджмент; оптимальное расписание; неопределенные длительности.

Благодарность. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф23РНФ-017).

Образец цитирования:

Матвейчук НМ, Сотсков ЮН. Оптимальный выбор и планирование работ с неопределенными длительностями для двух сотрудников. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;2:65–80 (на англ.).
EDN: LCOGKF

For citation:

Matsveichuk NM, Sotskov YuN. Optimal selection and scheduling of jobs with uncertain durations for two employees. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;2:65–80.
EDN: LCOGKF

Авторы:

Наталья Михайловна Матвейчук – кандидат физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой автоматизированных систем управления производством агроэнергетического факультета.

Юрий Назарович Сотсков – доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник лаборатории математической кибернетики.

Authors:

Natalja M. Matsveichuk, PhD (physics and mathematics), doцент; head of the department of automated systems of production control, agri-power faculty.

matsveichuk@tut.by
<https://orcid.org/0000-0002-4991-4271>

Yuri N. Sotskov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; chief researcher at the laboratory of the mathematical cybernetics.

sotskov48@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0002-9971-6169>

OPTIMAL SELECTION AND SCHEDULING OF JOBS WITH UNCERTAIN DURATIONS FOR TWO EMPLOYEES

N. M. MATSVEICHUK^a, Yu. N. SOTSKOV^b

^a*Belarusian State Agrarian Technical University, 99 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220012, Belarus*

^b*United Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus,
6 Surganava Street, Minsk 220012, Belarus*

Corresponding author: Yu. N. Sotskov (sotskov48@mail.ru)

Abstract. The number of potential users of time-management in the world is steadily growing due to the emerging need for remote work (in a home office), distance learning, teaching, service and, in general, the organisation of professional activities and a private life with a minimum of personal contacts due to the spread of the coronavirus infection COVID-19 since 2020 and other dangerous infections. This will require the improvement of the time-management techniques and the developments of new algorithms and software for them, which will take into account the peculiarities and needs of new users of time-management. Such problems arise in time-management for optimally selecting jobs for a given time interval and for constructing optimal schedules for processing jobs under conditions of uncertain operation durations. This article presents sufficiency conditions, algorithms, and computational results for selecting and scheduling connected jobs by two employees.

Keywords: time-management; optimal schedule; uncertain processing times.

Acknowledgements. The work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (grant No. F23RNF-017).

Introduction

Time-management is used for optimally choosing and planning jobs with respect to personal goals and professional activity. It includes choosing personal goals and objectives, long-term and short-term planning and the operational management of person's affairs.

Related works and research motivations. Article [1] examines the role of schedules in a social life. It brings into focus the main principles underlying a schedule, namely a temporal regularity involving the standardisation of the temporal locations of events and activities and their rates of recurrence and sequential. The discussion includes the constraints and the conveniences involved in using a personal schedule. As S. Eilon [2] notes, the use of time-management allows an employee to save up to 50 % of her (his) time on completing planned works, spending no more than 10 % of her (his) time on analysing and planning works during a day. Effective planning and scheduling can reduce the wasted time [3–5]. Article [3] suggests a structured approach based on the strategic and tactical time-management. The strategy is to write down a list of activities, establish priorities, and eliminate inessentials. The tactic is how to carry out essential activities with time-efficiency. Time-management is underpinned by the principle: there is no point in efficiently doing something that should not be done at all. There is a Pareto principle as follows: find out what is required and the value of alternatives. It is founded that 80 % of the value can be achieved from 20 % of the effort (80/20 rule) [3].

As it is written in [4], managers can improve their managerial performance significantly through time-management, which is a process that has to be proposed and understood by a manager since the inception of the managerial career. Prioritising tasks, preparing a to-do list, building a schedule and daily planning apart from being a good listener lead to managers who practice effective time-management and are generally successful in their profession and other domains. The 80/20 rule (a Pareto principle) is one of the most helpful of all concepts of time-management. Understanding time-management habits and practicing effective time-management techniques help in improving one's personal and managerial effectiveness.

There are articles [6–8] that examine results of time-management, and in particular, the impact of time-management on a student's academic success. The hypothesis of study [6] was that efficient time-management, under the guidance of an educational counselor, leads to significant increases in students' academic performances and so leads to academic success. Participants using time-management had above average or superior intellectual abilities. The educational counselor elaborated individualised and flexible programmes for each participant in the experimental condition according to students' learning styles, circadian and eating rhythms and daily and weekly effort curves. The results of the conducted experiments confirmed the hypothesis showing the efficiency of time-management individualised programmes [6].

Descriptive study in [7] was conducted to determine nursing and midwifery students' time-management skills in terms of their age, gender, and anxiety levels. It was demonstrated that nursing and midwifery students'

time-management skills are at a mid-level point; female students were able to manage time better than male ones. The time-management skills of the students decreased as the anxiety level increased. The conclusion in [7] was that students are required to learn to manage time so that they are able to apply the same degree of efficiency in the profession they choose after completing their education.

Article [8] found that the indicator of a person's creative abilities is significantly correlated with the use of a time-management technology. Thus, time-management is a technique that almost any individual can use to increase the effectiveness and efficiency of the working time including creative and scientific activities.

Selecting and scheduling most important jobs. People often strive to solve several problems at the same time, combining complex tasks during working hours. Situations arise when a person puts off important and urgent work, which may be unpleasant or unusual for her (him), and strives to perfectly complete unimportant and even useless work. Such habits lead to a decrease in the likelihood of completing important tasks on time [9–11]. One of the valuable strategies often used for an effective implementation of time-management is the selection of mostly important jobs and their optimal planning [1; 4–6; 9; 12].

The importance of helping employees to plan their work from the very beginning is widely stated in the literature [4–7; 9]. A supervisor should assist the supervisee to devise a proposed schedule for activities to be undertaken and ensure that the schedule is followed. Such a plan will allow the structured and disciplined use of time of an employer [5]. It is suggested that dividing the work into smaller and more manageable units, which can be planned and controlled, makes a huge task more attainable. Identifying the expected dates for the completion of each phase is important. When devising a schedule, it is helpful to start with the expected date of the completion and work the phases from the deadline backwards [5]. Safety time can be built into the plan to allow for catch-up periods. Though it may seem tedious to plan time in such a detailed way, the results will be worthwhile.

As written in [9], one of the key components of an organisation is maintaining an individual calendar. Many employees let their schedules dictate them. The first step is to make a to-do list and prioritise each item. One needs to be realistic about what one can achieve over the next day, week, or month. If the employee is (on one's own) going over schedule, she (he) will be disappointed when she (he) fails to complete every job. The to-do list should be reviewed regularly, daily if possible, and revised as necessary. One needs to set aside time to plan, either first thing each morning or last thing in the evening to plan for the next day. It is important to do this daily or weekly as priorities may change over time [9].

Time-management makes it possible to more effectively select, plan and complete a significant number of jobs of varying complexity, which has a positive effect on the timing of necessary job, educational achievements and an increase in the quality of life [13; 14]. Optimal planning is a complex process, which requires time resources and human intellectual abilities. Organising the selected jobs can be a difficult task for the performer, requiring both additional time and certain skills. In addition, the user has to carry out the prioritisation of the planned jobs, as well as the ordering of the still unfulfilled and newly received jobs, many times over the entire planning horizon. It is advisable to use a personal computer (laptop or smartphone) as much as possible to automate the process of scheduling the planned jobs.

A problem of minimising the total (average) weighted completion time of the planned jobs by one employee is considered in [15] provided that only lower and upper bounds of the possible processing time of each job are known before scheduling. Algorithms and software have been developed for constructing a permutation of the chosen jobs with the largest relative semi-perimeter of the optimality parallelepiped. Computational experiments on the computer showed the effectiveness of the developed algorithms for time-management.

We consider the problems of creating optimal schedules for two employees. It will be shown how scheduling algorithms can be used to optimal time-management.

Optimal selection and scheduling jobs for two employees

The discussed publications [1; 3; 4; 6; 9; 12; 14; 15] include different techniques and procedures for time-management, which are recommended to be used for planning the working time of a single employee. In our paper, we develop scheduling algorithms for two employees having a set of common jobs, e. g., for a supervisor and a subordinate. The aim of time-management is to create a job schedule for both employees during their working hours.

Consider the main features of such scheduling. The entire set of jobs consists of jobs of four types. Jobs that are performed firstly by a supervisor and then by a subordinate (e. g., a supervisor formalises a problem, outlines possible ways for solving it and delegates it to a subordinate). Jobs that are performed first by the subordinate and then by the supervisor (e. g., a supervisor checks the result of the job performed by a subordinate). There are jobs that are completely performed by a supervisor and jobs that are completely performed by a subordinate. It is naturally to assume that performing such a job consists of the execution of two or one operations. No repetition of the same concrete job is considered.

The following key peculiarity is an uncertainty of the operation durations. Indeed, it is difficult to determine an exact time, which will be required for processing a job by a human. On the other hand, one can determine a lower bound and upper bound of the operation duration. In general, the duration of each operation may remain unknown until the moment of completion of this job. At the moment of constructing an optimal schedule, a closed interval is known, which definitely contains all the possible operation durations of the planned job.

As it is written in [11; 12] and in many other papers on time-management, interruptions should be avoided while completing a job in progress (avoid unscheduled meetings, phone calls, and visitors). In addition to the direct loss of time, such interruptions cause the need to spend additional time for re-preparing the interrupted job.

The selection of jobs to perform from the entire list of available tasks can be made in accordance with their importance for the employee. The different levels of importance of the jobs can be represented in the form of the weights of the jobs to be fulfilled in the planning horizon. The criterion for the effectiveness of time-management is not only to achieve the goals set by a person, but also to complete her (his) work in the minimum possible time [16].

The constructed schedule must have a minimum length (it is the minimisation of makespan). Other criteria are to maximise the total weight of the completed jobs and to maximise the number of jobs completed in time. We use the terminology of the scheduling theory from [17] and the $\alpha|\beta|\gamma$ classification from [18] for denoting the scheduling problems, where α specifies machine environments, β – job characteristics, and γ – objective functions.

Setting of the scheduling problem. Let the set of jobs $\mathfrak{J} = (J_1, J_2, \dots, J_n)$ have to be processed by two performers $M = \{M_1, M_2\}$. A weight (an importance) w_i of the job $J_i \in \mathfrak{J}$ is determined. The supervisor is the first performer M_1 . The subordinate is the second performer M_2 . Jobs in the set \mathfrak{J} may have different (technological) routes. This processing system is called a job-shop. The number of stages (operations) n_i in the route of a job $J_i \in \mathfrak{J}$ does not exceed two (since there are two employees). The duration of operation O_{ij} is denoted by p_{ij} , where $J_i \in \mathfrak{J}$, $j \in \{1, 2\}$. The lower and upper bounds of possible duration p_{ij} are denoted as a_{ij} and b_{ij} , respectively. Thus, the uncertain (interval) job-shop problem is considered, where possible duration p_{ij} of the operation O_{ij} must belong to the closed interval $[a_{ij}, b_{ij}]$.

Remark. It is assumed that in the uncertain (interval) scheduling problem under consideration, all durations of the jobs are unknown before scheduling, i. e. the strict inequality $a_{ij} < b_{ij}$ holds for each job $J_i \in \mathfrak{J}$ and each machine $M_j \in M$.

Let C_i denote a moment of the completion of the job $J_i \in \mathfrak{J}$. We consider the following three ordered criteria: minimising a schedule length, i. e. makespan $C_{\max} = \max\{C_i : J_i \in \mathfrak{J}\}$, maximising a sum of the weights of the completed jobs $\sum w_i$ and maximising a total number of jobs $\sum U_i$ that are completed before their due dates D_i , where U_i is equal to 1, if $C_i \leq D_i$, and U_i is equal to 0, if $C_i > D_i$. Using the three-field notation $\alpha|\beta|\gamma$, the problem with uncertain operation durations is denoted as follows: $J2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, n_i \leq 2|C_{\max}, \sum w_i, \sum U_i$, where three criteria C_{\max} , $\sum w_i$ and $\sum U_i$ are linearly ordered, i. e. the main criterion is C_{\max} , the second criterion is $\sum w_i$ and the third criterion is $\sum U_i$.

This paper continues the previous research works started in [15; 19–21] via extending the obtained results to the job-shop problem with three ordered criteria. In [15], the time-management problem for a single employee was investigated with the single criterion of minimising the weighted sum of the job completion times. The properties of optimal permutations existing for a flow-shop scheduling problem with the single criterion of the minimisation of a schedule length were investigated in [20; 21]. A similar properties of optimal permutations existing for a job-shop scheduling problem were investigated in [19]. It should be noted that papers [19–21] were devoted to the uncertain shop scheduling problems where non-strict inequalities $a_{ij} \leq b_{ij}$ hold for all given jobs $J_i \in \mathfrak{J}$, $j \in \{1, 2\}$.

Uncertain (interval) scheduling problems

Employees in time-management correspond to machines in the scheduling theory [15; 17–19; 22]. For scheduling jobs for a working day, we consider the uncertain two-machine job-shop problem $J2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, n_i \leq 2|C_{\max}$. The machine set $M = \{M_1, M_2\}$ has to process the job set $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 \cup \mathfrak{J}_2 \cup \mathfrak{J}_{1,2} \cup \mathfrak{J}_{2,1}$, where the subset $\mathfrak{J}_{1,2}$ includes jobs with the machine route (M_1, M_2) , $|\mathfrak{J}_{1,2}| = n_{1,2}$. The subset $\mathfrak{J}_{2,1}$ includes jobs with the opposite machine route (M_2, M_1) , $|\mathfrak{J}_{2,1}| = n_{2,1}$. The subset \mathfrak{J}_1 (the subset \mathfrak{J}_2) includes jobs that must be processed by

the machine M_1 (by the machine M_2 , respectively). Here $|\mathfrak{J}_1| = n_1$, $|\mathfrak{J}_2| = n_2$ and $n = n_{1,2} + n_{2,1} + n_1 + n_2$. All jobs are available for processing from the initial time $t = 0$. A preemption of any operation O_{ij} of the job $J_i \in \mathfrak{J}$ on the machine $M_j \in M$ is not allowed. Probability distributions of random durations are unknown. In the realisation of a schedule, a value of the processing time p_{ij} may be equal to any real number no less than the lower bound a_{ij} and no larger than the upper bound b_{ij} .

A set of all possible vectors $p = (p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{n1}, p_{n2})$ of the operation durations is denoted as follows: $T = \{p : a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, J_i \in \mathfrak{J}, M_j \in M\}$. Such a vector $p \in T$ of the possible durations is called a scenario. For a fixed scenario $p \in T$, the uncertain scheduling problem $J2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, n_i \leq 2|C_{\max}$ turns out into the deterministic scheduling problem, which is the individual scheduling problem $J2|p, n_i \leq 2|C_{\max}$ associated with the scenario p .

The deterministic problem $J2|p, n_i \leq 2|C_{\max}$ is solvable in

$$O\left(\max\{n_{1,2}, n_{2,1}\} \cdot \log\left(\max\{n_{1,2}, n_{2,1}\}\right)\right)$$

time as it is noted in [22]. An optimal schedule for the individual scheduling problem $J2|p, n_i \leq 2|C_{\max}$ may be determined by a Jackson's pair of job permutations (π', π'') such that the permutation $\pi' = (\pi_{1,2}, \pi_1, \pi_{2,1})$ determines an optimal sequence for processing jobs on the machine M_1 and the permutation $\pi'' = (\pi_{2,1}, \pi_2, \pi_{1,2})$ determines an optimal sequence for processing jobs on the machine M_2 . The job J_i belongs to the permutation π_h , if the inclusion $J_i \in \mathfrak{J}_h$ holds.

In Jackson's pair of permutations, for the sequence $\pi_{1,2} = (J_{i_1}, J_{i_2}, \dots, J_{i_{n_{1,2}}})$ (and the sequence $\pi_{2,1} = (J_{i_1}, J_{i_2}, \dots, J_{i_{n_{2,1}}})$, respectively) of the jobs from the set $\mathfrak{J}_{1,2}$ (from the set $\mathfrak{J}_{2,1}$), the following condition must hold for all indices k and m , $1 \leq k < m \leq n_{1,2}$ ($1 \leq k < m \leq n_{2,1}$):

$$\begin{aligned} \min\{p_{i_k1}, p_{i_m2}\} &\leq \min\{p_{i_m1}, p_{i_k2}\} \\ (\min\{p_{i_k2}, p_{i_m1}\} &\leq \min\{p_{i_m2}, p_{i_k1}\}), \end{aligned} \tag{1}$$

where the permutation $\pi_{1,2}$ (and permutation $\pi_{2,1}$) is called a Johnson's permutation [22].

The optimal order of jobs from the set \mathfrak{J}_1 and jobs from the set \mathfrak{J}_2 may be arbitrary [22]. Therefore, in what follows, we consider only one permutation π_1 (one permutation π_2 , respectively) of the jobs from the set \mathfrak{J}_1 that are located in the non-increasing order of their weights (from the set \mathfrak{J}_2 that are located in the non-increasing order of their weights).

Let the set $S_{1,2}$ (the set $S_{2,1}$, respectively) denote a set of all permutations of jobs from the set $\mathfrak{J}_{1,2}$ (the set $\mathfrak{J}_{2,1}$). Let $S = \langle S_{1,2}, S_{2,1} \rangle$ denote a subset of the Cartesian product $(S_{1,2}, \pi_1, S_{2,1}) \times (S_{2,1}, \pi_2, S_{1,2})$ such that each element in the set S is a pair of job permutations $(\pi', \pi'') \in S$, where $\pi' = (\pi_{1,2}^i, \pi_1, \pi_{2,1}^j)$ and $\pi'' = (\pi_{2,1}^i, \pi_2, \pi_{1,2}^j)$, $1 \leq i \leq n_{1,2}!$, $1 \leq j \leq n_{2,1}!$.

For the uncertain (interval) job-shop scheduling problem $J2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, n_i \leq 2|C_{\max}$, we will consider only semi-active schedules which are determined by the set S .

Definition 1 [17]. A schedule is semi-active if no operation can be processed earlier without changing the processing order or violating some given constraints.

It is known that for any regular criterion [17; 18], there exists a semi-active schedule which is optimal.

For any fixed scenario $p \in T$, there exists Jackson's pair of job permutations (belonging to the set S) that is optimal for the individual job-shop scheduling problem $J2|p, n_i \leq 2|C_{\max}$. It is clear that in most cases, a single pair of job permutations, which is optimal for all possible scenarios $p \in T$ for the uncertain (interval) job-shop scheduling problem $J2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, n_i \leq 2|C_{\max}$, does not exist. Due to this fact, we will look for a dominant set of the job permutations based on the following definition.

Definition 2. A set of pairs of job permutations $DS(T) \subseteq S$ is a dominant set for the uncertain (interval) scheduling problem $J2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, n_i \leq 2|C_{\max}$ with the set \mathfrak{J} of jobs, if for each scenario $p \in T$, the set $DS(T)$ contains at least one pair $(\pi', \pi'') \in S$ of the job permutations that is optimal for the individual deterministic problem $J2|p, n_i \leq 2|C_{\max}$.

The sufficient conditions for a pair of job permutations $(\pi', \pi'') \in S$ to be an optimal pair of job permutations for any individual deterministic problem $J2|p, n_i \leq 2|C_{\max}$ with any fixed scenario $p \in T$ that is feasible for the uncertain (interval) problem $J2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, n_i \leq 2|C_{\max}$ have been investigated in [19, theorem 7, corollaries 3 and 4]. It has been proven that if one of the following conditions holds:

$$\sum_{J_i \in \mathfrak{S}_{1,2}} b_{i1} \leq \sum_{J_j \in \mathfrak{S}_2 \cup \mathfrak{S}_{2,1}} a_{j2} \text{ and } \sum_{J_i \in \mathfrak{S}_{1,2}} a_{i2} \geq \sum_{J_j \in \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_{2,1}} b_{j1}, \quad (2)$$

$$\sum_{J_i \in \mathfrak{S}_{2,1}} b_{i2} \leq \sum_{J_j \in \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_{1,2}} a_{j1} \text{ and } \sum_{J_i \in \mathfrak{S}_{2,1}} a_{i1} \geq \sum_{J_j \in \mathfrak{S}_2 \cup \mathfrak{S}_{1,2}} b_{j2}, \quad (3)$$

then any permutation $\pi_{1,2}$ from the set $S_{1,2}$ and any permutation $\pi_{2,1}$ from the set $S_{2,1}$ form a single-element dominant set $DS(T)$ for the uncertain problem $J2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, n_i \leq 2|C_{\max}$.

If the first inequality in condition (2) (in condition (3), respectively) holds, then $\langle \{\pi_{1,2}\}, S_{2,1} \rangle \subseteq S$ ($\langle S_{1,2}, \{\pi_{2,1}\} \rangle \subseteq S$) is a dominant set of schedules for the uncertain problem $J2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, n_i \leq 2|C_{\max}$. One needs to determine only orders for processing jobs from the set $\mathfrak{S}_{2,1}$ (the set $\mathfrak{S}_{1,2}$, respectively). In each this set all jobs have the same machine route.

The uncertain flow-shop problem $F2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}|C_{\max}$ is a special case of the uncertain job-shop problem $J2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, n_i \leq 2|C_{\max}$. In the flow-shop problem, all jobs have the same machine route on both machines and a schedule is determined by the permutation π_k . The uncertain (interval) flow-shop problem $F2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}|C_{\max}$ with the job set $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{1,2}$ ($\mathfrak{S}_{2,1} = \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 = \emptyset$) and the uncertain (interval) flow-shop problem $F2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}|C_{\max}$ with the job set $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{2,1}$ ($\mathfrak{S}_{1,2} = \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 = \emptyset$) are associated with the uncertain (interval) job-shop problem $J2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, n_i \leq 2|C_{\max}$. As shown in [20], solving the uncertain (interval) job-shop problem $J2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, n_i \leq 2|C_{\max}$ may be based on solving two associated uncertain flow-shop problems. It is sufficient to construct dominant sets for two associated uncertain (interval) flow-shop problems $F2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}|C_{\max}$. The dominant set for the uncertain (interval) flow-shop problem $F2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}|C_{\max}$ turns out to a set of job permutations, which contains at least one optimal permutation for the deterministic flow-shop problem $F2|p|C_{\max}$ for each fixed scenario $p \in T$.

Theorem 1 [19]. *Let the set $S'_{1,2} \subseteq S_{1,2}$ be a set of permutations from the dominant set for the uncertain flow-shop problem $F2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}|C_{\max}$ with the job set $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{1,2}$. And let $S'_{2,1} \subseteq S_{2,1}$ be a set of permutations from the dominant set for the uncertain flow-shop problem $F2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}|C_{\max}$ with the job set $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{2,1}$. Then the set $\langle S'_{1,2}, S'_{2,1} \rangle \subseteq S$ is a dominant set for the uncertain job-shop problem $J2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, n_i \leq 2|C_{\max}$ with the job set $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2 \cup \mathfrak{S}_{1,2} \cup \mathfrak{S}_{2,1}$.*

We next consider the uncertain flow-shop problem $F2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}|C_{\max}$ with the job set $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{1,2}$. Due to remark, the following partition holds: $\mathfrak{S}_{1,2} = \mathfrak{S}_{1,2}^1 \cup \mathfrak{S}_{1,2}^2 \cup \mathfrak{S}_{1,2}^*$, where $\mathfrak{S}_{1,2}^1 = \{J_i \in \mathfrak{S}_{1,2} | b_{i1} \leq a_{i2}\}$, $\mathfrak{S}_{1,2}^2 = \{J_i \in \mathfrak{S}_{1,2} | b_{i2} \leq a_{i1}\}$, $\mathfrak{S}_{1,2}^* = \{J_i \in \mathfrak{S}_{1,2} | b_{i1} > a_{i2}, b_{i2} > a_{i1}\}$.

We prove the following necessary and sufficient conditions for the existence of a Johnson's permutation, which is optimal for any scenario $p \in T$, which is possible for the uncertain flow-shop problem $F2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}|C_{\max}$ with the job set $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{1,2}$.

Theorem 2. *There exists a Johnson's permutation, which is optimal for any scenario $p \in T$ for the uncertain (interval) flow-shop scheduling problem $F2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}|C_{\max}$ with the job set $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{1,2}$, if and only if, the following conditions hold:*

a) *for each pair of jobs $J_i \in \mathfrak{S}_{1,2}^1$ and $J_j \in \mathfrak{S}_{1,2}^1$ (jobs $J_i \in \mathfrak{S}_{1,2}^2$ and $J_j \in \mathfrak{S}_{1,2}^2$, respectively), either $b_{i1} \leq a_{j1}$ or $b_{j1} \leq a_{i1}$ (either $b_{i2} \leq a_{j2}$ or $b_{j2} \leq a_{i2}$, respectively);*

b) *inequality $|\mathfrak{S}_{1,2}^*| \leq 1$ holds, and for job $J_{i^*} \in \mathfrak{S}_{1,2}^*$ (if any), both inequalities $a_{i^*1} \geq \max\{b_{i1} | J_i \in \mathfrak{S}_{1,2}^1\}$ and $a_{i^*2} \geq \max\{b_{i2} | J_i \in \mathfrak{S}_{1,2}^2\}$ hold.*

Proof. Sufficiency. We consider the permutation $\pi_k = (\pi^1, J_{i^*}, \pi^2)$ such that, in the permutation π^1 , jobs from the set $\mathfrak{S}_{1,2}^1$ are located in the increasing order of the values b_{i1} , and in the permutation π^2 , jobs from the set $\mathfrak{S}_{1,2}^2$ are located in the decreasing order of the values b_{i2} . If $|\mathfrak{S}_{1,2}^*| = 0$, then $\pi_k = (\pi^1, \pi^2)$. Due to remark, the permutation $\pi_k = (\pi^1, J_{i^*}, \pi^2)$ is uniquely determined.

For the considered permutation $\pi_k = (J_{i_1}, J_{i_2}, \dots, J_{i_{n_{1,2}}})$, condition (1) holds for any scenario $p \in T$. Indeed, for all indices k and m , $1 \leq k < m \leq n_{1,2}$, both inequalities (4) hold

$$\min\{p_{i_k1}, p_{i_m2}\} \leq \min\{b_{i_k1}, b_{i_m2}\} \text{ and } \min\{a_{i_m1}, a_{i_k2}\} \leq \min\{p_{i_m1}, p_{i_k2}\}. \quad (4)$$

If the inclusion $J_{i_m} \in \mathfrak{S}_{1,2}^1 \cup \mathfrak{S}_{1,2}^*$ holds, then the inequality $b_{i_k1} \leq a_{i_m1}$ holds. This assertion follows from conditions a) or b) and from constructing the permutation π^1 . If the inclusion $J_{i_m} \in \mathfrak{S}_{1,2}^2$ holds, then inequality $b_{i_m2} \leq a_{i_m1}$ holds. Obviously, inequality $k < m$ holds as well. If inequalities (4) hold, then condition (1) holds for all feasible durations $p_{i_k1}, p_{i_m1}, p_{i_k2}, p_{i_m2}$.

Similarly, one can analyse the case when $J_{i_k} \in \mathfrak{S}_{1,2}^* \cup \mathfrak{S}_{1,2}^2$ and $J_{i_m} \in \mathfrak{S}_{1,2}^1$, where $k < m$.

Necessity. Based on the contradiction method, we assume that the permutation $\pi_k = (J_{i_1}, J_{i_2}, \dots, J_{i_{n_{1,2}}})$ exists such that condition (1) holds for all indices k and m , $1 \leq k < m \leq n_{1,2}$, for any scenario $p \in T$, and at least one condition a) or b) does not hold.

Assume that condition a) does not hold. If there exists a pair of jobs $J_{i_k} \in \mathfrak{S}_{1,2}^1$ and $J_{i_m} \in \mathfrak{S}_{1,2}^1$ with $k < m$, such that both inequalities $b_{i_k1} > a_{i_m1}$ and $b_{i_m1} > a_{i_k1}$ hold, we consider feasible operation durations $a_{i_m1} \leq p_{i_m1} < p_{i_k1} \leq b_{i_k1}$. Due to remark, there exists a real number p_{i_m2} such that inequalities $p_{i_m1} \leq b_{i_m1} \leq a_{i_m2} < p_{i_m2}$ hold. Condition (1) does not hold for indices k and m . Hence, the permutation π_k is not a Johnson's one for scenarios T . Similarly a contradiction may be obtained, if there exists a pair of jobs $J_{i_k} \in \mathfrak{S}_{1,2}^2$ and $J_{i_m} \in \mathfrak{S}_{1,2}^1$, $k < m$.

Now, assume that condition b) does not hold. If there exist two jobs $J_{i_k} \in \mathfrak{S}_{1,2}^*$ and $J_{i_m} \in \mathfrak{S}_{1,2}^*$, $k < m$, we consider feasible operation durations $p_{i_m1} < p_{i_m2}$ and $p_{i_k2} < p_{i_k1}$. Condition (1) does not hold for indices k and m for all scenarios $p' \in T$. For a job $J_{i_m} \in \mathfrak{S}_{1,2}^*$ with inequality $a_{i_m1} < b_{i_k1}$, where $J_{i_k} \in \mathfrak{S}_{1,2}^1$, we consider feasible operation durations $p_{i_m1} < p_{i_m2}$ and $p_{i_m1} < p_{i_k1}$. Condition (1) does not hold for indices k and m for all scenarios $p' \in T$.

Similarly, one can test the case, when for job $J_{i_k} \in \mathfrak{S}_{1,2}^*$, inequality $a_{i_k2} < b_{i_m2}$ holds, where $J_{i_m} \in \mathfrak{S}_{1,2}^2$. We obtain the contradiction to the assumption that for the considered permutation $\pi_k = (J_{i_1}, J_{i_2}, \dots, J_{i_{n_{1,2}}})$, condition (1) holds for all indices k and m , $1 \leq k < m \leq n_{1,2}$, and for any fixed scenario $p \in T$. Theorem 2 is proved.

Theorem 2 implies the following claim.

Corollary 1. *If the conditions of theorem 2 hold, then there exists a permutation $\pi_{1,2} \in S_{1,2}$, which is the dominant singleton $\{\pi_{1,2}\} = DS_{1,2}(T)$, $|DS_{1,2}(T)| = 1$, for the uncertain (interval) flow-shop scheduling problem $F2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}|C_{\max}$ with the job set $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{1,2}$.*

Uncertain (interval) two-machine flow-shop scheduling problems

We consider the binary relation $A_{\prec}^{1,2}$ on the set $\mathfrak{S}_{1,2}$ based on the following definition.

Definition 3. For two jobs $J_u \in \mathfrak{S}_{1,2}$ and $J_v \in \mathfrak{S}_{1,2}$, $u \neq v$, inclusion $(J_u, J_v) \in A_{\prec}^{1,2}$ holds if and only if for any scenario $p \in T$, condition (1) holds with $i_k = u$ and $i_m = v$.

Due to definition 3, if inclusion $(J_u, J_v) \in A_{\prec}^{1,2}$ holds, then for every scenario $p \in T$, there exists a Johnson's permutation of the jobs from set $\mathfrak{S}_{1,2}$ such that the job J_u locates before job J_v , $u \neq v$. In [20], it is shown that for any scenario $p \in T$, there exists a Johnson's permutation such that job $J_x \in \mathfrak{S}_{1,2}$ locates before the job $J_y \in \mathfrak{S}_{1,2}$, $x \neq y$, if and only if at least one of the following conditions holds:

$$b_{x1} \leq a_{x2} \text{ and } b_{x1} \leq a_{y1}, \quad (5)$$

$$b_{y2} \leq a_{y1} \text{ and } b_{y2} \leq a_{x2}. \quad (6)$$

For constructing the binary relation $A_{\prec}^{1,2}$, one can check conditions (5) and (6) for pairs of jobs from the set $\mathfrak{S}_{1,2}$. Next, we prove two theorems about properties of the relation $A_{\prec}^{1,2}$.

Theorem 3. *If $(J_u, J_v) \in A_{\zeta}^{1,2}$, then there exists a dominant set for the uncertain (interval) flow-shop scheduling problem $F2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}|C_{\max}$ with the job set $\mathfrak{J}_{1,2}$, such that job J_u locates before job J_v , $u \neq v$, in all permutations from the dominant set $DS_{1,2}(T)$.*

Proof. Let the inclusion $(J_u, J_v) \in A_{\zeta}^{1,2}$ hold. We consider an arbitrary possible scenario $p' \in T$. Due to definition 3, there exists a Johnson's permutation π' of the jobs from the set $\mathfrak{J}_{1,2}$ with the job J_u located before the job J_v , $u \neq v$. The permutation π' is an optimal permutation for the individual flow-shop problem $F2|p'|C_{\max}$ with the job set $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{1,2}$. Let $DS_{1,2}(T)$ be a set of all such permutation constructed for all scenarios $p \in T$. Thus, the set $DS_{1,2}(T)$ contains at least one optimal permutation for the individual deterministic problem $F2|p|C_{\max}$ for each scenario $p \in T$. Therefore, the set $DS_{1,2}(T)$ is a dominant set for the uncertain (interval) flow-shop problem $F2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}|C_{\max}$ with the job set $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{1,2}$. In each permutation from the set $DS_{1,2}(T)$, job J_u locates before job J_v , $u \neq v$. This completes the proof of theorem 3.

Theorem 4. *The binary relation $A_{\zeta}^{1,2}$ is a strict order.*

Proof. We have to show that the binary relation $A_{\zeta}^{1,2}$ is anti-reflexive, asymmetric, and transitive. Due to definition 3, the binary relation $A_{\zeta}^{1,2}$ is defined only for $u \neq v$. Thus, the relation $A_{\zeta}^{1,2}$ is anti-reflexive. If the inclusion $(J_u, J_v) \in A_{\zeta}^{1,2}$ holds, then condition (1) holds with $i_k = u$ and $i_m = v$ for any scenario $p \in T$ and the following inequalities hold:

$$\min\{p_{u1}, p_{v2}\} \leq \min\{b_{u1}, b_{v2}\} \leq \min\{a_{v1}, a_{u2}\} \leq \min\{p_{v1}, p_{u2}\}. \quad (7)$$

On the other hand, due to remark, the following inequalities hold:

$$\min\{a_{u1}, a_{v2}\} < \min\{b_{u1}, b_{v2}\} \text{ and } \min\{a_{v1}, a_{u2}\} < \min\{b_{v1}, b_{u2}\}. \quad (8)$$

From inequalities (7) and (8), we conclude that $\min\{b_{v1}, b_{u2}\} > \min\{a_{u1}, a_{v2}\}$ and inequality (1) does not hold for $i_k = v$ and $i_m = u$ for scenarios $p \in T$. Thus, $(J_v, J_u) \notin A_{\zeta}^{1,2}$ and the binary relation $A_{\zeta}^{1,2}$ is asymmetric.

We prove the transitivity. Let there exist three jobs $J_u \in \mathfrak{J}_{1,2}$, $J_v \in \mathfrak{J}_{1,2}$ and $J_w \in \mathfrak{J}_{1,2}$ with the inclusions $(J_u, J_v) \in A_{\zeta}^{1,2}$, $(J_v, J_w) \in A_{\zeta}^{1,2}$ and condition $(J_u, J_w) \notin A_{\zeta}^{1,2}$. For the jobs J_u and J_v , similarly as for the jobs J_v and J_w , at least one of conditions (5) and (6) holds with $x = u$ and $y = v$, and $x = v$ and $y = w$, respectively. We must consider the following four cases:

- (I) $b_{u1} \leq a_{u2}$, $b_{u1} \leq a_{v1}$, $b_{v1} \leq a_{v2}$ and $b_{v1} \leq a_{w1}$;
- (II) $b_{u1} \leq a_{u2}$, $b_{u1} \leq a_{v1}$, $b_{w2} \leq a_{w1}$ and $b_{w2} \leq a_{v2}$;
- (III) $b_{v2} \leq a_{v1}$, $b_{v2} \leq a_{u2}$, $b_{v1} \leq a_{v2}$ and $b_{v1} \leq a_{w1}$;
- (IV) $b_{v2} \leq a_{v1}$, $b_{v2} \leq a_{u2}$, $b_{w2} \leq a_{w1}$ and $b_{w2} \leq a_{v2}$.

In case (III), we obtain the contradiction to remark. Indeed, in case (III) due to remark, we obtain the following contradictory inequalities: $b_{v2} \leq a_{v1} < b_{v1} \leq a_{v2} < b_{v2}$.

We have to consider the remaining three cases (I), (II) and (IV).

Note that for the jobs J_u and J_w , neither condition (5), nor condition (6) holds with $x = u$ and $y = w$, which could happen only in one of the following four cases.

- 1. Inequalities $b_{u1} > a_{u2}$ and $b_{w2} > a_{w1}$ contradict to the cases (I), (II) and (IV).
- 2. Inequalities $b_{u1} > a_{u2}$ and $b_{w2} > a_{u2}$ contradict to the cases (I) and (II).

Furthermore, from the inequalities of case (IV) and remark, we obtain the contradictory inequalities as follows: $b_{w2} > a_{u2} \geq b_{v2} > a_{v2} \geq b_{w2}$.

- 3. Inequalities $b_{u1} > a_{w1}$ and $b_{w2} > a_{w1}$ contradict to cases (II) and (IV).

Furthermore, from case (I) and remark, we obtain the contradictory inequalities as follows: $b_{u1} > a_{w1} \geq b_{v1} > a_{v1} \geq b_{u1}$.

- 4. Consider inequalities $b_{u1} > a_{w1}$ and $b_{w2} > a_{u2}$.

From the inequalities of cases (I) and (IV), we obtain the same contradictions as in the cases 3 and 2, respectively. From case (II), we obtain the following contradictory inequalities: $a_{u2} < b_{w2} \leq a_{w1} < b_{u1} \leq a_{u2}$.

Thus, for any three jobs $J_u \in \mathfrak{J}_{1,2}$, $J_v \in \mathfrak{J}_{1,2}$ and $J_w \in \mathfrak{J}_{1,2}$, we obtain that the inclusions $(J_u, J_v) \in A_{\zeta}^{1,2}$ and $(J_v, J_w) \in A_{\zeta}^{1,2}$ imply the inclusion $(J_u, J_w) \in A_{\zeta}^{1,2}$. Therefore, the binary relation $A_{\zeta}^{1,2}$ is transitive. Theorem 4 is proved.

Definition 4. Two jobs $J_x \in \mathfrak{S}_{1,2}$ and $J_y \in \mathfrak{S}_{1,2}$, $x \neq y$, are conflict jobs if the following relations hold:
 $(J_x, J_y) \notin A_{\prec}^{1,2}$ and $(J_y, J_x) \notin A_{\prec}^{1,2}$.

Definition 5. The subset $\mathfrak{S}_x \subseteq \mathfrak{S}_{1,2}$ is called a conflict set of jobs if for any job $J_y \in \mathfrak{S}_{1,2} \setminus \mathfrak{S}_x$, either relation $(J_x, J_y) \in A_{\prec}^{1,2}$ or relation $(J_y, J_x) \in A_{\prec}^{1,2}$ holds for each job $J_x \in \mathfrak{S}_x$, provided that any proper subset of the set \mathfrak{S}_x does not possess such a property.

Obviously, there may exist several conflict sets in the set $\mathfrak{S}_{1,2}$. The permutation $\pi_k = (J_{[1]}, J_{[2]}, \dots, J_{[n_{1,2}]})$ is determined by the partial strict order $A_{\prec}^{1,2}$ if each inclusion $(J_x, J_y) \in A_{\prec}^{1,2}$ implies the following form of this permutation: $\pi_k = (\dots, J_x, \dots, J_y, \dots)$.

Let $\Pi_{1,2}$ denote a set of all permutations determined by the partial strict order $A_{\prec}^{1,2}$.

Theorem 5. *There exists a dominant set $DS_{1,2}(T) = \Pi_{1,2}$ for the uncertain (interval) flow-shop scheduling problem $F2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}|C_{\max}$ with the job set $\mathfrak{S}_{1,2}$.*

PROOF. Based on the contradiction method, we assume that for an arbitrary scenario $p \in T$, there is no Johnson's permutation in the set $\Pi_{1,2}$ for the deterministic flow-shop scheduling problem $F2|p|C_{\max}$ with the scenario p .

Due to constructing permutations of the set $\Pi_{1,2}$, the above assumption means that there exists at least one pair of jobs $J_x \in \mathfrak{S}_{1,2}$ and $J_y \in \mathfrak{S}_{1,2}$ such that inclusion $(J_x, J_y) \in A_{\prec}^{1,2}$ holds, whereas condition (1) with $i_k = y$ and $i_m = x$ holds as the following strict inequality:

$$\min\{p_{y1}, p_{x2}\} < \min\{p_{x1}, p_{y2}\}. \quad (9)$$

Due to definition 3, we obtain the following non-strict inequality:

$$\min\{b_{x1}, b_{y2}\} \leq \min\{a_{y1}, a_{x2}\}. \quad (10)$$

From inequalities (9) and (10), we obtain the following contradicted inequalities:

$$\min\{p_{y1}, p_{x2}\} < \min\{p_{x1}, p_{y2}\} \leq \min\{b_{x1}, b_{y2}\} \leq \min\{a_{y1}, a_{x2}\} \leq \min\{p_{y1}, p_{x2}\}.$$

Therefore, there exists a Johnson's permutation for the problem $F2|p|C_{\max}$ in the set $\Pi_{1,2}$. Due to the arbitrariness of the choice of the possible scenario $p \in T$, the set $\Pi_{1,2}$ contains an optimal Johnson's permutation for the individual deterministic flow-shop problem $F2|p|C_{\max}$ for each fixed scenario $p \in T$. Due to definition 2, the set $\Pi_{1,2}$ is a dominant set for the uncertain problem $F2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}|C_{\max}$ with the job set $\mathfrak{S}_{1,2}$. Theorem 5 is proved.

Let the strict order $A_{\prec}^{1,2}$ for the uncertain (interval) flow-shop scheduling problem $F2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}|C_{\max}$ with the job set $\mathfrak{S}_{1,2}$ be represented as follows:

$$J_1, J_2, \dots, J_k, \{J_{k+1}, J_{k+2}, \dots, J_{k+r}\}, J_{k+r+1}, J_{k+r+2}, \dots, J_{n_{1,2}}, \quad (11)$$

where all jobs between the brackets are conflict jobs and each of these jobs is found in relation $A_{\prec}^{1,2}$ with any job located outside the brackets. Thus, jobs in the brackets make up the conflict set. The order of jobs in the brackets may be different in the optimal permutation (depending on the used scenario $p \in T$) but they still correspond to the binary relation $A_{\prec}^{1,2}$.

The following sufficient conditions for checking the optimal order for processing jobs of the conflict set were proved in [19, theorems 10–12].

Let the strict order $A_{\prec}^{1,2}$ over the set $\mathfrak{S}_{1,2}$ have form (11). If for the permutation $\pi = (J_1, \dots, J_k, J_{k+1}, J_{k+2}, \dots, J_{k+r}, J_{k+r+1}, \dots, J_{n_{1,2}}) \in \Pi_{1,2}$, one of the following inequalities holds:

$$\sum_{i=1}^{k+r} b_{i,1} \leq \sum_{J_i \in \mathfrak{S}_2 \cup \mathfrak{S}_{2,1}} a_{i,2} + \sum_{j=1}^k a_{j,2}, \quad (12)$$

$$b_{k+s,1} \leq \sum_{J_i \in \mathfrak{S}_2 \cup \mathfrak{S}_{2,1}} a_{i,2} + \sum_{j=1}^{k+s-1} (a_{j,2} - b_{j,1}), \quad s \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad (13)$$

$$\sum_{i=r-s+2}^{r+1} a_{k+i,1} \geq \sum_{j=r-s+1}^r b_{k+j,2}, s \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad (14)$$

then the set $S' = \langle \{\pi\}, \Pi_{2,1} \rangle \subset S$ is a dominant set of schedules for the uncertain (interval) job-shop problem $J2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, n_i \leq 2|C_{\max}$ with the job set \mathfrak{J} .

Condition (12) does not use the order of the jobs in the conflict set. So, the order of jobs in the conflict set $\{J_{k+1}, J_{k+2}, \dots, J_{k+r}\}$ may be arbitrary. Based on the second criterion of the maximisation of the sum $\sum w_i$ of weights of the completed jobs, if condition (12) holds, we propose to locate the jobs in the conflict set in the non-increasing order of their weights.

On the other hands, to check conditions (13) and (14), one must first determine the order of jobs in the conflict set $\{J_{k+1}, J_{k+2}, \dots, J_{k+r}\}$, e. g., as $(J_{k+1}, J_{k+2}, \dots, J_{k+r})$. Therefore, to check conditions (13) and (14), it may be needed to consider all $r!$ possible permutations of the conflicting jobs. In [20], it is noted that it is enough to check conditions (13) and (14) for only one permutation, and it is also shown how such permutations can be constructed (see the algorithm from [19]). The following procedures 1 and 2 are close to the algorithms described in [19] and are intended to constructing permutations to check the fulfillment of conditions (13) and (14), respectively. Procedure 1 (procedure 2) constructs a permutation such that condition (13) (condition (14), respectively) are most likely to be satisfied.

Procedure 1. Construction of the permutation of conflict jobs by checking condition (13).

Step 1: for each job J_i from the conflict set, test **if** inequality $a_{i,2} - b_{i,1} \geq 0$ holds **then** $J_i \in \pi_1$ **else** $J_i \in \pi_2$.

Step 2: construct the permutation π_1 as follows: **if** inequality $b_{i,1} \leq b_{j,1}$ holds **then** $\pi_1 = (\dots, J_i, \dots, J_j, \dots)$.

Step 3: construct the permutation π_2 as follows: **if** inequality $a_{i,2} \geq a_{j,2}$ holds **then** $\pi_2 = (\dots, J_i, \dots, J_j, \dots)$.

Procedure 2. Construction of the permutation of conflict jobs by checking condition (14).

Step 1: for each job J_i from the conflict set, test **if** inequality $a_{i,1} - b_{i,2} \geq 0$ holds **then** $J_i \in \pi_1$ **else** $J_i \in \pi_2$.

Step 2: construct the permutation π_1 as follows: **if** inequality $b_{i,2} \geq b_{j,2}$ holds **then** $\pi_1 = (\dots, J_i, \dots, J_j, \dots)$.

Step 3: construct the permutation π_2 as follows: **if** inequality $a_{i,1} \leq a_{j,1}$ holds **then** $\pi_2 = (\dots, J_i, \dots, J_j, \dots)$.

Note that if there exist several conflict sets in the job set $\mathfrak{J}_{1,2}$, one can check conditions (12)–(14) sequentially for each conflict set. Indeed, conditions (12)–(14) do not use the order of jobs from the set $\{J_{k+r+2}, \dots, J_{n_{1,2}}\}$. On the other hand, if the job set $\{J_1, J_2, \dots, J_k\}$ (the job set $\{J_{k+r+1}, \dots, J_{n_{1,2}}\}$, respectively) is empty, one cannot check condition (13) (condition (14), respectively).

One can consider the uncertain (interval) flow-shop problem $F2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}|C_{\max}$ with the job set $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{2,1}$. The partial binary relation $A_{\mathfrak{J}}^{2,1}$ determined on the set $\mathfrak{J}_{2,1}$ of the jobs may be introduced similar to definition 3.

Note that conditions of theorems 2–5, corollary 1, and conditions (5), (6) and inequalities (12)–(14) may be reformulated similarly. The conflict jobs $J_x \in \mathfrak{J}_{2,1}$ and $J_y \in \mathfrak{J}_{2,1}$ and a conflict set of jobs $\mathfrak{J}_x \subseteq \mathfrak{J}_{2,1}$ can be investigated similarly.

Note that theorems 2–5 and corollary 1 are proved for the uncertain (interval) flow-shop problem $F2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}|C_{\max}$, where all jobs have interval durations unknown before scheduling. If there exists a non-empty subset of the jobs with fixed durations known before scheduling, then the binary relation $A_{\mathfrak{J}}^{1,2}$ on the set $\mathfrak{J}_{1,2}$ may become different.

Scheduling algorithms

For scheduling jobs for a long period (e. g., for a month), we consider the uncertain (interval) two-machine job-shop scheduling problem $J2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, n_i \leq 2|C_{\max}, \sum w_i, \sum U_i$ with the following ordered criteria: minimising the makespan (it is a main criterion), maximising the sum $\sum w_i$ of job weights (the second criterion) and maximising the total number of the jobs $\sum U_i$ that are completed not later their due dates (the third criterion).

Each day, both employees have 8 working hours of 800 units of time. Each unit of time corresponds to 30 s (10 min for each hour is set aside for the rest). It is assumed that 20 new jobs are arrived every day. Some of

these jobs should be processed only by one of the employees (first or second), some jobs should be processed by the first employee and then by the second employee. The remaining jobs should be processed by the second employee and then by the first employee.

For every job, the lower bound a_{ij} and the upper bound b_{ij} , $0 < a_{ij} < b_{ij}$, of the operation processing times and the job weights w_i are determined before scheduling.

Due dates for all jobs are assumed to be equal to 800. The integer weight w_i from 1 to 5 is assigned to each job that determines the importance of this job. The set \mathfrak{S}_0 of jobs available at the beginning of the new working day is sorted in the non-increasing order of the weights of jobs. The set $\mathfrak{S}(d)$ of jobs that will be completed on that day are selected as long as the following inequality holds: $\sum_{J_i \in \mathfrak{S}_d} (a_{i,1} + a_{i,2}) \leq 2 \cdot 800$.

Based on the sufficient conditions presented in the previous sections, algorithm 1 has been developed, for constructing a daily pair of permutations of the selected jobs for both employees. As a result of executing algorithm 1, a pair of job permutations (π', π'') of the form $\left((\pi_{1,2}, \pi_1, \pi_{2,1}), (\pi_{2,1}, \pi_2, \pi_{1,2}) \right)$ will be constructed. First, we check sufficient conditions (2) and (3) and conditions of theorem 2 that the pair of job permutations (π', π'') is optimal for the individual deterministic scheduling problem $J2|p, m_i \leq 2|C_{\max}$ with any fixed scenario $p \in T$. If the pair of job permutations (π', π'') is not constructed, the binary relation $A_{\mathfrak{S}}^{1,2}$ on the set $\mathfrak{S}_{1,2}$ (the binary relation $A_{\mathfrak{S}}^{2,1}$ on the set $\mathfrak{S}_{2,1}$, respectively) must be constructed and conflict sets of jobs are identified. Then, conditions (12)–(14) must be checked to resolve the conflicts. We arrange jobs from the sets \mathfrak{S}_1 and \mathfrak{S}_2 , and in some cases jobs from the sets $\mathfrak{S}_{1,2}$ and $\mathfrak{S}_{2,1}$, in the non-increasing order of their weights to improve the value of the second criterion. The constructed pair of permutations (π', π'') may be optimal for all scenarios (with the proof of the optimality, if the above sufficient conditions hold), or the constructed pair of permutations (π', π'') may be optimal for the factual scenario but without the proof of the optimality, or the constructed pair of permutations (π', π'') is non-optimal for the makespan criterion.

Algorithm 1

Step 1: construct the permutation π_1 of jobs of the set \mathfrak{S}_1 and the permutation π_2 of jobs of the set \mathfrak{S}_2 .

Step 2: **if** the first inequality in (2) holds **then begin** to construct the permutation $\pi_{1,2}$ of jobs from the set $\mathfrak{S}_{1,2}$ **if** the second inequality in (2) holds **then** construct the permutation $\pi_{2,1}$ of jobs from the set $\mathfrak{S}_{2,1}$ **endif**.

Step 3: **if** the first inequality in (3) holds **then begin** to construct the permutation $\pi_{2,1}$ of jobs from the set $\mathfrak{S}_{2,1}$ **if** the second inequality in (3) holds **then** construct the permutation $\pi_{1,2}$ of jobs from the set $\mathfrak{S}_{1,2}$ **endif**.

Step 4: **if** both permutations $\pi_{1,2}$ and $\pi_{2,1}$ are constructed **then goto** step 13.

Step 5: **if** the permutation $\pi_{1,2}$ is constructed **then goto** step 12.

Step 6: **if** for jobs from the set $\mathfrak{S}_{1,2}$ conditions a) and b) hold **then** construct the permutation $\pi_{1,2} = (\pi_{1,2}^1, \mathfrak{S}_{1,2}^*, \pi_{1,2}^2)$, where $\pi_{1,2}^1$ is a permutation of jobs from the set $\mathfrak{S}_{1,2}^1$ located in the non-decreasing order of values $b_{i,1}$ and $\pi_{1,2}^2$ is a permutation of jobs from the set $\mathfrak{S}_{1,2}^2$ in the non-increasing order of the values $b_{i,2}$ **goto** step 11.

Step 7: construct binary relations $A_{\mathfrak{S}}^{1,2}$ over the set $\mathfrak{S}_{1,2}$ using conditions (5) and (6).

Step 8: select all conflict sets of jobs in the set $\mathfrak{S}_{1,2}$.

Step 9: **for** each conflict set of jobs **do if** condition (12) holds **then** construct the permutation of the conflict jobs **else begin** to implement procedure 1 and construct the permutation (π_1, π_2) **if** condition (13) does not hold **then begin** to implement procedure 2 and construct the permutation (π_2, π_1) ; **if** condition (14) does not hold **then** construct a Johnson's permutation for the conflict jobs for their processing times $p_{ij} = \frac{a_{ij} + b_{ij}}{2}$ **endif, endif, enddo, endfor**.

Step 10: construct a permutation $\pi_{1,2}$ generated by the linear order $A_{\mathfrak{S}}^{1,2}$ with permutations obtained in step 9 for jobs from the conflict sets.

Step 11: **if** the permutation $\pi_{2,1}$ is constructed **then goto** step 13.

Step 12: repeat steps 6–11 by replacing the set $\mathfrak{S}_{1,2}$ by the set $\mathfrak{S}_{2,1}$, the machine M_1 by the machine M_2 , the strict order $A_{\mathfrak{S}}^{1,2}$ by the strict order $A_{\mathfrak{S}}^{2,1}$, and *vice versa*.

Step 13: construct pair of permutations $(\pi', \pi'') = \left((\pi_{1,2}, \pi_1, \pi_{2,1}), (\pi_{2,1}, \pi_2, \pi_{1,2}) \right)$.

Note that steps 2 and 3 take $O(\max\{n_{1,2}, n_{2,1}\})$ time. Step 6 takes $O(n_{1,2} \log n_{1,2})$ time. The construction of a binary relation at step 7 is based on comparing no more than $n_{1,2}(n_{1,2} - 1)$ pairs of jobs from the set $\mathfrak{S}_{1,2}$, which takes no more than $O(n_{1,2}(n_{1,2} - 1))$ time. Checking conditions (12)–(14) at step 9 requires $O(r)$ time, where the conflict set contains r jobs. Constructing a permutation of r jobs (procedures 1 and 2) takes $O(r \log r)$ time. Therefore, the total complexity of step 9 is $O(r \log r)$. Since step 7 is performed at most once per set $\mathfrak{S}_{1,2}$ and per set $\mathfrak{S}_{2,1}$, we conclude that the complexity of algorithm 1 is $O(n^2)$.

The jobs are processed respecting to the constructed permutations (π', π'') until the beginning the next job does not go beyond the working hours for each employee.

For the uncertain (interval) job-shop problem $J2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, n_i \leq 2|C_{\max}, \sum w_i, \sum U_i$ with ordered criteria $C_{\max}, \sum w_i$ and $\sum U_i$, one calculates the values of criteria $C_{\max}(d), \sum w_i(d)$ and $\sum U_i(d)$ per day d . After a schedule realisation, the actual durations p_{ij}^* of all the operations become known. From that time, it becomes possible to determine the optimal Jackson's pair of permutations and calculate the factual values of criteria $\sum w_i^*(d)$ and $\sum U_i^*(d)$ per day d . Relative errors of the constructed schedules respecting to the factually optimal schedules are calculated as follows:

$$\Delta C_{\max}(d) = \frac{C_{\max}(d) - C_{\max}^*(d)}{C_{\max}^*(d)}, \quad \Delta \sum w_i(d) = \frac{\sum w_i(d) - \sum w_i^*(d)}{\sum w_i^*(d)}, \quad \Delta \sum U_i(d) = \frac{\sum U_i(d) - \sum U_i^*(d)}{\sum U_i^*(d)}.$$

All jobs that were not selected, as well as jobs that were not completed during the working day are available for processing next day. New 20 jobs will be added to them.

Computational experiments and results

We next describe the conducted computational experiments and discuss the computational results obtained for randomly generated instances of the uncertain job-shop problem $J2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, n_i \leq 2|C_{\max}$. The following algorithm was used in the experiments.

Algorithm 2 for computational experiments

Input: job set $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2 \cup \mathfrak{S}_{1,2} \cup \mathfrak{S}_{2,1}$. Lower bound a_{ij} and upper bound $b_{ij}, 0 < a_{ij} < b_{ij}$, of feasible durations of operations O_{ij} for jobs $J_i \in \mathfrak{S}$ and machines $M_j \in M$.

Output: conclusion that the problem $J2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, n_i \leq 2|C_{\max}$ was solved either exactly or heuristically.

Total number of conflict sets and number of properly resolved conflict sets.

Step 1: set $a = 0, b = 0, c = 0, cs = 0$.

Step 2: if the first inequality in (2) holds **then begin** $a := a + 1$ **if** the second inequality in (2) holds **then** $b := b + 1$ **endif**.

Step 3: if the first inequality in (3) holds **then begin** $b := b + 1$; **if** the second inequality in (3) holds **then** $a := a + 1$ **endif**.

Step 4: if $a \geq 1$ and $b \geq 1$ **then goto** step 17.

Step 5: if $a \geq 1$ **then goto** step 14.

Step 6: if for jobs from the set $\mathfrak{S}_{1,2}$ conditions $a)$ and $b)$ hold, **then begin** $a := a + 1$ **goto** step 13 **endif**.

Step 7: construct binary relations $A_{ij}^{1,2}$ over the set $\mathfrak{S}_{1,2}$ using conditions (5) and (6).

Step 8: select all conflict sets of jobs in the set $\mathfrak{S}_{1,2}$.

Step 9: set number of conflict sets $nc = 0$ and $n = 0$.

Step 10: for each conflict set of jobs **if** condition (12) holds **then** $n := n + 1$ **else** implement procedure 1 for constructing the permutation (π_1, π_2) **if** condition (13) holds **then** $n := n + 1$ **else** implement procedure 2 for constructing the permutation (π_2, π_1) **if** condition (14) holds **then** $n := n + 1$ **endif, endif, endif, endfor**.

Step 11: set $c := c + n; cs := cs + nc$.

Step 12: if $n = n_c$ **then** $a := a + 1$.

Step 13: if $b \geq 1$ **then goto** step 17.

Step 14: perform steps 6–12 by replacing the set $\mathfrak{S}_{1,2}$ by the set $\mathfrak{S}_{2,1}$, machine M_1 by machine M_2 , the strict order $A_{ij}^{1,2}$ by strict order $A_{ij}^{2,1}$, a by b , and *vice versa*.

Step 15: if $a \geq 1$ and $b \geq 1$ **then goto** step 17.

Step 16: stop. «The problem is solved heuristically; total number of conflict sets c », «number of properly resolved conflict sets cs ».

Step 17: stop. «The problem is solved exactly; total number of conflict sets c », «number of properly resolved conflict sets cs ».

Algorithm 2 is polynomial in the number n of jobs and its asymptotic complexity is $O(n^2)$. All developed algorithms were coded in C# and tested on a personal computer with Intel Core i7-7700™ 4 Quad, 3.6 GHz, and 32.00 GB RAM. In the computational experiments, we tested series of randomly generated instances for the 1000-day period. Generated instance for every day consisted of 20 jobs.

The generation of lower bounds a_{ij} and upper bounds b_{ij} for possible values of the durations p_{ij} of the operations O_{ij} , $p_{ij} \in [a_{ij}, b_{ij}]$, was organised as follows. A value of the lower bound a_{ij} was randomly chosen from the segment $[10, 1000]$ using the uniform distribution. With the given value of the maximum relative length δ of a segment of possible durations of the operations O_{ij} , the upper bound b_{ij} was calculated using the following equality: $b_{ij} = a_{ij} \left(1 + \frac{\delta}{100}\right)$. A maximum relative length δ of the segment of possible durations of operations O_{ij} was equal to the following values: 5 %, 10 %, 11 %, 12 %, 13 %, 14 %, 15 %, 16 %, 17 %, 18 %, 19 %, 20 %, 30 %, 40 %, 50 %. The bounds a_{ij} and b_{ij} were decimal fractions with the maximum possible number of digits after the decimal point.

Based on remark, for instances of the problem $J2 | a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, n_i \leq 2 | C_{max}$, a strict inequality $a_{ij} < b_{ij}$ was guaranteed for each job $J_i \in \mathfrak{J}$ and each machine $M_j \in M$. We tested 9 classes of the randomly generated instances of the problem $J2 | a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, n_i \leq 2 | C_{max}$ with different ratios between values $n_1 : n_2 : n_{1,2} : n_{2,1}$ of jobs in the subsets $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_{1,2}, \mathfrak{J}_{2,1}$ of the set \mathfrak{J} . The computational results are presented in the following table.

Computational results for the randomly generated instances

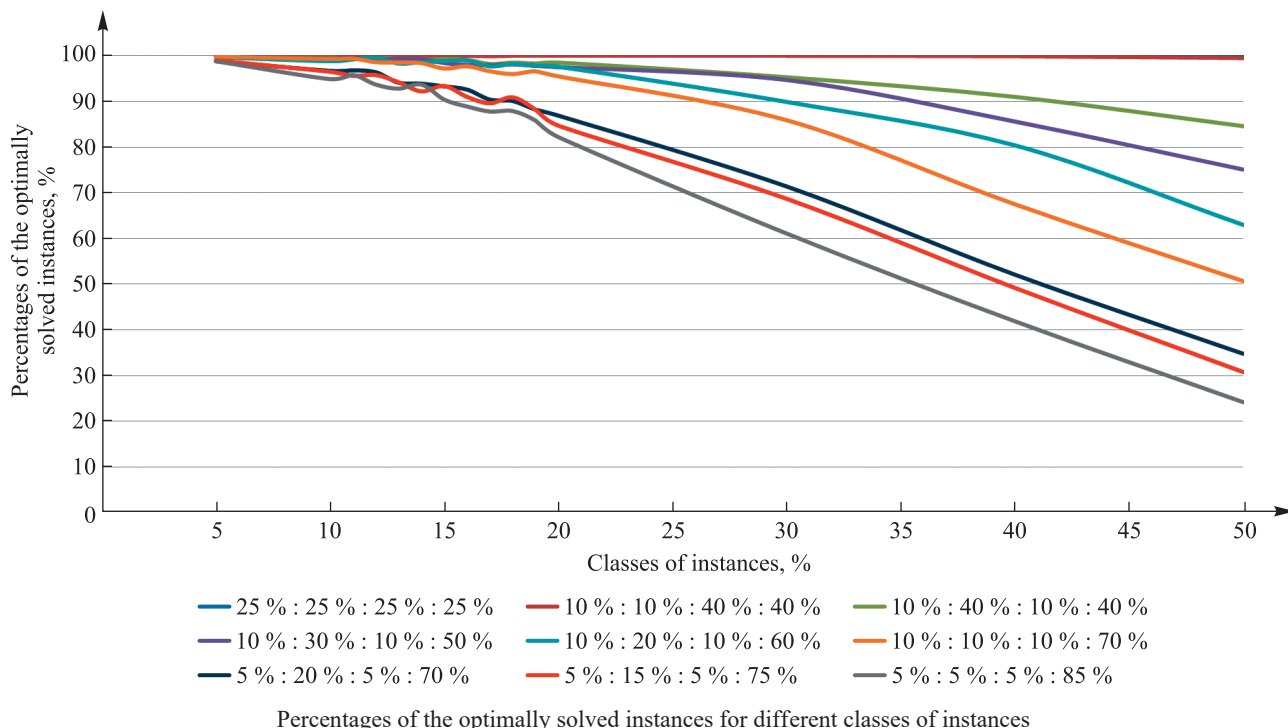
Class of the tested instances	δ														
	5 %	10 %	11 %	12 %	13 %	14 %	15 %	16 %	17 %	18 %	19 %	20 %	30 %	40 %	50 %
$n_1 : n_2 : n_{1,2} : n_{2,1} = 25 \% : 25 \% : 25 \% : 25 \%$															
Solved tests, %	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
Conflict sets	6	19	22	25	28	22	35	35	53	51	60	70	139	250	339
Solved conflicts	6	19	22	25	28	22	35	35	53	51	60	70	139	250	339
Solved conflicts, %	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
$n_1 : n_2 : n_{1,2} : n_{2,1} = 10 \% : 10 \% : 40 \% : 40 \%$															
Solved tests, %	100	100	100	100	100	100	100	100	99.9	100	100	100	100	99.9	99.5
Conflict sets	235	531	567	645	692	743	811	807	851	952	992	1032	1341	1450	1424
Solved conflicts	235	531	567	645	692	743	811	807	850	952	992	1032	1341	1449	1419
Solved conflicts, %	100	100	100	100	100	100	100	100	99.88	100	100	100	100	99.93	99.65
$n_1 : n_2 : n_{1,2} : n_{2,1} = 10 \% : 40 \% : 10 \% : 40 \%$															
Solved tests, %	99.7	99.6	99.3	99.5	99.3	99	99.3	99.1	98.2	98.5	98.3	98.5	95.3	91	84.6
Conflict sets	466	830	884	887	1002	1008	1057	1116	1166	1166	1176	1244	1433	1467	1501
Solved conflicts	463	826	877	882	995	998	1049	1107	1148	1151	1158	1229	1385	1375	1345
Solved conflicts, %	99.36	99.52	99.21	99.44	99.30	99.01	99.24	99.19	98.46	98.71	98.47	98.79	96.65	93.73	89.61
$n_1 : n_2 : n_{1,2} : n_{2,1} = 10 \% : 30 \% : 10 \% : 50 \%$															
Solved tests, %	99.9	99.4	99.5	99.2	99.3	99.3	98.4	98	97.9	98.1	97.8	97.5	94.7	85.6	75.1
Conflict sets	767	1232	1235	1361	1399	1436	1489	1596	1623	1627	1638	1680	1762	1770	1724

Ending of the table

Class of the tested instances	δ														
	5 %	10 %	11 %	12 %	13 %	14 %	15 %	16 %	17 %	18 %	19 %	20 %	30 %	40 %	50 %
Solved conflicts	766	1226	1230	1351	1392	1429	1472	1576	1601	1608	1615	1653	1709	1622	1468
Solved conflicts, %	99.87	99.51	99.60	99.27	99.50	99.51	98.86	98.75	98.64	98.83	98.60	98.39	96.99	91.64	85.15
$n_1 : n_2 : n_{1,2} : n_{2,1} = 10 \% : 20 \% : 10 \% : 60 \%$															
Solved tests, %	99.7	98.8	99.2	99.6	98.3	98.6	98.8	99	97.7	98.2	97.8	97.6	89.9	80.4	63
Conflict sets	1034	1601	1653	1758	1829	1880	1904	1949	2013	2054	2012	1984	2113	1968	1845
Solved conflicts	1031	1588	1645	1754	1812	1865	1891	1939	1990	2035	1989	1959	2010	1770	1471
Solved conflicts, %	99.71	99.19	99.52	99.77	99.07	99.20	99.32	99.49	98.86	99.07	98.86	98.74	95.13	89.94	79.73
$n_1 : n_2 : n_{1,2} : n_{2,1} = 10 \% : 10 \% : 10 \% : 70 \%$															
Solved tests, %	99.8	99.3	99.4	98.6	98.5	98.4	97.2	97.7	96.6	96	96.6	95.5	85.9	67.5	50.7
Conflict sets	1432	1988	2043	2156	2192	2234	2273	2306	2324	2342	2376	2345	2222	2119	1952
Solved conflicts	1430	1981	2035	2142	2176	2218	2245	2283	2289	2301	2338	2299	2080	1786	1447
Solved conflicts, %	99.86	99.65	99.61	99.35	99.27	99.28	98.77	99.00	98.49	98.25	98.40	98.04	93.61	84.29	74.13
$n_1 : n_2 : n_{1,2} : n_{2,1} = 5 \% : 20 \% : 5 \% : 70 \%$															
Solved tests, %	98.8	96.7	96.8	96.4	94.1	93.9	93.3	92.6	90.4	90.1	88.2	86.9	71.4	52.1	34.8
Conflict sets	1353	1993	2119	2165	2210	2247	2325	2337	2263	2355	2286	2343	2210	2091	1941
Solved conflicts	1340	1959	2081	2126	2147	2182	2257	2261	2164	2252	2164	2206	1909	1591	1268
Solved conflicts, %	99.04	98.29	98.21	98.20	97.15	97.11	97.08	96.75	95.63	95.63	94.66	94.15	86.38	76.09	65.33
$n_1 : n_2 : n_{1,2} : n_{2,1} = 5 \% : 15 \% : 5 \% : 75 \%$															
Solved tests, %	99	96.5	95.6	95.8	94.2	92.2	93.4	91	89.6	90.9	88.2	84.7	68.7	49.2	30.8
Conflict sets	1475	2242	2330	2354	2411	2360	2450	2532	2489	2516	2580	2514	2340	2103	1952
Solved conflicts	1465	2207	2285	2309	2352	2278	2381	2436	2377	2419	2456	2351	2014	1577	1244
Solved conflicts, %	99.32	98.44	98.07	98.09	97.55	96.53	97.18	96.21	95.50	96.14	95.19	93.52	86.07	74.99	63.73
$n_1 : n_2 : n_{1,2} : n_{2,1} = 5 \% : 5 \% : 5 \% : 85 \%$															
Solved tests, %	98.8	94.9	95.8	93.7	92.8	93.7	90.4	88.9	87.8	87.9	85.8	82.2	61.1	41.9	24.2
Conflict sets	1896	2585	2627	2688	2714	2810	2763	2766	2827	2808	2791	2777	2532	2220	2063
Solved conflicts	1883	2532	2583	2623	2638	2743	2658	2647	2701	2681	2641	2591	2111	1599	1272
Solved conflicts, %	99.31	97.95	98.33	97.58	97.20	97.62	96.20	95.70	95.54	95.48	94.63	93.30	83.37	72.03	61.66

For each class of the tested instances and for a fixed value of the maximum relative length δ , the computational results are presented in four rows. The row «Solved tests, %» determines the percentage of days from the 1000-day period when the pair (π', π'') of the job permutations constructed using algorithm 2 for a daily schedule was optimal for all possible scenarios $p \in T$ for the generated uncertain problem $J2 | a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, n_i \leq 2 | C_{\max}$.

The row «Conflict sets» presents a total number of conflict sets of the jobs in the partial strict orders $A_{\Sigma}^{1,2}$ on the job sets $\Sigma_{1,2}$ and partial strict orders $A_{\Sigma}^{2,1}$ on the job sets $\Sigma_{2,1}$ constructed by algorithm 2 for 1000 days. The row «Solved conflicts» is equal to the total number of cases, where algorithm 2 constructed the permutation of all jobs from the conflict set, which was optimal for all possible scenarios $p \in T$. Note, the instance may have more than one conflict set, and failure to resolve even one of them leads to unoptimality of the entire instance. The row «Solved conflicts, %» presents a percentage of the ratio of solved conflicts to the total number of conflict sets in 1000-day series. Average percentages of the instances solved optimally by algorithm 2 are presented in figure.



From figure, one can conclude that if value δ does not exceed 20 %, algorithm 2 found the optimal permutation in more than 90 % of tested instances. As δ increases, this value begins to fall. At $\delta = 50$ % for some classes, the number of optimally solved instances is more than 20 %. For some classes of problems (25 % : 25 % : 25 % : 25 % and 10 % : 10 % : 40 % : 40 %) algorithm 2 optimally solved all tested examples for all relative errors δ .

Conclusions

We investigated the uncertain problems of constructing schedules for the execution of selected jobs by two performers. Only the lower bound a_{ij} and the upper bound b_{ij} for durations of any job $J_i \in \mathfrak{J}$ were known before scheduling. We proved theorem 2 for necessary and sufficient conditions for the existing optimal schedules for two performers and theorems 3 and 5 for sufficient conditions for the existing dominant set of schedules with a fixed order of two jobs. For the existing dominant set of schedules with fixed orders for job pairs, the binary relation was constructed. It was proven that this binary relation is a strict order (theorem 4).

Based on the proven results, efficient algorithms were developed for solving the uncertain job-shop problem $J2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, n_i \leq 2|C_{\max}$ either exactly or heuristically. For testing the effectiveness of the developed algorithms for time-management, the computational experiments were conducted for evaluation of a 1000-day period for drawing up daily schedules for two performers. Every day, 20 jobs were received for the execution. For planning jobs for a day, the uncertain job-shop problem $J2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, n_i \leq 2|C_{\max}$ was solved. The job-shop problem $J2|a_{ij} \leq p_{ij} \leq b_{ij}, n_i \leq 2|C_{\max}, \sum w_i, \sum U_i$ was solved for time-management during a month. In the uncertain scheduling problem, three criteria $C_{\max}, \sum w_i$ and $\sum U_i$ were optimised in the fixed priority order. Minimisation of the schedule length C_{\max} was a main criterion, maximisation of the $\sum w_i$ was a second criterion, and maximisation of the $\sum U_i$ was a third criterion. A personal computer was used for selecting important jobs for two performers and drawing up optimal schedules for their implementation.

The computational experiments conducted on randomly generated uncertain scheduling problems showed that the use of the job permutations constructed by the developed algorithms provided optimal schedules in more than 90 % tested cases (20 % tested cases, respectively) if a maximum relative length of job duration segments $[a_{ij}, b_{ij}]$ does not exceed 20 % (50 %, respectively).

A promising research direction may be connected with the application of the mixed graph colouring method [23] to scheduling personal jobs in the time-management framework. One can assume that the scheduling problems arising in the time-management have equal processing times of the operations since breaks are needed for people after approximately equal times of the activity.

References

1. Zerubavel E. The Benedictine ethic and the modern spirit of scheduling: on schedules and social organization. *Sociological Inquiry*. 1980;50(2):157–169. DOI: 10.1111/j.1475-682X.1980.tb00383.x.
2. Eilon S. Time-management. *Omega*. 1993;21(3):255–259. DOI: 10.1016/0305-0483(93)90084-X.
3. Reed WJ. The Pareto, Zipf and other power laws. *Economics Letters*. 2001;74(1):15–19. DOI: 10.1016/S0165-1765(01)00524-9.
4. Rastogi P. Management musings. *Colourage*. 2009;56(1):58–62.
5. Ho B. Time management of final year undergraduate English projects: supervisees' and the supervisor's coping strategies. *System*. 2003;31(2):231–245. DOI: 10.1016/S0346-251X(03)00022-8.
6. Indreica ES, Cazan AM, Truta C. Effects of learning styles and time management on academic achievement. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*. 2011;30:1096–1102. DOI: 10.1016/j.sbspro.2011.10.214.
7. Kaya H, Kaya N, Pallos AO, Kucuk L. Assessing time-management skills in terms of age, gender and anxiety levels: a study of nursing and midwifery students in Turkey. *Nurse Education in Practice*. 2012;12(5):284–288. DOI: 10.1016/j.nepr.2012.06.002.
8. Zampetakis LA, Bouranta N, Moustakis VS. On the relationship between individual creativity and time management. *Thinking Skills and Creativity*. 2010;5(1):23–32. DOI: 10.1016/j.tsc.2009.12.001.
9. Jackson VP. Time management: a realistic approach. *Journal of the American College of Radiology*. 2009;6(6):434–436. DOI: 10.1016/j.jacr.2008.11.018.
10. Konig CJ, Oberacher L, Kleinmann M. Personal and situational determinants of multitasking at work. *Journal of Personnel Psychology*. 2010;9(2):99–103. DOI: 10.1027/1866-5888/a000008.
11. Sherwood BJ. Personal time-management allows you to work smarter with less effort. *Sherwood on Management*. 2005;July – August:44–45.
12. Ahmad NL, Yusuf ANM, Shobri NDM, Wahab S. The relationship between time management and job performance in event management. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*. 2012;65:937–941. DOI: 10.1016/j.sbspro.2012.11.223.
13. Macan T, Gibson JM, Cunningham J. Will you remember to read this article later when you have time? The relationship between prospective memory and time management. *Personality and Individual Differences*. 2010;48(6):725–730. DOI: 10.1016/j.paid.2010.01.015.
14. Claessens BJC, van Eerde W, Rutte CG, Roe RA. A review of the time management literature. *Personnel Review*. 2007;36(2):255–276. DOI: 10.1108/00483480710726136.
15. Sotskov YuN, Egorova NG, Matsveichuk NM. Algorithms for planning working time under interval uncertainty. *Informatics*. 2020;17(2):86–102. Russian. DOI: 10.37661/1816-0301-2020-17-2-86-102.
16. Waterworth S. Time management strategies in nursing practice. *Journal of Advanced Nursing*. 2003;43(5):432–440. DOI: 10.1046/j.1365-2648.2003.02740.x.
17. Tanaev VS, Sotskov YN, Strusevich VA. *Scheduling theory: multi-stage systems*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers; 1994. 406 p.
18. Graham RL, Lawler EL, Lenstra JK, Rinnooy Kan AHG. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey. *Annals of Discrete Mathematics*. 1979;5:287–326. DOI: 10.1016/S0167-5060(08)70356-X.
19. Sotskov YN, Matsveichuk NM, Hatsura VD. Two-machine job-shop scheduling problem to minimize the makespan with uncertain job durations. *Algorithms*. 2020;13(1):4. DOI: 10.3390/a13010004.
20. Ng CT, Matsveichuk NM, Sotskov YN, Cheng TCE. Two-machine flow-shop minimum-length scheduling with interval processing times. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*. 2009;26(6):587–604. DOI: 10.1142/S0217595909002432.
21. Matsveichuk NM, Sotskov YN, Werner F. The dominance digraph as a solution to the two-machine flow-shop problem with interval processing times. *Optimization*. 2011;60(12):1493–1517. DOI: 10.1080/02331931003657691.
22. Jackson JR. An extension of Johnson's results on job lot scheduling. *Naval Research Logistics Quarterly*. 1956;3(3):201–203. DOI: 10.1002/nav.3800030307.
23. Sotskov YuN. Mixed graph colouring as scheduling multiprocessor tasks with equal processing times. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2021;2:67–81. DOI: 10.33581/25206508202126781.

Received 12.04.2024 / revised 04.07.2024 / accepted 04.07.2024.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

УДК 004.032.26:004.056.55

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ПРОТОКОЛЕ СОГЛАСОВАНИЯ КРИПТОГРАФИЧЕСКИХ КЛЮЧЕЙ НА ОСНОВЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

П. П. УРБАНОВИЧ^{1), 2)}, Н. П. ШУТЬКО¹⁾

¹⁾Белорусский государственный технологический университет,
ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Беларусь

²⁾Люблинский католический университет им. Иоанна Павла II,
ал. Рацлавицке, 14, 20-950, г. Люблин, Польша

Аннотация. Проанализированы особенности структурной и функциональной организации двух взаимодействующих нейронных сетей на основе известной архитектуры в виде древовидной машины четности (ДМЧ) при использовании алгебр действительных и гиперкомплексных чисел. Такие машины применяются как альтернатива алгоритму Диффи – Хеллмана для генерации двумя абонентами общего тайного криптографического ключа.

Образец цитирования:

Урбанович ПП, Шутько НП. Использование гиперкомплексных чисел в протоколе согласования криптографических ключей на основе нейронных сетей. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;2:81–92 (на англ.).
EDN: MIPTIK

For citation:

Urbanovich PP, Shutko NP. Usage of hypercomplex numbers in a cryptographic key agreement protocol based on neural networks. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;2:81–92.
EDN: MIPTIK

Авторы:

Павел Павлович Урбанович – доктор технических наук, профессор; профессор кафедры информационных систем и технологий факультета информационных технологий¹⁾, приглашенный профессор²⁾.

Надежда Павловна Шутько – кандидат технических наук, доцент; доцент кафедры информатики и веб-дизайна факультета информационных технологий.

Authors:

Pavel P. Urbanovich, doctor of science (engineering), full professor; professor at the department of information systems and technologies, faculty of information technologies^a, and visiting professor^b.

p.urbanovich@belstu.by

<https://orcid.org/0000-0003-2825-4777>

Nadzeya P. Shutko, PhD (engineering), docent; associate professor at the department of informatics and web-design, faculty of information technologies.

shutko_bstu@mail.ru

<https://orcid.org/0009-0003-6409-6099>

Рассмотрены основные элементы математических моделей ДМЧ, функционирующих на базе перечисленных алгебр. Описаны особенности программной реализации симулятора системы на основе взаимодействующих ДМЧ, а также представлены результаты использования разработанного инструментального средства для анализа динамики процессов в рассматриваемой системе. Взаимное обучение и обмен данными выполнены для двух ДМЧ на основе протокола управления передачей данных и межсетевое протокола (TCP/IP). Наступление состояния синхронизации сетей определяется равенством хешей, которые каждая из сторон вычисляет на базе алгоритма безопасного хеширования. Хеши размером 512 бит генерируются преобразованием строкового представления текущего входного вектора весов нейронов. Приведена оценка устойчивости процесса синхронизации ДМЧ к геометрическим атакам третьей стороны.

Ключевые слова: нейрокриптография; древовидные машины четности; гиперкомплексные числа; взаимное обучение сетей.

Благодарность. Авторы выражают благодарность директору Института математики, информатики и ландшафтного дизайна Люблинского католического университета имени Иоанна Павла II доктору наук М. Плонковскому за предоставленную им информацию, которая позволила улучшить содержание статьи.

USAGE OF HYPERCOMPLEX NUMBERS IN A CRYPTOGRAPHIC KEY AGREEMENT PROTOCOL BASED ON NEURAL NETWORKS

P. P. URBANOVICH^{a, b}, N. P. SHUTKO^a

^aBelarusian State Technological University, 13a Svyardlova Street, Minsk 220006, Belarus

^bThe John Paul II Catholic University of Lublin, 14 Raclawickie Alley, Lublin 20-950, Poland

Corresponding author: P. P. Urbanovich (p.urbanovich@belstu.by)

Abstract. We analyse the features of the structural and functional organisation of two interacting neural networks based on the known architecture in the form of a tree parity machine (TPM) using algebras of real and hypercomplex numbers. Such machines are used as an alternative to the Diffie – Hellman algorithm to generate a shared secret cryptographic key between two parties. The main elements of mathematical models of TPMs, operating on the basis of the listed algebras, are considered. The features of the software implementation of a system simulator based on interacting TPMs are described, and the results of using the developed tool for analysing the dynamics of processes in the system under consideration are presented. Mutual learning and data exchange of two TPMs are realised based on the transmission control and Internet protocols (TCP/IP). The synchronisation state of the networks is determined by the equality of the hashes that each party calculates based on the secure hash algorithm. A hash size of 512 bits are generated by transforming the string representation of the current input vector of neuron weights. The effectiveness of possible attempts by a third party to synchronise with two legitimate TPMs operating on the basis of algebras of hypercomplex numbers is assessed.

Keywords: neural cryptography; tree parity machines; hypercomplex numbers; networks mutual learning.

Acknowledgements. The authors express their gratitude to the director of the Institute of Mathematics, Computer Science and Landscape Design of the John Paul II Catholic University of Lublin doctor of science M. Plonkowski for the help and information provided, which contributed to the improvement of the article content.

Introduction

Two major problems associated with symmetric cryptography (storage and transport or agreement of keys secret to a third party) stimulated the search for a new solution. A solution was found in the form of the famous Diffie – Hellman (D-H) algorithm, which laid the foundation for public key cryptosystems [1]. But the mentioned protocol, when used to agree on a shared secret key between two users, **A** and **B**, also has weaknesses associated with certain types of attacks. As an alternative to the D-H-protocol, I. Kanter and W. Kinzel in 2002 proposed solving the problem of generating and transmitting a shared key using two interacting neural networks (NNs), called a tree parity machine (TPM) [2]. Mutual learning of networks means that the synaptic weights of two TPMs (**A** and **B**: W^A and W^B) adapt to input (output) pairs according to certain rules. After the mutual learning procedure, the networks form identical sets of weight parameters, which are accepted as a joint secret key.

However, as it turned out, when implementing the networks based on two TPMs, there is a multiplicity of approaches, solutions and problems. All this is considered and analysed in an increasing stream of publications, the subject area of which combines cryptography and NNs – neural cryptography [3–9] – a relatively new scientific direction, the name of which probably first appeared in paper [10], dedicated to the cryptanalysis of data encryption standard (DES).

TPM is a one-way three-layer network, the architecture of which is described by two parameters (fig. 1): the number of neurons in the hidden layer (at level 2) K ($K \in \mathbb{N}$), and the number of input signals for each neuron N ($N \in \mathbb{N}$) [2–9; 11–13]. Each hidden unit works as a perceptron with independent receptive fields, including N input neurons and one output neuron.

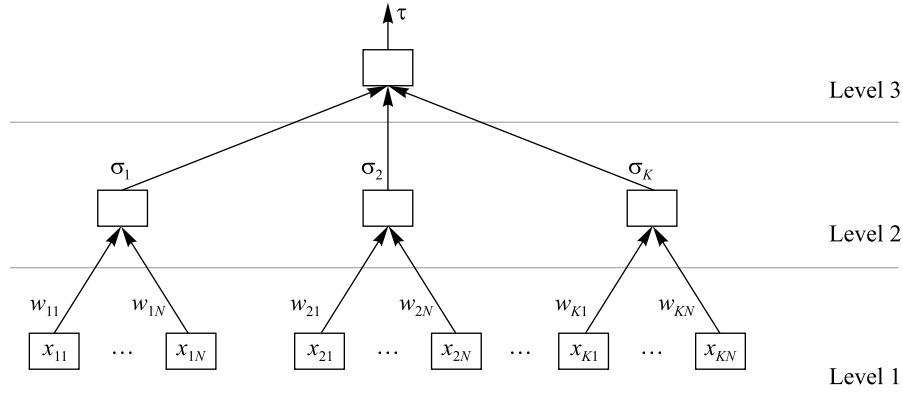


Fig. 1. TPM network architecture

At each step t of mutual learning, two TPMs, **A** and **B**, use a common input vector $\mathbf{X} = \{x_{uv}\}$ ($1 \leq u \leq K$ and $1 \leq v \leq N$; $\mathbf{X} \in \{-1, 1\}^{KN}$) and change (or not change) the eigenvector of weights $\mathbf{W} = \{w_{uv}\}$ ($w_{uv} \in \{-L, -L+1, \dots, L\}$) in accordance with certain learning rules after exchanging the output signals (parameters) generated at this step: $\tau^{\mathbf{A}}$ and $\tau^{\mathbf{B}}$, or $\tau^{\mathbf{A/B}}$; $\tau^{\mathbf{A/B}} \in \{-1, 1\}$ and calculated in accordance with the formula

$$\tau = \prod_{u=1}^K \sigma_u, \quad (1)$$

where $\sigma_u \in \{-1, 1\}$ and

$$\sigma_u = \text{sign}(\alpha_u) = \text{sign}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \sum_{v=1}^N w_{uv} x_{uv}\right), \quad (2)$$

taking into account that when $\alpha_u = 0$ the function $\text{sign}(\alpha_u)$ can take one of two values: -1 or $+1$ (in accordance with the accepted rule for training TPMs); in [5] a similar signum function is called «modified signum function».

The used rules and the duration of TPM synchronisation to obtain the same vector of weights ($\mathbf{W}^{\mathbf{A}} = \mathbf{W}^{\mathbf{B}}$) influence the security of this process, due to the possibility of implementing various types of attacks from the third network (**E**) with a similar architecture. The goal of such attacks is to synchronise the weights of the attacking network ($\mathbf{W}^{\mathbf{E}}$) with the weights of one of the legitimate parties of the system (for example, network **A**) [3; 5; 6; 11–17] to ultimately obtain the secret key generated by networks **A** and **B**.

The fundamental model of the TPM is based on the use of the algebra of real integers. At the same time, when solving a number of applied problems, various extensions of real numbers are used – hypercomplex numbers, which make it possible to describe the position of a point in a multidimensional space based on operations on the vectors [18]. As is known, the simplest examples of hypercomplex numbers are imaginary and double numbers, as well as quaternions. All arithmetic operations are performed on these numbers, on the basis of which the TPM model is created. Taking this circumstance into account, in [5; 6; 12] the usage of complex and double complex numbers was justified and analysed to quantitatively determine the parameters of the network synchronisation process based on the TPM architecture. Such architectures are called a tree parity complex machine (TPCM) and TP split-complex machine (TPSCM). In [19] the usage of quaternions (TP quaternion machine (TPQM)) is analysed. The TPM architecture based on complex numbers in [20] is called complex-valued TPM (CVTPM), and the architecture based on quaternions in [21] is called quaternion-valued TPM (QVTPM).

The definitions of the signum function for TPCM and TPQM are justified and described in [5; 19–21].

There is a number of applied tasks that are solved based on NNs using octonion algebra [22–24]. Many properties of octonions are similar to the properties of quaternions and complex numbers. But there is one significant difference between these systems: while the multiplication of complex numbers and quaternions has an associative property, this law does not hold for the multiplication of octonions. If we apply a weakened version of the associativity of multiplication [18, p. 45], then octonions can also be used to TPM modelling.

Similarity of the formal representation of hypercomplex numbers is presented in the form of expression

$$a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + \dots + a_b i_b, \quad (3)$$

where a_0, a_1, \dots, a_b are arbitrary real numbers; i_1, i_2, \dots, i_b are imaginary units and $b \in \mathbb{N}$, as well as the commonality of mathematical operations on complex numbers ($b = 1$), quaternions ($b = 3$) and octonions ($b = 7$), make it possible to supplement the known TPCM and TPQM models with the TP octonion machine (TPOM) model based on a common methodological position.

The presented paper describes the TPOM model, obtained on the basis of a generalisation of the known results of using hypercomplex numbers for modelling a system of two TPMs, and also presents new results regarding the simulation of the TPMs interaction based on hypercomplex numbers and the transmission control and Internet protocols (TCP/IP protocol).

Materials and research methods

Some features of the TPM models development based on hypercomplex numbers. The TPM architecture, operating on the basis of a hypercomplex system of dimension $(b + 1)$ in accordance with (3), is similar to the architecture based on real numbers (see fig. 1). The changes are related to the methods for applying the learning rule for networks **A** and **B** and the signum function modifying. These changes are due to the fact that all parameters of the network model (input and output quantities on fig. 1) are complex numbers (two-dimensional system), quaternions (four-dimensional, R^4) and octonions (eight-dimensional, R^8). The indicated dimensions correspond to the number of parts (1 – real plus b – imaginary) in the input vector \mathbf{X} , the values of the weight vector \mathbf{W} , the hidden layer neuron output σ and the network output τ .

For example, when using the complex number C (we will represent the number C in the canonical form, slightly modifying (3): $C = a_0 + ia_1$) the perceptrons input consists of K N -element vectors $\mathbf{X}_C = \{x_{u1}, x_{u2}, \dots, x_{uN}\}_C$:

$$(x_{uv})_C = \left[(a_0)_{x,uv} + i(a_1)_{x,uv} \right]_C,$$

often identified with a single KN -element vector $\mathbf{X}_C = \{x_1, x_2, \dots, x_{KN}\}_C$ of tetravalent complex numbers chosen from the set $\{(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)\}$. And elements of the levels 1 and 2 (see fig. 1) are perceptrons having N -element weights $\mathbf{W}_C = \{w_{u1}, w_{u2}, \dots, w_{uN}\}_C$:

$$(w_{uv})_C = \left[(a_0)_{w,uv} + i(a_1)_{w,uv} \right]_C,$$

where $1 \leq u \leq K$; $(a_0)_{w,uv}, (a_1)_{w,uv} \in \{-L, L + 1, \dots, L - 1, L\}$. These elements are limited by the range $[-L, L] \times [-L, L]$ or $[-L, L]^2$, which is a natural extension of the $[-L, L]$ -range associated with classical TPM.

Following the above reasoning, we can write down the remaining mathematical expressions that fully describe the architecture of the TPCM, as well as the modification of weights $(w_{uv}^{A/B})_C$ in the process of the **A** and **B** networks mutual learning. Using this approach, we shall now proceed to consider the TROM model.

TPOM architecture model. By analogy with a complex number, we write the octonion O in the canonical form:

$$O = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k + a_4l + a_5m + a_6n + a_7p, \quad (4)$$

here $a_0 - a_7 \in \mathbb{R}$.

Note that an octonion of form (4) is formally the sum of a real number a_0 with a vector (imaginary part): $a_1i + a_2j + a_3k + a_4l + a_5m + a_6n + a_7p$. From the algebraic point of view, the Cayley – Dickson numbers are a set of eight-dimensional linear space over the field of real numbers. It follows that they can be represented as eight-element vectors with real coefficients.

The elements of the input vector of the TPOM network, like the elements of the weight vector, are octonions $\mathbf{X}, \mathbf{W}^{A/B} \in O$:

$$(x_{uv})_O = \left[(a_0)_{x,uv} + i(a_1)_{x,uv} + j(a_2)_{x,uv} + k(a_3)_{x,uv} + l(a_4)_{x,uv} + m(a_5)_{x,uv} + n(a_6)_{x,uv} + p(a_7)_{x,uv} \right]_O, \quad (5)$$

$$(w_{uv})_O = \left[(a_0)_{w,uv} + i(a_1)_{w,uv} + j(a_2)_{w,uv} + k(a_3)_{w,uv} + l(a_4)_{w,uv} + m(a_5)_{w,uv} + n(a_6)_{w,uv} + p(a_7)_{w,uv} \right]_O. \quad (6)$$

In (5) $(a_0)_{x,uv}, (a_1)_{x,uv}, (a_2)_{x,uv}, (a_3)_{x,uv}, (a_4)_{x,uv}, (a_5)_{x,uv}, (a_6)_{x,uv}, (a_7)_{x,uv} \in \{-1, 1\}$. Each of the KN -elements of the input vector X_O is an element of a set consisting of 2^8 different quantities:

$$\{(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), (-1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \dots, (1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1), (-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1)\}.$$

The constraint imposed on the values of the weight vector W_O will be expanded to a set from the space $[-L, L]^8$ and in (6): $(a_0)_{w,uv}, \dots, (a_7)_{w,uv} \in [-L, L]$. This representation is similar to the previous constructions due to the fact that there is a one-to-one mapping between octonions and points of the space R^8 . The signum function divides the plane into 16 disjoint subsets.

The normalised value $(\alpha_u)_O$, corresponding to the inputs of the neurons u of the hidden layer, is calculated by the formula (see formula (2) above, as well as [21, p. 2–3]):

$$\begin{aligned} (\alpha_u)_O = & \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \right) \left(\sum_{v=1}^N ((a_0)_{w,uv}) ((a_0)_{x,uv}) + i \sum_{v=1}^N ((a_1)_{w,uv}) ((a_1)_{x,uv}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + j \sum_{v=1}^N ((a_2)_{w,uv}) ((a_2)_{x,uv}) + \dots + p \sum_{v=1}^N ((a_7)_{w,uv}) ((a_7)_{x,uv}) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

The input of the neuron u of the hidden layer $(\sigma_u)_O$ determined via $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k, l, -l, m, -m, n, -n, p, -p\}$:

$$(\sigma_u)_O = \left[(a_0)_{\sigma_u} + (a_1)_{\sigma_u} i + (a_2)_{\sigma_u} j + (a_3)_{\sigma_u} k + (a_4)_{\sigma_u} l + (a_5)_{\sigma_u} m + (a_6)_{\sigma_u} n + (a_7)_{\sigma_u} p \right]_O. \quad (8)$$

In (8) $(a_0)_{\sigma_u} = \text{sign}(\text{Re}(\alpha_u)_O) = \text{sign}(\mathbf{R}(\alpha_u)_O)$; $(a_1)_{\sigma_u} = \text{sign}(\mathbf{I}(\alpha_u)_O)$, \dots , $(a_7)_{\sigma_u} = \text{sign}(\mathbf{P}(\alpha_u)_O)$ are seven imaginary parts; all of the listed functions are defined in the same way as similar functions are defined for the TPQM (QVTPM) architecture [21].

Following the reasoning used in [5; 20] for the analysis of TPM based on complex numbers (TPCM) and on quaternions (TRQM), we conclude that the signum function for TPOM will divide the space R^8 of possible values into 16 ($2 \cdot 8$) disjoint subspaces. So, the function is defined in an eight-dimensional space, where only 16 ($8 \cdot 2$) finite quantities occur. These quantities play the role of attractors, attracting the closest points to them. And this function can be defined like this:

$$\sigma_u(O) = \begin{cases} (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), a_0 = \max(\{a_i : 0 \leq i \leq 7\}) \wedge a_0 \geq 0, \\ (-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), a_0 = \max(\{a_i : 0 \leq i \leq 7\}) \wedge a_0 < 0, \\ (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), a_1 = \max(\{a_i : 0 \leq i \leq 7\}) \wedge a_1 \geq 0, \\ (0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), a_1 = \max(\{a_i : 0 \leq i \leq 7\}) \wedge a_1 < 0, \\ (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0), a_2 = \max(\{a_i : 0 \leq i \leq 7\}) \wedge a_2 \geq 0, \\ (0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0), a_2 = \max(\{a_i : 0 \leq i \leq 7\}) \wedge a_2 < 0, \\ (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0), a_3 = \max(\{a_i : 0 \leq i \leq 7\}) \wedge a_3 \geq 0, \\ (0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0), a_3 = \max(\{a_i : 0 \leq i \leq 7\}) \wedge a_3 < 0, \\ (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0), a_4 = \max(\{a_i : 0 \leq i \leq 7\}) \wedge a_4 \geq 0, \\ (0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0), a_4 = \max(\{a_i : 0 \leq i \leq 7\}) \wedge a_4 < 0, \\ (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0), a_5 = \max(\{a_i : 0 \leq i \leq 7\}) \wedge a_5 \geq 0, \\ (0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0), a_5 = \max(\{a_i : 0 \leq i \leq 7\}) \wedge a_5 < 0, \\ (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0), a_6 = \max(\{a_i : 0 \leq i \leq 7\}) \wedge a_6 \geq 0, \\ (0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0), a_6 = \max(\{a_i : 0 \leq i \leq 7\}) \wedge a_6 < 0, \\ (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), a_7 = \max(\{a_i : 0 \leq i \leq 7\}) \wedge a_7 \geq 0, \\ (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1), a_7 = \max(\{a_i : 0 \leq i \leq 7\}) \wedge a_7 < 0. \end{cases}$$

Taking this into account, the output of each of the perceptrons (level 2 in fig. 1) can be one of 16 Cayley numbers:

$$\{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \dots, (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1)\}.$$

The output $(\tau^{A/B})_O$ of the TPOM networks is the result of using a formula that is an extension of (1) and (2) and is based on the TPQM (QVTPM) model [21, p. 3]:

$$(\tau^{A/B})_O = \left(\prod_{u=1}^K \mathbf{R}(\sigma(\alpha_u^{A/B})) + i \prod_{u=1}^K \mathbf{I}(\sigma(\alpha_u^{A/B})) + j \prod_{u=1}^K \mathbf{J}(\sigma(\alpha_u^{A/B})) + \dots + p \prod_{u=1}^K \mathbf{P}(\sigma(\alpha_u^{A/B})) \right)_O. \quad (9)$$

The limitation of the elements of the weights $(W^{A/B})_O$ occurs separately for each part of the octonion. For example,

$$\mathbf{R}(w_{uv}^{A/B})_O = \begin{cases} \text{sign}(\mathbf{R}((w_{uv}^{A/B})_O))L, & \text{if } |\mathbf{R}((w_{uv}^{A/B})_O)| > L, \\ \mathbf{R}(w_{uv}^{A/B})_O, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (10)$$

$$\mathbf{I}(w_{uv}^{A/B})_O = \begin{cases} \text{sign}(\mathbf{I}((w_{uv}^{A/B})_O))L, & \text{if } |\mathbf{I}((w_{uv}^{A/B})_O)| > L, \\ \mathbf{I}(w_{uv}^{A/B})_O, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (11)$$

If, for example, the Hebbian rule is used for mutual learning of TPOM networks [4; 5; 11; 20], then the modification of the weights at the step $(t+1)$, taking into account (4)–(11), will occur according to the following expressions separately for the real and imaginary parts. In particular, to change the real part and the first imaginary part of the weight, one should seize the expressions

$$\mathbf{R}(w_{uv}^{(t+1)})_O = g \left[\mathbf{R}(w_{uv}^{(t)})_O + \mathbf{R}(x_{uv} \tau^{(t)})_O \Theta \left(\mathbf{R}(\tau^{(t)})_O \mathbf{R}(\sigma_u^{A(t)/B(t)})_O \right) \Theta \left(\mathbf{R}(\tau^{A(t)})_O \mathbf{R}(\tau^{B(t)})_O \right) \right], \quad (12)$$

$$\mathbf{I}(w_{uv}^{(t+1)})_O = g \left[\mathbf{I}(w_{uv}^{(t)})_O + \mathbf{I}(x_{uv} \tau^{(t)})_O \Theta \left(\mathbf{I}(\tau^{(t)})_O \mathbf{I}(\sigma_u^{A(t)/B(t)})_O \right) \Theta \left(\mathbf{I}(\tau^{A(t)})_O \mathbf{I}(\tau^{B(t)})_O \right) \right]. \quad (13)$$

In (12) and (13), $\Theta(x)$ is the Heaviside function, which takes the value 0 for $x < 0$ and the value 1 in other cases, $g(x)$ is defined in the standard way (see (10) and (11)):

$$g(x) = \begin{cases} -L, & \text{if } x < -L, \\ L, & \text{if } x > L, \\ x, & \text{if } |x| \leq L. \end{cases}$$

It is clear that with $(a_4)_{w,uv} = (a_5)_{w,uv} = (a_6)_{w,uv} = (a_7)_{w,uv} = 0$ (in (6)) and $(a_4)_{x,uv} = (a_5)_{x,uv} = (a_6)_{x,uv} = (a_7)_{x,uv} = 0$ (in (5)) the model and architecture TPOM turns into the TPQM, if additionally $(a_2)_{w,uv} = (a_3)_{w,uv} = 0$ and $(a_2)_{x,uv} = (a_3)_{x,uv} = 0$, then we get the TPCM model.

Results and discussion

Simulation of the NNs process synchronisation. To implement the considered mathematical models of TPMs, operating on the basis of algebras of real and hypercomplex numbers, as well as to analyse and compare the dynamic characteristics of the weights synchronising process of the corresponding NNs, a software tool (*RCQOv2*) has been developed. The tool is based on the classes *Simple*, *Complex*, *Quaternion* and *Octonion*, each of which implements the template class *NumberSystemBase<T>* and allows to perform mathematical operations on the corresponding numbers. In turn, the basic structural component of each model is the *Perceptron*. It corresponds to the template class *PerceptronBase<T>*, which inherits the classes *SimpleArithmeticPerceptron*, *ComplexPerceptron*, *QuaternionPerceptron*, *OctonionPerceptron*, the distinctive feature of which is its own implementation of the weights normalisation method.

Unlike well-known TPM interaction simulators, the version we developed is focused on the exchange of output data $(\tau^A - \tau^B$ or $\tau^B - \tau^A)$, as well as initialisation of the input message X^t (at the synchronisation

step t) via the TCP/IP protocol. This makes it possible to bring the simulated process closer to reality: two subscribers agree on a common secret cryptographic key while being far away from each other. If the used NN training rule at a certain synchronisation step t allows us to conclude that the weights of both TPMs have reached a state of equality ($W^A = W^B$), then hash sums are formed from the string representation of W^A and W^B using the SHA-512 algorithm, the exchange and comparison of which on each side provides for decision making an unambiguous decision on the equality (inequality) of the generated weights.

Results of computer modelling and their analysis. The *RCQOv2* application along with performing single simulations of the TPM synchronisation procedure allows us to accumulate and process data obtained from a series of experiments. Figure 2 shows an example (application window) with the results of 1000 experiments – distribution of the number of successful synchronisations (represented in histograms by columns) according to numbers of the required steps t (vertical axis in the fig. 2), for the TPCM architecture with parameters: $K = 5, N = 5, L = \pm 5$ (left side of the window); for comparison the normal distribution for networks with the same architecture in relation to the same scale of the steps number until the moment comes when $W^A = W^B$, is presented (right side of the window).

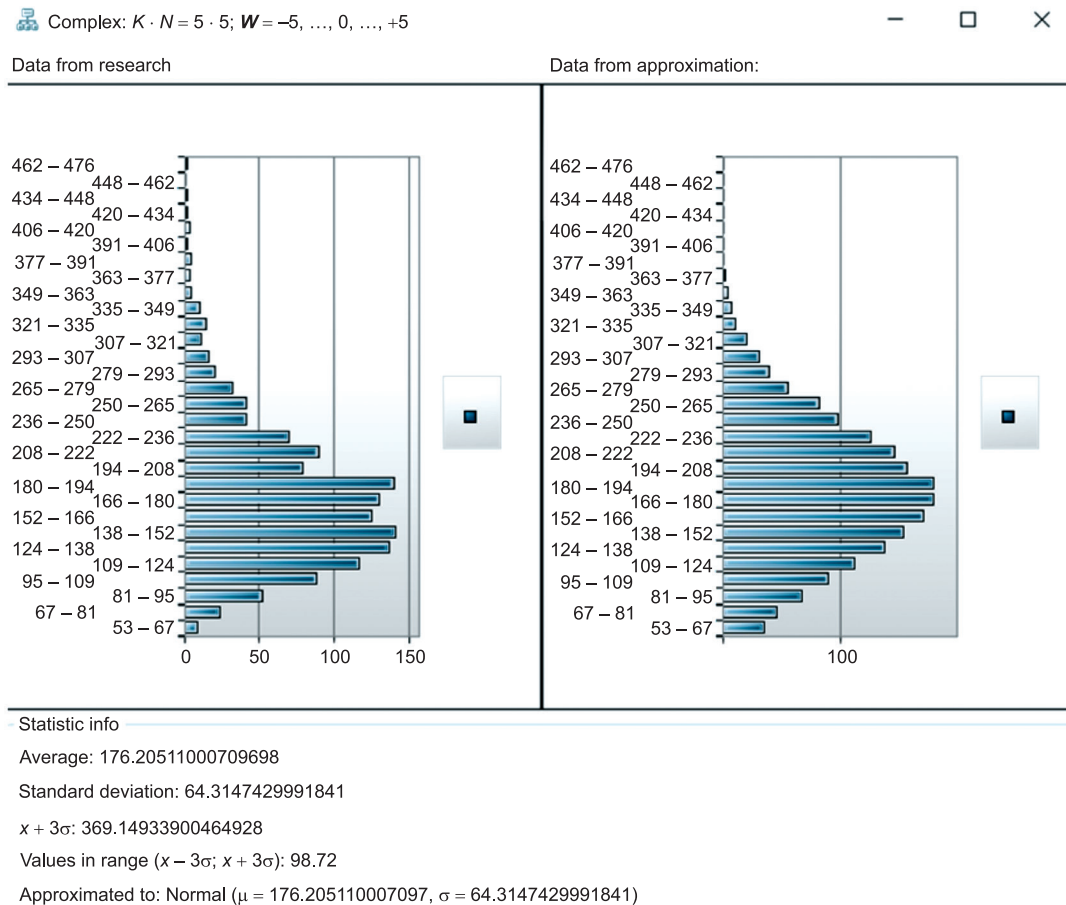


Fig. 2. Experimentally obtained (left) and theoretical (normal, right) distributions of the number of TPCMs to the number of steps until the moment comes when $W^A = W^B$ for 1000 simulations

In the lower part of the window at fig. 2 the calculated statistical parameters of the experimentally obtained distribution are given. These statistical data as well as a simple visual comparison of the distributions at fig. 2, indicate a fairly high degree of their similarity. It should be noted that 98.72 % of the observed data lies within three standard deviations from the mean (three-sigma rule). The resulting distribution was approximated using the method of moments by the Pearson criterion, provided that the experimental and theoretical values of the mean and variance (indicated at the bottom of the screen on fig. 2) are the same.

To further evaluate the degree of similarity of the resulting distribution to the normal one, an estimate in the form of distance or Bray – Curtis dissimilarity [25] was used. This characteristic is a statistic used to quantify the dissimilarity between two different samples, and ranges from 0 to 1 (0 means complete agreement (similarity), 1 means complete dissimilarity).

Tables 1 and 2 contain some statistical results obtained by simulating the synchronisation process TPCMs and TPQMs, respectively.

Table 1

Statistical results of simulations of the TPCMs synchronisation process

N	K	$\pm L$	Simulations number	Number of successful synchronisations	t (average)	Standard deviation	Bray – Curtis similarity index
5	5	5	1668	1409	176.2	64.3	0.204
5	6	5	1000	944	186.1	65.2	0.185
6	5	5	1000	925	149.2	55.5	0.200
5	5	6	1546	1285	230.4	80.7	0.182
6	6	6	1079	1061	212.1	73.4	0.185
6	7	6	1000	993	227.4	76.2	0.180
7	6	6	1000	929	211.1	68.6	0.175
6	6	7	1000	972	318.6	162.0	0.254
7	7	7	1011	970	280.8	91.6	0.174

Table 2

Statistical results of simulations of the TPQMs synchronisation process

N	K	$\pm L$	Simulations number	Number of successful synchronisations	t (average)	Standard deviation	Bray – Curtis similarity index
5	5	5	1357	1354	445.2	212.3	0.25
6	6	6	1070	1068	417.1	147.7	0.18
7	6	6	1000	1000	498.2	209.8	0.22
7	7	6	1000	1000	529.5	209.6	0.20
6	6	7	1000	999	656.5	272.1	0.21
6	7	7	1000	1000	708.9	273.1	0.19
7	6	7	1000	1000	858.5	385.8	0.23
7	7	7	1000	997	735.7	284.9	0.20
8	8	8	1000	999	780.7	273.6	0.19
9	9	9	1000	1000	1550.6	605.6	0.20

Similar results in the form of a histogram (fig. 3) and table form (table 3) are presented for TPM based on octonion algebra.

Simulation of the TPOMs ($N = 6, K = 6, L = \pm 6$) synchronisation procedure revealed the following: the minimum number of steps until the moment of equality of weights vectors comes was approximately less than 1000 (in several dozen experiments), and the maximum number of steps was more than 15 000 (also in several dozen experiments). For better visibility each scale number (t') on the horizontal axis in fig. 3 corresponds to a range of width 450. Moreover, the starting point for the number of steps is 1122 ($t = 1122$). Therefore, $t' = 1$ corresponds to the range $t = [1122, 1571], t' = 2 - t = [1572, 2021], \dots, t' = 30 - t = [14 192, 14 641]$.

Table 3

Statistical results of simulations of the TPOMs synchronisation process

N	K	$\pm L$	Simulations number	Number of successful synchronisations	t (average)	Standard deviation	Bray – Curtis similarity index
5	5	5	1233	1231	1258.2	607.7	0.25
5	6	5	1000	1000	1760.5	827.1	0.22

Ending of the table 3

N	K	$\pm L$	Simulations number	Number of successful synchronisations	t (average)	Standard deviation	Bray – Curtis similarity index
6	5	5	1000	1000	674.6	291.4	0.23
6	6	5	1000	1000	733.4	305.5	0.22
7	5	5	1000	1000	568.2	254.9	0.23
6	6	6	1168	1167	1604.6	711.7	0.23
5	5	7	1000	1000	12 698.3	6471.3	0.25
5	7	7	1000	997	12 923.6	5753.7	0.24
7	7	7	1000	996	5825.1	2779.1	0.23

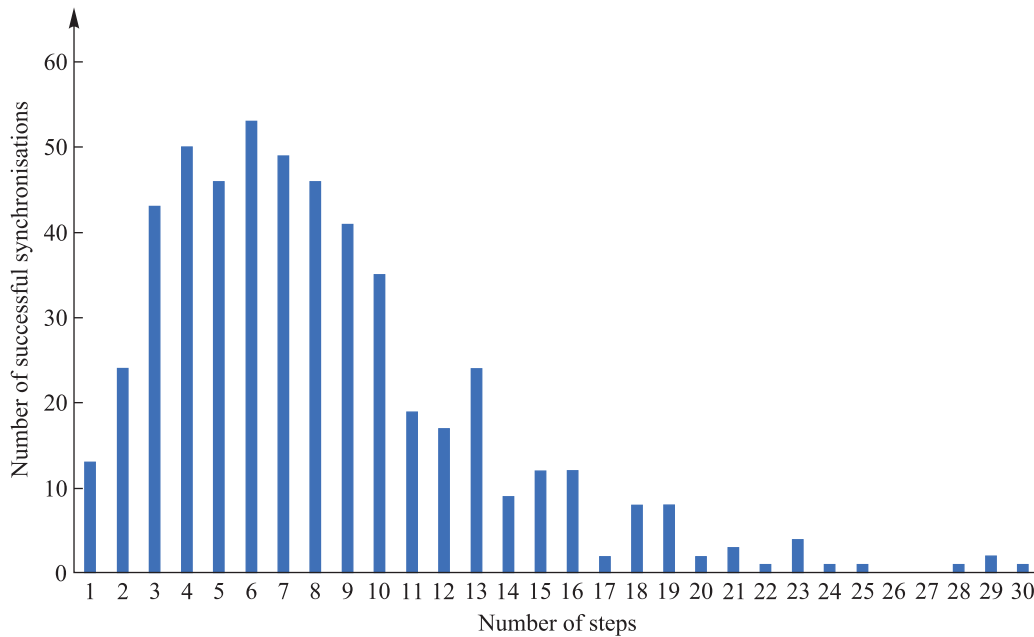


Fig. 3. Main part of the distribution of the number of TPOM ($N=6, K=6, L=\pm 6$) in accordance with the number of steps (t') until the moment comes when $\mathbf{W}^A = \mathbf{W}^B$ for 1168 simulations

We have received practical confirmation of an intuitive and expected pattern: with approximately comparable parameters of the TPM networks (N, K, L), the transition from real numbers to quaternions is characterised by an increase in the average process time until the equality of weights is established: $\mathbf{W}^A = \mathbf{W}^B$.

Probably the most important characteristic of the TPMs synchronisation process based on various algebras is the efficiency or success of third network (**E**) attacks, the peculiarity of which we noted above. Table 4 shows the parameter $\Delta = t_{\text{synch}}/t_{\text{learn}}$, equal to the ratio of the average synchronisation time of networks **A** and **B** (t_{synch}) to the average synchronisation time of **E** and **A** (t_{learn}) with the same parameters N, K, L for each network architecture when implementing a geometric attack, the features of which are described, for example, in [3; 11; 13; 21].

Table 4

Parameter Δ for TPMs using different algebras

Architecture	Parameter Δ
TPM	0.335 53
TPCM	0.107 52
TPQM	0.011 93
TPOM	0.000 22

As can be seen from the above data, the greatest influence on the duration of the synchronisation process has synaptic depth L . However, we probably cannot conclude that with approximately the same parameters N , K , L , the time characteristics of the interaction of NNs are in the same numerical range.

The latest results (see table 4) also mean that, the complexity of the used algebra provides a higher level of system security. This is due to the fact that one of the main factors influencing the security of TPMs is the dimension and number of possible states of network outputs (τ). For example, in the classical TPM architecture with parameter $K = 3$, for each output value there are four internal possible output values of the perceptrons (for example, $(1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$ for $\tau = 1$). In the TPCM architecture, the number of possible internal perceptron values per output value increases quadratically. For example, for $K = 3$ there are already 16 possible options (for example, $(1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$, $(i, i, -1)$, $(i, -1, i)$, $(-1, i, i)$, $(-i, i, 1)$, $(-i, 1, i)$, $(i, 1, -i)$, $(i, -i, 1)$, $(1, i, -i)$, $(1, -i, i)$, $(-i, -i, -1)$, $(-i, -1, -i)$, $(-1, -i, -i)$ for $\tau = 1$ (for simplicity, we used the canonical notation of complex numbers)).

Conclusions

The article discusses the most important features of mathematical modelling and computer simulation of a secret information exchange system based on two interacting NNs, the architecture of which is named as the tree parity machine. The mathematical basis for the description and analysis of the processes in such a system are hypercomplex numbers. On the basis of generalisation of TPM models for real and complex numbers, as well as quaternions, a TPM model based on octonions has been developed (TPOM).

A feature of the presented research is the implementation of the simulator on different machines interacting based on the TCP/IP protocol. The second distinctive feature is associated with determining the moment and confirming the fact: the state of synchronisation of the two networks has arrived. After this, in the last steps of mutual training of networks (based on the corresponding rule), each side calculates the hash of the current vector of weights and transmits this hash to the other side. Next, each party, by comparing the two hashes, makes a final decision about the end and result of synchronisation. Hash equality means that the parties have achieved an unconditional state of weights equality, which can be used as a joint secret cryptographic key.

Библиографические ссылки

1. Diffie W, Hellman M. New directions in cryptography. *IEEE Transactions on Information Theory*. 1976;22(6):644–654. DOI: 10.1109/TIT.1976.1055638.
2. Kinzel W, Kanter I. Neural cryptography. In: Wang L, Rajapakse JC, Fukushima K, Lee SY, Yao X, editors. *Proceedings of the 9th International conference on neural information processing, 2002. ICONIP'02; 2002 November 18–22; Singapore*. Singapore: Orchid Country Club; 2002. p. 1351–1354. DOI: 10.1109/ICONIP.2002.1202841.
3. Klimov A, Mityagin A, Shamir A. Analysis of neural cryptography. In: Zheng Y, editor. *Advances in Cryptology – ASIACRYPT 2002*. Berlin: Springer; 2002. p. 288–298 (Lecture notes in computer science; volume 2501). DOI: 10.1007/3-540-36178-2_18.
4. Rosen-Zvi M, Kanter I, Kinzel W. Cryptography based on neural networks analytical results. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 2002;35(47):707–713. DOI: 10.1088/0305-4470/35/47/104.
5. Плонковски М, Урбанович ПП. Криптографическое преобразование информации на основе нейросетевых технологий. *Труды Белорусского государственного технологического университета. Серия 6, Физико-математические науки и информатика*. 2005;13:161–164. EDN: YSCTHN.
6. Płonkowski M, Urbanowicz P. Liczby podwójne i ich modyfikacje w neurokryptografii. *Przegląd Elektrotechniczny*. 2002; 88(11b):340–341.
7. Choi Y, Sim J, Kim L-S. CREMON: cryptography embedded on the convolutional neural network accelerator. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*. 2020;67(12):3337–3341. DOI: 10.1109/TCSII.2020.2971580.
8. Jeong S, Park C, Hong D, Seo C, Jho N. Neural cryptography based on generalized tree parity machine for real-life systems. *Security and Communication Networks*. 2021;11:1–12. DOI: 10.1155/2021/6680782.
9. Sarkar A. Neural cryptography using optimal structure of neural networks. *Applied Intelligence*. 2021;51:8057–8066. DOI: 10.1007/s10489-021-02334-1.
10. Dourlens S. *Neuro-cryptographie appliquée et neuro-cryptanalyse du DES*. Paris: University of Paris; 1995. 218 p. DOI: 10.13140/RG.2.2.35476.24960.
11. Ruttur A. *Neural synchronization and cryptography* [dissertation]. Würzburg: Julius-Maximilians-Universität Würzburg; 2006. 120 p. DOI: 10.48550/arXiv.0711.2411.
12. Плонковски М, Урбанович ПП. Синхронизация криптографических ключей на основе нейронных сетей и в системах криптопреобразования на основе XML. *Труды Белорусского государственного технологического университета. Серия 6, Физико-математические науки и информатика*. 2006;14:152–155. EDN: HSLOUF.
13. Ruttur A, Kinzel W, Kanter I. Dynamics of neural cryptography. *Physical Review E*. 2007;75(5):056104. DOI: 10.1103/PhysRevE.75.056104.
14. Dolecki M, Kozera R. Distribution of the tree parity machine synchronization time. *Advances in Science and Technology*. 2013; 7(18):20–27. DOI: 10.5604/20804075.1049490.

15. Урбанович ПП, Чуриков КВ. Сравнительный анализ методов взаимообучения нейронных сетей в задачах обмена конфиденциальной информацией. *Труды БГТУ. № 6. Физико-математические науки и информатика*. 2010;6:163–166. EDN: TGUDVZ.
16. Seoane LF, Ruttor A. Successful attack on permutation-parity-machine-based neural cryptography. *Physical Review E*. 2012; 85(2):025101. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.025101.
17. Shacham LN, Klein E, Mislovaty R, Kanter I, Kinzel W. Cooperating attackers in neural cryptography. *Physical Review E*. 2004; 69(6):066137. DOI: 10.1103/PhysRevE.69.066137.
18. Кантор ИЛ, Солодовников АС. *Гиперкомплексные числа*. Москва: Наука; 1973. 144 с.
19. Płonkowski M, Urbanowicz P, Lisica E. Wykorzystanie kwaternionów w protokole uzgadniania klucza kryptograficznego, opartym na architekturach sieci neuronowych TPQM. *Przegląd Elektrotechniczny*. 2010;86(7):90–91.
20. Dong T, Huang T. Neural cryptography based on complex-valued neural network. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. 2020;31(11):4999–5004. DOI: 10.1109/TNNLS.2019.2955165.
21. Zhang Y, Wang W, Zhang H. Neural cryptography based on quaternion-valued neural network. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*. 2022;6(22):1871–1883.
22. Wu J, Xu L, Wu F, Kong Y, Senhadji L, Shu H. Deep octonion networks. *Neurocomputing*. 2019;397:179–191. DOI: 10.1016/j.neucom.2020.02.053.
23. Takahashi K, Fujita M, Hashimoto M. Remarks on octonion-valued neural networks with application to robot manipulator control. In: *2021 IEEE International Conference on Mechatronics (ICM); 2021 March 7–9; Kashiwa, Japan*. [S. l.]: IEEE; 2021. p. 1–6. DOI: 10.1109/ICM46511.2021.9385617.
24. Cariow A, Cariowa G. Fast algorithms for deep octonion networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. 2023;34(1):543–548. DOI: 10.1109/TNNLS.2021.3124131.
25. Ricotta C, Podani J. On some properties of the Bray – Curtis dissimilarity and their ecological meaning. *Ecological Complexity*. 2017;31:201–205. DOI: 10.1016/j.ecocom.2017.07.003.

References

1. Diffie W, Hellman M. New directions in cryptography. *IEEE Transactions on Information Theory*. 1976;22(6):644–654. DOI: 10.1109/TIT.1976.1055638.
2. Kinzel W, Kanter I. Neural cryptography. In: Wang L, Rajapakse JC, Fukushima K, Lee SY, Yao X, editors. *Proceedings of the 9th International conference on neural information processing, 2002. ICONIP'02; 2002 November 18–22; Singapore*. Singapore: Orchid Country Club; 2002. p. 1351–1354. DOI: 10.1109/ICONIP.2002.1202841.
3. Klimov A, Mityagin A, Shamir A. Analysis of neural cryptography. In: Zheng Y, editor. *Advances in Cryptology – ASIACRYPT 2002*. Berlin: Springer; 2002. p. 288–298 (Lecture notes in computer science; volume 2501). DOI: 10.1007/3-540-36178-2_18.
4. Rosen-Zvi M, Kanter I, Kinzel W. Cryptography based on neural networks analytical results. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 2002;35(47):707–713. DOI: 10.1088/0305-4470/35/47/104.
5. Płonkowski M, Urbanovich PP. Cryptographic transformation of information based on neural network technologies. *Trudy Belorusskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta. Seriya 6, Fiziko-matematicheskie nauki i informatika*. 2005;13:161–164. Russian. EDN: YSCTHN.
6. Płonkowski M, Urbanowicz P. Liczby podwójne i ich modyfikacje w neurokryptografii. *Przegląd Elektrotechniczny*. 2002; 88(11b):340–341.
7. Choi Y, Sim J, Kim L-S. CREMON: cryptography embedded on the convolutional neural network accelerator. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*. 2020;67(12):3337–3341. DOI: 10.1109/TCSII.2020.2971580.
8. Jeong S, Park C, Hong D, Seo C, Jho N. Neural cryptography based on generalized tree parity machine for real-life systems. *Security and Communication Networks*. 2021;11:1–12. DOI: 10.1155/2021/6680782.
9. Sarkar A. Neural cryptography using optimal structure of neural networks. *Applied Intelligence*. 2021;51:8057–8066. DOI: 10.1007/s10489-021-02334-1.
10. Dourlens S. *Neuro-cryptographie appliquée et neuro-cryptanalyse du DES*. Paris: University of Paris; 1995. 218 p. DOI: 10.13140/RG.2.2.35476.24960.
11. Ruttor A. *Neural synchronization and cryptography* [dissertation]. Würzburg: Julius-Maximilians-Universität Würzburg; 2006. 120 p. DOI: 10.48550/arXiv.0711.2411.
12. Płonkowski M, Urbanovich PP. Neural network-based cryptographic key synchronization in XML-based cryptographic transformation systems. *Trudy Belorusskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta. Seriya 6, Fiziko-matematicheskie nauki i informatika*. 2006;14:152–155. Russian. EDN: HSLOUF.
13. Ruttor A, Kinzel W, Kanter I. Dynamics of neural cryptography. *Physical Review E*. 2007;75(5):056104. DOI: 10.1103/PhysRevE.75.056104.
14. Dolecki M, Kozera R. Distribution of the tree parity machine synchronization time. *Advances in Science and Technology*. 2013; 7(18):20–27. DOI: 10.5604/20804075.1049490.
15. Urbanovich PP, Churikov KV. Comparative analysis of methods for mutual learning of neural networks when solving problems of confidential information exchange. *Trudy BGTU. No. 6. Физико-математические науки и информатика*. 2010;6:163–166. Russian. EDN: TGUDVZ.
16. Seoane LF, Ruttor A. Successful attack on permutation-parity-machine-based neural cryptography. *Physical Review E*. 2012; 85(2):025101. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.025101.
17. Shacham LN, Klein E, Mislovaty R, Kanter I, Kinzel W. Cooperating attackers in neural cryptography. *Physical Review E*. 2004; 69(6):066137. DOI: 10.1103/PhysRevE.69.066137.
18. Kantor IL, Solodovnikov AS. *Гиперкомплексные числа* [Hypercomplex numbers]. Moscow: Nauka; 1973. 144 p. Russian.
19. Płonkowski M, Urbanowicz P, Lisica E. Wykorzystanie kwaternionów w protokole uzgadniania klucza kryptograficznego, opartym na architekturach sieci neuronowych TPQM. *Przegląd Elektrotechniczny*. 2010;86(7):90–91.

20. Dong T, Huang T. Neural cryptography based on complex-valued neural network. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. 2020;31(11):4999–5004. DOI: 10.1109/TNNLS.2019.2955165.
21. Zhang Y, Wang W, Zhang H. Neural cryptography based on quaternion-valued neural network. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*. 2022;6(22):1871–1883.
22. Wu J, Xu L, Wu F, Kong Y, Senhadji L, Shu H. Deep octonion networks. *Neurocomputing*. 2019;397:179–191. DOI: 10.1016/j.neucom.2020.02.053.
23. Takahashi K, Fujita M, Hashimoto M. Remarks on octonion-valued neural networks with application to robot manipulator control. In: *2021 IEEE International Conference on Mechatronics (ICM); 2021 March 7–9; Kashiwa, Japan*. [S. l.]: IEEE; 2021. p. 1–6. DOI: 10.1109/ICM46511.2021.9385617.
24. Cariow A, Cariowa G. Fast algorithms for deep octonion networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. 2023;34(1):543–548. DOI: 10.1109/TNNLS.2021.3124131.
25. Ricotta C, Podani J. On some properties of the Bray – Curtis dissimilarity and their ecological meaning. *Ecological Complexity*. 2017;31:201–205. DOI: 10.1016/j.ecocom.2017.07.003.

Received 03.11.2023 / revised 27.06.2024 / accepted 27.06.2024.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВЕРТОЧНЫХ ВЕЙВЛЕТ-БЛОКОВ В ЗАДАЧЕ КЛАССИФИКАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В. А. ВОРОБЕЙ¹⁾, А. Э. МАЛЕВИЧ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. На примере задачи классификации изображений и вейвлет-семейства CDF-9/7 показано, как можно внедрить дискретное вейвлет-преобразование в модель компьютерного зрения, сохранив возможность ее обучения методом обратного распространения ошибки. Предложен и успешно встроен в ряд моделей нейронных сетей сверточный вейвлет-блок, который сочетает в себе обработку признаков входного сигнала на нескольких уровнях вейвлет-разложения и позволяет уменьшить исходный размер модели на 30–40 %, обеспечивая при этом сопоставимое качество. Продемонстрирована возможность эффективно выполнять дискретное вейвлет-преобразование на графическом процессоре при использовании лифтинг-схемы. Реализация вейвлет-преобразования построена на поэлементных операциях сложения и умножения, что позволяет при необходимости экспортировать обученную модель в требуемый формат для запуска на новых данных без дополнительных сложностей. В качестве базовых моделей использованы архитектуры ResNetV2-50, MobileNetV2 и EfficientNetV2-B0. Для проведения экспериментов подготовлен набор данных на основе подвыборки категорий датасета LSUN.

Ключевые слова: нейронные сети; глубокое обучение; вейвлеты; дискретное вейвлет-преобразование; классификация изображений.

CONVOLUTIONAL WAVELET BLOCKS IN IMAGE CLASSIFICATION

U. A. VARABEI^a, A. E. MALEVICH^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: U. A. Varabei (v.vorobey.edu@gmail.com)

Abstract. In this paper, based on an image classification problem and wavelet family CDF-9/7, it is shown how to incorporate discrete wavelet transform into a computer vision model, while maintaining the ability of its training with the backpropagation method. A convolutional wavelet block, that extracts features at different levels of decomposition of the incoming signal, is proposed and successfully integrated into a set of neural network models. The blocks implemented allow to reduce the original model size by 30–40 %, while maintaining comparable quality in terms of metric. An effective method for evaluation of discrete wavelet transform on graphics processing unit with lifting scheme is presented. The implementation of wavelet blocks uses element-wise operations of additions and multiplications, thus allowing a simple export of

Образец цитирования:

Воробей ВА, Малевич АЭ. Использование сверточных вейвлет-блоков в задаче классификации изображений. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;2:93–103.
EDN: LSIEVN

For citation:

Varabei UA, Malevich AE. Convolutional wavelet blocks in image classification. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;2:93–103. Russian.
EDN: LSIEVN

Авторы:

Владислав Александрович Воробей – аспирант кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета. Научный руководитель – А. Э. Малевич.

Александр Эрнестович Малевич – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета.

Authors:

Uladzislau A. Varabei, postgraduate student at the department of differential equations and system analysis, faculty of mechanics and mathematics.

v.vorobey.edu@gmail.com

Alexander E. Malevich, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of differential equations and system analysis, faculty of mechanics and mathematics.
malevich@bsu.by

a trained model into one of desired formats for running on new data. ResNetV2-50, MobileNetV2 and EfficientNetV2-B0 architectures are used as the basis models. A new dataset, which is based on a set of categories of LSUN dataset, is constructed for conducting experiments.

Keywords: neural networks; deep learning; wavelets; discrete wavelet transform; image classification.

Введение

Задача классификации изображений остается одной из наиболее востребованных в компьютерном зрении. Задачи данного класса хорошо решаются с помощью моделей нейронных сетей, таких как VGG [1], ResNet [2], EfficientNet [3] и др. Как правило, для повышения качества работы моделей в них приходится увеличивать число параметров, что ведет к росту потребления памяти и создает определенные сложности как при обучении, так и при работе финальной версии модели.

Необходимость использования компактных моделей возникает при их встраивании непосредственно в оборудование (медицинские приборы, сенсоры, устройства с камерами и т. п.). Проблема с объемом памяти также актуальна для веб-сервисов, при работе с которыми модель скачивается на устройство пользователя. Еще одним примером могут быть мобильные приложения, использующие большое количество моделей (например, видеоредакторы). Во всех перечисленных случаях особенно важно уменьшить размер исходных моделей, сохранив достаточный уровень качества. Для этого можно использовать прунинг [4], обучение с типами данных пониженной точности (float8, float16) [5], а также методы полуконтролируемого обучения [6].

Часто для обучения работе с новыми данными веса моделей инициализируются случайными значениями из некоторых распределений (за исключением дообучения уже готовой модели на похожем наборе данных). В этом есть как плюсы, так и минусы. Случайная инициализация хороша тем, что модель может сама выучить параметры так, чтобы минимизировать ошибку на тренировочном наборе данных. Однако учить все параметры одновременно очень сложно, особенно когда их количество доходит до нескольких сотен тысяч или даже миллионов. В настоящей работе предлагается упростить модели задачу извлечения признаков из данных, добавив в нее вейвлеты. Они хорошо подходят для анализа данных, поскольку извлекают информацию о низких и высоких частотах входного сигнала на разных уровнях его разложения. Похожая идея упрощения обучения моделей использовалась в работе [7]. В ней авторы добавляли вейвлеты в несколько первых сверточных блоков для извлечения простейших признаков из входных изображений, это позволяло более глубоким слоям учить более сложные признаки, что приводило к увеличению значения метрик. В публикации [8] на примере задачи классификации изображений было показано, что при добавлении вейвлетов модели показывают более высокие результаты, а также лучше работают на данных, в которых присутствует много шума. В работе [9] благодаря способности вейвлетов анализировать сигнал на разных уровнях авторам удалось успешно решить задачу определения подделок человеческих лиц.

Отличительная особенность данного исследования – уменьшение размера модели с сохранением уровня качества при использовании только лишь вейвлетов. Полученную таким способом модель можно дополнительно сжимать стандартными методами, указанными выше.

Создание модели

Для проведения экспериментов были выбраны три достаточно компактные по размеру модели сверточных нейронных сетей, которые широко применяются в настоящее время, – ResNetV2-50 [10], MobileNetV2 [11] и EfficientNetV2-B0 [12]. Выбранные архитектуры за счет своей легковесности часто используются также в задачах сегментации и детекции для извлечения признаков разного уровня из изображений с дальнейшим объединением информации для решения поставленной задачи.

Дискретное вейвлет-преобразование. Различают непрерывное и дискретное вейвлет-преобразование. В данной работе был использован дискретный вариант, поскольку сигналы, передаваемые внутри классических сверточных нейронных сетей, также являются дискретными. Как правило, дискретное вейвлет-преобразование применяют к одномерным сигналам, в то время как при работе с изображениями внутри нейронных сетей сигналы имеют четырехмерную размерность: $[b, c, h, w]$, где b – размер пакета (батча); c – количество каналов; h – высота растра; w – ширина растра. Для обобщения одномерного вейвлет-преобразования на двумерный случай поступают следующим образом: сначала выполняют преобразование построчно, а затем применяют его к каждому столбцу результата предыдущего шага. В итоге получается изображение, которое разделено на четыре части (каждая из них по ширине и высоте в 2 раза меньше исходного изображения) – LL, HL, LH, HH . Здесь L – медленно меняющаяся компонента;

H – быстро меняющаяся компонента. Схема данного метода представлена на рис. 1, где использованы следующие обозначения: X – входное изображение; DWT – дискретное вейвлет-преобразование. Далее описанный метод применяется отдельно к каждому каналу и отдельно к каждому изображению.

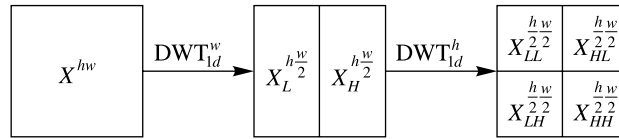


Рис. 1. Двумерное дискретное вейвлет-преобразование
Fig. 1. Two-dimensional discrete wavelet transform

Существует три метода выполнения дискретного вейвлет-преобразования:

- 1) полифазная матрица;
- 2) свертка с фильтрами синтеза и анализа;
- 3) лифтинг-схема.

У каждого из этих методов есть преимущества и недостатки. Алгоритм, основанный на полифазной матрице, требует перевода сигнала в полином Лорана и выполнения в дальнейшем символьных вычислений, что крайне плохо подходит для числовых пакетов. Метод, использующий свертку, достаточно просто реализуется стандартными средствами пакетов для глубокого обучения: для этого создаются фильтры, которыми можно инициализировать сверточные слои и при необходимости обучать их. Однако следует учитывать, что операция свертки даже в одномерном случае имеет нелинейную сложность относительно длины входного сигнала, а поскольку свертка выполняется по строкам и по столбцам, то исходная сложность алгоритма квадратично увеличивается. Лифтинг-схему можно реализовать с помощью векторных операций сложения, сдвигов сигнала на определенное количество позиций и умножения на число, поэтому она является весьма эффективной при небольшом количестве сложений. Данный алгоритм работает следующим образом.

Шаг 1. Сигнал делится на две части – четную (e) и нечетную (o).

Шаг 2. Четная часть сигнала модифицируется на i -м шаге предсказания (P): операцию можно представить в виде набора операций сложения, умножения на число, а также сдвигов сигнала. Далее полученный сигнал добавляется к текущей нечетной части сигнала.

Шаг 3. Нечетная часть сигнала модифицируется на i -м шаге обновления (U): операция аналогична операции на шаге 2, за исключением количества позиций сдвига, а также используемых констант в умножении. Полученный сигнал добавляется к текущей четной части сигнала.

Шаг 4. Шаги 2 и 3 повторяются несколько раз (зависит от типа вейвлет-семейства).

Шаг 5. Четная часть сигнала умножается, а нечетная часть сигнала делится на константу k .

Шаг 6. На выходе получают две части сигнала – аппроксимация сигнала (s) и детали к ней (d).

Схема алгоритма представлена на рис. 2.

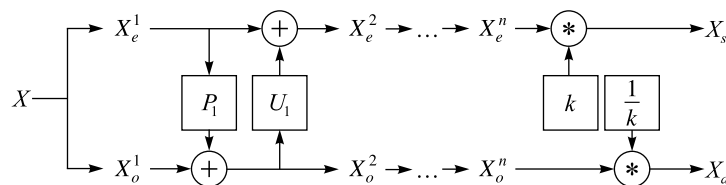


Рис. 2. Лифтинг-схема
Fig. 2. Lifting scheme

Следует отметить, что в описанном выше алгоритме этапы предсказания и обновления допускают реализацию с помощью операций свертки, однако их можно заменить на несколько операций сложения векторов, представляющих собой исходный масштабированный сигнал, сдвинутый на несколько позиций. Число элементов для сложения равно количеству элементов в соответствующей операции предсказания или обновления. Такой подход имеет смысл применять в том случае, если размеры фильтра в лифтинг-схемах невелики.

Существует большое множество вейвлет-семейств, таких как вейвлеты Хаара [13], Добеши [14] и др. В данной работе выбор сделан в пользу семейства CDF-9/7 [15], которое применяется, в частности, в формате сжатия изображений JPEG-2000. Лифтинг-схему для этого семейства можно найти в открытых источниках¹.

¹Getreuer P. Wavelet CDF-9/7 implementation [Electronic resource]. URL: <https://getreuer.info/posts/waveletcdf97/index.html> (date of access: 21.10.2023).

Реализация сверточного вейвлет-блока. Сначала с помощью сверточного блока уменьшается количество каналов в сигнале исходного изображения. Затем несколько раз (параметр блока) применяется вейвлет-разложение сигнала: на вход всегда поступает наиболее медленно меняющаяся часть изображения (X_{LL}), для первой итерации используется выход сверточного блока. Далее выходной тензор после каждого шага разложения увеличивается в размерах так, чтобы размерность по ширине и высоте совпадала или с входом всего блока, или с выходом первого шага разложения (в этом случае не меняется размерность выхода первого шага преобразования), и объединяется вдоль оси каналов. Наконец, применяется еще один сверточный блок, который отвечает за то, чтобы вернуть необходимое количество каналов. Оно может или совпадать с входом целого вейвлет-блока (в этом случае выход блока можно использовать для поэлементного сложения с исходным сигналом и умножения на него), или быть фиксированным (в таком случае можно объединять выход блока с его входом с помощью операции конкатенации, но тогда нужно следить за совпадением размерностей по ширине и высоте). В данной работе структура входных и выходных сверточных блоков была следующей: свертка с ядрами размером 1×1 , пакетная нормализация, активация Leaky ReLU. Стоит уточнить, что, хотя размер ядра часто указывают двумерным, на самом деле каждый фильтр в сверточном слое имеет трехмерную размерность: ширину, высоту и количество входных каналов. Поскольку вход текущего слоя напрямую зависит от выхода предыдущего слоя модели, то его размерность нельзя сделать параметром слоя. Также следует отметить, что данный размер ядра был выбран в целях ограничения параметров модели. Сопоставимый по количеству параметров вариант – использование сепарабельных сверток с ядрами размером 3×3 , но были выбраны стандартные свертки, поскольку при такой реализации можно считать, что на входном тензоре вейвлет-блока каждый пиксел является взвешенной суммой только одного пиксела из всех каналов. То есть модель находит оптимальный с ее точки зрения по-пиксельный способ соединения карт признаков. В каждом вейвлет-блоке трижды применяется вейвлет-преобразование, это должно позволить собрать детали с нескольких уровней изображения. Общая схема блока представлена на рис. 3, где использованы следующие обозначения: InConvBlock – входной сверточный блок; OutConvBlock – выходной сверточный блок; Upscale_{*i*} – операция увеличения выхода изображения с помощью интерполяции в *n* раз на *i*-м шаге; DWT_{*i*} – операция дискретного вейвлет-преобразования на *i*-м шаге; Concat – операция конкатенации тензоров вдоль оси каналов; LL_{*i*} – один из выходов вейвлет-преобразования на *i*-м шаге.

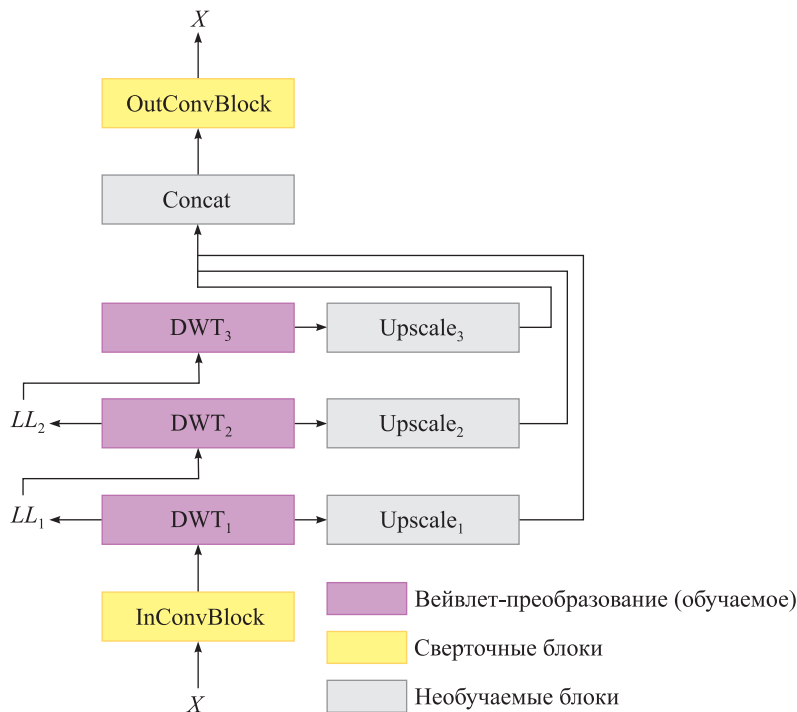


Рис. 3. Сверточный вейвлет-блок
 Fig. 3. Convolutional wavelet block

Встраивание сверточного вейвлет-блока в модель. Есть множество вариантов того, как реализованный сверточный вейвлет-блок может быть встроен в сверточную нейронную сеть. В данной работе использованы два наиболее интересных способа.

Поскольку в большинстве моделей есть блоки, в которых происходит уменьшение входного разрешения тензора в 2 раза, то их возможности можно расширить, добавив дополнительную ветвь, которая будет состоять из реализованного сверточного вейвлет-блока. В результате входной сигнал будет анализироваться двумя независимыми извлекаателями признаков. Следует отметить, что часто блоки уменьшения размерности состоят из большого количества сверточных слоев. Под таким блоком понимается часть модели, которая на выходе уменьшает размеры входного тензора в 2 раза вдоль осей, обозначающих ширину и высоту (количество каналов может как увеличиваться, так и уменьшаться), и при этом ее вход также имеет в 2 раза уменьшенные размеры относительно предыдущего шага. Во всех используемых в данной работе моделях можно выделить пять подобных блоков (вход первого из них представляет собой или исходное изображение, или выход DWT-блока, примененного к входной картинке). Далее складываются выходы исходного и реализованного вейвлет-блоков. В этом и заключается первый из предложенных способов встраивания сверточных вейвлет-блоков в модель. Он представлен на рис. 4, где использованы следующие обозначения: StrideBlock_i – блок уменьшения размерности на i -м шаге; CWBlock_i – сверточный вейвлет-блок на i -м шаге; WBlock – вейвлет-блок без сверточных слоев на входе и выходе; OutBlock – выходной блок без сверток, включающий в себя полносвязные, нормализационные и активационные слои, отвечающие за выход всей модели. Для удобства также указано, как меняется размерность входного тензора.

Второй способ встраивания сверточных вейвлет-блоков в модель состоит в том, чтобы добавлять дополнительную ветвь для анализа сигнала не к целому блоку уменьшения размерности, а к отдельным сверточным блокам, состоящим обычно из слоев свертки, нормализации и активации, каждый из которых может повторяться несколько раз. При таком подходе требуется добавить больше обучаемых параметров, но это должно улучшить возможности моделей по извлечению признаков из входных тензоров. На примере архитектуры ResNetV2-50 данный способ представлен на рис. 5, где использованы следующие обозначения: CWBlock – сверточный вейвлет-блок; Conv_i – сверточный слой на i -м шаге; BatchNorm_i – пакетная нормализация на i -м шаге; ReLU – слой активации.

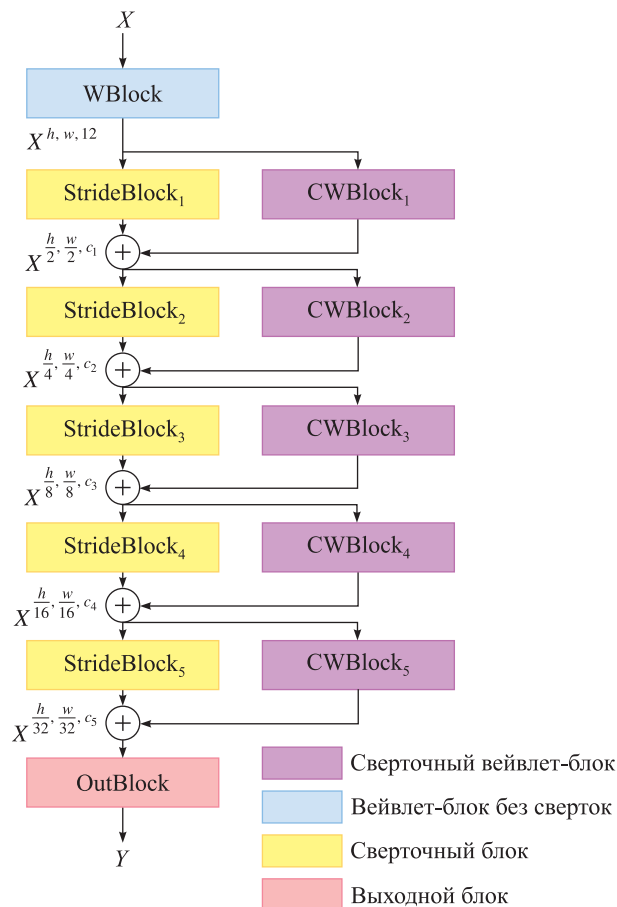


Рис. 4. Реализация первого способа встраивания сверточных вейвлет-блоков в модель

Fig. 4. Implementation of the first method of integrating convolutional wavelet blocks into the model

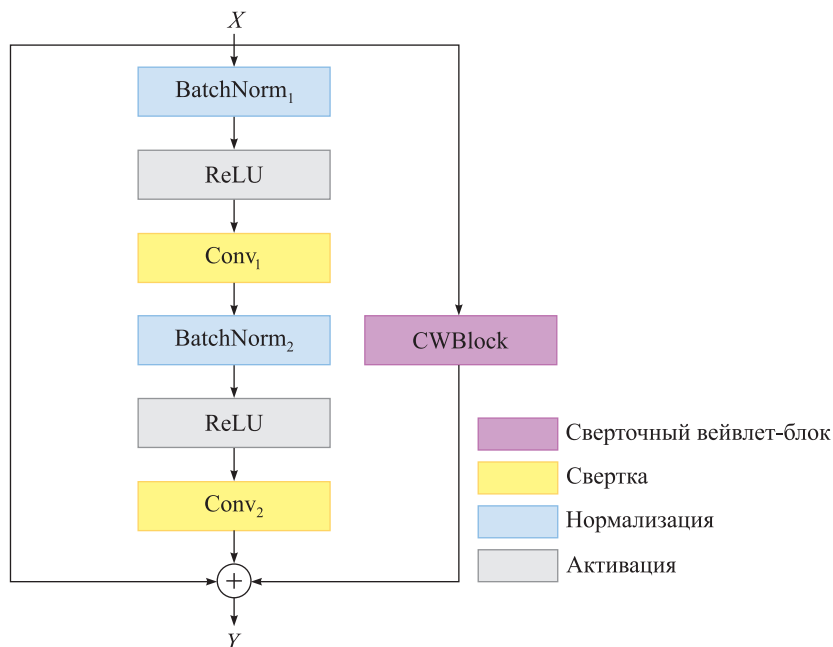


Рис. 5. Реализация второго способа встраивания сверточных вейвлет-блоков в модель (на примере архитектуры ResNetV2-50)

Fig. 5. Implementation of the second method of integrating convolutional wavelet blocks into the model (using the example of ResNetV2-50)

Модели, полученные первым из описанных способов, на рис. 7–10 и в таблице обозначены как «reg_block», а модели, полученные вторым способом, – как «reg_conv». В обоих случаях реализованный вейвлет-блок также применяется для анализа входного изображения, но без дополнительных входных и выходных сверток (только конкатенация выходов вейвлет-преобразования). В результате на вход первого сверточного блока поступит сигнал, у которого количество каналов составляет не 3, как у RGB-картинки, а 12 (по 3 уровня вейвлет-разложения для каждого из RGB-каналов, а также вход для каждого разложения).

Подготовка набора данных. Для проведения экспериментов было решено создать набор данных на основе датасета LSUN (Large-Scale Scene Understanding Challenge) [16], поскольку в нем представлено относительно большое количество категорий объектов с разным числом доступных изображений, а сами картинки имеют размер от 256×256 пк, что почти совпадает с размером входных изображений для исследуемых моделей при обучении на стандартном датасете ImageNet² – 224×224 пк. Для создаваемого набора данных были выбраны пять категорий: «автобус», «автомобиль», «мотоцикл», «корабль» и «самолет». Для обучения и валидации взяты первые 10 000 изображений из каждой категории, а для тестирования использованы по 10 000 картинок, начиная с 100 000-й. Во всех категориях количество данных позволяло это делать. При необходимости размер любой из них можно было бы увеличить, но 10 000 изображений каждой категории на обучение вместе с валидацией и 10 000 картинок на тестирование должно быть вполне достаточно для задачи классификации изображений.

Исходные наборы данных хранятся в формате базы данных LMDB (Lightning Memory-Mapped Database), поэтому для удобства работы каждое изображение извлекалось в отдельный файл перед запуском обучения моделей. Картинки сначала приводились к квадратной форме путем удаления пикселей вдоль большей стороны так, чтобы оставшаяся часть была в центре исходного изображения, а затем с помощью интерполяции методом Ланцоша уменьшались в размере до 256×256 пк. Поскольку часто целевой объект находится в центре изображений, удаление пикселей из картинок не должно навредить качеству модели, но может помочь избежать ситуации, при которой большая часть изображений заполняется некоторыми искусственными значениями, а сам объект занимает меньшую часть картинки. Данная процедура применялась к изображениям всех датасетов: тренировочного, валидационного и тестового.

На рис. 6 представлено по восемь примеров из каждой категории, занимающей отдельную строку.

²ImageNet large scale visual recognition challenge (ILSVRC) [Electronic resource]. URL: <https://www.image-net.org/challenges/LSVRC/> (date of access: 21.10.2023).

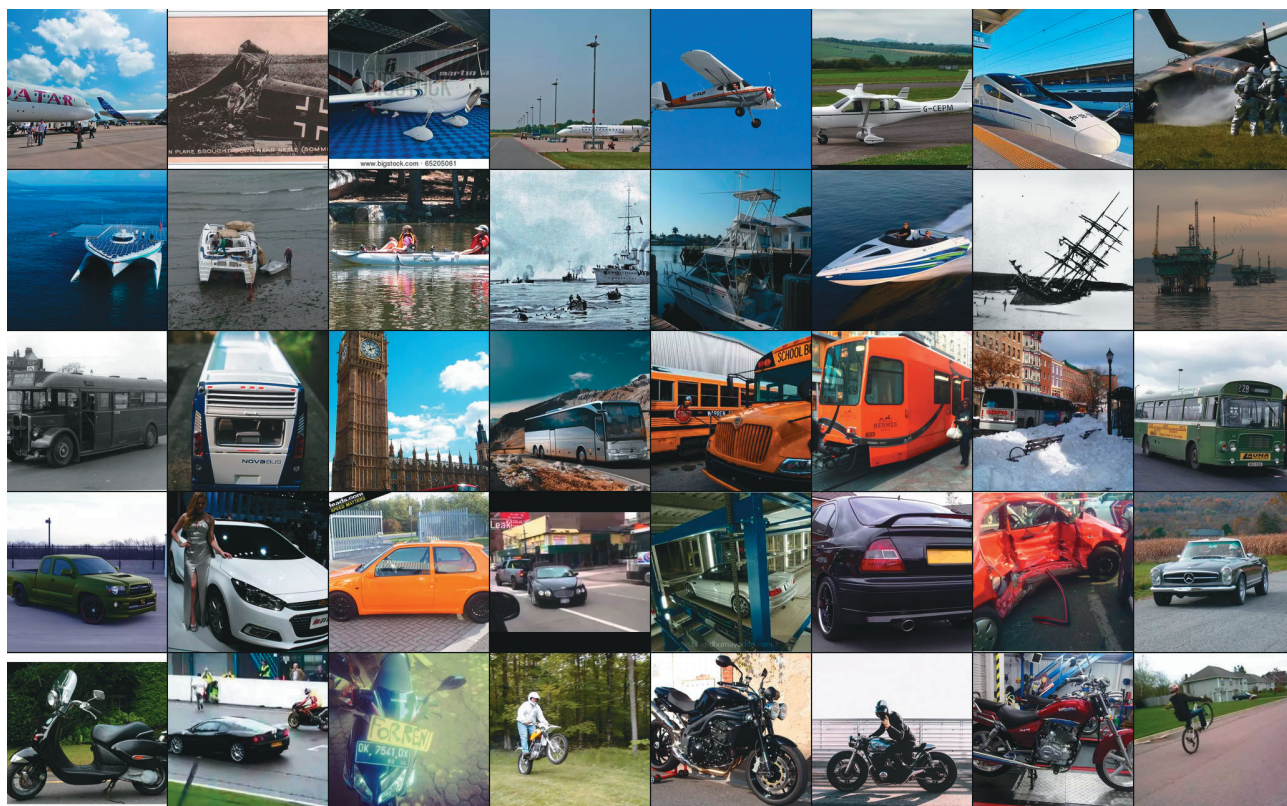


Рис. 6. Примеры изображений из подготовленного датасета
Fig. 6. Images examples from the prepared dataset

Схема обучения

Перед созданием итогового датасета для обучения данные из каждой категории делились на части по 85 % (обучение) и 15 % (валидация). Далее тренировочные данные объединялись в один общий набор и случайно перемешивались с зафиксированным параметром случайности (*seed*). Тестовые данные дополнительно никак не обрабатывались, поскольку изначально отбирались так, чтобы каждая категория была представлена одинаковым количеством изображений. Таким образом, тренировочный, валидационный и тестовый датасеты содержали 42 500, 7500 и 50 000 изображений соответственно. В качестве аугментаций использовалось вырезание случайной области исходного изображения, целевая ширина и высота которой определялись независимо друг от друга случайным образом в диапазоне $[0,75; 1,0]$ от исходных размеров. Полученная картинка приводилась к исходному разрешению с помощью билинейной интерполяции. Также с вероятностью 0,5 применялось отражение изображения относительно вертикальной оси. При проверке качества модели на валидационной и тестовой выборках аугментации отключались, а слой пакетной нормализации переводился в тестовый режим (для нормализации использовались накопленные значения среднего и стандартного отклонения). В качестве препроцессинга для всех моделей посредством линейного отображения изображения переводились из диапазона $[0; 255]$ в диапазон $[-1,0; 1,0]$, а не $[0; 1,0]$. Данное действие обусловлено тем, что значения весов входного сверточного слоя инициализируются из равномерного распределения случайных чисел, которое симметрично относительно нуля (использовался метод Глорота). Такой подход к масштабированию входных изображений может помочь обучению первого слоя моделей, поскольку минимальное и максимальное значения входных изображений также будут симметричны относительно нуля, а максимальное по модулю значение не превысит 1,0. На вход моделей поступали изображения размером 256×256 пк. Для обучения моделей использовался оптимизатор Adam со скоростью обучения 0,001 и размером пакета (батча), равным 64. Поскольку классы в данных были полностью сбалансированы, то в качестве функции потерь выбрана категориальная кросс-энтропия, а в качестве метрики – точность (*accuracy*). Максимальная продолжительность обучения устанавливалась равной 100 эпохам с возможностью ранней остановки при отсутствии улучшения метрики на валидационном наборе в течение 15 эпох.

Модели были реализованы с помощью фреймворка TensorFlow. Обучение проходило на вычислительном стенде с графическим процессором Nvidia RTX 3090 (24 Гб).

Результаты

В таблице представлены результаты, показанные моделями на тестовом наборе данных. Можно видеть, что при грамотном использовании сверточных вейвлет-блоков общее количество параметров моделей незначительно увеличивается, но при этом ощутимо уменьшается количество параметров исходных моделей. В итоге, получив лишь небольшую потерю в качестве, можно добиться уменьшения объема модели вплоть до 40 %. Стоит отметить, что из протестированных моделей лучше всего себя показала архитектура MobileNetV2. Данный факт может быть связан с тем, что авторы этой модели изначально закладывали возможность контролировать ее сложность с помощью константы.

Для архитектуры ResNetV2-50 также были протестированы версии модели, в которых последний (пятый) блок уменьшения размерности не подвергался изменениям (обозначены как «nob5»). Использование такого варианта модели связано с тем, что именно в данном блоке содержится очень большое количество параметров, и при определенных способах встраивания вейвлет-преобразований их число существенно увеличивается. Результаты сходимости стандартной модели ResNetV2-50 на валидационном наборе представлены на рис. 7, а результаты сходимости модели без модификации пятого блока – на рис. 8.

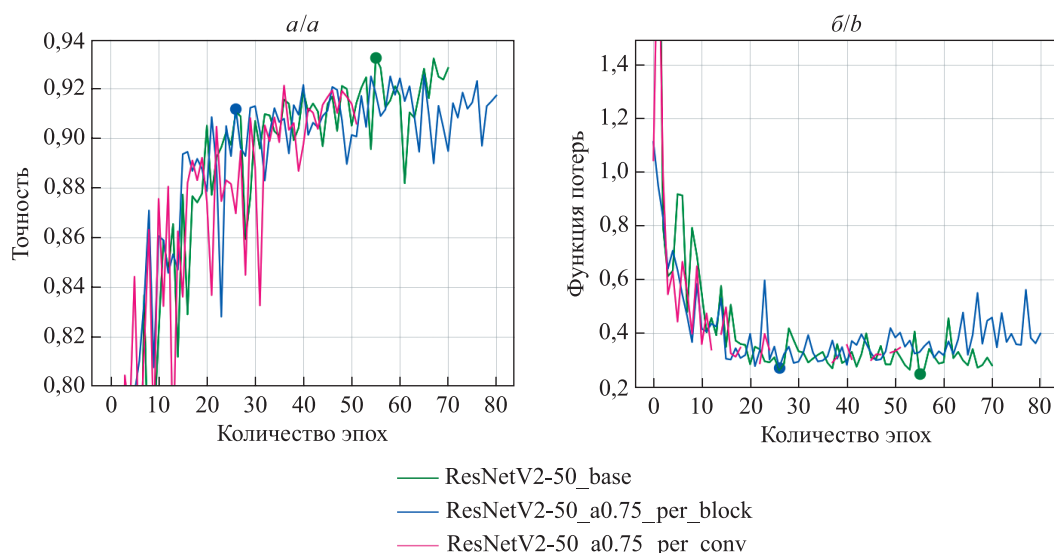


Рис. 7. Сходимость стандартной модели ResNetV2-50
(*a* – точность; *b* – функция потерь)

Fig. 7. Convergence of the standard ResNetV2-50 model
(*a* – valid accuracy; *b* – valid loss)

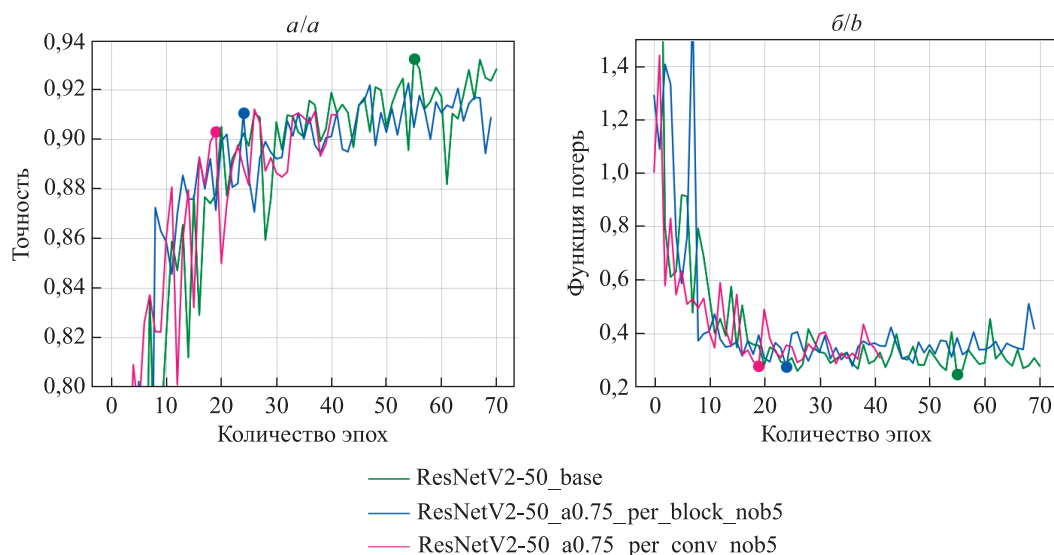


Рис. 8. Сходимость модели ResNetV2-50 без модификации пятого блока
(*a* – точность; *b* – функция потерь)

Fig. 8. Convergence of the ResNetV2-50 model without modification of the fifth block
(*a* – valid accuracy; *b* – valid loss)

Модель MobileNetV2 оказалась оптимальным вариантом для рассматриваемой задачи: исходная модель показала наилучшие результаты на тестовой выборке среди всех протестированных архитектур (она также имеет меньший размер), а лучшая модифицированная версия потеряла в качестве менее 0,3 % на тестовой выборке, но при этом ее размер удалось уменьшить на 33,7 %. Результаты сходимости моделей данного семейства на валидационной выборке представлены на рис. 9.

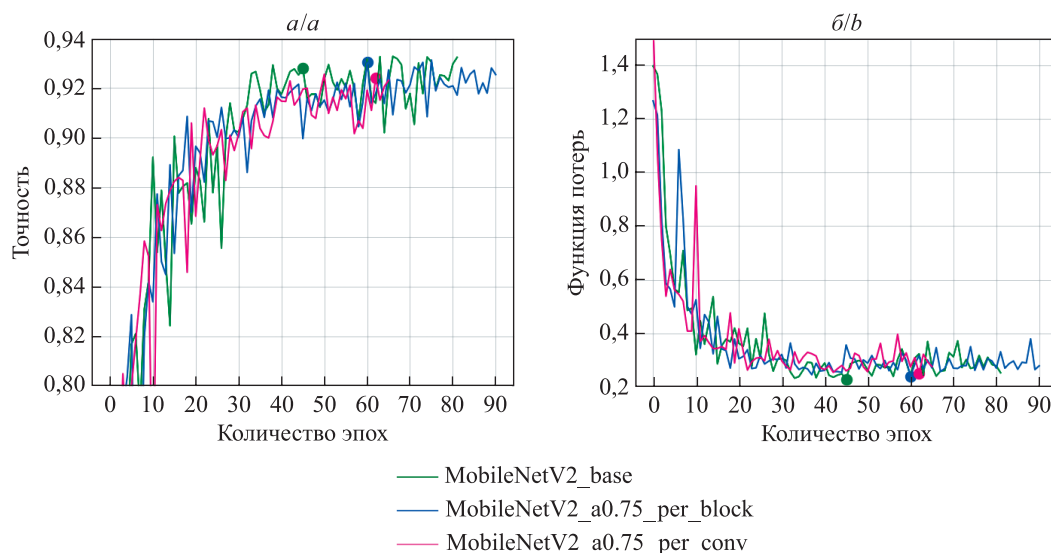


Рис. 9. Сходимость модели MobileNetV2
(a – точность; б – функция потерь)

Fig. 9. MobileNetV2 model convergence
(a – valid accuracy; b – valid loss)

Обучение модели EfficientNetV2-B0 проходило крайне тяжело: значение метрики на валидационном датасете не могло стабилизироваться, и с течением времени модель расходилась, причем данное поведение не зависело от того, использовались ли стандартные настройки обучения или настройки обучения, предложенные авторами архитектуры в работе [12]. Итоговые результаты заметно уступают результатам других протестированных семейств моделей. Графики сходимости модели EfficientNetV2-B0 на валидационном наборе данных представлены на рис. 10.

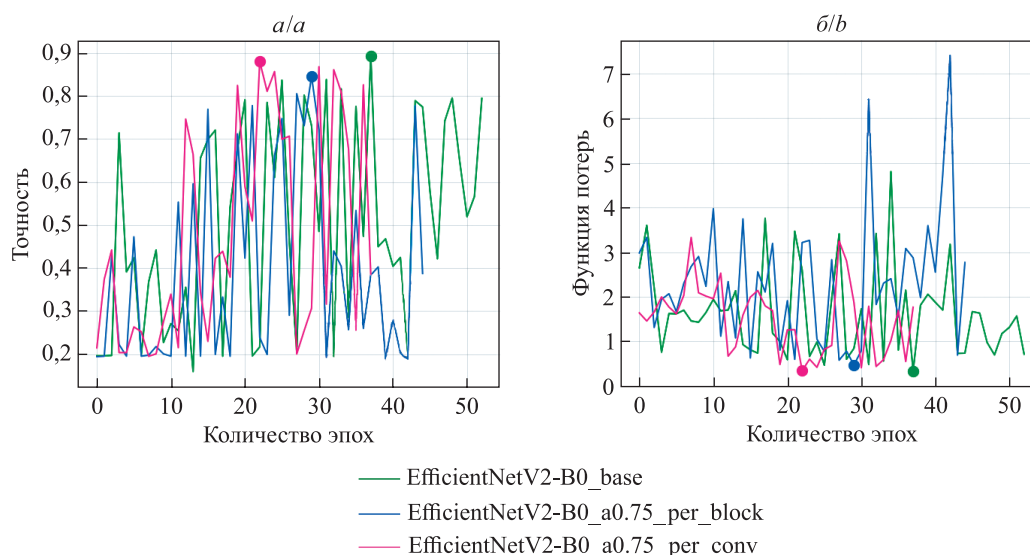


Рис. 10. Сходимость модели EfficientNetV2-B0
(a – точность; б – функция потерь)

Fig. 10. EfficientNetV2-B0 model convergence
(a – valid accuracy; b – valid loss)

Сравнение результатов
 Comparison of results

Модель	Количество общих параметров	Количество DWT-параметров	Доля DWT-параметров	Размер, Мб	Метрика (<i>accuracy</i>)
ResNetV2-50_base	$23,56 \cdot 10^6$	0	0	90,1	0,9349
ResNetV2-50_a0.75_per_block	$16,63 \cdot 10^6$	$3,22 \cdot 10^6$	0,194	60,7 (–32,6 %)	0,9227 (–0,0122)
ResNetV2-50_a0.75_per_conv	$38,15 \cdot 10^6$	$24,74 \cdot 10^6$	0,648	111,0 (+23,2 %)	0,9229 (–0,0120)
ResNetV2-50_a0.75_per_block_nob5	$20,08 \cdot 10^6$	$786,0 \cdot 10^3$	0,039	76,1 (–15,5 %)	0,9285 (–0,0064)
ResNetV2-50_a0.75_per_conv_nob5	$29,20 \cdot 10^6$	$9,89 \cdot 10^6$	0,339	97,8 (+8,5 %)	0,9113 (–0,0236)
MobileNetV2_base	$2,26 \cdot 10^6$	0	0	8,9	0,9355
MobileNetV2_a0.75_per_block	$1,49 \cdot 10^6$	$94,0 \cdot 10^3$	0,063	5,9 (–33,7 %)	0,9324 (–0,0031)
MobileNetV2_a0.75_per_conv	$1,62 \cdot 10^6$	$221,0 \cdot 10^3$	0,137	6,3 (–29,2 %)	0,9286 (–0,0069)
EfficientNetV2-B0_base	$5,92 \cdot 10^6$	0	0	22,8	0,8944
EfficientNetV2-B0_a0.75_per_block	$3,52 \cdot 10^6$	$42,0 \cdot 10^3$	0,012	13,7 (–39,9 %)	0,8844 (–0,0100)
EfficientNetV2-B0_a0.75_per_conv	$3,86 \cdot 10^6$	$380,0 \cdot 10^3$	0,098	15 (–34,2 %)	0,8488 (–0,0456)

Примечание. В графах «размер» и «метрика (*accuracy*)» в скобках указана величина изменения соответствующих значений относительно базовой модели.

Заключение

В данной работе реализован алгоритм быстрого дискретного вейвлет-преобразования для семейства CDF-9/7 на основе соответствующей лифтинг-схемы. Полученный алгоритм распространен на случай четырехмерного входа для возможности работы с изображениями в сверточных нейронных сетях. Для реализации алгоритма использовались векторные операции сложения и умножения, благодаря чему его легко можно встроить в существующие модели компьютерного зрения, сохранив возможность их обучения методом обратного распространения ошибки. Константы, использованные в лифтинг-схеме, также можно сделать обучаемыми параметрами. На основе разработанного алгоритма реализован сверточный вейвлет-блок, который был успешно встроен в модели ResNetV2-50, MobileNetV2 и EfficientNetV2-B0. Исходные и модифицированные версии этих моделей проверены в задаче классификации изображений на наборе данных, созданном на основе датасета LSUN. Благодаря использованию вейвлет-блоков удалось масштабировать исходные модели за счет уменьшения количества фильтров в сверточных слоях, сохранив при этом сопоставимый уровень качества. При оптимальном встраивании вейвлет-блоков в модели разница в метриках составляет 0,3–1,2 %, однако полученные сети занимают на 30–40 % меньший объем памяти на диске. В лучшем случае (модель на основе MobileNetV2) удалось добиться сжатия размера весов с 8,9 до 5,9 Мб (–33,7 %), потеряв в качестве лишь 0,31 %.

Библиографические ссылки / References

1. Simonyan K, Zisserman A. Very deep convolutional networks for large-scale image recognition. arXiv:1409.1556v6 [Preprint]. 2015 [cited 2024 January 2]: [14 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1409.1556v6>.
2. He K, Zhang X, Ren S, Sun J. Deep residual learning for image recognition. arXiv:1512.03385 [Preprint]. 2015 [cited 2024 January 2]: [12 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1512.03385>.
3. Tan M, Le QV. EfficientNet: rethinking model scaling for convolutional neural networks. arXiv:1905.11946v5 [Preprint]. 2020 [cited 2024 January 2]: [11 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1905.11946v5>.
4. Cheng H, Zhang M, Shi JQ. A survey on deep neural network pruning-taxonomy, comparison, analysis, and recommendations. arXiv:2308.06767 [Preprint]. 2023 [cited 2024 January 2]: [23 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/2308.06767>.

5. Blake C, Orr D, Luschi C. Unit scaling: out-of-the-box low-precision training. arXiv:2303.11257v2 [Preprint]. 2023 [cited 2024 January 2]: [29 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/2303.11257v2>.
6. Zhang Shuai, Guangdi Ma, Yang Weichen, Fang Zuo, Ablameyko SV. Car parking detection in images by using a semi-supervised modified YOLOv5 model. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2023;3:72–81. EDN: XVDRSN.
7. Singh A, Kingsbury N. Efficient convolutional network learning using parametric log based dual-tree wavelet ScatterNet. arXiv:1708.09259 [Preprint]. 2017 [cited 2024 January 2]: [8 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1708.09259>.
8. Li Q, Shen L, Guo S, Lai Z. Wavelet integrated CNNs for noise-robust image classification. arXiv:2005.03337v2 [Preprint]. 2020 [cited 2024 January 2]: [17 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/2005.03337v2>.
9. Wolter M, Blanke F, Heese R, Garcke J. Wavelet-packets for deepfake image analysis and detection. arXiv:2106.09369v4 [Preprint]. 2022 [cited 2024 January 2]: [29 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/2106.09369v4>.
10. He K, Zhang X, Ren S, Sun J. Identity mappings in deep residual networks. arXiv:1603.05027v3 [Preprint]. 2016 [cited 2024 January 2]: [15 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1603.05027v3>.
11. Sandler M, Howard A, Zhu M, Zhmoginov A, Chen L-C. MobileNetV2: inverted residuals and linear bottlenecks. arXiv:1801.04381v4 [Preprint]. 2019 [cited 2024 January 2]: [14 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1801.04381v4>.
12. Tan M, Le QV. EfficientNetV2: smaller models and faster training. arXiv:2104.00298v3 [Preprint]. 2021 [cited 2024 January 2]: [11 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/2104.00298v3>.
13. Lepik Ü, Hein H. *Haar wavelets: with applications*. Cham: Springer; 2014. X, 207 p. (Hillermeier C, Schröder J, Weigand B, editors. Mathematical engineering). DOI: 10.1007/978-3-319-04295-4.
14. Daubechies I. *Ten lectures on wavelets*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics; 1992. XIX, 357 p. (CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics; volume 61).
15. Cohen A, Daubechies I, Feauveau J-C. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1992;45(5):485–560. DOI: 10.1002/cpa.3160450502.
16. Yu F, Seff A, Zhang Y, Song S, Funkhouser T, Xiao J. LSUN: construction of a large-scale image dataset using deep learning with humans in the loop. arXiv:1506.03365v3 [Preprint]. 2016 [cited 2024 January 2]: [9 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1506.03365v3>.

Получена 07.01.2024 / исправлена 16.06.2024 / принята 16.06.2024.
Received 07.01.2024 / revised 16.06.2024 / accepted 16.06.2024.

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОНУКЛЕОТИДНЫХ ГЕНЕТИЧЕСКИХ ПОЛИМОРФИЗМОВ

Н. Н. ЯЦКОВ¹⁾, В. В. АПАНАСОВИЧ²⁾, В. В. ГРИНЕВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

²⁾Независимый исследователь, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Для идентификации однонуклеотидных полиморфизмов в последовательностях молекул ДНК предложен подход, основанный на имитационном моделировании сайтов отдельных нуклеотидов с использованием генерации случайных событий по бета-распределению или нормальному распределению, параметры которых оцениваются на базе имеющихся экспериментальных данных. Разработанный подход повышает точность определения однонуклеотидных полиморфизмов в молекулах ДНК и позволяет исследовать достоверность результатов отдельных экспериментов и оценить точность параметров, полученных в реальных условиях проведения эксперимента. Имитационная модель и методы анализа верифицированы на наборе данных геномного секвенирования молекул ДНК человека, предоставленных консорциумом GIAB (Genome in a Bottle Consortium). Выполнен сравнительный анализ известных статистических алгоритмов идентификации однонуклеотидных полиморфизмов и методов машинного обучения, параметры которых настраиваются по смоделированным данным геномного секвенирования молекул ДНК человека. Лучшие результаты получены для моделей машинного обучения, у которых точность идентификации сайтов однонуклеотидных полиморфизмов на 2–5 % выше, чем у классических статистических методов.

Ключевые слова: однонуклеотидный генетический полиморфизм; обнаружение однонуклеотидных полиморфизмов; имитационное моделирование; машинное обучение.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (грант № 3.04.3.1, № гос. регистрации 20211918).

Образец цитирования:

Яцков НН, Апанасович ВВ, Гринев ВВ. Имитационное моделирование однонуклеотидных генетических полиморфизмов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;2:104–112 (на англ.).
EDN: JHAXAE

For citation:

Yatskou MM, Apanasovich VV, Grinev VV. Simulation modelling of single nucleotide genetic polymorphisms. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;2:104–112.
EDN: JHAXAE

Авторы:

Николай Николаевич Яцков – кандидат физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой системного анализа и компьютерного моделирования факультета радиопизики и компьютерных технологий.

Владимир Владимирович Апанасович – доктор физико-математических наук, профессор; независимый исследователь.

Василий Викторович Гринев – кандидат биологических наук, доцент; доцент кафедры генетики биологического факультета.

Authors:

Mikalai M. Yatskou, PhD (physics and mathematics), docent; head of the department of systems analysis and computer simulation, faculty of radiophysics and computer technologies.
yatskou@bsu.by

Vladimir V. Apanasovich, doctor of science (physics and mathematics), full professor; independent researcher.
apanasovichv@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-4525-4234>

Vasily V. Grinev, PhD (biology), docent; associate professor at the department of genetics, faculty of biology.
grinev_vv@bsu.by

SIMULATION MODELLING OF SINGLE NUCLEOTIDE GENETIC POLYMORPHISMS

M. M. YATSKOU^a, V. V. APANASOVICH^b, V. V. GRINEV^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

^bIndependent researcher, Minsk, Belarus

Corresponding author: M. M. Yatskou (yatskou@bsu.by)

Abstract. We propose an approach for the identification of single nucleotide polymorphisms (SNPs) in DNA sequences, based on the simulation modelling of sites of single nucleotides using the generation of random events according to the beta or normal distributions, the parameters of which are estimated from the available experimental data. The developed approach improves the accuracy of determining SNPs in DNA molecules and permits to investigate the reliability of specific experiments as well as to estimate the errors of determination of the parameters obtained in real experimental conditions. The verification of the simulation model and analysis methods is carried out on a set of reference human genomic DNA sequencing data provided by the Genome in a Bottle Consortium. The comparative analysis of the existing statistical SNP identification algorithms and machine learning methods, trained on the simulated data from the genomic sequencing of human DNA molecules, is carried out. The best results are obtained for machine learning models, in which the accuracy of SNP identification is 2–5 % higher than for classical statistical methods.

Keywords: single nucleotide polymorphism; SNP; SNP identification; simulation modelling; machine learning.

Acknowledgements. This work was carried out in the framework of the state programme of scientific research «Convergence-2025» (grant No. 3.04.3.1, state registration No. 20211918).

Introduction

Genetic polymorphism affects the human phenotype and other living organisms [1]. Single nucleotide polymorphisms (SNPs) are one of the most common types of genetic variation in the human genome. Knowledge of the genes involved in cancer development, combined with the ability of genome sequencing and bioinformatics analysis, is an important tool for screening patients at risk and assisting in genetic counseling [2].

Statistical methods of binomial distribution, entropy-based, Fisher's exact tests and machine learning methods are applied for identifying the SNPs in humans and plants [1; 3; 4]. These methods are quite universal and simple for programme implementation, however, they are computationally expensive and difficult to be effectively applied in the analysis of experimental data with a high noise level and various experimental distortions, which are the sources of gaps, repetitions, and other anomalous values [5]. Practical experimental studies use simulation modelling to select a proper SNP identification algorithm, test competing pipelines of analysis, and evaluate the performance of specific experimental designs for studying biophysical systems [6; 7]. Simulations are critical for testing methods and studying the effects of different phenotypic and genetic architectures of biological traits. Modelled genotypes and phenotypes reflect the intended understanding of the true structure of the phenotype, but do not guarantee the biological correctness of real phenotypes [8]. Simulation modelling is also used to generate training data for machine learning methods to directly identify SNP sites in real data from a single sequencing experiment [4]. In this case, the formation of simulated training data can have advantages in terms of accuracy and efficiency in the analysis of experimental data both with a low coverage (a number of nucleotide reads) and with gaps due to experimental distortions.

Various approaches to mathematical modelling of genetic polymorphisms, based on accounting the parameters of experimental equipment, the use of probabilistic models and statistical methods, and auxiliary biological information, are published elsewhere [9; 10]. However, due to complexities in the types of genetic data, modelling methods, data formats, terminology, and assumptions made in existing software applications, choosing a reliable tool for a particular study could be a resource- and time-consuming process [11]. It should be noted that only a few modelling methods use experimental results (or measured parameters) and a complex simulation scheme with a covariant noise structure. As the complexity of analysis increases, researchers need sophisticated modelling of realistic genotype and phenotype structures from the measured characteristics of specific experiments. Simulated data from a particular experiment provide more accurate training datasets for machine learning algorithms to identify SNP sites.

This article presents an approach for simulating SNP sites in DNA sequences based on the beta and normal distributions, the parameters of which are determined from the available experimental data. It allows us to model the features of specific experiments and form learning datasets for training classification models of machine learning algorithms. The performance of the developed computational algorithms is confirmed in the course of a comparative analysis of the most effective existing statistical algorithms for identifying SNP sites on experimental human genomic sequencing data.

Methodology

Simulation modelling of SNPs in DNA sequences. The object (nucleotide sites of sequenced DNA molecules) can be investigated using a natural experiment or simulation modelling [12]. The scheme of study of the object according to experimental data is shown in fig. 1.

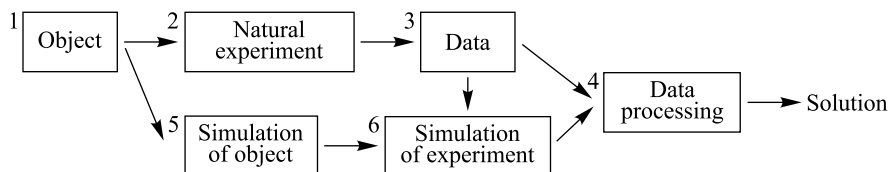


Fig. 1. Scheme of the study of sequenced DNA molecules in natural and simulation experiments

In a natural sequencing experiment (see fig. 1, block 2), data from the object of study (block 1) are recorded. Data processing is carried out in block 6, analysing the integral characteristics of the data, and in block 4, identifying the SNPs. The choice of data processing methods is determined by the specifics of a certain problem being solved and includes methods and models for finding the required solution. In a simulated or computational experiment (blocks 5 and 6) the same object model is considered as in the real experiment (block 2). The mathematical model of the object under study M can be either parametric (the operator of mathematical transformations F is known up to some parameters A), or non-parametric (a family of operators F is considered, among which the suitable ones are selected for solving a given problem), and includes a physical model, representing both the object and the experimental sequencing facility (block 2). To describe the behaviour of the object in various experiments, it is required to include the output experimental characteristics of the equipment and the recorded data (block 3) in the object of simulation. The concept of an object of simulation includes modelling the behaviour of the object under specific experimental conditions (for example, with known distributions and parameters describing the data). Modelling nucleotide sites based on the estimated characteristics of the experimental data is carried out in block 6. In block 4, data processing is performed, namely, the search for SNP sites using a proper algorithm. The choice of data processing methods is determined by the complexity of real data (a low coverage, gaps, duplicates, a high level of experimental noise, etc.). To confirm the validity of simulation models, a comparison of the data characteristics of computational and natural experiments is required. For generative modelling tasks, applied to improve the prediction accuracy of machine learning models, the presence of experimental data might not be necessary.

Algorithm for simulation of SNP sites. The subsection describes the algorithm for simulating SNP sites, assuming that the main data characteristics, such as the numbers of nucleotide coverages, are of the beta or normal distributions [13], whose parameters are determined from the available experimental data.

Suppose a site j contains the reference nucleotide base r (nucleotides A, C, G or T, indicating the alignments of the sequenced reads on the reference genome [1]); $D = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ is a set of n reads (coverage) of nucleotide bases A, C, G or T, recorded from sequencing the site j ; the number of coverage n (also the numbers of nucleotide bases b_1, b_2, b_3, b_4 , characterising a given nucleotide coverage in the site j) obey the beta (1) or normal (2) distributions:

$$n_b(x, \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) + \Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad (1)$$

where β and α ($\beta, \alpha > 0$) are some parameters that determine the shape of the distribution curve; Γ is the gamma function;

$$n_g(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2)$$

where μ and σ are parameters of the mathematical mean and standard deviation.

The idea of modelling is to randomly generate N_{SNP} positions of SNP sites in the sequence of the considered molecule S , consisting of N nucleotide sites, for each of which the numbers n, b_1, b_2, b_3, b_4 are reproduced according to the beta or normal distributions in the defined range $[n_{\min}; n_{\max}]$. For a non-reference site j , the number of coverage n is modelled, then the numbers of coverages for the reference b_{Ref} and non-reference b_{nonRef} nucleotides are generated from the resulting n . Nucleotide coverages for the SNP site are modelled similarly.

It is assumed that there are coverages of no more than two different nucleotide bases on the site. The proposed simulation algorithm reproduces datasets as close as possible to experimental conditions, given by the numbers of nucleotide coverages and the laws of their distributions, the number of SNP sites. The flow diagram of the algorithm for modelling SNP sites is shown in fig. 2.

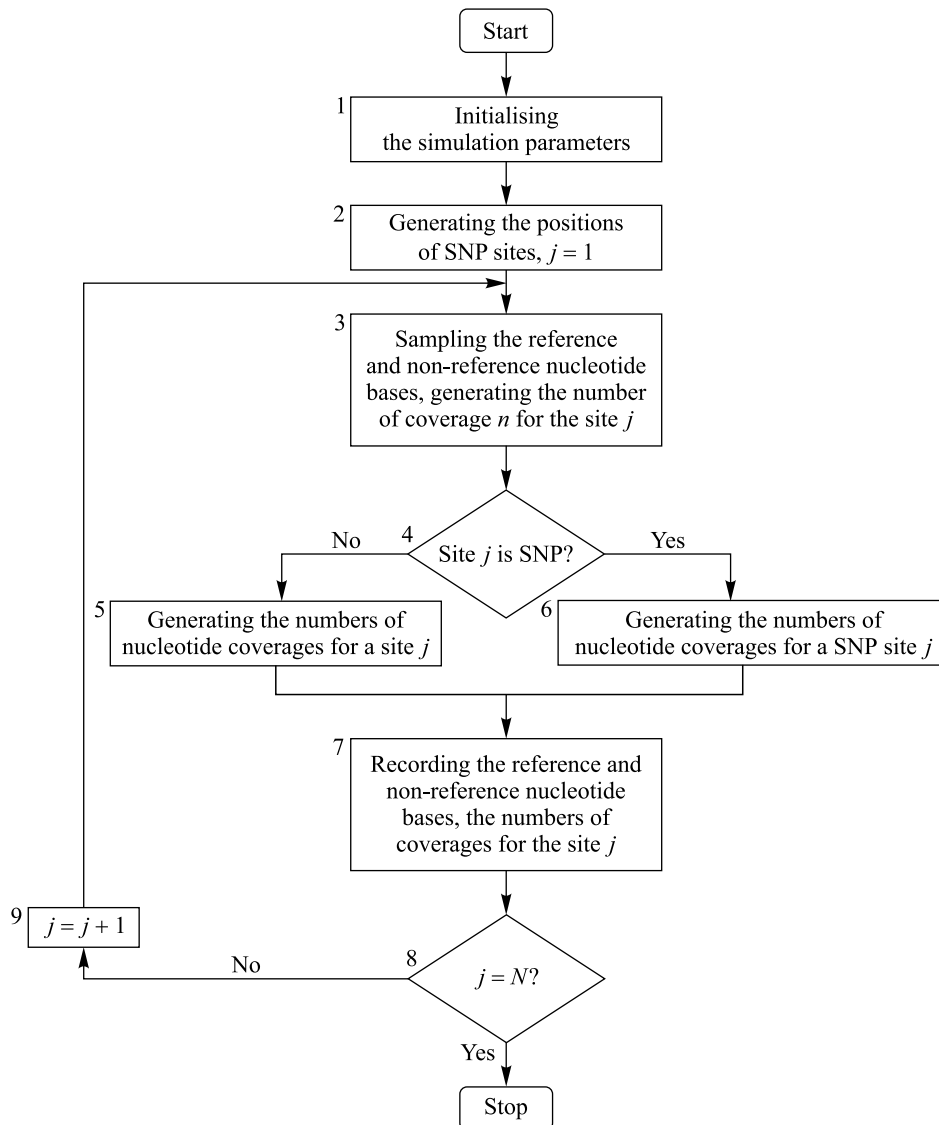


Fig. 2. Flow diagram of the algorithm for modelling SNP sites

Algorithm

Step 1: initialise the model parameters N , N_{SNP} , n_{min} and n_{max} , α and β (or μ and σ) (see fig. 2, block 1). Experimentally extracted sets of the parameters α and β (or μ and σ) of the beta (or normal) distribution for SNP and non-SNP sites are given for simulating the numbers n , b_1 , b_2 , b_3 , b_4 .

Step 2: generate the SNP site positions $L = \{l_1, l_2, \dots, l_{N_{\text{SNP}}}\}$ in the sequence S according to the uniform discrete distribution in the interval $[1; N]$ (block 2). Set the position index $j = 1$.

Step 3: sample the reference and non-reference nucleotide bases, gamble the total number of reads n on the current site j as a realisation of a random variable of the beta or normal distribution with experimentally extracted parameters (block 3).

Step 4: check if the site j is SNP, i. e. $j \in L$ (block 4). Accordingly go to step 5 or 6.

Step 5: generate the numbers of coverages of nucleotide bases b_1, b_2, b_3, b_4 by the beta distribution with experimentally assessed parameters for non-SNP sites (block 5). Go to step 7.

Step 6: generate the numbers of nucleotide coverages b_1, b_2, b_3, b_4 by the beta distribution with experimentally assessed parameters for SNP sites (block 6).

Step 7: record the simulated characteristics of the site j to a data file (block 7).

Step 8: check the termination condition of the simulation algorithm (block 8). If all sites in the sequence are simulated, i. e. $j = N$, then stop the simulation. Otherwise $j = j + 1$ (block 9) and go to step 3.

Machine learning methods. To apply the machine learning algorithms [14; 15], it is necessary to form a set of features characterising a nucleotide site. It was decided to use four features: X_1 is the number of coverage of the reference nucleotide; $X_2 - X_4$ are the numbers of coverages for non-reference nucleotides sorted in descending order. The data are normalised to the number of coverage n .

Taking into account the limited number of four features, and the binary classification problem (SNP and non-SNP site classes) to be solved, it is preferable to test the basic machine learning methods [16], such as conditional inference trees (CIT) [17], classification and regression tree (CART) [18] and support vector machines with a linear separating function (SVM) [19].

Evaluating SNP identification algorithms. The performance of the algorithms is evaluated using the standard classification measures for unbalanced classes, such as precision (P), recall (R) and score F_1 , characterising the properties of the algorithms accept false positive (FP), non-SNPs as SNPs (precision) and false negative (FN), SNPs as non-SNPs (recall), events and their combined contribution F_1 (equations (3)–(5), where TP is true positive) [20]:

$$P = \frac{TP}{TP + FP}, \quad (3)$$

$$R = \frac{TP}{TP + FN}, \quad (4)$$

$$F_1 = \frac{2}{P^{-1} + R^{-1}}. \quad (5)$$

Programme development of algorithms. In the course of the work, R-functions are developed that implement various stages of simulation modelling and SNP identification algorithms. It is proposed to integrate the developed functions into a dedicated R-package that can be used to model synthetic datasets, according to a concrete experiment, in order to comprehensively test and select the best algorithms for identifying SNP sites, as well as for generative data modelling to train identification algorithms based on machine learning models. The statistical analyses were conducted using the R-functions *dbeta*, *dnorm*, *nls*, *ctree*, *rpart* and *svm* [21].

Results

Experimental data. Reference data on human chromosomes 10 and 22, publicly available from the Genome in a Bottle Consortium (GIAB), are taken as experimental datasets [22]. The choice of GIAB data is due to the fact that today it is the most reliable benchmark data for solving problems related to the study of genomic polymorphism in humans (from the development of new instrumental methods of «wet» biology to the comparison of algorithms for detecting polymorphic sites). The dataset on chromosomes 22, used for recovering the experimental parameters for simulation modelling, contains characteristics of 29 633 768 nucleotide sites, of which 36 150 are truly identified SNPs. A fragment of the dataset is presented in table 1.

Table 1

Fragment of the experimental dataset

Chromosome : position	Reference	Nucleotide			
		A	C	G	T
chr22 : 47891620	T	0	0	0	27
chr22 : 47891621	G	0	0	28	0
chr22 : 47891622	T	0	0	0	30

Organisation of a computational experiment. We analysed the experimental characteristics of the selected dataset of chromosome 22 in order to determine the distribution laws of the nucleotide coverages and to estimate their unknown parameters. Then we checked the adequacy of the developed mathematical model. The machine learning models were trained on specially simulated datasets, generated with the estimated experimental parameters of data distributions on the chromosome 22. Based on the selected sets of experimental data on chromosomes 10 and 22, we conducted a comparative analysis of the most effective existing (traditional or classical) statistical SNP identification and machine learning algorithms, trained on simulated data.

Analysis of the experimental characteristics of genomic sequencing datasets. We analysed the histograms of the number of coverage n , the maximum number of nucleotide coverages $\max\{b_i\}$ and residuals between the total and maximum numbers of coverages $m = n - \max\{b_i\}$ for non-SNP and SNP sites. Approximations of histograms were performed using the density functions of the beta and normal distributions (the R-functions $dbeta$ and $dnorm$). To estimate the parameters of distributions, the nonlinear least-squares method was used (the R-function nls). The results of histogram approximations are shown in fig. 3.

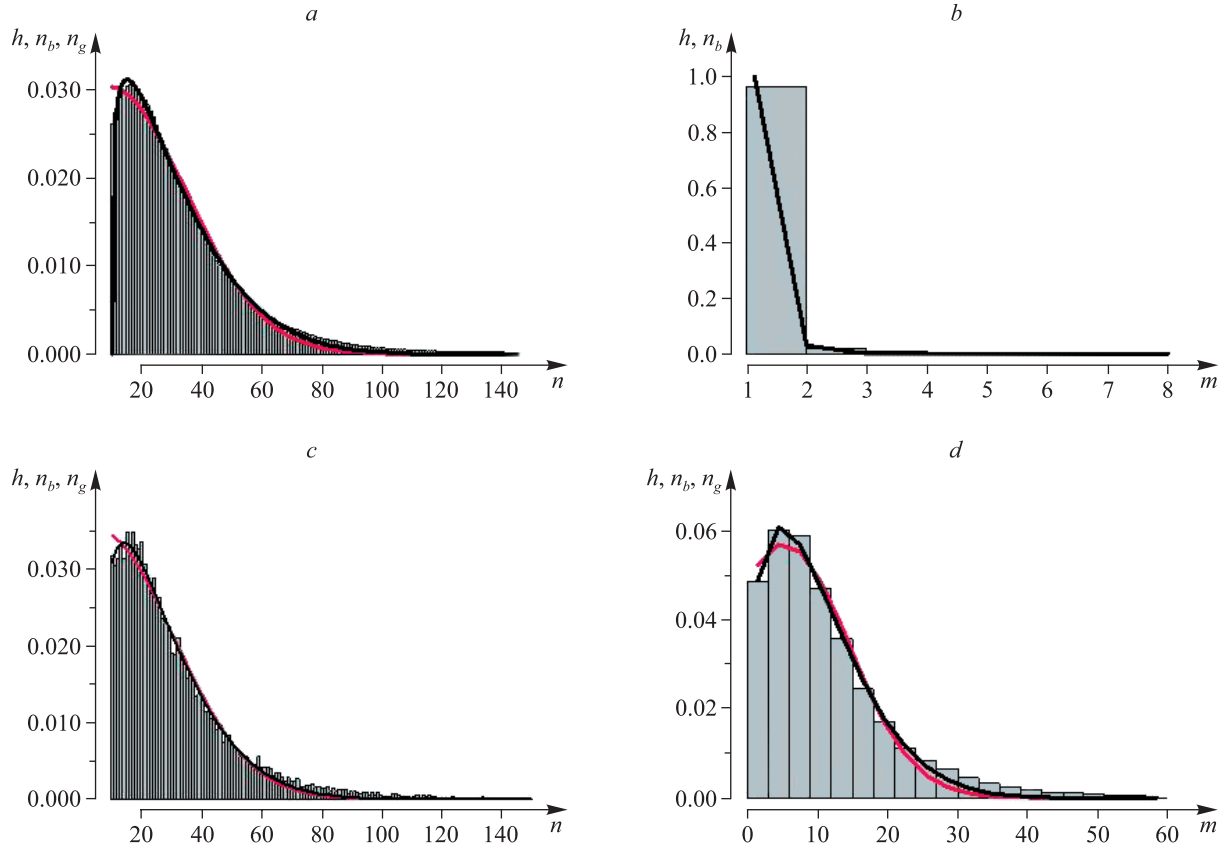


Fig. 3. Normalised histograms h of the number of coverage n (a, c) and the residuals between the total and maximum numbers of coverages m (b, d) for non-SNP (a, b) and SNP (c, d) sites. Approximations are made by the density functions of the beta n_b (black) and normal n_g (red) distributions; parameter estimates are $\alpha = 1.57$ (standard error is equal 0.02), $\beta = 7.9$ (0.2), and $\mu = 9.2$ (1.1), $\sigma = 25.9$ (0.7) for the fragment a ; $\alpha = 0.5$ (standard error is equal 0.05), $\beta = 20$ (2) for the fragment b ; $\alpha = 1.45$ (standard error is equal 0.02), $\beta = 8.4$ (0.2), and $\mu = 5.8$ (1.6), $\sigma = 25.2$ (0.8) for the fragment c ; $\alpha = 1.71$ (standard error is equal 0.05), $\beta = 7.7$ (0.3), and $\mu = 5.3$ (0.6), $\sigma = 9.2$ (0.6) for the fragment d

Our results suggest that the beta distribution is appropriate for the studied integral characteristics of the considered experimental data. The normal distribution is less accurate, but its application might be valid to other types of experiments, possibly demonstrating essential normality in data distributions. It should be noted that it is possible to apply in simulation models other types of probability distributions.

The experimental estimates of the distribution parameters are further used in the simulation model to generate training data for machine learning methods. A fragment of the simulated dataset is presented in table 2.

Table 2

Fragment of the simulated dataset

Chromosome : position	Reference	Nucleotide			
		A	C	G	T
chrX : 1	G	0	0	33	0
chrX : 2	C	0	14	0	0
chrX : 3	T	0	0	0	20

As a test of the validity of the developed model, we use visual inspection of the plots of simulated and experimentally verified histograms for the number of coverage n and the accuracy of restoring the modelled parameters when estimating the distribution parameters. We simulated a sequence of 10 000 sites with the parameters of the beta and normal distributions, reconstructed from the experimental data, and approximated the histograms using the beta and normal distributions. Model parameters were estimated using the R-functions *dbeta* and *dnorm*. The histograms were successfully fitted by the given density functions (fig. 4). The parameters of the simulation models are within 95 % confidence intervals of the parameter estimations, which supports the correctness of the developed simulation model, namely, that the procedures for modelling the numbers of site coverages according to the beta and normal distributions are correct.

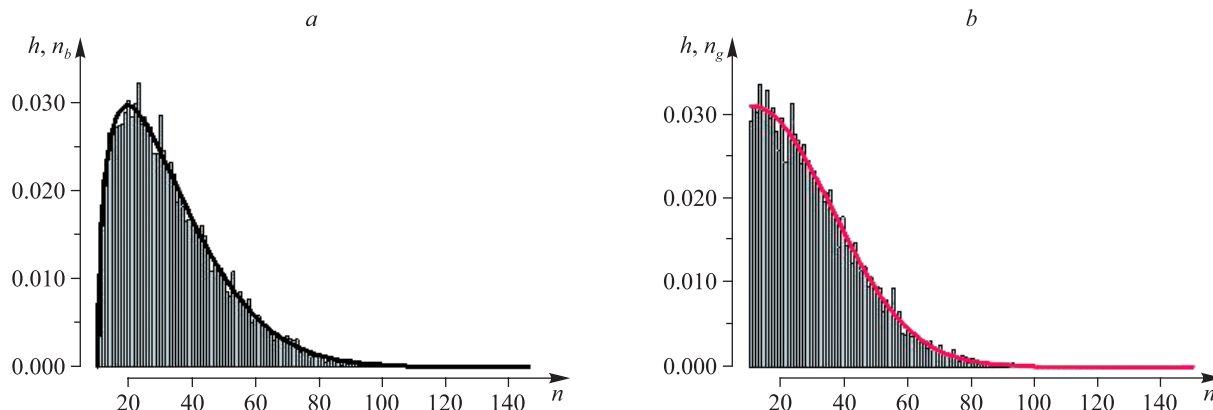


Fig. 4. Normalised histograms h of the number of coverage n in datasets modelled with the experimentally estimated parameters of the beta (a) and normal (b) distributions. Approximations are made by the density functions of the beta n_b (black) and normal n_g (red) distributions; parameter estimations are $\alpha = 1.50$ (standard error is equal 0.02), $\beta = 7.6$ (0.2) for the fragment a ; $\mu = 10.4$ (standard error is equal 0.9), $\sigma = 25.2$ (0.6) for the fragment b

Comparative analysis of SNP identification algorithms. We performed the comparative analysis of the most effective existing statistical SNP identification algorithms, such as binomial distribution test (BDT), entropy-based test (EBT) and Fisher’s exact test (FET), with some fundamental machine learning techniques trained on simulated datasets. An efficient software implementation of BDT was developed, a feature of which is the automation of the selection of a threshold value when identifying SNP sites. It is proposed to use the value 10^{-k} as a threshold value of probabilities, where k is the average number of coverage estimated from the simulated or experimental dataset. As FET, a modification of the algorithm from the R-package *Rsubread* is considered [23]. Our programme implementation of EBT [24] is taken, where thresholds in identifying SNP sites are the entropy E which is more than 0.21 and the p -value which is less than 0.5.

The machine learning methods of CIT (the R-function *ctree* of the package *party*), CART (the R-function *rpart* of the package *rpart*) and SVM (the R-function *svm* of the package *e1071*) were trained on synthetic data simulated with the beta distribution. A training dataset contained 40 000 nucleotide sites, of which 20 000 were SNPs.

Based on the nine selected sets of experimental data on chromosomes 10 and 22, we conducted a comparative analysis of the most effective SNP identification and machine learning algorithms, trained on simulated data. The results of SNP identification at nine datasets of 20 000 sites (per each set), starting from site positions $12 \cdot 10^6$, $60 \cdot 10^6$, $84 \cdot 10^6$, $108 \cdot 10^6$ on chromosome 10 and from site positions $3 \cdot 10^6$, $9 \cdot 10^6$, $15 \cdot 10^6$, $21 \cdot 10^6$, $27 \cdot 10^6$ on chromosome 22, are collected in tables 3 and 4.

Table 3

SNP identification algorithms efficiency by the score F_1 on chromosome 10

Start position	$F_1, \%$					
	BDT	EBT	FET	CIT	CART	SVM
$12 \cdot 10^6$	88.9	100	97.4	100	94.8	97.4
$60 \cdot 10^6$	96.8	94.1	96.9	100	98.4	98.4
$84 \cdot 10^6$	90.3	97.0	96.9	95.4	90.0	90.0
$108 \cdot 10^6$	100	96.9	96.8	100	98.4	98.4
Mean	94.0	97.0	97.0	98.9	95.4	96.1

Table 4

SNP identification algorithms efficiency
by the score F_1 on chromosome 22

Start position	$F_1, \%$					
	BDT	EBT	FET	CIT	CART	SVM
$3 \cdot 10^6$	15.4	17.1	11.8	22.2	21.1	20.0
$9 \cdot 10^6$	97.2	97.3	94.3	98.6	95.8	95.8
$15 \cdot 10^6$	86.7	95.7	90.6	98.5	90.3	92.1
$21 \cdot 10^6$	90.3	82.9	91.4	97.1	87.5	90.9
$27 \cdot 10^6$	92.7	88.9	97.5	97.6	95.0	97.6
Mean	76.5	76.4	77.1	82.8	77.9	79.3

Chromosome 10. The highest mean score F_1 was obtained for the CIT machine learning model, and the lowest score F_1 was obtained for the classical BDT method. The accuracy by the score F_1 of machine learning methods slightly exceeds that of classical methods. The mean score F_1 of the best machine learning model CIT does not significantly differ from the value of the FET method (the p -value of the two sample paired Student's t -test for not equal variances is 0.19).

Chromosome 22. The highest mean score F_1 was obtained for the CIT machine learning model, the lowest score F_1 was obtained for the classical EBT method. The accuracy by the score F_1 exceeds that of classical methods. The mean score F_1 of the best machine learning model CIT is statistically significantly higher than that of the best classical FET method (the p -value of the two sample paired Student's t -test for equal variances is 0.03). A significant increase in accuracy may be due to training the model on experimental data for chromosome 22.

Additionally, we investigated the CIT and CART methods trained on experimental datasets, sampled from the experimental data on chromosome 22. A typical dataset of 72 261 sites was considered, 36 150 of which were SNPs and the rest randomly selected non-SNPs. The classification accuracy by the score F_1 did not exceed 60–70 % on the simulated and experimental data. The poor classification may be due to some reasons, for example, a possibly inferior training dataset or, perhaps, the simulation model is indeed better at forming the training datasets by focusing on reproducing the important (primary) sources of information in the data and not taking into account the minor (secondary) signals present in the real data.

These results let us conclude that for real experimental data it is preferable to use machine learning models, trained on simulated data. The mean accuracy of SNP identification in terms of the score F_1 is 2–5 % higher for the machine learning models, in particular decision tree-based, than for classical statistical methods. The CIT model shows the highest accuracy, while BDT, EBT, FET have similar mean accuracy.

Conclusions

An approach for simulation modelling of SNPs in DNA sequences has been developed, which is based on the generation of random events according to the beta or normal distribution, the parameters of which are estimated from experimental data, and it applies machine learning methods trained on simulated data to identify the single nucleotide genetic polymorphism sites. This approach has some distinct advantages, namely, it permits: a) to achieve the higher accuracy of determining SNPs in genomic sequencing data; b) to simulate data closely reproducing the real experimental conditions in order to study the reliability of specific experiments and assess the accuracy of the results obtained under the observed experimental conditions; c) to generate synthetic data for training machine learning methods and subsequently create the classification models of machine learning algorithms to identify the SNPs in specific experimental datasets; d) to generate datasets for testing and comparing available SNP identification methods to analyse real data obtained for specific experimental conditions. The verification of the developed simulation model and the analysis algorithms is realised on the examples of large humane chromosome sequencing datasets. The comparative analysis of efficient existing statistical SNP identification algorithms of BDT, EBT and FET and machine learning methods of CIT, CART and SVM, trained on synthetic data, is carried out. The best results are obtained for machine learning models, namely, the accuracy of SNP identification by the score F_1 is 2–5 % higher for the trained on simulated data CIT than those for the methods of BDT, EBT and FET.

References

1. Sung WK. *Algorithms for next-generation sequencing*. 1st edition. New York: Chapman & Hall/CRC; 2017. 364 p. DOI: 10.1201/9781315374352.
2. Kappelmann-Fenzl M, editor. *Next generation sequencing and data analysis*. 1st edition. Cham: Springer; 2021. 218 p. DOI: 10.1007/978-3-030-62490-3.
3. Wu XL, Xu J, Feng G, Wiggans GR, Taylor JF, He J, et al. Optimal design of low-density SNP arrays for genomic prediction: algorithm and applications. *PLoS ONE*. 2016;11(9):e0161719. DOI: 10.1371/journal.pone.0161719.
4. Korani W, Clevenger JP, Chu Y, Ozias-Akins P. Machine learning as an effective method for identifying true single nucleotide polymorphisms in polyploid plants. *Plant Genome*. 2019;12(1):180023. DOI: 10.3835/plantgenome2018.05.0023.
5. Masoudi-Nejad A, Narimani Z, Hosseinkhan N. *Next generation sequencing and sequence assembly. Methodologies and algorithms*. 1st edition. New York: Springer; 2013. 86 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-7726-6.
6. Su Z, Marchini J, Donnelly P. HAPGEN2: simulations of multiple disease SNPs. *Bioinformatics*. 2011;27(16):2304–2305. DOI: 10.1093/bioinformatics/btr341.
7. Oh JH, Deasy JO. SITDEM: a simulation tool for disease/endpoint models of association studies based on single nucleotide polymorphism genotypes. *Computers in Biology and Medicine*. 2014;45:136–142. DOI: 10.1016/j.compbiomed.2013.11.021.
8. Meyer HV, Birney E. PhenotypeSimulator: a comprehensive framework for simulating multi-trait, multi-locus genotype to phenotype relationships. *Bioinformatics*. 2018;34(17):2951–2956. DOI: 10.1093/bioinformatics/bty197.
9. Hendricks AE, Dupuis J, Gupta M, Logue MW, Lunetta KL. A comparison of gene region simulation methods. *PLoS ONE*. 2012;7(7):e40925. DOI: 10.1371/journal.pone.0040925.
10. Peng B, Chen HS, Mechanic LE, Racine B, Clarke J, Clarke L, et al. Genetic Simulation Resources: a website for the registration and discovery of genetic data simulators. *Bioinformatics*. 2013;29(8):1101–1102. DOI: 10.1093/bioinformatics/btt094.
11. Peng B, Chen HS, Mechanic LE, Racine B, Clarke J, Gillanders E, et al. Genetic data simulators and their applications: an overview. *Genetic Epidemiology*. 2015;39(1):2–10. DOI: 10.1002/gepi.21876.
12. Yatskou MM, Apanasovich VV. Simulation modelling and machine learning platform for processing fluorescence spectroscopy data. In: Tuzikov AV, Belotserkovsky AM, Lukashovich MM, editors. *Pattern Recognition and Information Processing. PRIP-2021*. Cham: Springer; 2022. p. 178–190 (Communications in computer and information science; volume 1562). DOI: 10.1007/978-3-030-98883-8_13.
13. Jacquin L, Cao TV, Grenier C, Ahmadi N. DHOEM: a statistical simulation software for simulating new markers in real SNP marker data. *BMC Bioinformatics*. 2015;16:404. DOI: 10.1186/s12859-015-0830-7.
14. Volkau AU, Yatskou MM, Grinev VV. Selecting informative features of human gene exons. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;1:77–89. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-1-77-89.
15. Xu Silun, Skakun VV. Comparative analysis of deep learning neural networks for the segmentation of cancer cell nuclei on immunohistochemical fluorescent images. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2024;1:59–70. Russian. EDN: TOOSJI.
16. Grinev VV, Yatskou MM, Skakun VV, Chepeleva MV, Nazarov PV. ORFhunter: an accurate approach to the automatic identification and annotation of open reading frames in human mRNA molecules. *Software Impacts*. 2022;12:100268. DOI: 10.1016/j.simpa.2022.100268.
17. Hothorn T, Hornik K, Zeileis A. Unbiased recursive partitioning: a conditional inference framework. *Journal of Computational and Graphical Statistics*. 2006;15(3):651–674. DOI: 10.1198/106186006X133933.
18. Breiman L, Friedman J, Olshen R, Stone C. *Classification and regression trees*. 1st edition. Wadsworth: Wadsworth International Group; 1984. 358 p.
19. Vapnik VN. *The nature of statistical learning theory*. 2nd edition. New York: Springer; 2000. 314 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-3264-1.
20. Murphy KP. *Probabilistic machine learning* [Internet]. London: The MIT Press; 2022. 864 p. Available from: <https://mitpress.mit.edu/9780262369305/probabilistic-machine-learning>.
21. R Core Team. R: a language and environment for statistical computing. R foundation for statistical computing [Internet]. Vienna: [s. n.]; 2021. Available from: <https://www.R-project.org>.
22. Zook JM, McDaniel J, Olson ND, Wagner J, Parikh H, Heaton H, et al. An open resource for accurately benchmarking small variant and reference calls. *Nature Biotechnology*. 2019;37(5):561–566. DOI: 10.1038/s41587-019-0074-6.
23. Liao Y, Smyth GK, Shi W. The R-package *Rsubread* is easier, faster, cheaper and better for alignment and quantification of RNA sequencing reads. *Nucleic Acids Research*. 2019;47(8):e47. DOI: 10.1093/nar/gkz114.
24. Yatskou MM, Smolyakova EV, Skakun VV, Grinev VV. Entropy-based detection of single-nucleotide genetic polymorphism sites. In: A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems of Belarusian State University. *Proceedings of the 7th International scientific-practical conference «Applied problems of optics, informatics, radiophysics and condensed matter physics»; 2023 May 18–19; Minsk, Belarus*. Minsk: Belarusian State University; 2023. p. 191–193. Russian.

УДК 519.8

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РАНДОМИЗИРОВАННОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ АСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

М. С. БАРКЕТОВ¹⁾

¹⁾Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,
ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Рассматривается асимметричная задача коммивояжера, в которой надо найти гамильтонов цикл с минимальной суммарной стоимостью дуг в полном ориентированном графе. Для решения данной задачи на основе алгоритма, построенного автором в статье «Полиномиальный рандомизированный алгоритм для задачи «Асимметричный коммивояжер»» (Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2022. Т. 66, № 5. С. 489–494), разработан новый параметризованный полиномиальный рандомизированный алгоритм. Его отличие состоит в другой параметризации. Однако основным результатом является препроцессинговый полиномиальный алгоритм линейного программирования для определения оптимальных параметров.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация; теория вероятностей; рандомизированный алгоритм; приближенный алгоритм; задача коммивояжера.

Благодарность. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проекты Ф21-010 и Ф23РНФ-017).

Образец цитирования:

Баркетов МС. Оптимизация параметров полиномиального рандомизированного алгоритма для асимметричной задачи коммивояжера. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;2:113–118. EDN: HJEEJF

For citation:

Barketau MS. Parameter optimisation of the polynomial randomised algorithm for the asymmetric travelling salesman problem. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;2:113–118. Russian. EDN: HJEEJF

Автор:

Максим Сергеевич Баркетов – кандидат физико-математических наук, доцент; старший научный сотрудник лаборатории математической кибернетики.

Author:

Maksim S. Barketau, PhD (physics and mathematics), docent; senior researcher at the laboratory of mathematical cybernetics. barketau@mail.ru

PARAMETER OPTIMISATION OF THE POLYNOMIAL RANDOMISED ALGORITHM FOR THE ASYMMETRIC TRAVELLING SALESMAN PROBLEM

M. S. BARKETAU^a

^aUnited Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus,
6 Surganova Street, Minsk 220012, Belarus

Abstract. The asymmetric travelling salesman problem without metric restrictions is herein considered. The polynomial randomised algorithm depending on the set of parameters is proposed similar to the one developed by the author in the article «Polynomial randomised algorithm for the asymmetric travelling salesman problem» (Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus. 2022. Vol. 66, No. 5. P. 489–494). The difference of the proposed algorithm is in different parametrisation. The parameter optimisation is arranged with the help of the polynomial preprocessing algorithm.

Keywords: combinatorial optimisation; probability theory; randomised algorithm; approximation algorithm; asymmetric travelling salesman problem.

Acknowledgements. This work was carried out with partial financial support from the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (projects F21-010 and F23RNF-017).

Введение

Рассматривается асимметричная задача коммивояжера. Пусть дан полный ориентированный граф $G = G(V, A)$ с множеством вершин $V = \{1, 2, \dots, n\}$ и множеством из $n(n-1)$ дуг $A = \{(u, v) | u, v \in V, u \neq v\}$. У каждой дуги есть неотрицательная стоимость $c(u, v) \geq 0$. Обходом (частичным обходом) называется перестановка множества (подмножества) вершин (i_1, i_2, \dots, i_n) . Стоимостью обхода $c(i_1, i_2, \dots, i_n)$ является значение

$$c(i_1, i_2, \dots, i_n) = \sum_{j=2}^n c(i_{j-1}, i_j) + c(i_n, i_1).$$

Задача состоит в том, чтобы найти обход вершин (гамильтонов цикл) минимальной стоимости.

Сначала в разделе «Рандомизированный алгоритм» разрабатывается общий параметризованный рандомизированный алгоритм. Рандомизированный алгоритм – это алгоритм, в котором на некоторых шагах организуется вероятностный эксперимент, результаты которого влияют на дальнейшее выполнение алгоритма. Параметризованный рандомизированный алгоритм – это рандомизированный алгоритм, в котором есть параметры, влияющие на вероятности. Подбор в некотором смысле оптимальных параметров рассматривается в разделе «Линейные программы» с использованием формулировок линейного программирования.

Похожий рандомизированный подход предложен в работе [1]. Однако в данной статье основным результатом является не рандомизированный алгоритм, а быстрый препроцессинговый полиномиальный алгоритм подбора в некотором смысле оптимальных параметров рандомизированного алгоритма. Под оптимальными параметрами понимаются такие параметры, которые обеспечивают низкое математическое ожидание стоимости решения, построенного рандомизированным алгоритмом. Понятно, что построение решения с минимально возможным математическим ожиданием, или, другими словами, с математическим ожиданием, равным минимальной стоимости решения, кажется сложным, так как задача является NP -трудной в сильном смысле, но тем не менее возможны подходы, позволяющие заметно повысить качество построенных решений.

Рандомизированные алгоритмы применялись для решения некоторых похожих задач. Наиболее успешным примером, вероятно, является евклидова задача коммивояжера [2]. Однако для евклидовой задачи коммивояжера построена полиномиальная приближенная схема, а для асимметричной задачи коммивояжера без неравенства треугольника не существует полиномиального алгоритма, строящего приближенное решение с константной степенью приближения в случае $P \neq NP$. Отметим, что в работе [2] используется принципиально иной способ рандомизации, основанный на геометрических свойствах задачи.

Для асимметричной задачи коммивояжера наиболее исследованным является случай с метрическими ограничениями, или случай с неравенством треугольника. Недавно для данной задачи было доказано существование полиномиального приближенного алгоритма с гарантированной константной степенью

приближения [3]. Кроме того, в литературе для асимметричной задачи коммивояжера предлагаются относительно быстрые метаэвристические подходы (см., например, [4]) и подходы точного решения для разных вариантов задачи [5].

Рандомизированный алгоритм

Предлагается следующий рандомизированный алгоритм.

Начало алгоритма.

Шаг 0. Выбрать произвольную вершину i_1 в качестве начальной вершины обхода.

Шаг 1. Сгенерировать дугу (i_1, x_1) , где x_1 – вторая вершина частичного обхода.

Рассмотрим следующие коэффициенты:

$$d_j = f_1(c(i_1, j)),$$

где $f_1(x)$ – некоторая невозрастающая неотрицательная функция.

Определим дискретное распределение случайной величины x_1 , обозначающей следующую вершину частичного обхода. Случайная величина x_1 принимает значения $j \in V$ с вероятностями

$$P(x_1 = j) = \frac{d_j}{\sum_{l \in V \setminus i_1} d_l}, \text{ если } j \in V \setminus i_1,$$

$$P(x_1 = j) = 0, \text{ если иначе.}$$

Шаги 2, ..., n – 1. Сгенерировать дугу (i_k, x_{k+1}) , где x_{k+1} – это $(k + 1)$ -я вершина частичного обхода, при условии, что уже сгенерирован частичный обход (i_1, i_2, \dots, i_k) .

Рассмотрим следующие коэффициенты:

$$d_j = f_k(c(i_k, j)),$$

где $f_k(x)$ – некоторая невозрастающая неотрицательная функция.

Определим дискретное распределение случайной величины x_{k+1} , обозначающей следующую вершину частичного обхода. Случайная величина x_{k+1} принимает значения $j \in V$ с вероятностями

$$P(x_{k+1} = j | (i_1, i_2, \dots, i_k)) = \frac{d_j}{\sum_{l \in V \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}} d_l}, \text{ если } j \in V \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\},$$

$$P(x_{k+1} = j | (i_1, i_2, \dots, i_k)) = 0, \text{ если иначе.}$$

Запись $P(x_{k+1} = j | (i_1, i_2, \dots, i_k))$ означает вероятность выбора следующей возможной вершины j при условии, что уже сгенерирован частичный обход (i_1, i_2, \dots, i_k) .

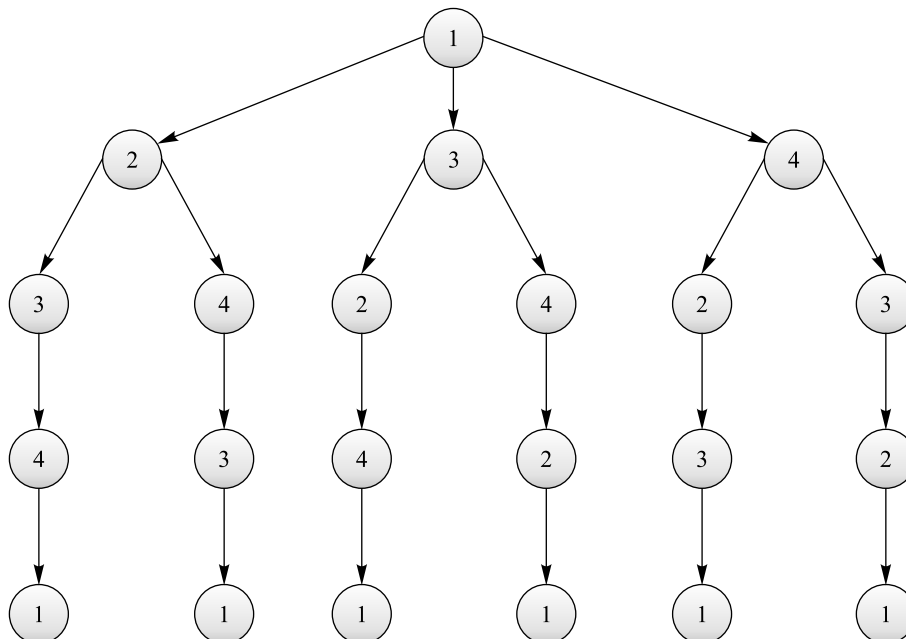
Шаг n. Добавить к частичному обходу (i_1, i_2, \dots, i_n) дугу (i_n, i_1) с вероятностью 1.

Конец алгоритма.

Отличие этого алгоритма от алгоритма, разработанного в статье [1], состоит в другой параметризации выбора вероятностей.

Внимательный читатель может заметить, что шаги 1, 2, ..., n алгоритма есть не что иное, как процесс построения пути от корня к листу в некотором ориентированном выходящем дереве с корнем в вершине, имеющей метку i_1 . На рисунке проиллюстрирован этот процесс для полного ориентированного графа с набором вершин $\{1, 2, 3, 4\}$.

Все узлы рассматриваемого дерева разбиты на уровни. Единственный узел нулевого уровня имеет метку i_1 . Все узлы k -го уровня соответствуют один к одному частичным гамильтоновым обходам длиной k из начальной вершины i_1 исходного графа G . Фактически можем обозначить узел k -го уровня этим частичным обходом (i_1, i_2, \dots, i_k) . Из данного узла в дереве выходят $n - k$ дуг к узлам $(i_1, i_2, \dots, i_k, j)$, $j \in V \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, $(k + 1)$ -го уровня. Отметим, что степень захода каждого узла в дереве равна единице и дуги выходят только из узла одного уровня к узлам следующего уровня. Листьями дерева являются узлы (i_1, i_2, \dots, i_n) , соответствующие гамильтоновым обходам. Вес дуги из узла (i_1, i_2, \dots, i_k) к узлу $(i_1, i_2, \dots, i_{k+1})$ равен $c(i_k, i_{k+1})$.



Дерево построения решения
 The tree of the solutions built

Линейные программы

Теперь, когда определен общий алгоритм с входными параметрами, возникает вопрос о том, как найти оптимальные входные параметры, для которых алгоритм работает эффективно, т. е. обладает малым математическим ожиданием стоимости построенного решения. Для построения таких параметров воспользуемся математическим программированием. Рассмотрим следующую модель математического программирования с переменными $f_k(c(u, v))$, $1 \leq k \leq n - 1$, $(u, v) \in A$, z . Переменная z обозначает верхнюю границу математического ожидания стоимости гамильтонова цикла при значениях функций $f_k(c(u, v))$, $1 \leq k \leq n - 1$, $(u, v) \in A$, заданных на стоимостях дуг орграфа. Для удобства упорядочим по неубыванию стоимостей множество дуг орграфа и обозначим элементы этой упорядоченной последовательности через $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_{(n-1)n}, v_{(n-1)n})$. Пусть I_k обозначает множество частичных обходов длиной k , начинающихся с вершины i_1 .

$$\min z, \quad \sum_{j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus i_1} f_1(c(i_1, j)) \geq 1, \quad (1)$$

$$f_k(c(u_1, v_1)) \geq f_k(c(u_2, v_2)) \geq \dots \geq f_k(c(u_{(n-1)n}, v_{(n-1)n})) \geq 0 \quad \forall k, \quad (2)$$

$$\sum_{j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}} f_k(c(i_k, j)) \geq f_{k-1}(c(i_{k-1}, i_k)), \quad (i_1, i_2, \dots, i_k) \in I_k, \quad 2 \leq k \leq n - 1, \quad (3)$$

$$\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in I_n} c(i_1, i_2, \dots, i_n) f_{n-1}(c(i_{n-1}, i_n)) \leq z. \quad (4)$$

Отметим, что переменными в данной программе являются значения $f_k(c(u, v))$, $1 \leq k \leq n - 1$, $(u, v) \in A$, z , и что программа с ограничениями (1)–(4) допустима, т. е. существует допустимое решение программы. Допустимым решением могут быть достаточно большие значения переменных $f_k(c(u, v))$, $1 \leq k \leq n - 1$, $(u, v) \in A$, и достаточно большое значение переменной z , обозначающей верхнюю границу левой части ограничения (4).

Следует отметить, что данная программа минимизирует не в точности математическое ожидание стоимости построенного решения, а верхнюю границу математического ожидания. Если бы ограниче-

ния (1) и (3) являлись ограничениями типа равенства, это было бы точное значение математического ожидания стоимости решения. Но в этом случае программа может быть недопустима из-за слишком большого числа ограничений типа равенства. Другими словами, данный процесс трудно моделировать точно с помощью линейных ограничений. В связи с этим заменяем ограничения типа равенства ограничениями типа неравенства. При этом ограничения (1) и (3) гарантируют, что значения $f_k(c(i_k, j))$ являются верхними границами вероятностей построения частичного обхода $(i_1, i_2, \dots, i_k, j)$ для каждого возможного такого частичного обхода (см. дерево обхода на рисунке). Ограничения (2) гарантируют невозрастание функций f_k , что кажется естественным ограничением, так как меньшие стоимости дуг, предположительно, с большей вероятностью должны вести к меньшим стоимостям обхода. Ограничение (4) гарантирует, что z является верхней границей математического ожидания стоимости построенного решения.

Заметим, что число ограничений в рассматриваемой программе экспоненциально. Покажем, что можно найти оптимальное решение данной программы за полиномиальное время. Для этого за полиномиальное время построим отделяющую гиперплоскость для случая, когда точка, определенная вектором значений переменных, не принадлежит допустимому многограннику, или установим, что точка принадлежит допустимому многограннику.

Первая и вторая группы ограничений проверяются непосредственно, так как этих ограничений полиномиальное число.

Чтобы проверить выполнение третьей группы ограничений, зафиксируем уровень k и последнюю дугу частичного обхода (i_{k-1}, i_k) . В этом случае легко проверить, что если какое-то ограничение из третьей группы не выполняется, то не выполняется и следующее ограничение из третьей группы. Пусть $(i_k, a_1), (i_k, a_2), \dots, (i_k, a_{n-k})$ – это $n - k$ дуг, которые имеют наибольшие стоимости среди всех дуг, ведущих из вершины i_k во множество вершин $V \setminus \{i_1, i_{k-1}, i_k\}$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n-k} f_k(c(i_k, a_j)) \geq f_{k-1}(c(i_{k-1}, i_k)). \quad (5)$$

Это ограничение выбрано как наиболее важный представитель группы ограничений с фиксированным уровнем k и последней дугой частичного обхода (i_{k-1}, i_k) . Оно обладает следующим свойством.

Теорема 1. Если выполняется ограничение (5), то выполняются и все остальные ограничения из группы с фиксированным уровнем k и последней дугой частичного обхода (i_{k-1}, i_k) . Если какое-то ограничение из третьей группы (с фиксированным уровнем k и последней дугой частичного обхода (i_{k-1}, i_k)) не выполняется, то не выполняется и ограничение (5).

Значит, используя теорему 1, третью группу из экспоненциального числа ограничений можем заметить группой из полиномиального числа ограничений.

Теорема 2. Третья группа из экспоненциального числа ограничений задачи с ограничениями (1)–(4) эквивалентна группе из полиномиального числа ограничений по одному ограничению (5) для каждого фиксированного уровня k и последней дуги частичного обхода (i_{k-1}, i_k) .

Четвертая группа ограничений (включает одно ограничение) заменяется эквивалентным ограничением (приводятся слагаемые при каждой переменной $f_{n-1}(c(u, v))$)

$$\sum_{(u,v) \in A} C(u, v) f_{n-1}(c(u, v)) \leq z,$$

где величина $C(u, v)$ обозначает сумму стоимостей всех гамильтоновых обходов $(i_1, i_2, \dots, i_{n-2}, u, v)$. Величины $C(u, v)$ подсчитываются за полиномиальное время подобно похожим величинам из работы [1].

Таким образом, приведен полиномиальный алгоритм, строящий отделяющую гиперплоскость, которая определяется невыполненным ограничением, в случае, если точка не принадлежит многограннику задачи. Значит, для программы можно найти решение за полиномиальное время с помощью алгоритма, основанного на многократном применении метода эллипсоидов, изложенного в работе [6]. Альтернативным прикладным методом решения задачи является эквивалентная формулировка на основе теоремы 2 с полиномиальным числом переменных и ограничений.

$$\begin{aligned} & \min z, \\ & \sum_{j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus i_1} f_1(c(i_1, j)) \geq 1, \\ & f_k(c(u_1, v_1)) \geq f_k(c(u_2, v_2)) \geq \dots \geq f_k(c(u_{(n-1)n}, v_{(n-1)n})) \geq 0 \quad \forall k. \end{aligned}$$

Зафиксируем уровень k , $2 \leq k \leq n-1$, и дугу (i_{k-1}, i_k) . Пусть $(i_k, a_1), (i_k, a_2), \dots, (i_k, a_{n-k})$ – это $n-k$ дуг, которые имеют наибольшие стоимости среди всех дуг, ведущих из вершины i_k во множество вершин $V \setminus \{i_1, i_{k-1}, i_k\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-k} f_k(c(i_k, a_j)) & \geq f_{k-1}(c(i_{k-1}, i_k)) \quad \forall k, 2 \leq k \leq n-1, \forall (i_{k-1}, i_k) \in A, i_1 \neq i_{k-1}, i_1 \neq i_k, \\ \sum_{(u,v) \in A} C(u, v) f_{n-1}(c(u, v)) & \leq z. \end{aligned}$$

Отметим, что значения $C(u, v)$ могут быть довольно большими числами. Для того чтобы данный подход был применим в реальности с помощью компьютерных программ для линейного программирования, воспользуемся следующим приемом: округлим все числа до некоторого разряда и отбросим одинаковое количество младших разрядов до данного разряда. Такие округленные коэффициенты могут быть значимыми с точки зрения смысла линейной программы, но достаточно небольшими, чтобы быть воспринятыми программами для линейного программирования. На данный момент довольно часто встречаются компьютеры с 64-битной арифметикой, а это числа с 20 десятичными разрядами. Более того, не исключено развитие программ для линейного программирования по направлению длинной арифметики, потенциально позволяющее обрабатывать большие числа $C(u, v)$ без округлений.

Заключение

Таким образом, разработан новый рандомизированный алгоритм для асимметричной задачи коммивояжера на основе подхода, изложенного в статье [1], но с другой параметризацией. Однако основной результат данной работы – это препроцессинговый полиномиальный алгоритм линейного программирования для выбора параметров.

Библиографические ссылки / References

1. Barketau MS. Polynomial randomised algorithm for the asymmetric travelling salesman problem. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 2022;66(5):489–494. Russian. DOI: 10.29235/1561-8323-2022-66-5-489-494.
2. Arora S. Polynomial time approximation schemes for Euclidean TSP and other geometric problems. In: *Proceedings of 37th Annual symposium on foundations of computer science; 1996 October 14–16; Burlington, USA*. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press; 1996. p. 2–11. DOI: 10.1109/sfcs.1996.548458.
3. Svensson O. Approximating ATSP by relaxing connectivity. In: *Proceedings of 2015 IEEE 56th Annual symposium on foundations of computer science (FOCS-2015); 2015 October 17–20; Berkeley, USA*. Los Alamitos: Conference Publishing Services of the IEEE Computer Society; 2015. p. 1–19. DOI: 10.1109/focs.2015.10.
4. Burke EK, Cowling PI, Keuthen R. Effective local and guided variable neighbourhood search methods for the asymmetric travelling salesman problem. In: Boers EJW, Cagnoni S, Gottlieb J, Hart E, Lanzi PL, Raidl GR, et al., editors. *Applications of evolutionary computing. EvoWorkshops-2001: EvoCOP, EvoFlight, EvoIASP, EvoLearn, and EvoSTIM; 2001 April 18–20; Como, Italy*. Berlin: Springer; 2001. p. 203–212 (Goos G, Hartmanis J, van Leeuwen J, editors. Lecture notes in computer science; volume 2037). DOI: 10.1007/3-540-45365-2_21.
5. Fischetti M, Lodi A, Toth P. Exact methods for the asymmetric traveling salesman problem. In: Gutin G, Punnen AP, editors. *The traveling salesman problem and its variations*. New York: Springer; 2007. p. 169–205 (Du D-Z, Pardalos PM, editors. Combinatorial optimization; volume 12). DOI: 10.1007/0-306-48213-4_4.
6. Grötschel M, Lovász L, Schrijver A. *Geometric algorithms and combinatorial optimization*. 2nd edition. Berlin: Springer-Verlag; 2012. XII, 362 p. (Graham RL, Korte B, Lovász L, editors. Algorithms and combinatorics; volume 2).

Получена 18.04.2024 / исправлена 12.06.2024 / принята 12.06.2024.
Received 18.04.2024 / revised 12.06.2024 / accepted 12.06.2024.

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ В БГУ РАБОТ INDICATIVE ABSTRACTS OF THE PAPERS DEPOSITED IN BSU

УДК 004.42:004.738.5(075.8) + 004.774.6(075.8)

Кремень Е. В. **Введение в веб-программирование** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-06 «Математика» / Е. В. Кремень, Ю. А. Кремень, Г. А. Расолько ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 399 с. : ил. Библиогр.: с. 398. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/310041>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 07.03.2024, № 004307032024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Введение в веб-программирование» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-06 «Математика». ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, тесты, списки рекомендованной литературы.

УДК 004.42:004.738.5(075.8) + 004.774.6(075.8)

Кремень Е. В. **Введение в веб-программирование** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)», направления спец. 1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)» / Е. В. Кремень, Ю. А. Кремень, Г. А. Расолько ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 399 с. : ил. Библиогр.: с. 398. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/310043>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 07.03.2024, № 004407032024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Введение в веб-программирование» предназначен для студентов специальности 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)», направления специальности 1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)». ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, тесты, списки рекомендованной литературы.

УДК 51(075.8) + 004(075.8)

Матейко О. М. **Высшая математика с основами информатики** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 1-33-01-02 «Геоэкология», 6-05-0521-03 «Геоэкология», 1-31-02-01 «География (по направлениям)», 6-05-0532-01 «География», 1-31-02-02 «Гидрометеорология», 6-05-0532-02 «Гидрометеорология», 1-51-01-01 «Геология и разведка месторождений полезных ископаемых», 6-05-0532-04 «Геология», 1-31-02-03 «Космоаэрокартография», 6-05-0532-05 «Космоаэрокартография и геодезия», 1-56-02-02 «Геоинформационные системы (по направлениям)», 6-05-0532-06 «Геоинформационные системы», 1-31-02-04 «Геотехнологии туризма и экскурсионная деятельность», 6-05-0532-07 «Геотехнологии туризма и экскурсионная деятельность» / О. М. Матейко, М. В. Мартон, Н. Б. Яблонская ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 419 с. Библиогр.: с. 417–419. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/310053>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 11.03.2024, № 004611032024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Высшая математика с основами информатики» предназначен для студентов специальностей 1-33-01-02 «Геоэкология», 6-05-0521-03 «Геоэкология», 1-31-02-01 «География (по направлениям)», 6-05-0532-01 «География», 1-31-02-02 «Гидрометеорология», 6-05-0532-02 «Гидрометеорология», 1-51-01-01 «Геология и разведка месторождений полезных ископаемых», 6-05-0532-04 «Геология», 1-31-02-03 «Космоаэрокартография», 6-05-0532-05 «Космоаэрокартография и геодезия», 1-56-02-02 «Геоинформационные системы (по направлениям)», 6-05-0532-06 «Геоинформационные системы», 1-31-02-04 «Геотехнологии туризма и экскурсионная деятельность», 6-05-0532-07 «Геотехнологии туризма и экскурсионная деятельность». В ЭУМК содержатся лекционный материал, задания для практических занятий, планы лабораторных работ, контрольные работы, вопросы для подготовки к зачету, список литературы.

УДК 004.6(075.8)

Базы данных [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)», направлений спец.: 1-31 03 01-01 «Математика (научно-производственная деятельность)», 1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)» / Ю. А. Кремень [и др.] ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 335 с. : ил. Библиогр.: с. 331–332. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/310121>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 12.03.2024, № 005012032024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Базы данных» предназначен для студентов специальности 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)», направлений специальности 1-31 03 01-01 «Математика (научно-производственная деятельность)», 1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)». ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, списки рекомендованной литературы.

УДК 004.6(075.8)

Базы данных [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 08 «Математика и информационные технологии (по направлениям)», направлений спец.: 1-31 03 08-01 «Математика и информационные технологии (веб-программирование и интернет-технологии)», 1-31 03 08-02 «Математика и информационные технологии (математическое и программное обеспечение мобильных устройств)» / Ю. А. Кремень [и др.] ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 459 с. : ил. Библиогр.: с. 457–458. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/310127>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 13.03.2024, № 005113032024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Базы данных» предназначен для студентов специальности 1-31 03 08 «Математика и информационные технологии (по направлениям)», направлений специальности 1-31 03 08-01 «Математика и информационные технологии (веб-программирование и интернет-технологии)», 1-31 03 08-02 «Математика и информационные технологии (математическое и программное обеспечение мобильных устройств)». ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, списки рекомендованной литературы.

УДК 004.6(075.8)

Базы данных [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», профилиаций «Веб-программирование и интернет-технологии», «Математическое и программное обеспечение мобильных устройств» / Ю. А. Кремень [и др.] ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 459 с. : ил. Библиогр.: с. 457–458. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/310137>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 13.03.2024, № 005213032024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Базы данных» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», профилиаций «Веб-программирование и интернет-технологии», «Математическое и программное обеспечение мобильных устройств». ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, списки рекомендованной литературы.

УДК 004.6(075.8)

Базы данных [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)», направления спец. 1-31 03 01-04 «Математика (научно-конструкторская деятельность)» / Ю. А. Кремень [и др.] ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 459 с. : ил. Библиогр.: с. 457–458. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/310144>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 13.03.2024, № 005313032024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Базы данных» предназначен для студентов специальности 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)», направления специальности 1-31 03 01-04 «Математика (научно-конструкторская деятельность)». ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, списки рекомендованной литературы.

УДК 004(075.8)

Моисеева Н. А. Компьютерные информационные технологии [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0412-01 «Менеджмент» / Н. А. Моисеева, О. А. Велько ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 133 с. : табл. Библиогр.: с. 132–133. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/310741>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 29.03.2024, № 006229032024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Компьютерные информационные технологии» предназначен для студентов специальности 6-05-0412-01 «Менеджмент».

В ЭУМК содержатся лекционный материал, планы лабораторных работ, примерные тестовые задания, примерные промежуточные контрольные работы, вопросы для подготовки к экзамену, примерный тематический план, содержание учебного материала, список литературы.

УДК 004(075.8) + 519.6(075.8)

Моисеева Н. А. Цифровые технологии представления данных [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0412-01 «Менеджмент» / Н. А. Моисеева, О. А. Велько ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 124 с. : табл. Библиогр.: с. 123–124. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/310743>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 29.03.2024, № 006329032024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Цифровые технологии представления данных» предназначен для студентов специальности 6-05-0412-01 «Менеджмент». В ЭУМК содержатся лекционный материал, тематика и планы практических и лабораторных работ, примерные тестовые задания, примерные промежуточные контрольные работы, вопросы для подготовки к экзамену, примерный тематический план, содержание учебного материала, список литературы.

УДК 004.42:004.738.5(075.8) + 004.774.6(075.8)

Кремень Е. В. Веб-конструирование [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)», направления спец. 1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)» / Е. В. Кремень, Ю. А. Кремень, Г. А. Расолько ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 224 с. : ил. Библиогр.: с. 223. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/311141>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 09.04.2024, № 006709042024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Веб-конструирование» предназначен для студентов специальности 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)», направления специальности 1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)». ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, списки рекомендованной литературы.

УДК 51(072)(06) + 004(072)(06)

Проблемы преподавания высшей математики и информатики в условиях новой образовательной парадигмы [Электронный ресурс] : материалы Междунар. науч.-практ. конф. (Минск, 18–19 апр. 2024 г.) / БГУ ; [редкол.: С. А. Самаль (отв. ред.) и др.]. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 159 с. : ил., табл. Библиогр. в тексте. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/311253>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 10.04.2024, № 006910042024.

В сборнике представлены материалы докладов, включенных в программу Международной научно-практической конференции, которая проводится кафедрой общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета. Тематика сборника охватывает широкий спектр проблем современного университетского образования, проблемы эффективного преподавания математики и информатики для студентов различных специальностей высшей школы.

УДК 514.18(075.8)

Адамейко-Першенкова Г. П. Начертательная геометрия [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-19 01 01 «Дизайн (по направлениям)», направления спец. 1-19 01 01-02 «Дизайн (предметно-пространственной среды)» / Г. П. Адамейко-Першенкова ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 128 с. : табл. Библиогр.: с. 127–128. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/311432>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 18.04.2024, № 007318042024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) предназначен для студентов дневной формы обучения специальности 1-19 01 01 «Дизайн (по направлениям)», направления специальности 1-19 01 01-02 «Дизайн (предметно-пространственной среды)». Содержание ЭУМК предусматривает развитие академических, социально-личностных и профессиональных компетенций студентов. Цель ЭУМК – предоставить студенту полный комплект учебно-методических материалов для аудиторного и самостоятельного изучения дисциплины.

УДК 517.53(075.8)

Теория функций комплексного переменного [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 6-05-0533-06 «Математика», 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ», 6-05-0533-13 «Механика и математическое моде-

лирование», 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)» / Н. В. Бровка [и др.] ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 143 с. : ил. Библиогр.: с. 142–143. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/311903>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 10.05.2024, № 008110052024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Теория функций комплексного переменного» предназначен для студентов специальностей 6-05-0533-06 «Математика», 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ», 6-05-0533-13 «Механика и математическое моделирование», 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)». В ЭУМК содержатся лекционный материал, практический материал, раздел контроля знаний и вспомогательный материал.

УДК 004.432.045C++(075.8)

Серикова Н. В. Программирование на C++ [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 6-05-0533-05 «Радиофизика и информационные технологии», 6-05-0533-11 «Прикладная информатика», 6-05-0533-12 «Кибербезопасность» / Н. В. Серикова ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 200 с. : табл. Библиогр.: с. 198–200. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/313436>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 12.06.2024, № 009612062024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Программирование на C++» предназначен для студентов факультета радиофизики и компьютерных технологий БГУ специальностей 6-05-0533-05 «Радиофизика и информационные технологии», 6-05-0533-11 «Прикладная информатика», 6-05-0533-12 «Кибербезопасность». В ЭУМК содержатся основные теоретические сведения по языку C++, перечисляются средства диагностики знаний, приводятся задания по лабораторным работам дисциплины, вопросы для подготовки к зачету и экзамену, список литературы для изучения.

УДК 517.373(075.8)

Егоров А. А. Поверхностные интегралы [Электронный ресурс] : учеб.-метод. разработ. для студентов физ. фак. и фак. радиофизики и компьютер. технологий / А. А. Егоров, Т. А. Чехменок ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 48 с. : ил. Библиогр.: с. 48. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/313837>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 17.06.2024, № 010017062024.

В данной разработке приведены теоретические сведения по теме «Поверхностные интегралы», являющейся одной из наиболее сложных для понимания студентами тем дисциплины «Математический анализ». В каждом из разделов даны примеры решения типовых задач, рассматриваемых на практических занятиях по этой дисциплине. Предложены задачи для самостоятельного решения, которые могут быть использованы в качестве индивидуальных заданий по соответствующей теме.

Учебно-методическая разработка предназначена для студентов, обучающихся на физическом факультете и факультете радиофизики и компьютерных технологий БГУ.

УДК 004.438(075.8)

Введение в программирование на языке R [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 1-31 01 04 «Биоинженерия и биоинформатика», 6-05-0511-05 «Биоинженерия и биоинформатика» / БГУ ; сост.: В. В. Гринев, И. Н. Ильюшёнков, А. И. Левданская. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 167 с. : ил. Библиогр.: с. 166–167. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/315836>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 04.07.2024, № 011204072024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) предназначен для студентов специальностей 1-31 01 04 и 6-05-0511-05 «Биоинженерия и биоинформатика» биологического факультета Белорусского государственного университета. Предлагаемый ЭУМК включает изучение организации языка программирования R и интегрированной среды для разработок на этом языке, структуры объектов и особенностей работы с данными, хранящимися в таких объектах, проведения вычислений в среде R, графических возможностей языка R, а также разработки пользовательских функций, объемных исходных кодов и целых приложений на языке R.

УДК 004(072)(075.8)

Аленский Н. А. Методика преподавания информатики [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-06 «Математика» / Н. А. Аленский ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 99 с. : ил. Библиогр.: с. 97–99. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/316027>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 08.07.2024, № 011308072024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Методика преподавания информатики» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-06 «Математика». ЭУМК включает тексты лекций, планы семинарских занятий и вопросы для обсуждения на них, содержание докладов и рефератов и рекомендуемые темы для них, типы и примеры тестов, экзаменационные вопросы, содержание дисциплины и ее учебно-методическую карту, список рекомендуемой литературы.

УДК 004(072)(075.8)

Численные методы [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 02 «Механика и математическое моделирование» / А. И. Азаров [и др.] ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 91 с. : ил. Библиогр.: с. 89–91. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/316076>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 09.07.2024, № 011509072024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Численные методы» разработан в соответствии с образовательным стандартом 1-й ступени высшего образования для специальности 1-31 03 02 «Механика и математическое моделирование». ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Численные методы» для студентов данной специальности. В ЭУМК содержатся конспект лекций, перечень лабораторных занятий с материалами для работы, задания по управляемой самостоятельной работе.

СОДЕРЖАНИЕ

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

- Поцейко П. Г., Ровба Е. А., Смотрицкий К. А.* Об аппроксимациях сопряженных функций и их производных на отрезке частичными суммами рядов Фурье – Чебышева 6

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

- Пчелинцев С. В., Дубровин М. С.* Дифференцирования простых трехмерных антикоммутирующих алгебр 19

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

- Кесиян Г. А., Коваленко А. В., Уртенев М. А. Х., Лайпанова З. М., Овсянникова А. В.* Математические модели финансовых пирамид, учитывающие стохастическую природу принятия решений 27
- Дудина О. С.* Аналитическое моделирование систем с электронной очередью 40

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

- Довженок Т. С., Филюта А. В., Чугай Н. Е.* О некоторых результатах исследования F -иррегулярных графов в классе двусвязных графов F 54
- Матвейчук Н. М., Сотсков Ю. Н.* Оптимальный выбор и планирование работ с неопределенными длительностями для двух сотрудников 65

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

- Урбанович П. П., Шутько Н. П.* Использование гиперкомплексных чисел в протоколе согласования криптографических ключей на основе нейронных сетей 81
- Воробей В. А., Малевич А. Э.* Использование сверточных вейвлет-блоков в задаче классификации изображений 93
- Яцков Н. Н., Апанасович В. В., Гринев В. В.* Имитационное моделирование однонуклеотидных генетических полиморфизмов 104

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

- Баркетов М. С.* Оптимизация параметров полиномиального рандомизированного алгоритма для асимметричной задачи коммивояжера 113
- Аннотации депонированных в БГУ работ 119

CONTENTS

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

- Patseika P. G., Rouba Y. A., Smatrytski K. A.* On the approximation of conjugate functions and their derivatives on the segment by partial sums of Fourier – Chebyshev series 6

MATHEMATICAL LOGIC, ALGEBRA AND NUMBER THEORY

- Pchelintsev S. V., Dubrovin M. S.* Derivations of simple three-dimensional anticommutative algebras 19

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

- Kesiyan G. A., Kovalenko A. V., Urtenov M. A. Kh., Laipanova Z. M., Ovsyannikova A. V.* Mathematical models of Ponzi schemes that consider the stochastic nature of decision-making 27
- Dudina O. S.* Analytical modelling of systems with a ticket queue..... 40

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

- Dovzhenok T. S., Filuta A. V., Chuhai N. E.* On some results of the study of F -irregular graphs in the class of biconnected graphs F 54
- Matsveichuk N. M., Sotskov Yu. N.* Optimal selection and scheduling of jobs with uncertain durations for two employees 65

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

- Urbanovich P. P., Shutko N. P.* Usage of hypercomplex numbers in a cryptographic key agreement protocol based on neural networks 81
- Varabei U. A., Malevich A. E.* Convolutional wavelet blocks in image classification 93
- Yatskou M. M., Apanasovich V. V., Grinev V. V.* Simulation modelling of single nucleotide genetic polymorphisms..... 104

SHORT COMMUNICATIONS

- Barketau M. S.* Parameter optimisation of the polynomial randomised algorithm for the asymmetric travelling salesman problem 113
- Indicative abstracts of the papers deposited in BSU..... 119

Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области математики и информатики), техническим наукам (в области информатики).

Журнал включен в наукометрические базы данных Scopus, Mathematical Reviews, Ulrichsweb, Google Scholar, zbMath, Russian Science Citation Index, ПИИЦ, China National Knowledge Infrastructure.

**Журнал Белорусского
государственного университета.
Математика. Информатика.
№ 2. 2024**

Учредитель:
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск, Республика Беларусь.
Почтовый адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск, Республика Беларусь.
Тел. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.
E-mail: jmathinf@bsu.by
URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Журнал Белорусского государственного
университета. Математика. Информатика»
издается с января 1969 г.
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»
(ISSN 1561-834X).

Редакторы *О. А. Семенец, М. А. Подголина*
Технический редактор *В. В. Пижикова*
Корректор *Л. А. Меркуль*

Подписано в печать 31.07.2024.
Тираж 55 экз. Заказ 694.

Республиканское унитарное предприятие
«СтройМедиаПроект».
ЛП № 02330/71 от 23.01.2014.
Ул. В. Хоружей, 13/61, 220123,
г. Минск, Республика Беларусь.

© БГУ, 2024

**Journal
of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics.
No. 2. 2024**

Founder:
Belarusian State University

Registered address: 4 Niezaliezhnasci Ave.,
Minsk 220030, Republic of Belarus.
Correspondence address: 4 Niezaliezhnasci Ave.,
Minsk 220030, Republic of Belarus.
Tel. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.
E-mail: jmathinf@bsu.by
URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Journal of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics»
published since January, 1969.
Until 2017 named «Vestnik BGU.
Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika»
(ISSN 1561-834X).

Editors *O. A. Semenets, M. A. Podgolina*
Technical editor *V. V. Pishkova*
Proofreader *L. A. Merkul'*

Signed print 31.07.2024.
Edition 55 copies. Order number 694.

Republic Unitary Enterprise
«StroiMediaProekt».
License for publishing No. 02330/71, 23 January, 2014.
13/61 V. Haruzhaj Str.,
Minsk 220123, Republic of Belarus.

© BSU, 2024