



ЖУРНАЛ
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА ИНФОРМАТИКА

JOURNAL
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

MATHEMATICS and INFORMATICS

Издается с января 1969 г.
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)

Выходит три раза в год

3

2024

МИНСК
БГУ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор ХАРИН Ю. С. – доктор физико-математических наук, академик НАН Беларуси, профессор; директор Научно-исследовательского института прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: kharin@bsu.by

Заместители главного редактора КРОТОВ В. Г. – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: krotov@bsu.by

ДУДИН А. Н. – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий лабораторией прикладного вероятностного анализа факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: dudin@bsu.by

Ответственный секретарь МАТЕЙКО О. М. – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: matseika@bsu.by

- Абламейко С. В.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Альтенбах Х. Магдебургский университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия.
Антоневич А. Б. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Бауэр С. М. Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
Беняш-Кривец В. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Берник В. И. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Бухштабер В. М. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Вабищевич П. Н. Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук, Москва, Россия.
Волков В. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Гладков А. Л. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Го В. Китайский университет науки и технологий, Хэфэй, провинция Аньхой, Китай.
Гогинава У. Тбилисский государственный университет им. Иванэ Джавахишвили, Тбилиси, Грузия.
Головко В. А. Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь.
Гороховик В. В. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Громак В. И. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Демидо Г. Институт математики и информатики Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва.
Егоров А. Д. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Еремеев В. А. Гданьский политехнический университет, Гданьск, Польша.
Жоландек Х. Институт математики Варшавского университета, Варшава, Польша.
Журавков М. А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Залесский П. А. Бразильский университет, Бразилиа, Бразилия.
Зубков А. М. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.
Каплунов Ю. Д. Университет Кииле, Кииле, Великобритания.
Кашин Б. С. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Келлерер Х. Грацский университет им. Карла и Франца, Грац, Австрия.
Кожанов А. И. Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.
Котов В. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.

- Краснопрошин В. В.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Лауринчикас А. П.** Вильнюсский университет, Вильнюс, Литва.
- Мадани К.** Университет Париж-Эст Марн-ла-Валле, Марн-ла-Валле, Франция.
- Макаров Е. К.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Матус П. П.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Медведев Д. Г.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Михасев Г. И.** Харбинский политехнический университет, Харбин, Китай.
- Нестеренко Ю. В.** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
- Никопоров Ю. Г.** Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук, Владикавказ, Россия.
- Освальд П.** Боннский университет, Бонн, Германия.
- Романовский В. Г.** Мариборский университет, Марибор, Словения.
- Рязанов В. В.** Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук, Москва, Россия.
- Сафонов В. Г.** Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь.
- Скиба А. Н.** Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель, Беларусь.
- Сотсков Ю. Н.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Трофимов В. А.** Южно-Китайский университет технологий, Гуанчжоу, Китай.
- Тузиков А. В.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Фильцмозер П.** Венский технический университет, Вена, Австрия.
- Черноусов В. И.** Альбертский университет, Эдмонтон, Канада.
- Чижик С. А.** Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Шешок Д.** Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса, Вильнюс, Литва.
- Шубэ А. С.** Институт математики и информатики Академии наук Республики Молдова, Кишинев, Молдова.
- Янчевский В. И.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

EDITORIAL BOARD

- Editor-in-chief** **KHARIN Y. S.**, doctor of science (physics and mathematics), academician of the National Academy of Sciences of Belarus, full professor; director of the Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: kharin@bsu.by
- Deputy editors-in-chief** **KROTOV V. G.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: krotov@bsu.by
- DUDIN A. N.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the laboratory of applied probabilistic analysis, faculty of applied mathematics and computer science, Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: dudin@bsu.by
- Executive secretary** **MATEIKO O. M.**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of general mathematics and computer science, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: matseika@bsu.by
- Ablameyko S. V.* Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Altenbach H. Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany.
Antonevich A. B. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Bauer S. M. Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia.
Beniash-Kryvets V. V. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Bernik V. I. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Buchstaber V. M. Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Chernousov V. I. University of Alberta, Edmonton, Canada.
Chizhik S. A. National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Dzemyda G. Institute of Mathematics and Informatics of the Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
Egorov A. D. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Eremeyev V. A. Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland.
Filzmoser P. Vienna University of Technology, Vienna, Austria.
Gladkov A. L. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Goginava U. Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia.
Golovko V. A. Brest State Technical University, Brest, Belarus.
Gorokhovich V. V. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Gromak V. I. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Guo W. University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, China.
Kaplunov J. D. Keele University, Keele, United Kingdom.
Kashin B. S. Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Kellerer H. University of Graz, Graz, Austria.
Kotov V. M. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Kozhanov A. I. Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia.
Krasnoproshin V. V. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Laurinchikas A. P. Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
Madani K. Université Paris-Est, Marne-la-Vallée, France.
Makarov E. K. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Matus P. P. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Medvedev D. G. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Mikhasev G. I. Harbin Institute of Technology, Harbin, China.
Nesterenko Y. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Nikonorov Y. G. Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia.

- Oswald P.** University of Bonn, Bonn, Germany.
- Romanovskij V. G.** University of Maribor, Maribor, Slovenia.
- Ryazanov V. V.** Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
- Safonov V. G.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Šešok D.** Vilnius Gediminas Technical University, Vilnius, Lithuania.
- Skiba A. N.** Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus.
- Sotskov Y. N.** United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Suba A. S.** Institute of Mathematics and Computer Science of the Academy of Sciences of Moldova, Kishinev, Moldova.
- Trofimov V. A.** South China University of Technology, Guangzhou, China.
- Tuzikov A. V.** Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Vabishchevich P. N.** Institute for the Safe Development of Atomic Energy of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
- Volkov V. M.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Yanchevskii V. I.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Zaleskii P. A.** University of Brazilia, Brazilia, Brazil.
- Zhuravkov M. A.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Zoladek H.** Mathematics Institute of the University of Warsaw, Warsaw, Poland.
- Zubkov A. M.** Lomonosov Moscow State University, Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

УДК 517.538.52 + 517.538.53 + 517.518.84

РАЦИОНАЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ СТЕПЕННЫХ, ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ И РЯДОВ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЧЕБЫШЕВА

А. П. СТАРОВОЙТОВ¹⁾, И. В. КРУГЛИКОВ¹⁾, Т. М. ОСНАЧ¹⁾

¹⁾Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины,
ул. Советская, 104, 246028, г. Гомель, Беларусь

Аннотация. Для тригонометрических рядов и рядов по многочленам Чебышева определены тригонометрические аппроксимации Эрмита – Паде и Эрмита – Якоби, линейные и нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышева. Установлен критерий существования и единственности тригонометрических многочленов Эрмита – Паде, ассоциированных с произвольным набором из k тригонометрических рядов, описан явный вид указанных многочленов.

Образец цитирования:

Старовойтов АП, Кругликов ИВ, Оснач ТМ. Рациональные аппроксимации степенных, тригонометрических рядов и рядов по многочленам Чебышева. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;3:6–21.
EDN: FDWJFQ

For citation:

Starovoitov AP, Kruglikov IV, Osnach TM. Rational approximations of power series, trigonometric series and series of Chebyshev polynomials. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;3:6–21. Russian.
EDN: FDWJFQ

Авторы:

Александр Павлович Старовойтов – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений факультета математики и технологий программирования.

Игорь Викторович Кругликов – студент факультета математики и технологий программирования. Научный руководитель – А. П. Старовойтов.

Татьяна Михайловна Оснач – аспирантка кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений факультета математики и технологий программирования. Научный руководитель – А. П. Старовойтов.

Authors:

Alexander P. Starovoitov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of mathematical analysis and differential equations, faculty of mathematics and technologies of programming.

svoitov@gsu.by

<https://orcid.org/0000-0002-1067-5744>

Igor V. Kruglikov, student at the faculty of mathematics and technologies of programming.

igor.v.kruglikov@gmail.com

Tatyana M. Osnach, postgraduate student at the department of mathematical analysis and differential equations, faculty of mathematics and technologies of programming.

osnach@gsu.by

Аналогичные результаты получены для линейных аппроксимаций Эрмита – Чебышева. Построены примеры систем функций, для которых существуют тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби и нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышева.

Ключевые слова: аппроксимации Эрмита – Паде; аппроксимации Паде – Чебышева; тригонометрические ряды; ряды по многочленам Чебышева.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025».

RATIONAL APPROXIMATIONS OF POWER SERIES, TRIGONOMETRIC SERIES AND SERIES OF CHEBYSHEV POLYNOMIALS

A. P. STAROVOITOV^a, I. V. KRUGLIKOV^a, T. M. OSNACH^a

^aFrancisk Skorina Gomel State University, 104 Savieckaja Street, Gomel 246028, Belarus

Corresponding author: A. P. Starovoitov (svoitov@gsu.by)

Abstract. In this paper, we defined trigonometric Hermite – Pade and Hermite – Jacobi approximations as well as linear and nonlinear Hermite – Chebyshev approximations for trigonometric and Chebyshev series. We established the criterion of the existence and uniqueness of trigonometric Hermite – Pade polynomials, associated with an arbitrary set of k trigonometric series, and we found the explicit form of these polynomials. Similar results were obtained for linear Hermite – Chebyshev approximations. We made examples of systems of functions for which trigonometrical Hermite – Jacobi approximations existed which were not the same as trigonometric Hermite – Pade approximations. Similar examples were represented for linear and nonlinear Hermite – Chebyshev approximations.

Keywords: Hermite – Pade approximations; Pade – Chebyshev approximations; trigonometric series; series of Chebyshev polynomials.

Acknowledgements. This work was supported by the state programme of scientific research «Convergence-2025».

Введение

Теория аппроксимаций Паде является одним из интенсивно развивающихся разделов комплексного анализа. Конструкция построения таких аппроксимаций в некотором смысле универсальна: их аналогии можно построить, в частности, для тригонометрических рядов, рядов по многочленам Чебышева и многочленам Фабера. В последние годы такого рода обобщения нашли многочисленные применения в различных задачах анализа, прикладной математики, теоретической физики, механики, геофизики (см., например, [1–6]). Аппроксимации Паде – Чебышева наряду с классическими аппроксимациями Паде фактически стали [7] неотъемлемой частью научных и технических расчетов, отражением этого является создание специальных программ для их нахождения в известных компьютерных системах [3; 8].

Появлению двух различных подходов при определении аппроксимаций Паде мы обязаны Г. Фробениусу [9] и К. Якоби [10]. Эти два подхода, приводящие к разным аппроксимациям, сохраняются и при построении их аналогов для тригонометрических рядов и рядов по многочленам Чебышева. Причем если для степенных рядов различия в вопросах существования и единственности между двумя видами таких аппроксимаций хорошо изучены [11], то для их обобщений в этом направлении сделаны лишь первые шаги [7; 11; 12].

Конструкция, аналогичная конструкции К. Якоби [10], но предназначенная для одновременной интерполяции нескольких функций, была разработана Ш. Эрмитом [13] и легла в основу его доказательства трансцендентности числа e . В работе [13] впервые появились рациональные дроби, которые в настоящее время принято называть аппроксимациями Эрмита – Паде. Следует сказать, что аппроксимации Эрмита – Паде для системы функций также могут быть двух видов. Далее будем их называть аппроксимациями Эрмита – Паде и аппроксимациями Эрмита – Якоби. Изначально Ш. Эрмит рассматривал одновременную интерполяцию нескольких экспоненциальных функций. В этом случае обе конструкции рациональных дробей совпадают. Для произвольной системы функций это не так. Отметим также, что в настоящее время аппроксимации Эрмита – Паде достаточно хорошо изучены [11; 14; 15] и нашли многочисленные приложения в различных областях алгебры, анализа и современной физики [16–26]. Вместе с тем основные свойства их обобщений, например, для тригонометрических рядов и рядов по многочленам Чебышева, насколько нам известно, остаются пока не исследованными.

Настоящая работа посвящена построению аналогов аппроксимаций Эрмита – Паде и Эрмита – Якоби для тригонометрических рядов и рядов по многочленам Чебышева. С формальной точки зрения определение новых конструкций рациональных дробей для таких рядов особых трудностей не представляет. Вместе с тем с получением каких-либо содержательных результатов о существовании и единственности новых аппроксимаций дело обстоит не так просто, как в случае со степенными рядами [6; 7; 11; 27–29].

Аппроксимации Эрмита – Паде

Приведем некоторые хорошо известные факты теории аппроксимаций Эрмита – Паде. Для произвольной функции $f(z)$, представленной степенным рядом

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l z^l, \quad (1)$$

и каждой пары (n, m) целых неотрицательных чисел существуют алгебраические многочлены $Q_m(z)$, $\deg Q_m \leq m$, $P_n(z)$, $\deg P_n \leq n$, для которых

$$Q_m(z)f(z) - P_n(z) = O(z^{n+m+1}). \quad (2)$$

Здесь и далее под $O(z^p)$ понимаем степенной ряд вида $c_1 z^p + c_2 z^{p+1} + \dots$. Многочлены $Q_m(z)$ и $P_n(z)$

условием (2) определяются не единственным образом, однако дроби $\pi_{n,m}(z) = \pi_{n,m}(z; f) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ опре-

деляют одну и ту же рациональную функцию независимо от того, какие бы многочлены $Q_m(z)$, $P_n(z)$, удовлетворяющие (2), мы не взяли [15, гл. 2]. Рациональные дроби $\pi_{n,m}(z)$ принято называть аппроксимациями Паде или Фробениуса – Паде (в качестве определения $\pi_{n,m}(z; f)$ соотношения (2) впервые были предложены Г. Фробениусом [9], авторство А. Паде основывается на его диссертации [30] 1892 г.). Еще раньше (в 1846 г.) похожая задача изучалась К. Якоби [10], который обобщил результат О. Коши о рациональной интерполяции функции, заданной в $n + m + 1$ различных точках. К. Якоби рассмотрел $(n + m + 1)$ -кратную рациональную интерполяцию в одной точке. Его конструкция приводит к следующему определению.

Определение 1. Рациональную дробь $\hat{\pi}_{n,m}(z) = \hat{\pi}_{n,m}(z; f) = \frac{\hat{P}_n(z)}{\hat{Q}_m(z)}$, в которой алгебраические многочлены $\hat{Q}_m(z)$, $\hat{P}_n(z)$ имеют степени соответственно не выше m и n , будем называть аппроксимацией Паде – Якоби для пары (n, m) и функции $f(z)$, если

$$f(z) - \frac{\hat{P}_n(z)}{\hat{Q}_m(z)} = O(z^{n+m+1}).$$

Аппроксимации Паде – Якоби $\hat{\pi}_{n,m}(z; f)$ могут не существовать [11, гл. 1, § 1.4]. Первый значимый результат в исследовании условий, при которых $\hat{\pi}_{n,m}(z; f)$ существует, был получен К. Якоби [10]. Введем в рассмотрение определители Адамара

$$H_{n,m} = \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \dots & f_n \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \dots & f_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n & f_{n+1} & \dots & f_{n+m-1} \end{vmatrix}, \quad (3)$$

элементами которых являются коэффициенты ряда (1). При $l < 0$ в (3) считаем, что $f_l = 0$.

Теорема 1 [10]. Если определитель $H_{n,m} \neq 0$, то аппроксимации Паде – Якоби $\hat{\pi}_{n,m}(z; f)$ существуют и $\hat{\pi}_{n,m}(z; f) = \pi_{n,m}(z; f)$.

Полное исследование условий, при которых $\hat{\pi}_{n,m}(z; f)$ существует, провел Дж. Бейкер [11, гл. 1, § 1.4]. В этой связи $\hat{\pi}_{n,m}(z; f)$ называют также аппроксимациями Паде в смысле Бейкера.

Рассмотрим систему функций $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k)$, представленных степенными рядами

$$f_j(z) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l^j z^l, \quad j=1, \dots, k.$$

Множество k -мерных мультииндексов, являющихся упорядоченным набором k целых неотрицательных чисел, обозначим через \mathbb{Z}_+^k . Порядок мультииндекса $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ — это сумма $m = m_1 + \dots + m_k$. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$ и рассмотрим задачу, в частном случае поставленную и решенную Ш. Эрмитом, а в окончательном виде сформулированную К. Малером [14] (подробнее см. [15, гл. 4, § 1, задача А]).

Задача А. Найти тождественно не равный нулю многочлен $Q_m(z) = Q_{n, \vec{m}}(z; \mathbf{f})$, $\deg Q_m \leq m$, и многочлены $P_{n_j}^j(z) = P_{n, \vec{m}}^j(z; \mathbf{f})$, $\deg P_{n_j}^j \leq n_j$, $n_j = n + m - m_j$, чтобы

$$R_{n, \vec{m}}^j(z) := Q_m(z) f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = O(z^{n+m+1}), \quad j=1, \dots, k. \quad (4)$$

Определение 2. Многочлены $Q_m(z)$, $P_{n_1}^1(z)$, \dots , $P_{n_k}^k(z)$, удовлетворяющие условию (4) (решение задачи А всегда существует [15]), и рациональные дроби

$$\pi_j(z; \mathbf{f}) = \pi_{n_j, n, \vec{m}}^j(z; \mathbf{f}) = \frac{P_{n_j}^j(z)}{Q_m(z)}, \quad j=1, \dots, k,$$

называют соответственно многочленами Эрмита – Паде и аппроксимациями Эрмита – Паде для мультииндекса (n, \vec{m}) и системы \mathbf{f} .

Особый интерес представляют системы \mathbf{f} , для которых дроби $\{\pi_j(z; \mathbf{f})\}_{j=1}^k$ однозначно определяются условиями (4) для любого мультииндекса (n, \vec{m}) . Важным примером таких систем являются совершенные системы [15]. Совершенной является система $\mathbf{E}_k = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где λ_j — различные не равные нулю комплексные числа [15]. Примеры систем, отличных от совершенных, для которых дроби $\{\pi_j(z; \mathbf{f})\}_{j=1}^k$ определяются однозначно, приведены в [31; 32]. В этих работах найдены необходимые и достаточные условия, при которых задача А имеет единственное решение.

Аппроксимации Эрмита – Якоби

Введем в рассмотрение кратные аналоги дробей К. Якоби [10].

Определение 3. Рациональные функции вида

$$\hat{\pi}_j(z; \mathbf{f}) = \hat{\pi}_{n_j, n, \vec{m}}^j(z; \mathbf{f}) = \frac{\hat{P}_{n_j}^j(z)}{\hat{Q}_m(z)}, \quad j=1, \dots, k,$$

где алгебраические многочлены $\hat{Q}_m(z) = \hat{Q}_{n, \vec{m}}(z; \mathbf{f})$, $\hat{P}_{n_j}^j(z) = \hat{P}_{n, \vec{m}}^j(z; \mathbf{f})$ имеют степени соответственно не выше m и n_j , $n_j = n + m - m_j$, будем называть аппроксимациями Эрмита – Якоби для мультииндекса (n, \vec{m}) и системы функций \mathbf{f} , если

$$f_j(z) - \frac{\hat{P}_{n_j}^j(z)}{\hat{Q}_m(z)} = O(z^{n+m+1}). \quad (5)$$

Многочлены $\hat{Q}_m(z)$, $\hat{P}_{n_1}^1(z)$, \dots , $\hat{P}_{n_k}^k(z)$, удовлетворяющие условиям (5) (их будем называть многочленами Эрмита – Якоби), как и аппроксимации Эрмита – Якоби, могут не существовать. Приведем соответствующий пример.

Пример 1. Пусть $k=2$, $n=1$, $m_1=m_2=1$, $f_1(z) = 2 + z + 2z^2 + z^3 + 2z^4 + z^5 + \dots$, $f_2(z) = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + 5z^5 + \dots$.

Тогда $m=2$, $n_1=n_2=2$, а многочлены, удовлетворяющие условиям (5), при подходящем выборе нормирующего множителя должны иметь вид $\hat{Q}_2(z) = z - 2z^2$, $\hat{P}_2^1(z) = 2z - 3z^2$, $\hat{P}_2^2(z) = z - z^2$. Между тем для таких многочленов

$$f_1(z) - \frac{2z - 3z^2}{z - 2z^2} \neq O(z^4), \quad f_2(z) - \frac{z - z^2}{z - 2z^2} \neq O(z^4).$$

Замечание 1. Из определений следует, что если для (n, \vec{m}) и \mathbf{f} существуют аппроксимации Эрмита – Якоби, то они являются и аппроксимациями Эрмита – Паде. Пример 1 показывает, что обратное утверждение не верно.

Обобщение теоремы Якоби

Введем новые обозначения. Для индекса $n \in \mathbb{Z}_+$ и ненулевого мультииндекса $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$ рассмотрим определитель

$$H_{n, \vec{m}} = \det \begin{pmatrix} H^1 \\ H^2 \\ \vdots \\ H^k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} f_{n-m_1+1}^1 & f_{n-m_1+2}^1 & \cdots & f_{n_1}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n^1 & f_{n+1}^1 & \cdots & f_{n+m-1}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n-m_k+1}^k & f_{n-m_k+2}^k & \cdots & f_{n_k}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n^k & f_{n+1}^k & \cdots & f_{n+m-1}^k \end{vmatrix},$$

при $m_j \neq 0$ состоящий из блоков H^j , расположенных друг над другом. При $l < 0$ здесь полагаем $f_l^j = 0$. По определению считаем, что при $m_j = 0$ $H_{n, \vec{m}}$ не содержит блок H^j .

Имеет место следующий кратный аналог теоремы Якоби.

Теорема 2 [33]. Пусть для мультииндекса $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\vec{m} \neq (0, \dots, 0)$, и системы функций \mathbf{f} определитель $H_{n, \vec{m}} \neq 0$. Тогда для (n, \vec{m}) и \mathbf{f} аппроксимации Эрмита – Якоби существуют, определяются единственным образом и справедливы равенства

$$\hat{\pi}_j(z; \mathbf{f}) = \pi_j(z; \mathbf{f}), \quad j = 1, \dots, k. \quad (6)$$

Определение 4. Систему \mathbf{f} назовем вполне совершенной, если для любого мультииндекса $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ и для $j = 1, \dots, k$ $\deg Q_m = m$, $\deg P_{n_j}^j = n_j$, $\text{НОД}(Q_m, P_{n_j}^j) = 1$.

В [32] доказано, что если система вполне совершенна, то для любого мультииндекса (n, \vec{m}) определитель $H_{n, \vec{m}} \neq 0$. Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. Если система \mathbf{f} вполне совершенна, то для любого мультииндекса (n, \vec{m}) существуют аппроксимации Эрмита – Якоби и справедливы равенства (6).

Вполне совершенной системой является, например, упомянутая выше система экспонент $\mathbf{E}_k = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$. Рассмотрим другой пример системы функций, удовлетворяющей условиям теоремы 2. Пусть $\mathbf{E}_{k, \gamma} = \{E_\gamma(\lambda_j z)\}_{j=1}^k$, где $E_\gamma(z)$ представима степенным рядом

$$E_\gamma(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{(\gamma)_p}. \quad (7)$$

В определении $\mathbf{E}_{k, \gamma}$ и выражении (7) предполагается, что параметр $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, \dots\}$, $(\gamma)_0 = 1$, $(\gamma)_p = \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+p-1)$ – символ Похгаммера, а $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные не равные нулю действительные числа. Функции $E_\gamma(z)$ введены М. Миттаг-Леффлером [34] в качестве обобщения показательной функции, в частности $E_1(z) = \exp z$. Равномерная сходимость аппроксимаций Эрмита – Паде $\pi_j(z; \mathbf{E}_{k, \gamma})$ к функции $E_\gamma(\lambda_j z)$ на компактах в \mathbb{C} при $k = 1$ доказана М. де Брюеном [36], а при $k > 1$ – А. И. Аптекарёвым [35]. Асимптотика этой сходимости исследовалась в [37]. В [35] доказано, что при $n \geq m_j - 1$ и $j = 1, \dots, k$

$$Q_m(z; \mathbf{E}_{k, \gamma}) = \frac{z^{n+m+\gamma}}{\Gamma(n+m+\gamma)} \int_0^{+\infty} U_\gamma(x) e^{-zx} dx, \quad (8)$$

$$R_{n, \bar{m}}^j(z; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma}) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+m+1}}{\lambda_j^{\gamma-1}(\gamma)_{n+m}} \int_0^{\lambda_j} U_\gamma(x) e^{-zx} dx, \quad (9)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера, а

$$U_\gamma(x) = x^{n+\gamma-1} \prod_{p=1}^k (x - \lambda_p)^{m_p}. \quad (10)$$

Раскрывая в (10) скобки, получим $U_\gamma(x) = x^{n+m+\gamma-1} + \dots + bx^{n+\gamma-1}$, $b \neq 0$. Так как

$$\int_0^{+\infty} x^{k+\gamma-1} e^{-zx} dx = \frac{\Gamma(k+\gamma)}{z^{k+\gamma}}, \quad k=1, 2, \dots,$$

то $Q_m(z; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma}) = 1 + \dots + b \frac{\Gamma(n+\gamma)}{\Gamma(n+m+\gamma)} z^m$ – многочлен степени m и $Q_m(0; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma}) = 1$. Отсюда при $n \geq m_j - 1$

следует [35], что $H_{n, \bar{m}} \neq 0$. Тогда согласно теореме 2 для (n, \bar{m}) при $n \geq m_j - 1$ в некоторой окрестности нуля

$$E_\gamma(\lambda_j z) - \frac{P_{n_j}^j(z; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma})}{Q_{n, \bar{m}}(z; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma})} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{a}_l^j z^l, \quad j=1, \dots, k. \quad (11)$$

Важно, что при достаточно больших n в качестве такой окрестности можно взять открытый круг с центром в нуле, радиус которого больше значения 1. Это утверждение является следствием основной леммы работы [35]: согласно лемме нули $Q_{n, \bar{m}}(z; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma})$ при достаточно больших n лежат за пределами указанного круга. Из формулы (9) получаем

$$\tilde{a}_{n+m+1}^j = \frac{1}{\lambda_j^{\gamma-1}(\gamma)_{n+m}} \int_0^{\lambda_j} U_\gamma(x) dx.$$

Тригонометрические аппроксимации Эрмита – Паде

Пусть $\mathbf{f}^t = (f_1^t, \dots, f_k^t)$ – набор тригонометрических рядов

$$f_j^t(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} (a_l^j \cos lx + b_l^j \sin lx), \quad j=1, \dots, k, \quad (12)$$

с действительными коэффициентами. Считаем, что ряды (12) сходятся поточечно при всех $x \in \mathbb{R}$. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\bar{m} = (m_1, \dots, m_k)$ и рассмотрим следующую задачу.

Задача А^t. Для набора тригонометрических рядов (12) найти тождественно не равный нулю тригонометрический многочлен $Q_m^t(x) = Q_{n, \bar{m}}^t(x; \mathbf{f}^t)$, $\deg Q_m^t \leq m$, и такие тригонометрические многочлены $P_j^t(x) = P_{n_j, n, \bar{m}}^t(x; \mathbf{f}^t)$, $\deg P_j^t \leq n_j$, $n_j = n + m - m_j$, чтобы

$$R_j^t(x) := Q_m^t(x) f_j^t(x) - P_j^t(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} (\tilde{a}_l^j \cos lx + \tilde{b}_l^j \sin lx), \quad j=1, \dots, k. \quad (13)$$

Очевидно, что многочлены $Q_m^t(x)$, $P_j^t(x)$ определяются неоднозначно: если пара (Q_m^t, P^t) , где $P^t := (P_1^t, \dots, P_k^t)$, удовлетворяет (13), то для любого отличного от нуля числа λ новая пара $(\lambda Q_m^t, \lambda P^t)$, где $\lambda P^t := (\lambda P_1^t, \dots, \lambda P_k^t)$, также удовлетворяет (13). Неединственность может быть и более существенной.

Пример 2. Пусть $k=1$, $n=2$, $m=1$, а $f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos lx$, где

$$a_l = \begin{cases} 2, & \text{если } l=1, 2, 4, \\ 4, & \text{если } l=3, \\ \frac{1}{l!}, & \text{если } l > 4. \end{cases}$$

Тогда любое решение задачи \mathbf{A}^t имеет вид $(\lambda Q_1^t, \lambda P_1^t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, где многочлены $Q_1^t(x)$, $P_1^t(x)$ в комплексной форме записи определяются равенствами

$$Q_1^t(x) = ae^{-ix} - \frac{a+b}{2} + be^{ix},$$

$$P_1^t(x) = \frac{a+3b}{2}e^{-i2x} + \frac{b-a}{2}e^{-ix} + a+b + \frac{a-b}{2}e^{ix} + \frac{3a+b}{2}e^{i2x},$$

в которых a и b – произвольные действительные числа, не равные нулю одновременно.

Определение 5. Будем говорить, что задача \mathbf{A}^t имеет единственное решение, если для любых ее решений (\bar{Q}_m^t, \bar{P}^t) и (\bar{Q}_m^t, \bar{P}^t) найдется число λ такое, что $(\bar{Q}_m^t, \bar{P}^t) = (\lambda \bar{Q}_m^t, \lambda \bar{P}^t)$.

Определение 6. Пусть пара (Q_m^t, P^t) , где $P^t = (P_1^t, \dots, P_k^t)$, является решением задачи \mathbf{A}^t . Тогда многочлены $Q_m^t(x)$, $P_1^t(x)$, \dots , $P_k^t(x)$ и рациональные дроби

$$\pi_j^t(x; \mathbf{f}^t) = \pi_{j, n, \bar{m}}^t(x; \mathbf{f}^t) = \frac{P_j^t(x)}{Q_m^t(x)}, \quad j=1, \dots, k,$$

будем называть соответственно тригонометрическими многочленами Эрмита – Паде и аппроксимациями Эрмита – Паде для мультииндекса (n, \bar{m}) и системы \mathbf{f}^t .

Если задача \mathbf{A}^t имеет единственное решение, то аппроксимации $\{\pi_j^t(x; \mathbf{f}^t)\}_{j=1}^k$ определяются однозначно. При $k=1$ достаточное условие единственности решения задачи \mathbf{A}^t получено в [38]: для единственности достаточно, чтобы определитель $\Delta^1(n, m) \neq 0$ (см. далее определение $\Delta^1(n, m)$). В [38] найдены явные детерминантные формулы для многочленов $Q_m^t(x)$, $P_1^t(x)$, аналогичные формулам для алгебраических многочленов Паде $Q_m(z)$, $P_n(z)$ [11]. При $k=1$ дроби $\pi_{1, n, \bar{m}}^t(x; \mathbf{f}^t) =: \pi_{n, m}^t(x)$ называют также тригонометрическими аппроксимациями Паде. Отметим одно важное отличие $\pi_{n, m}^t(x)$ от $\pi_{n, m}(z)$. Для любой пары индексов (n, m) аппроксимации $\pi_{n, m}(z)$ определяются однозначно. Тригонометрические аппроксимации Паде $\pi_{n, m}^t(x)$ этим свойством не обладают. Такое заключение можно сделать, опираясь на пример 2.

Запишем ряды (12) и многочлены $Q_m^t(x)$, $P_j^t(x)$ в комплексной форме:

$$f_j^t(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l^j e^{ilx}, \quad j=1, \dots, k, \quad (14)$$

$$Q_m^t(x) = \sum_{p=-m}^m u_p e^{ipx}, \quad j=1, \dots, k, \quad P_j^t(x) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} v_p^j e^{ipx}, \quad (15)$$

где $u_p, v_p^j \in \mathbb{C}$, $c_0^j = \frac{a_0^j}{2}$, $c_l^j = \frac{a_l^j - ib_l^j}{2}$, $c_{-l}^j = \bar{c}_l^j$, $j=1, \dots, k$; $l=1, 2, \dots$. Тогда

$$R_j^t(x) = \sum_{l=n+m+1}^{+\infty} (\tilde{c}_l^j e^{ilx} + \tilde{c}_{-l}^j e^{-ilx}), \quad j=1, \dots, k. \quad (16)$$

Каждому $l \in \mathbb{Z}$ поставим в соответствие матрицы-строки, состоящие из коэффициентов рядов (14):

$$\mathbb{C}_l^j = (c_{l+m}^j \quad c_{l+m-1}^j \quad \dots \quad c_{l+1}^j \quad c_l^j \quad c_{l-1}^j \quad \dots \quad c_{l-m+1}^j \quad c_{l-m}^j), \quad j=1, \dots, k,$$

а числу x – матрицу-строку $E_m^t(x) = (e^{-imx} \quad e^{-i(m-1)x} \quad \dots \quad e^{-ix} \quad 1 \quad e^{ix} \quad \dots \quad e^{i(m-1)x} \quad e^{imx})$. Для заданного $j \in \{1, \dots, k\}$, фиксированных индекса $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и ненулевого мультииндекса $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$ в предположении, что $m_j \neq 0$, определим матрицы порядка $m_j \times (2m + 1)$

$$F_+^j := \begin{pmatrix} c_{n_j+m+m_j}^j & c_{n_j+m+m_j-1}^j & \dots & c_{n_j-m+m_j}^j \\ c_{n_j+m+m_j-1}^j & c_{n_j+m+m_j-2}^j & \dots & c_{n_j-m+m_j-1}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n_j+m+1}^j & c_{n_j+m}^j & \dots & c_{n_j-m+1}^j \end{pmatrix},$$

$$F_-^j := \begin{pmatrix} c_{-n_j+m-1}^j & c_{-n_j+m-2}^j & \dots & c_{-n_j-m-1}^j \\ c_{-n_j+m-2}^j & c_{-n_j+m-3}^j & \dots & c_{-n_j-m-2}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n_j+m-m_j}^j & c_{-n_j+m-m_j-1}^j & \dots & c_{-n_j-m-m_j}^j \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим определитель порядка $2m + 1$

$$D(n, \vec{m}; x) := \det \begin{bmatrix} F_+^k \\ \vdots \\ F_+^1 \\ E_m^t(x) \\ F_-^1 \\ \vdots \\ F_-^k \end{bmatrix}.$$

В случае если $m_j = 0$, считаем, что определитель $D(n, \vec{m}; x)$ не содержит блок-матриц F_{\pm}^j . Обозначим через $H_{n, \vec{m}}^t$ матрицу порядка $2m \times (2m + 1)$, полученную из элементов определителя $D(n, \vec{m}; x)$ после удаления в нем $(m + 1)$ -й строки $E_m^t(x)$. Если в определителе $D(n, \vec{m}; x)$ строку $E_m^t(x)$ заменить на строку C_j^j , получим новый определитель $d_j^j(n, \vec{m})$. Обозначим через $\Delta^k(n, \vec{m})$ определитель порядка $2m$, полученный в результате вычеркивания в определителе $D(n, \vec{m}; x)$ $(m + 1)$ -й строки и $(m + 1)$ -го столбца.

Определение 7. Мультииндекс $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\vec{m} \neq (0, \dots, 0)$, будем называть слаборнормальным для \mathbf{f}^t , если $H_{n, \vec{m}}^t$ является матрицей полного ранга, т. е. $\text{rank } H_{n, \vec{m}}^t = 2m$.

Определение 8. Систему \mathbf{f}^t назовем слабосовершенной, если все мультииндексы $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\vec{m} \neq (0, \dots, 0)$, являются слаборнормальными для \mathbf{f}^t .

Теорема 3. Для того чтобы для фиксированного мультииндекса (n, \vec{m}) , $\vec{m} \neq (0, \dots, 0)$, и системы \mathbf{f}^t задача \mathbf{A}^t имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы мультииндекс (n, \vec{m}) был слаборнормальным для \mathbf{f}^t , т. е. $\text{rank } H_{n, \vec{m}}^t = 2m$. Если $\text{rank } H_{n, \vec{m}}^t = 2m$, то при выборе соответствующего нормирующего множителя для решений задачи \mathbf{A}^t справедливы представления ($j = 1, \dots, k$)

$$Q_m^t(x) = D(n, \vec{m}; x), \quad (17)$$

$$P_j^t(x) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} d_p^j(n, \vec{m}) e^{ipx}, \quad (18)$$

$$R_j^t(x) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} (d_p^j(n, \vec{m}) e^{ipx} + d_{-p}^j(n, \vec{m}) e^{-ipx}). \quad (19)$$

Доказательство. Пусть искомым многочлен $Q_m^t(x)$ имеет вид (15). После преобразований получаем

$$Q_m^t(x) f_j^t(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{p=-m}^m c_{l-p}^j u_p \right) e^{ilx} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_l^j e^{ilx},$$

где

$$\tilde{c}_l^j = \sum_{p=-m}^m c_{l-p}^j u_p, l \in \mathbb{Z}. \quad (20)$$

Выберем коэффициенты u_p , $p = \overline{-m, m}$, многочлена $Q_m^t(x)$ так, чтобы

$$\tilde{c}_l^j = 0, l = \pm(n_j + 1), \dots, \pm(n_j + m_j), j = 1, \dots, k,$$

и допустим, что $P_j^t(x) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} \tilde{c}_p^j e^{ipx}$. Очевидно, что выбранные таким образом многочлены $Q_m^t(x)$, $P_j^t(x)$

удовлетворяют условиям (13) и (16). Остается исследовать совместность системы линейных уравнений

$$\sum_{p=-m}^m c_{l-p}^j u_p = 0, l = \pm(n_j + 1), \dots, \pm(n_j + m_j), j = 1, \dots, k. \quad (21)$$

Систему (21) можно записать в матричной форме $H_{n, \vec{m}}^t u^T = \theta^T$, где $u = (u_{-m} \dots u_{-1} u_0 u_1 \dots u_m)$ – матрица-строка неизвестных коэффициентов, а θ – матрица-строка порядка $1 \times (2m + 1)$, все элементы которой нулевые. Поскольку система (21) является однородной и в ней число неизвестных $2m + 1$ на единицу больше числа уравнений $2m$, то из теоремы Кронекера – Капелли следует, что у системы (21) имеется ненулевое решение. Более того, множество всех линейно независимых решений системы (21) состоит из одного фундаментального решения тогда и только тогда, когда $\text{rank } H_{n, \vec{m}}^t = 2m$. В данном случае остальные нулевые решения получаются домножением этого фундаментального решения на число $\lambda \neq 0$. Первая часть теоремы 3 доказана.

Докажем теперь равенства (17)–(19). Так как по предположению ранг матрицы $H_{n, \vec{m}}^t$ равен $2m$, то при некотором $s \in \{1, \dots, 2m + 1\}$ определитель, полученный из элементов матрицы $H_{n, \vec{m}}^t$ в результате вычеркивания в ней s -го столбца, является отличным от нуля. Для определенности предположим, что $s = m + 1$. Тогда, зафиксировав неизвестное u_0 , получим квадратную неоднородную систему

$$\sum_{p=-m}^{-1} c_{l-p}^j u_p + \sum_{p=1}^m c_{l-p}^j u_p = -c_l^j u_0, l = \pm(n_j + 1), \dots, \pm(n_j + m_j), j = 1, \dots, k, \quad (22)$$

главный определитель которой есть $\Delta^k(n, \vec{m}) \neq 0$. Заметим, что $u_0 \neq 0$. В противном случае система (22), а значит, и система (21) имели бы только нулевые решения. Система (22) имеет единственное ненулевое решение, и найти его можно по формулам Крамера:

$$u_p = \frac{\Delta_p^k(n, \vec{m})}{\Delta^k(n, \vec{m})}, p = \overline{-m, m}, p \neq 0,$$

где $\Delta_p^k(n, \vec{m})$ – определитель, полученный из определителя $\Delta^k(n, \vec{m})$ заменой в нем p -го столбца на столбец свободных членов. Если допустить, что $\Delta_0^k(n, \vec{m}) := u_0 \Delta^k(n, \vec{m})$, то

$$Q_m^t(x) = \sum_{p=-m}^m u_p e^{ipx} = \sum_{p=-m}^m \frac{\Delta_p^k(n, \vec{m})}{\Delta^k(n, \vec{m})} e^{ipx}. \quad (23)$$

Разлагая определитель $D(n, \vec{m}; x)$ по элементам $(m + 1)$ -й строки и сравнивая с (23), делаем вывод, что

$$Q_m^t(x) = u_0 \frac{D(n, \vec{m}; x)}{\Delta^k(n, \vec{m})}. \quad (24)$$

Сопоставив (20) и (23), замечаем, что для отыскания \tilde{c}_p^j следует в (23) e^{ipx} заменить на c_{l-p}^j . Учитывая обозначения, получаем, что $\tilde{c}_p^j = u_0 \frac{d_p^j(n, \vec{m}; x)}{\Delta^k(n, \vec{m})}$. Следовательно, многочлен $P_j^t(x)$ и остаточный член $R_j^t(x)$ можно представить в виде

$$P_j^t(x) = \frac{u_0}{\Delta^k(n, \bar{m})} \sum_{p=-n_j}^{n_j} d_p^j(n, \bar{m}) e^{ipx}, \quad (25)$$

$$R_j^t(x) = \frac{u_0}{\Delta^k(n, \bar{m})} \sum_{p=n+m+1}^{\infty} (d_p^j(n, \bar{m}) e^{ipx} + d_{-p}^j(n, \bar{m}) e^{-ipx}). \quad (26)$$

Умножая равенства (24)–(26) на $\frac{\Delta^k(n, \bar{m})}{u_0}$, получим (17)–(19).

Если при вычеркивании в $H_{n, \bar{m}}^t$ столбца с номером $s \neq t + 1$ получим ненулевой определитель, то, рассуждая аналогично, приходим к (17)–(19). Поскольку $\text{rank } H_{n, \bar{m}}^t = 2m$, то определитель $D(n, \bar{m}; x)$ не может быть тождественно равным нулю. Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Из представления (17) следует, что компонента m_j мультииндекса \bar{m} определяет число коэффициентов ряда $f_j^t(x)$, которые учитываются при построении многочлена $Q_m^t(x)$. В частности, если $m_j = 0$, то определитель $D(n, \bar{m}; x)$ не содержит блоки F_{\pm}^j и, следовательно, при построении многочлена $Q_m^t(x)$ ряд $f_j^t(x)$ не рассматривается. Например, если $\bar{m} = (m_1, 0, \dots, 0)$, то $m = m_1$, и, как и в случае с $k = 1$, при нахождении $Q_m^t(x)$ учитываются только коэффициенты ряда $f_1^t(x)$. Тогда формула (17) в точности совпадает с формулой для знаменателя $\pi_{n, m}^t(x; f_1^t)$, полученной в [38].

Замечание 3. Если $\bar{m} = (0, \dots, 0)$, то решение задачи A^t очевидно: с точностью до числового множителя $Q_m^t(x) \equiv 1$, а $P_j^t(x)$ совпадает с n -й частной суммой ряда $f_j^t(x)$.

Замечание 4. При доказательстве теоремы 3 не учитывалось наше предположение о сходимости рядов (12). Поэтому все утверждения теоремы остаются в силе, если ряды (12) являются формальными.

Пример 2 показывает, что для мультииндекса (n, \bar{m}) , который не является слаборегулярным, коэффициенты многочленов $Q_m^t(x)$, $P_j^t(x)$ могут быть комплексными числами. Для слаборегулярного мультииндекса это не так.

Следствие 2. Пусть мультииндекс (n, \bar{m}) является слаборегулярным для системы f^t . Тогда многочлены $Q_m^t(x)$, $P_1^t(x)$, ..., $P_k^t(x)$ – решения задачи A^t – являются действительными тригонометрическими многочленами.

Доказательство. По предположению коэффициенты тригонометрических рядов (12) являются действительными числами. Поэтому справедливы равенства $c_{-p}^j = \overline{c_p^j}$, $j = 1, \dots, k$; $p = 1, 2, \dots$. Тогда $\overline{D(n, \bar{m}; x)} = D(n, \bar{m}; x)$, $\overline{d_p^j(n, \bar{m})} = d_{-p}^j(n, \bar{m})$. Чтобы убедиться в этом, достаточно поменять местами равноотстоящие от краев строки и столбцы соответствующих определителей. Из этих равенств и формул (17), (18) вытекает утверждение следствия 2.

Следствие 3. Для того чтобы задача A^t имела единственное решение для любого $(n, \bar{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, необходимо и достаточно, чтобы система f^t была слабосовершенной.

Тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби

Введем в рассмотрение тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби.

Определение 9. Рациональные функции вида

$$\hat{\pi}_j^t(x; f^t) = \hat{\pi}_{j, n, \bar{m}}^t(x; f^t) = \frac{\hat{P}_j^t(x)}{\hat{Q}_m^t(x)}, \quad j = 1, \dots, k,$$

где $\hat{Q}_m^t(x) = \hat{Q}_{n, \bar{m}}^t(x; f^t)$, $\hat{P}_j^t(x) = \hat{P}_{n_j, n, \bar{m}}^t(x; f^t)$ – тригонометрические многочлены, степени которых соответственно не выше m и n_j , $n_j = n + m - m_j$, будем называть тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Якоби для мультииндекса (n, \bar{m}) и системы функций f^t , если каждая дробь $\hat{\pi}_j^t(x; f^t)$ представляется тригонометрическим рядом и справедливы равенства

$$f_j^t(x) - \frac{\hat{P}_j^t(x)}{\hat{Q}_m^t(x)} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} (\tilde{a}_l^j \cos lx + \tilde{b}_l^j \sin lx). \quad (27)$$

Многочлены $\hat{Q}_m^t(x)$, $\hat{P}_1^t(x)$, ..., $\hat{P}_k^t(x)$, удовлетворяющие условиям (27), будем называть тригонометрическими многочленами Эрмита – Якоби для (n, \bar{m}) и f^t .

Тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби могут не существовать [38]. В работе [39] исследован эффект Гиббса для аппроксимаций Паде функции знака $\operatorname{sgn} x$ и, в частности, при $k = 1$ найдены явные выражения для дробей $\pi'_{n,m}(x; s) := \pi'_{1,n,m}(x; s)$, $\hat{\pi}'_{n,m}(x; s) := \hat{\pi}'_{1,n,m}(x; s)$, где $s(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$, из которых следует, что эти дроби различны при всех $m \geq 1$. При $k = 1$ примеры функций, для которых тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби не существуют, а также примеры функций, для которых тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби существуют, но не совпадают с тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Паде, можно построить, основываясь на результатах работ [7; 18; 40]. В [41] при произвольных $k \geq 1$ построены примеры систем функций, для которых тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби существуют, но не совпадают с тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Паде. Результаты работы [41] можно дополнить, если вместо экспонент взять

функции Миттаг-Леффлера. Рассмотрим семейства тригонометрических рядов $G_\gamma(x; \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{(\gamma)_l} \cos lx$,

зависящих от параметров $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$. Нетрудно заметить, что $G_\gamma(x; \lambda)$ является действительной частью функции $E_\gamma(\lambda e^{ix})$. Считая, что $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные не равные нулю действительные числа, определим новую систему функций $\mathbf{G}_{\mathbf{k}, \gamma} = \{G_\gamma(x; \lambda_j)\}_{j=1}^k$.

Теорема 4. При всех n , начиная с некоторого n_0 , для мультииндекса $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\vec{m} \neq (0, \dots, 0)$, удовлетворяющего условию $n \geq m_j$, $j = 1, \dots, k$, существуют тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби $\{\hat{\pi}'_j(x; \mathbf{G}_{\mathbf{k}, \gamma})\}_{j=1}^k$, и при соответствующей нормировке их знаменатель представим в виде

$$\hat{Q}'_m(x; \mathbf{G}_{\mathbf{k}, \gamma}) = Q_m(e^{ix}; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma}) \overline{Q_m(e^{ix}; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma})} = \frac{1}{\Gamma^2(n + m + \gamma)} \left| \int_0^{+\infty} U_\gamma(t) e^{-t(\cos x + i \sin x)} dt \right|^2.$$

Если $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k$, то среди $\{\hat{\pi}'_j(x; \mathbf{G}_{\mathbf{k}, \gamma})\}_{j=1}^k$ найдется аппроксимация Эрмита – Якоби $\hat{\pi}'_j(x; \mathbf{G}_{\mathbf{k}, \gamma})$, которая не является аппроксимацией Эрмита – Паде $\pi'_j(x; \mathbf{G}_{\mathbf{k}, \gamma})$.

Доказательство. Многочлен $Q_m(z; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma})$ представим формулой (8), и в круге $|z| \leq 1$ справедливы равенства (11). Допустим, что в (11) $z = e^{ix}$, а затем приравняем действительные части от выражений, стоящих слева и справа от нового знака равенства. Тогда

$$G_\gamma(x; \lambda_j) - \operatorname{Re} \left\{ \frac{P_{n_j}^j(e^{ix}; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma})}{Q_m(e^{ix}; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma})} \right\} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{a}_l^j \cos lx. \quad (28)$$

Остается показать, что при $n \geq \max\{m_j : 1 \leq j \leq k\}$

$$\hat{\pi}'_j(x; \mathbf{G}_{\mathbf{k}, \gamma}) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{P_{n_j}^j(e^{ix}; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma})}{Q_m(e^{ix}; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma})} \right\}. \quad (29)$$

Для этого представим многочлены $Q_m(z; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma})$, $P_{n_j}^j(z; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma})$ в виде

$$Q_m(z; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma}) = \sum_{p=0}^m b_p z^p = 1 + \dots + b \frac{\Gamma(n + \gamma)}{\Gamma(n + m + \gamma)} z^m, \quad P_{n_j}^j(z; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma}) = \sum_{p=0}^{n_j} a_p^j z^p.$$

Поскольку b_p и a_p^j – действительные числа, то при $z = e^{ix}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \pi'_{n_j, n, \vec{m}}(e^{ix}; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma}) \right\} &= \frac{1}{2} \left(\frac{P_{n_j}^j(z)}{Q_m(z)} + \overline{\frac{P_{n_j}^j(z)}{Q_m(z)}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sum_{p=0}^{n_j} a_p^j e^{ipx} \sum_{l=0}^m b_l e^{-ilx} + \sum_{p=0}^{n_j} a_p^j e^{-ipx} \sum_{s=0}^m b_s e^{isx}}{\sum_{s=0}^m b_s e^{isx} \sum_{p=0}^m b_p e^{-ipx}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Заметим, что

$$\sum_{s=0}^m b_s e^{isx} \sum_{l=0}^m b_l e^{-ilx} = \sum_{s=0}^m \sum_{l=0}^m b_s b_l \cos(s-l)x,$$

$$\sum_{p=0}^{n_j} a_p^j e^{ipx} \sum_{l=0}^m b_l e^{-ilx} + \sum_{p=0}^{n_j} a_p^j e^{-ipx} \sum_{s=0}^m b_s e^{isx} = 2 \sum_{p=0}^{n_j} \sum_{l=0}^m a_p^j b_l \cos(p-l)x.$$

Следовательно, из формулы (30) при $j = 1, \dots, k$ получим

$$\operatorname{Re} \left\{ \pi_{n_j, n, \bar{m}}^j \left(e^{ix}; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma} \right) \right\} = \frac{\sum_{p=0}^{n_j} \sum_{l=0}^m a_p^j b_l \cos(p-l)x}{\sum_{s=0}^m \sum_{l=0}^m b_s b_l \cos(s-l)x} =: \frac{\tilde{P}_j^t(x)}{\tilde{Q}_m^t(x)}. \quad (31)$$

Из условия $n \geq m_j$ ($j = 1, \dots, k$) для мультииндекса (n, \bar{m}) следует, что $n_j \geq m$. Принимая во внимание (31), получаем, что $\deg \tilde{Q}_m^t \leq m$, $\deg \tilde{P}_j^t \leq n_j$, $j = 1, \dots, k$. Значит, тождество (29) и первая часть теоремы 4 доказаны.

Докажем вторую часть теоремы. Из (28) и (31) следует, что

$$G_\gamma(x; \lambda_j) - \hat{\pi}_j^t(x; \mathbf{G}_{\mathbf{k}, \gamma}) = G_\gamma(x; \lambda_j) - \frac{\tilde{P}_j^t(x)}{\tilde{Q}_m^t(x)} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{a}_l^j \cos lx.$$

Воспользовавшись тригонометрической формулой для произведения двух косинусов, из последнего равенства и из (9) и (31) получаем

$$\tilde{Q}_m^t(x) G_\gamma(x; \lambda_j) - \tilde{P}_j^t(x) = \alpha_{n+1}^j \cos(n+1)x + \alpha_{n+2}^j \cos(n+2)x + \dots, \quad (32)$$

где $\alpha_{n+1}^j = 2b_m b_0 \tilde{a}_{n+m+1}^j$. Напомним, что

$$b_0 = 1, b_m = b \frac{\Gamma(n+\gamma)}{\Gamma(n+m+\gamma)}, \tilde{a}_{n+m+1}^j = \frac{1}{\lambda_j^{\gamma-1}(\gamma)_{n+m}} \int_0^{\lambda_j} U_\gamma(x) dx.$$

Если $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k$, то нетрудно показать, что, например, $\tilde{a}_{n+m+1}^1 \neq 0$, и тогда в (32) $\alpha_{n+1}^1 \neq 0$. Из определений следует, что $\hat{\pi}_1^t(x; \mathbf{G}_{\mathbf{k}, \gamma}) \neq \pi_1^t(x; \mathbf{G}_{\mathbf{k}, \gamma})$. Теорема 4 доказана.

Линейные аппроксимации Эрмита – Чебышева

В этом разделе терминология частично заимствована из работы [7]. Пусть набор $\mathbf{f}^{\text{ch}} = (f_1^{\text{ch}}, \dots, f_k^{\text{ch}})$ состоит из функций, представленных рядами Фурье по многочленам Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ вида

$$f_j^{\text{ch}}(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l^j T_l(x), \quad j = 1, \dots, k \quad (33)$$

с действительными коэффициентами. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+$ и мультииндекс $\bar{m} = (m_1, \dots, m_k)$ и рассмотрим следующую задачу.

Задача \mathbf{A}^{ch} . Для системы функций \mathbf{f}^{ch} найти тождественно не равный нулю многочлен $Q_m^{\text{ch}}(x) = Q_{n, \bar{m}}^{\text{ch}}(x; \mathbf{f}^{\text{ch}}) = \sum_{p=0}^m u_p T_p(x)$ и такие многочлены $P_j^{\text{ch}}(x) = P_{n_j, n, \bar{m}}^{\text{ch}}(x; \mathbf{f}^{\text{ch}}) = \sum_{p=0}^{n_j} v_p^j T_p(x)$, $n_j = n + m - m_j$, чтобы для $j = 1, \dots, k$

$$Q_m^{\text{ch}}(x) f_j^{\text{ch}}(x) - P_j^{\text{ch}}(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{a}_l^j T_l(x). \quad (34)$$

Определение 10. Если пара $(Q_m^{\text{ch}}, P^{\text{ch}})$, где $P^{\text{ch}} := (P_1^{\text{ch}}, \dots, P_k^{\text{ch}})$, удовлетворяет условиям (34), то многочлены $Q_m^{\text{ch}}(x)$, $P_1^{\text{ch}}(x)$, \dots , $P_k^{\text{ch}}(x)$ и рациональные дроби

$$\pi_j^{\text{ch}}(x; \mathbf{f}^{\text{ch}}) = \pi_{n_j, n, \bar{m}}^{\text{ch}}(x; \mathbf{f}^{\text{ch}}) = \frac{P_j^{\text{ch}}(x)}{Q_m^{\text{ch}}(x)}, \quad j = 1, \dots, k,$$

будем называть соответственно многочленами Эрмита – Чебышева и линейными аппроксимациями Эрмита – Чебышева для мультииндекса (n, \vec{m}) и системы \mathbf{f}^{ch} .

Решение задачи \mathbf{A}^{ch} можно получить, опираясь на теорему 3. Для этого в (33) заменим x на $\cos x$. Полагая, что $\tilde{f}_j^t(x) = f_j^{\text{ch}}(\cos x)$, получим систему $\tilde{\mathbf{f}}^t = (\tilde{f}_1^t, \dots, \tilde{f}_k^t)$, где

$$\tilde{f}_j^t(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l^j \cos lx, \quad j = 1, \dots, k.$$

Для системы $\tilde{\mathbf{f}}^t$ задача \mathbf{A}^t имеет единственное решение только в том случае, когда мультииндекс $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ является слаборегулярным для $\tilde{\mathbf{f}}^t$. Для слаборегулярного индекса тригонометрические многочлены Эрмита – Паде при соответствующем выборе нормирующего множителя имеют вид

$$Q_m^t(x; \tilde{\mathbf{f}}^t) = D(n, \vec{m}; x), \quad (35)$$

$$P_j^t(x; \tilde{\mathbf{f}}^t) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} d_p^j(n, \vec{m}) e^{ipx} \quad (36)$$

и для них

$$Q_m^t(x; \tilde{\mathbf{f}}^t) \tilde{f}_j^t(x) - P_j^t(x; \tilde{\mathbf{f}}^t) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} (d_p^j(n, \vec{m}) e^{ipx} + d_{-p}^j(n, \vec{m}) e^{-ipx}). \quad (37)$$

Блок-матрицы F_{\pm}^j для этой системы имеют вид

$$F_+^j = \begin{pmatrix} h_{n_j+m+m_j}^j & h_{n_j+m+m_j-1}^j & \cdots & h_{n_j-m+m_j}^j \\ h_{n_j+m+m_j-1}^j & h_{n_j+m+m_j-2}^j & \cdots & h_{n_j-m+m_j-1}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n_j+m+1}^j & h_{n_j+m}^j & \cdots & h_{n_j-m+1}^j \end{pmatrix},$$

$$F_-^j = \begin{pmatrix} h_{-n_j+m-1}^j & h_{-n_j+m-2}^j & \cdots & h_{-n_j-m-1}^j \\ h_{-n_j+m-2}^j & h_{-n_j+m-3}^j & \cdots & h_{-n_j-m-2}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{-n_j+m-m_j}^j & h_{-n_j+m-m_j-1}^j & \cdots & h_{-n_j-m-m_j}^j \end{pmatrix},$$

где $h_p^j = \frac{a_p^j}{2}$, $j = 1, \dots, k$; $p \in \mathbb{Z}$. Теперь нетрудно убедиться, что в равенствах (35)–(37) коэффициенты при степенях e^{ipx} и e^{-ipx} совпадают:

$$d_p^j(n, \vec{m}) = d_{-p}^j(n, \vec{m}), \quad p = 1, 2, \dots; \quad j = 1, \dots, k; \quad u_l = u_{-l}, \quad l = 1, \dots, m.$$

Следовательно, равенства (35)–(37) можно переписать в виде

$$Q_m^t(x; \tilde{\mathbf{f}}^t) = u_0 + \sum_{p=1}^m 2u_p \cos px, \quad P_j^t(x; \tilde{\mathbf{f}}^t) = d_0^j(n, \vec{m}) + \sum_{p=1}^{n_j} 2d_p^j(n, \vec{m}) \cos px,$$

$$Q_m^t(x; \tilde{\mathbf{f}}^t) \tilde{f}_j^t(x) - P_j^t(x; \tilde{\mathbf{f}}^t) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} 2d_p^j(n, \vec{m}) \cos px.$$

Если здесь x заменить на $\arccos x$, то получим

$$Q_m^{\text{ch}}(x; \mathbf{f}^{\text{ch}}) = Q_m^t(\arccos x; \tilde{\mathbf{f}}^t) = u_0 + \sum_{p=1}^m 2u_p T_p(x), \quad (38)$$

$$P_j^{\text{ch}}(x; \mathbf{f}^{\text{ch}}) = P_j^t(\arccos x; \tilde{\mathbf{f}}^t) = d_0^j + \sum_{p=1}^{n_j} 2d_p^j(n, \vec{m}) T_p(x), \quad (39)$$

$$Q_m^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch}) f_j^{ch}(x) - P_j^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch}) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} 2d_p^j(n, \bar{m}) T_p(x). \quad (40)$$

Заметим, что если мультииндекс $(n, \bar{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ не является слаборегулярным для системы $\tilde{\mathbf{f}}^t$, то решение задачи \mathbf{A}^t для $\tilde{\mathbf{f}}^t$ не единственно, и поэтому решение соответствующей задачи \mathbf{A}^{ch} также не единственно. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 5. Для того чтобы для фиксированного мультииндекса (n, \bar{m}) , $\bar{m} \neq (0, \dots, 0)$, и системы функций \mathbf{f}^{ch} , определяемых равенствами (33), задача \mathbf{A}^{ch} имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы мультииндекс (n, \bar{m}) был слаборегулярным для системы $\tilde{\mathbf{f}}^t$. Если решение задачи \mathbf{A}^{ch} единственно, то для ее решений справедливы представления (38)–(40).

Приведем несколько очевидных следствий из теоремы 5.

Следствие 4. Пусть мультииндекс (n, \bar{m}) является слаборегулярным для $\tilde{\mathbf{f}}^t$. Тогда коэффициенты многочленов $Q_m^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch})$, $P_1^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch})$, ..., $P_k^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch})$ – действительные числа.

Следствие 5. Для того чтобы задача \mathbf{A}^{ch} имела единственное решение для любого (n, \bar{m}) , необходимо и достаточно, чтобы система $\tilde{\mathbf{f}}^t$ была слабосовершенной.

Следствие 6. Если мультииндекс (n, \bar{m}) слаборегулярный для $\tilde{\mathbf{f}}^t$, то линейные аппроксимации Эрмита – Чебышева $\pi_j^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch}) = \frac{P_j^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch})}{Q_m^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch})}$ определяются однозначно.

Нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышева

Определим теперь другую конструкцию для совместного приближения рядов (33).

Определение 11. Рациональные функции вида $\hat{\pi}_j^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch}) = \hat{\pi}_{n_j, n, \bar{m}}^{ch}(x; \mathbf{f}^{ch}) = \frac{\hat{P}_j^{ch}(x)}{\hat{Q}_m^{ch}(x)}$, где многочлены

$$\hat{Q}_m^{ch}(x) = \sum_{p=0}^m \hat{u}_p T_p(x), \quad \hat{P}_j^{ch}(x) = \sum_{p=0}^{n_j} \hat{v}_p^j T_p(x) \quad (n_j = n + m - m_j)$$
 подобраны так, чтобы

$$f_j^{ch}(x) - \frac{\hat{P}_j^{ch}(x)}{\hat{Q}_m^{ch}(x)} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \hat{a}_l^j T_l(x) \quad (j=1, \dots, k),$$

будем называть нелинейными аппроксимациями Эрмита – Чебышева для мультииндекса (n, \bar{m}) и системы \mathbf{f}^{ch} .

При $k=1$ существуют функции, для которых нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышева не существуют, и функции, для которых нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышева существуют, но не совпадают с линейными [7; 11; 12; 18; 40; 41]. Рассмотрим новую систему функций, обладающую аналогичным свойством.

Пусть $\mathbf{F}_{\mathbf{k}, \gamma} = \{F_\gamma(x; \lambda_j)\}_{j=1}^k$, где $F_\gamma(x; \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{(\gamma)_l} T_l(x)$, а $\lambda \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$, $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные не рав-

ные нулю действительные числа. Аналогично теореме 4 доказывается следующая теорема.

Теорема 6. При всех n , начиная с некоторого n_0 , для мультииндекса $(n, \bar{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\bar{m} \neq (0, \dots, 0)$, удовлетворяющего условию $n \geq m_j$, $j=1, \dots, k$, существуют нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышева $\{\hat{\pi}_j^{ch}(x; \mathbf{F}_{\mathbf{k}, \gamma})\}_{j=1}^k$ и справедливы равенства

$$\hat{Q}_m^{ch}(x; \mathbf{F}_{\mathbf{k}, \gamma}) = Q_m(e^{i \arccos x}; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma}) \overline{Q_m(e^{i \arccos x}; \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \gamma})} = \frac{1}{\Gamma^2(n+m+\gamma)} \left| \int_0^{+\infty} T_\gamma(t) e^{-t(x+i\sqrt{1-x^2})} dt \right|^2.$$

При $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k$ среди $\{\hat{\pi}_j^{ch}(x; \mathbf{F}_{\mathbf{k}, \gamma})\}_{j=1}^k$ найдется нелинейная аппроксимация Эрмита – Чебышева $\hat{\pi}_j^{ch}(x; \mathbf{F}_{\mathbf{k}, \gamma})$, не равная аппроксимации Эрмита – Чебышева $\pi_j^{ch}(x; \mathbf{F}_{\mathbf{k}, \gamma})$.

Библиографические ссылки

1. Andrianov IV, Awrejcewicz J. New trends in asymptotic approaches: summation and interpolation methods. *Applied Mechanics Reviews*. 2001;54(1):69–92. DOI: 10.1115/1.3097289.
2. Книжнерман ЛА. Выделение полюсов потенциальных полей с помощью разложения в ряды Фурье – Чебышева. *Известия АН СССР. Физика Земли*. 1984;11:119–123.
3. Tee TW, Trefethen LN. A rational spectral collocation method with adaptively transformed Chebyshev grid points. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2006;28(5):1798–1811. DOI: 10.1137/050641296.
4. Druskin V, Knizhnerman L. Gaussian spectral rules for the three-point second differences. I. A two-point positive definite problem in a semi-infinite domain. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1999;37(2):403–422. DOI: 10.1137/S0036142997330792.
5. Ермохин КМ. Продолжение геофизических полей в область источников аномалий методом аппроксимации цепными дробями. *Геофизика*. 2007;1:51–55.
6. Гончар АА, Рахманов ЕА, Суетин СП. Аппроксимации Паде – Чебышева для многозначных аналитических функций, вариация равновесной энергии и S -свойство стационарных компактов. *Успехи математических наук*. 2011;66(6):3–36. DOI: 10.4213/um9452.
7. Суетин СП. О существовании нелинейных аппроксимаций Паде – Чебышева для аналитических функций. *Математические заметки*. 2009;86(2):290–303. DOI: 10.4213/mzm5262.
8. Прохоров ГВ, Колбеев ВВ, Желнов КИ, Леденев МА. *Математический пакет Maple V Release 4: руководство пользователя*. Калуга: Облиздат; 1998. 199 с.
9. Frobenius G. Ueber Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1881;90:1–17.
10. Jacobi CGJ. Über die Darstellung einer Reihe gegebener Werthe durch eine gebrochene rationale Function. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1845;30:127–156.
11. Бейкер Дж, Грейвс-Моррис П. *Аппроксимации Паде*. Рахманов ЕА, Суетин СП, переводчики. Москва: Мир; 1986. 502 с.
12. Суетин СП. О теореме Монтегю де Болора для нелинейных аппроксимаций Паде ортогональных разложений и рядов Фабера. *Доклады АН СССР*. 1980;253(6):1322–1325.
13. Hermite C. Sur la fonction exponentielle. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. 1873;77:18–293.
14. Mahler K. Perfect systems. *Compositio mathematica*. 1968;19(2):95–166.
15. Никишин ЕМ, Сорокин ВН. *Рациональные аппроксимации и ортогональность*. Москва: Наука; 1988. 256 с.
16. Beckermann B, Kalyagin V, Matos Ana C, Wielonsky F. How well does the Hermite – Padé approximation smooth the Gibbs phenomenon? *Mathematics of Computation*. 2011;80(274):931–958. DOI: 10.1090/S0025-5718-2010-02411-1.
17. Сорокин ВН. Циклические графы и теорема Аперри. *Успехи математических наук*. 2002;57(3):99–134. DOI: 10.4213/um512.
18. Суетин СП. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда. *Успехи математических наук*. 2002;57(1):45–142. DOI: 10.4213/um475.
19. Суетин СП. Распределение нулей полиномов Паде и аналитическое продолжение. *Успехи математических наук*. 2015;70(5):121–174. DOI: 10.4213/um9675.
20. Bleher PM, Kuijlaars ABJ. Random matrices with external source and multiple orthogonal polynomials. *International Mathematics Research Notices*. 2004;3:109–129. DOI: 10.1155/S1073792804132194.
21. Aptekarev AI, Bleher PM, Kuijlaars ABJ. Large n limit of Gaussian random matrices with external source. Part 2. *Communications in Mathematical Physics*. 2005;259:367–389. DOI: 10.1007/s00220-005-1367-9.
22. Аптекарев АИ, Лысов ВГ, Туляков ДН. Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов. *Математический сборник*. 2011;202(2):3–56. DOI: 10.4213/sm7702.
23. Калягин ВА. Аппроксимации Эрмита – Паде и спектральный анализ несимметричных операторов. *Математический сборник*. 1994;185(6):79–100.
24. Aptekarev AI, Kalyagin VA, Saff EB. Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials. *Constructive Approximation*. 2009;30:175–223. DOI: 10.1007/s00365-008-9032-0.
25. Chudnovsky GV. Hermite – Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π . In: Chudnovsky DV, Chudnovsky GV, editors. *The riemann problem, complete integrability and arithmetic applications*. New York: Springer-Verlag; 1982. p. 299–322 (Lecture notes in mathematics; volume 925). DOI: 10.1007/BFb0093516.
26. van Assche W. Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcendence. In: Berndt BC, Gesztesy F, editors. *Continued fractions: from analytic number theory to constructive approximation: a volume in honor of L. J. Lange*. Providence: American Mathematical Society; 1999. p. 325–342 (Contemporary mathematics; volume 236). DOI: 10.1090/conm/236/03504.
27. Geddes KO. Block structure in the Chebyshev – Padé table. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1981;18(5):844–861. DOI: 10.1137/0718058.
28. Litvinov GL. Error autocorrelation in rational approximation and interval estimates. [A survey of results]. *Central European Journal of Mathematics*. 2003;1(1):36–60. DOI: 10.2478/BF02475663.
29. Адуков ВМ, Ибряева ОЛ. Асимптотическое поведение знаменателей аппроксимаций Паде – Чебышева для последней промежуточной строки. Рациональный случай. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, физика, химия*. 2005;6(6):11–18.
30. Padé H. Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Serie 3*. 1892;9:3–93.
31. Старовойтов АП, Рябченко НВ, Волков ВА. О существовании и единственности многочленов Эрмита – Паде второго рода. *Проблемы физики, математики и техники*. 2019;2(39):92–96.
32. Старовойтов АП, Рябченко НВ. О детерминантных представлениях многочленов Эрмита – Паде. *Труды Московского математического общества*. 2022;83(1):17–35.
33. Оснач ТМ, Рябченко НВ, Старовойтов АП. Аналог теоремы Якоби для одновременной эрмитовской интерполяции нескольких функций. *Проблемы физики, математики и техники. Серия: Математика*. 2023;1(54):89–92. DOI: 10.54341/20778708_2023_1_54_89.

34. Аптекарев АИ. Об аппроксимациях Паде к набору $\{ {}_1F_1(1, c; \lambda_i z) \}_{i=1}^k$. *Вестник Московского университета. Серия I, Математика. Механика*. 1981;2:58–62.
35. Mittag-Leffler MG. Sur la nouvelle fonction $Ea(x)$. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Paris*. 1903;137:554–558.
36. de Bruin MG. Convergence of the Padé table for ${}_1F_1(1; c; x)$. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*. 1976;79(5):408–418. DOI: 10.1016/S1385-7258(76)80004-2.
37. Старовойтов АП. Аппроксимации Эрмита – Паде функций Миттаг-Леффлера. *Труды Математического института имени В. А. Стеклова*. 2018;301(1):241–258. DOI: 10.1134/S0371968518020188.
38. Лабыч ЮА, Старовойтов АП. Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье. *Математический сборник*. 2009;200(7):107–130. DOI: 10.4213/sm4523.
39. Nemeth G, Páris G. The Gibbs phenomenon in generalized Padé approximation. *Journal of Mathematical Physics*. 1985;26(6):1175–1178. DOI: 10.1063/1.526521.
40. Суетин СП. *Вопросы сходимости аппроксимаций Паде – Фабера* [диссертация]. Москва: МГУ имени М. В. Ломоносова; 1981. 78 с.
41. Старовойтов АП, Кечко ЕП, Оснач ТМ. О существовании тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышева. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2023;2:6–17. DOI: 10.33581/2520-6508-2023-2-6-17. EDN: XJRLWT.

Получена 30.08.2024 / исправлена 04.10.2024 / принята 18.10.2024.
Received 30.08.2024 / revised 04.10.2024 / accepted 18.10.2024.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

УДК 519.9

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ С ОБОБЩЕННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

А. И. ЖУК¹⁾, Е. Н. ЗАЩУК¹⁾

¹⁾Брестский государственный технический университет,
ул. Московская, 267, 224023, г. Брест, Беларусь

Аннотация. Исследуются системы неавтономных дифференциальных уравнений с непрерывными обобщенными коэффициентами в алгебре новых обобщенных функций. Система неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами рассматривается как система уравнений в дифференциалах в алгебре новых обобщенных функций. Решением таких систем является новая обобщенная функция. Показано, что различные интерпретации решений данных систем могут быть описаны при помощи единственного подхода, использующего новые обобщенные функции. В настоящей статье в отличие от предшествующих работ описаны ассоциированные решения систем неавтономных дифференциальных уравнений с непрерывными обобщенными коэффициентами в пространстве $L(T)$.

Ключевые слова: алгебра новых обобщенных функций; дифференциальные уравнения с обобщенными коэффициентами; функции ограниченной вариации.

Образец цитирования:

Жук АИ, Защук ЕН. Системы уравнений в дифференциалах с обобщенными производными непрерывных функций. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2024;3:22–30 (на англ.).
EDN: DHVDWW

For citation:

Zhuk AI, Zashchuk HN. Systems of equations in differentials with generalised derivatives of continuous functions. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2024;3:22–30.
EDN: DHVDWW

Авторы:

Анастасия Игоревна Жук – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики факультета электронно-информационных систем.
Елена Николаевна Защук – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики факультета электронно-информационных систем.

Authors:

Anastasia I. Zhuk, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics, faculty of electronic informational systems.
aizhuk85@mail.ru
Helena N. Zashchuk, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics, faculty of electronic informational systems.
shvichkina@tut.by

SYSTEMS OF EQUATIONS IN DIFFERENTIALS WITH GENERALISED DERIVATIVES OF CONTINUOUS FUNCTIONS

A. I. ZHUK^a, H. N. ZASHCHUK^a

^aBrest State Technical University, 267 Maskowskaja Street, Brest 224023, Belarus

Corresponding author: A. I. Zhuk (aizhuk85@mail.ru)

Abstract. Herein, we investigate systems of nonautonomous differential equations with generalised coefficients using the algebra of new generalised functions. We consider a system of nonautonomous differential equations with generalised coefficients as a system of equations in differentials in the algebra of new generalised functions. The solution of such a system is a new generalised function. It is shown that the different interpretations of the solutions of the given systems can be described by a unique approach of the algebra of new generalised functions. In this paper, for the first time in the literature, we describe associated solutions of the system of nonautonomous differential equations with continuous generalised coefficients in the space $L(T)$.

Keywords: algebra of new generalised functions; differential equations with generalised coefficients; functions of finite variation.

Introduction

In this paper, we will consider the following system of equations with generalised coefficients on $T \in [0, a] \subset \mathbb{R}$:

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^q f^{ij}(t, x(t)) \dot{L}^j(t), \quad i = \overline{1, p}, \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

where f^{ij} , $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$, are some functions; $x(t) = [x^1(t), x^2(t), \dots, x^p(t)]$ and $\dot{L}^j(t)$, $j = \overline{1, q}$, are a continuous function of finite variation on T . $\dot{L}^j(t)$ are derivatives in the distributional sense or we can say that $\dot{L}^j(t)$ are derivatives in the Schwartz space. In general, since $\dot{L}^j(t)$ is the distribution and $f^{ij}(t, x(t))$ not smooth functions, the products $f^{ij}(t, x(t)) \dot{L}^j(t)$ are not well defined and the solution of system (1) essentially depends on the interpretation. System (1) can describe the model of the rocket flight process or the model of the control problems with impulse actions. Let us recall some approaches to the interpretation of system (1).

The first approach is concerned with considering the system of equations in the framework of the distribution theory. According to this approach, once the product of distributions from some classes is defined, then one tries to find the solution of the system of equations (1) in these classes of distributions. For example, in papers [1; 2] the product of some distributions and discontinuous functions was defined. See also monograph [3] for another definition. Notice that the solutions of system (1) obtained using the products from [1–3] are different.

The second approach is to interpret system (1) as the following system of integral equations:

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^q \int_0^t f^{ij}(s, x(s)) \dot{L}^j(s), \quad i = \overline{1, p},$$

where the integrals are understood in the Lebesgue – Stieltjes, Perron – Stieltjes sense, etc. [4; 5]. But in this approach the solution of the system of integral equations depends on the interpretation of the integral and the definition of the functions $x^i(t)$ in the discontinuity points of $L^j(t)$.

The third approach is based on the idea of the approximation of the solution of system (1) by the solutions of the system of ordinary differential equations, which are constructed using the smooth approximation of the functions $L^j(t)$. In monograph [3], it is shown that in this case the limit of the solutions of the smoothed equations exists.

In this paper, we will consider system of equations (1) using the algebra of new generalised functions from [6]. Thus we will interpret system of equations (1) as a system of equations in the differentials in the algebra of new generalised functions. Such interpretation says that the solution of system (1) is a new generalised function.

We investigate the system of nonlinear differential equations, the coefficients of which are generalised derivatives of the continuous function of finite variation $L^j(t)$. In previous papers [7–11] the general view of sys-

tem (1) was considered. The coefficients in such systems are generalised derivatives of arbitrary functions of finite variation $L^j(t)$. Using the given sequence of numbers $h_n \rightarrow 0$ we construct a sequence of approximating equations, and the generalised solution is defined as the limit of a sequence of the solutions of approximating equations. It is found that generalised solution exists only under some additional conditions for the behaviour of the sequence h_n in the case of discontinuous functions $L^j(t)$ and different generalised solutions exist for different sequences h_n .

The main purpose of this article is to prove that the generalised solution exists for all sequences $h_n \rightarrow 0$, it is the solution of system of integral equations (1) and it is independent of the choice of h_n in the case of continuous functions $L^j(t)$.

The algebra of new generalised functions

In this section, we recall the definition of the algebra of new generalised functions from [6]. First, we define an extended real line $\tilde{\mathfrak{R}}$ using a construction typical for nonstandard analysis. Let $\bar{\mathfrak{R}} = \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in R, \forall n \in N \right\}$ be a set of real sequences. We call two sequences $\{x_n\} \in \bar{\mathfrak{R}}$ and $\{y_n\} \in \bar{\mathfrak{R}}$ equivalent if there is a natural number N such that $x_n = y_n$ for all $n > N$. The set $\tilde{\mathfrak{R}}$ of equivalence classes is called the extended real line, and any of the classes is named as a generalised real number.

It follows that $R \subset \tilde{\mathfrak{R}}$ as one may associate a class containing a stationary sequence with $x_n = x$ with any ordinary number $x \in R$. The product $\tilde{x}\tilde{y}$ of two generalised real numbers is defined as the class of sequences equivalent to the sequence $\{x_n y_n\}$, where $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ are the arbitrary representatives of the classes \tilde{x} and \tilde{y} , respectively. It is evident that $\tilde{\mathfrak{R}}$ is an algebra. For any segment $T = [0, a] \subset R$ one can construct an extended segment \tilde{T} in a similar way.

Consider the set of sequences of infinity differentiable functions $\{f_n(x)\}$ on R . We name two sequences $\{f_n(x)\}$ and $\{g_n(x)\}$ equivalent if for each compact set $K \subset R$ there is a natural number N such that $f_n(x) = g_n(x)$ for all $n > N$ and $x \in K$. The set of classes of equivalent functions is denoted by $\mathfrak{F}(R)$ and its elements are called new generalised functions. Similarly, one can define the space $\mathfrak{F}(T)$ for any interval $T = [0, a]$. If we endow all these spaces with the natural operations of addition and multiplication they become algebras.

For each distribution f we can construct a sequence $\{f_n\}$ of smooth functions such that f_n converges to f (i. e., one can consider the convolution of f with some δ -sequence). This sequence defines the new generalised function that corresponds to the distribution f . Thus the space of distribution is a subset of the algebra of new generalised functions. However, in this settings, the infinite set of new generalised functions corresponds to one distribution (for example, by taking a different δ -sequence). We will say that the new generalised function $\tilde{f} = [\{f_n\}]$ is associated with a function f from some topological space if f_n converges to f in this space.

Let $\tilde{f} = [\{f_n\}]$ and $\tilde{g} = [\{g_n\}]$ be new generalised functions. Then there is a composition defined by $\tilde{f} \circ \tilde{g} = [\{f_n(g_n(x))\}] \in \mathfrak{F}(R)$. In the same way, one can define the value of the new generalised function \tilde{f} at the generalised real point $\tilde{x} = [\{x_n\}] \in \tilde{\mathfrak{R}}$ as $\tilde{f}(\tilde{x}) = [\{f_n(x_n)\}]$.

Let H denote the subset of $\tilde{\mathfrak{R}}$ of nonnegative «infinitely small numbers»:

$$H = \left\{ \tilde{h} \in \tilde{\mathfrak{R}} : \tilde{h} = [\{h_n\}], h_n > 0, \forall n \in N, \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \right\}.$$

For each $\tilde{h} = [\{h_n\}] \in H$ and $\tilde{f} = [\{f_n\}] \in \mathfrak{F}(R)$ we define a differential $d_{\tilde{h}} \tilde{f} \in \mathfrak{F}(R)$ by $d_{\tilde{h}} \tilde{f} = [\{f_n(x + h_n) - f_n(x)\}]$. The construction of the differential was proposed by N. V. Lazakovich [6].

Main results

In this section, we will formulate the main results of this paper. The proof of the theorem will be given in the next section.

Using the introduced algebras we can now give an interpretation of system of equations (1). We replace ordinary functions in system (1) by the corresponding new generalised functions and then write the system of equations in differentials in the algebra $\mathfrak{F}(R)$. So we have

$$d_{\tilde{h}} \tilde{x}^i(\tilde{t}) = \sum_{j=1}^q \tilde{f}^{ij}(\tilde{t}, \tilde{x}(\tilde{t})) d_{\tilde{h}} \tilde{L}^j(\tilde{t}), i = \overline{1, p}, \quad (3)$$

with the initial value $\tilde{x}|_{[\tilde{0}, \tilde{h})} = \tilde{x}_0$, where $\tilde{h} = [\{h_n\}] \in H$, $\tilde{t} = [\{t_n\}] \in T$, $\tilde{x} = [\{x_n\}]$, $\tilde{f} = [\{f_n\}]$, $\tilde{x}_0 = [\{x_{0n}\}]$ and $\tilde{L} = [\{L_n\}]$ are elements of $\mathfrak{T}(R)$. Moreover \tilde{f} and \tilde{L} are associated with f and L , respectively. If \tilde{x} is associated with some (generalised) function x then we say that x is a solution of system (1).

It was shown in [12] that under some minor restrictions on the initial conditions there exists a unique solution of (3). The purpose of the present article is to investigate when the solution \tilde{x} (3) converges to some ordinary function and to describe all possible limits.

Let $L^j(t)$, $j = \overline{1, q}$, $t \in T = [0, a]$, be a continuous function of finite variation. We will assume that $L^j(t) = L^j(a)$ if $t > a$ and $L^j(t) = L^j(0)$ if $t < 0$. Denote the total variation of the function $L = [L^1, L^2, \dots, L^q]$ on the interval T by $\text{var } L(u) = \sum_{j=1}^q \text{var } L^j(u)$. A continuous function f is said to be Lipschitz continuous function with respect to its second variable $x \in R$ if there exists a constant $M > 0$ and for all $x_1, x_2 \in R$ and $t \in T$:

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq M|x_1 - x_2|. \quad (4)$$

In this paper, we consider specific types of representatives of the new generalised functions. We take the following convolutions with δ -sequence as representatives of \tilde{L} from system (3):

$$L_n^j(t) = (L^j * \rho_n)(t) = \int_0^{\frac{1}{n}} L^j(t+s) \rho_n(s) ds,$$

where $\rho_n \in C^\infty(R)$, $\rho_n \geq 0$, $\text{supp } \rho_n \subseteq [0, \frac{1}{n}]$, $\int_0^{\frac{1}{n}} \rho_n(s) ds = 1$ and $f_n = f * \tilde{\rho}_n$, $\tilde{\rho} \geq 0$, $\tilde{\rho}_n(x_0, x_1, \dots, x_p) = n^{p+1} \tilde{\rho} \times (nx_0, nx_1, \dots, nx_p)$, $\tilde{\rho} \in C^\infty(R^{p+1})$, $\int_{[0, \frac{1}{n}]^{p+1}} \tilde{\rho}(x_0, \dots, x_p) dx_0 \dots dx_p = 1$ and $\text{supp } \tilde{\rho} \subseteq [0, \frac{1}{n}]^{p+1}$.

By using representatives we can rewrite system (3) as follows:

$$x_n^i(t+h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^q f_n^{ij}(t, x_n(t)) [L_n^j(t+h_n) - L_n^j(t)], \quad i = \overline{1, p}, \quad (5)$$

$$x_n(t)|_{[0, h_n)} = x_{0n}(t). \quad (6)$$

The solution of (5) is constructed inductively starting from the interval $[0, h_n)$ where the initial conditions are given. Let t be an arbitrary point of T . There exist $m_t \in N$ and $\tau_t \in [0, h_n)$ such that $t = \tau_t + m_t h_n$. Set $t_k = \tau_t + k h_n$ for $k = 0, 1, \dots, m_t$. Then the solution of system (5) can be written as

$$x_n^i(t) = x_{0n}^i(\tau_t) + \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{ij}(t_k, x_n(t_k)) [L_n^j(t_{k+1}) - L_n^j(t_k)], \quad i = \overline{1, p}. \quad (7)$$

Thus, we will understand the associated solution of (3) as a solution of the system of nonautonomous differential equations (1), (2). Therefore, we have to investigate a limiting behaviour of (5), (6).

In order to describe the limits of the sequence x_n , we consider the following system of integral equations:

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^q \int_0^t f^{ij}(s, x(s)) dL^j(s), \quad i = \overline{1, p}. \quad (8)$$

Here and below all integrals are understood in the Lebesgue – Stieltjes sense. As it was shown in [13] there exists a unique solution of (8) if f is Lipschitz continuous function.

The following theorem from [12] gives necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solutions of system (3).

Theorem 1. *If the following equality holds for some representatives $\{f_n^{ij}\} \in \tilde{f}^{ij}$, $\{L_n^j\} \in \tilde{L}^j$, $\{x_n^i\} \in \tilde{x}^i$, $\{x_{0n}^i\} \in \tilde{x}_0^i$, for all sufficiently large $n \in N$ and for all $l = 0, 1, \dots$:*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{d^l}{dt^l} [x_{0n}^j(h_n - t) - x_{0n}^j(t)] - \sum_{j=1}^q \frac{d^l}{dt^l} [f_n^{ij}(t, x_{0n}(t)) [L_n^j(h_n + t) - L_n^j(t)]] \right) = 0$$

then a solution of system (3) exists and it is unique.

Lemma 1. Let for all $n = 0, 1, 2, \dots$ the following inequality holds:

$$Z_{n+1} \leq A + \sum_{k=1}^n A_k + \sum_{k=1}^n B_k Z_k, \tag{9}$$

where A, A_k, B_k are some nonnegative constants and $Z_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, n$. Then

$$Z_{n+1} \leq \left(A + \sum_{k=1}^n A_k \right) \exp \left(\sum_{k=1}^n B_k \right). \tag{10}$$

Proof. Let us successively apply inequality (9):

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &\leq A + \sum_{k=1}^n A_k + \sum_{k=1}^{n-1} B_k Z_k + B_n Z_n \leq \\ &\leq A + \sum_{k=1}^n A_k + B_n \left(A + \sum_{k=1}^{n-1} A_k + \sum_{k=1}^{n-1} B_k Z_k \right) + \sum_{k=1}^{n-1} B_k Z_k = \\ &= A + \sum_{k=1}^n A_k + B_n \left(A + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \right) + (B_n + 1) \sum_{k=1}^{n-1} B_k Z_k \leq \dots \\ &\dots \leq A + \sum_{k=1}^n A_k + B_n \left(A + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \right) + B_{n-1} (B_n + 1) \left(A + \sum_{k=1}^{n-2} A_k \right) + \dots \\ &\dots + B_1 \left(1 + B_2 \left(1 + \dots \left(1 + B_{n-1} \left(1 + B_n \right) \right) \right) \right) A \leq \left(A + \sum_{k=1}^n A_k \right) \prod_{k=1}^n (1 + B_n). \end{aligned}$$

Let $Z_{n+1} = 0$ then inequality (10) holds, if $A + \sum_{k=1}^n A_k = 0$. In other cases we take the logarithm left and right parts of the chain of inequalities

$$\begin{aligned} \ln Z_{n+1} &\leq \ln \left(\left(A + \sum_{k=1}^n A_k \right) \prod_{k=1}^n (1 + B_n) \right) = \\ &= \ln \left(A + \sum_{k=1}^n A_k \right) + \sum_{k=1}^n \ln(1 + B_n) \leq \ln \left(A + \sum_{k=1}^n A_k \right) + \sum_{k=1}^n B_n. \end{aligned}$$

Then we obtain $Z_{n+1} \leq \left(A + \sum_{k=1}^n A_k \right) e^{\sum_{k=1}^n B_n}$. The proof is completed.

Lemma 2. Let the function f be Lipschitz continuous with constant M satisfying (4). Then for the solutions x and x_n of (8) and (5), respectively, the following inequalities hold for all $t, t_1 \in T, t > t_1$ and $l, n \in \mathbb{N}$.

1. $|x(t)| \leq C(1 + |x_0|), |x_n(t)| \leq C(1 + |x_{n0}(\tau_t)|)$, where the constant C depends only on $M, |T|$ and $\text{var}_{u \in [a, b]} L(u)$.
2. $|x(t) - x(t_1)| \leq M \text{var}_{u \in [t_1, t]} L(u)$.
3. $|x_n(t + lh_n) - x_n(t)| \leq M \text{var}_{u \in [t, t + lh_n + \frac{1}{n}]} L(u)$.

Proof. Let us prove the first inequality. For this purpose we will consider

$$|x(t)| \leq |x_0| + \int_0^t |f(s, x(s))| d \text{var}_{u \in [0, s]} L(u) \leq |x_0| + M \text{var}_{s \in [0, t]} L(s) \leq C(1 + |x_0|).$$

If we rewrite the solution of system (5) in the vector form, we will get

$$\begin{aligned} |x_n(t)| &= \left| x_{n0}(\tau_t) + \sum_{k=0}^{m_t-1} f_n(t_k, x_n(t_k)) [L_n(t_{k+1}) - L_n(t_k)] \right| \leq |x_{n0}(\tau_t)| + \\ &+ \sum_{k=0}^{m_t-1} \left| f_n(t_k, x_n(t_k)) [L_n(t_{k+1}) - L_n(t_k)] \right| \leq |x_{n0}(\tau_t)| + M \operatorname{var}_{s \in [0, t]} L(s) = C(1 + |x_{n0}(\tau_t)|), \end{aligned}$$

where we used the equality $\operatorname{var}_{u \in T} L_n(u) = \operatorname{var}_{u \in T} L(u)$, derived from the definition L_n .

In the same way, we will get the second inequality

$$\begin{aligned} |x(t) - x(t_1)| &= \left| x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) dL(s) - x_0 - \int_0^{t_1} f(s, x(s)) dL(s) \right| = \\ &= \left| \int_{t_1}^t f(s, x(s)) dL(s) \right| \leq M \operatorname{var}_{u \in [t_1, t]} L(u). \end{aligned}$$

It follows the third inequality from the second one

$$|x_n(t + lh_n) - x_n(t)| \leq M \operatorname{var}_{u \in [t, t+lh_n]} L_n(u) \leq M \operatorname{var}_{u \in [t, t+lh_n + \frac{1}{n}]} L(u),$$

where we used the inequality $\operatorname{var}_{u \in [a, b]} L_n(u) \leq \operatorname{var}_{u \in [a, b + \frac{1}{n}]} L(u)$, derived from the definition L_n . The proof is completed.

Then we will define the module of the $x = [x^1, x^2, \dots, x^p]^T$ as $|x| = \sum_{i=1}^p |x^i|$ and module of $(p \times q)$ -matrix as $|f| = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |f^{ij}|$. We denote variation of the vector-function $L = [L^1, L^2, \dots, L^q]$ on A by $\operatorname{var}_{u \in A} L(u) = \sum_{j=1}^q \operatorname{var}_{u \in A} L^j(u)$, $\operatorname{var}_{u \in [a, b]} L(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{var}_{u \in [a, b - \varepsilon]} L(u)$.

Theorem 2. Let $f^ij, i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}$, be Lipschitz continuous functions satisfying (4) and $L^j(t), j = \overline{1, q}$, be continuous functions of finite variation. Suppose that $\frac{1}{h_n} \int_0^{h_n} |x_{n0}(\tau_t) - x_0| dt \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0$ for all $t \in T$, then the solution $x_n(t)$ of (5), (6) converges to the solution $x(t)$ from (8) in the Lebesgue space $L_1(T)$.

Proof of the main theorem

In this section we will prove theorem 2.

Proof. Let fix $t \in T$, then using (7) we obtain

$$\begin{aligned} |x_n^1(t) - x^1(t)| &= \left| x_{n0}^1(\tau_t) - x_0^1 + \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{1j}(t_k, x_n(t_k)) [L_n^j(t_{k+1}) - L_n^j(t_k)] - \right. \\ &- \sum_{j=1}^q \int_0^t f^{1j}(s, x(s)) dL^j(s) \left. \right| \leq |x_{n0}^1(\tau_t) - x_0^1| + \sum_{j=1}^q \left| \int_0^{\tau_t} f^{1j}(s, x(s)) dL^j(s) \right| + \\ &+ \sum_{j=1}^q \left| \sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{1j}(t_k, x_n(t_k)) [L_n^j(t_{k+1}) - L_n^j(t_k)] \right| + \\ &+ \sum_{j=1}^q \left| \sum_{k=0}^{m_t-1} f^{1j}(t_k, x(t_k)) [L_n^j(t_{k+1}) - L_n^j(t_k)] - \sum_{k=0}^{m_t-1} f^{1j}(t_k, x(t_k)) [L^j(t_{k+1}) - L^j(t_k)] \right| + \\ &+ \sum_{j=1}^q \left| \sum_{k=0}^{m_t-1} f^{1j}(t_k, x(t_k)) [L^j(t_{k+1}) - L^j(t_k)] - \int_{\tau_t}^t f^{1j}(s, x(s)) dL^j(s) \right| = \end{aligned}$$

$$= I_0(t) + \sum_{j=1}^q \left(I_1^j(t) + I_2^j(t) + I_3^j(t) + I_4^j(t) \right).$$

We denote the constant C which depends only on $M, |T|$. It does not depend on n, h_n , and $t \in T$ and its value can change from one formula to another. Since f^{ij} are Lipschitz continuous functions, satisfying (4) and bounded for $i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}$, functions $L^j(t), j = \overline{1, q}$, are continuous functions of finite variation, then $I_1^j(t) \leq C \varlimsup_{t \in [0, h_n]} L^j(t)$.

Using the view of f_n^{ij} and inequality (4), we obtain

$$\begin{aligned} I_2^j(t) &= \left| \sum_{k=0}^{m_i-1} \left(f_n^{1j}(t_k, x_n(t_k)) - f^{1j}(t_k, x(t_k)) \right) \left[L_n^j(t_{k+1}) - L_n^j(t_k) \right] \right| \leq \\ &\leq C \sum_{k=0}^{m_i-1} \left(|x_n(t_k) - x(t_k)| + \frac{1}{n} \right) |L_n^j(t_{k+1}) - L_n^j(t_k)|. \end{aligned}$$

To estimate term $I_3^j(t), j = \overline{1, p}$, we will divide the sum into two parts. Then we will make replacement of indexes of summation in the first part. We will use (4), the view of $x(t)$ and lemma 2:

$$\begin{aligned} I_3^j(t) &= \left| \sum_{k=0}^{m_i-1} f^{1j}(t_k, x(t_k)) \left[L_n^j(t_{k+1}) - L_n^j(t_k) \right] - \sum_{k=0}^{m_i-1} f^{1j}(t_k, x(t_k)) \left[L^j(t_{k+1}) - L^j(t_k) \right] \right| = \\ &= \left| \sum_{k=0}^{m_i-1} f^{1j}(t_k, x(t_k)) \left[L_n^j(t_{k+1}) - L^j(t_{k+1}) \right] - \sum_{k=0}^{m_i-1} f^{1j}(t_k, x(t_k)) \left[L_n^j(t_k) - L^j(t_k) \right] \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^{m_i} f^{1j}(t_{k-1}, x(t_{k-1})) \left[L_n^j(t_k) - L^j(t_k) \right] - \sum_{k=0}^{m_i-1} f^{1j}(t_k, x(t_k)) \left[L_n^j(t_k) - L^j(t_k) \right] \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^{m_i-1} \left(f^{1j}(t_{k-1}, x(t_{k-1})) - f^{1j}(t_k, x(t_k)) \right) \left[L_n^j(t_k) - L^j(t_k) \right] + f^{1j}(t_{m_i-1}, x(t_{m_i-1})) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[L_n^j(t_{m_i}) - L^j(t_{m_i}) \right] - f^{1j}(t_{\tau_i}, x(t_{\tau_i})) \left[L_n^j(t_{\tau_i}) - L^j(t_{\tau_i}) \right] \right| \leq \\ &\leq C \sum_{k=1}^{m_i-1} \varlimsup_{t \in \left[t_k, t_k + \frac{1}{n} \right]} L^j(t) \left(|x(t_{k-1}) - x(t_k)| + h_n \right) + C \varlimsup_{t \in \left[\tau_i, \tau_i + \frac{1}{n} \right]} L^j(t) + C \varlimsup_{t \in \left[t_{m_i}, t_{m_i} + \frac{1}{n} \right]} L^j(t) \leq \\ &\leq C \max_{\substack{t_1, t_2 \in T, \\ |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n}}} \varlimsup_{t \in [t_1, t_2]} L^j(t) + Ch_n. \end{aligned}$$

Denote $\hat{s}(s) = t_k, s \in [t_k, t_{k+1})$, and using the properties of Stieltjes integral we have

$$\begin{aligned} I_4^j(t) &= \left| \sum_{k=0}^{m_i-1} f^{1j}(t_k, x(t_k)) \left[L^j(t_{k+1}) - L^j(t_k) \right] - \int_{\tau_i}^t f^{1j}(s, x(s)) dL^j(s) \right| = \\ &= \left| \int_{\tau_i}^t \left[f^{1j}(\hat{s}(s), x(\hat{s}(s))) - f(s, x(s)) \right] dL^j(s) \right| \leq C \sum_{k=1}^{m_i-1} \left(\left(\varlimsup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} x(t) + h_n \right) \varlimsup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} L^j(t) \right) \leq \\ &\leq C \max_{\substack{t_1, t_2 \in T, \\ |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n} + h_n}} \varlimsup_{t \in [t_1, t_2]} L^j(t) \varlimsup_{t \in T} x(t) + Ch_n \leq C \max_{\substack{t_1, t_2 \in T, \\ |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n} + h_n}} \varlimsup_{t \in [t_1, t_2]} L^j(t) + Ch_n. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} |x_n^1(t) - x^1(t)| \leq & |x_{n0}^1(\tau_t) - x_0^1| + C \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^{m_j-1} \operatorname{var}_{t \in [0, h_n]} L^j(t) + C \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{m_j-1} \left(|x_n(t_k) - x(t_k)| + \frac{1}{n} \right) \times \\ & \times |L_n^j(t_{k+1}) - L_n^j(t_k)| + C \sum_{j=1}^q \max_{\substack{t_1, t_2 \in T, \\ |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n} + h_n}} \operatorname{var}_{t \in [t_1, t_2]} L^j(t) + Ch_n. \end{aligned}$$

We obtain similar inequality for others $x_n^i, i = \overline{1, p}$:

$$\begin{aligned} |x_n^i(t) - x^i(t)| \leq & |x_{n0}^i(\tau_t) - x_0^i| + C \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^{m_j-1} \operatorname{var}_{t \in [0, h_n]} L^j(t) + C \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{m_j-1} \left(|x_n(t_k) - x(t_k)| + \frac{1}{n} \right) \times \\ & \times |L_n^j(t_{k+1}) - L_n^j(t_k)| + C \sum_{j=1}^q \max_{\substack{t_1, t_2 \in T, \\ |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n} + h_n}} \operatorname{var}_{t \in [t_1, t_2]} L^j(t) + Ch_n. \end{aligned}$$

Combining the last inequality we have

$$\begin{aligned} |x_n(t) - x(t)| \leq & \sum_{i=1}^p |x_{n0}^i(\tau_t) - x_0^i| + C \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^{m_j-1} \operatorname{var}_{t \in [0, h_n]} L^j(t) + C \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{m_j-1} \left(|x_n(t_k) - x(t_k)| + \frac{1}{n} \right) \times \\ & \times |L_n^j(t_{k+1}) - L_n^j(t_k)| + C \sum_{j=1}^q \max_{\substack{t_1, t_2 \in T, \\ |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n} + h_n}} \operatorname{var}_{t \in [t_1, t_2]} L^j(t) + Ch_n. \end{aligned}$$

Lemma 1 implies the following estimation for the last equation:

$$|x_n(t) - x(t)| \leq |x_{n0}(\tau_t) - x_0| + C \sum_{j=1}^q \operatorname{var}_{t \in [0, h_n]} L^j(t) + C \sum_{j=1}^q \max_{\substack{t_1, t_2 \in T, \\ |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n} + h_n}} \operatorname{var}_{t \in [t_1, t_2]} L^j(t) + Ch_n.$$

Then

$$\begin{aligned} \int_T |x_n(t) - x(t)| dt \leq & \int_T |x_{n0}(\tau_t) - x_0| dt + C \int_T \operatorname{var}_{t \in [0, h_n]} L(t) dt + \\ & + C \int_T \max_{\substack{t_1, t_2 \in T, \\ |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n} + h_n}} \operatorname{var}_{t \in [t_1, t_2]} L(t) dt + C \int_T h_n dt \end{aligned}$$

and

$$\int_T |x_n(t) - x(t)| dt \leq \int_T |x_{n0}(\tau_t) - x_0| dt + C \int_T \operatorname{var}_{t \in [0, h_n]} L(t) dt + C \int_T \max_{\substack{t_1, t_2 \in T, \\ |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n} + h_n}} \operatorname{var}_{t \in [t_1, t_2]} L(t) dt + Ch_n.$$

Let $n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0$. Since $L^j(t), j = \overline{1, q}$, are continuous on the T and therefore are uniform continuous on it we have $\frac{1}{h_n} \int_0^{h_n} |x_{n0}(\tau_t) - x_0| dt \rightarrow 0$. The proof is completed.

Similar results for the system of autonomous differential equations in other space were obtained in [9; 14].

Theorem 3. Under the condition of theorem 1, let $f^{ij}, i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}$, be Lipschitz continuous functions satisfying (4) and $L^j(t)$ are continuous functions of finite variation ($j = \overline{1, q}$). Suppose that $\frac{1}{h_n} \int_0^{h_n} |x_{n0}(\tau_t) - x_0| dt \rightarrow 0$ than the associated solution of (3) is the solution of (8) as $n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0$.

Proof. This is immediate consequence of the definition of the associated solution of (3) and theorem 1.

Thus, the class of the integral equation to which the associated solutions of systems of the nonautonomous differential equations satisfy, containing the generalised derivatives of continuous functions, is described by system (8).

It should also be noted that from the proof of the theorems in the case of discontinuous functions $L^j(t)$ the proof of the main theorem of this article doesn't follow, because the associated solutions of (3) are obtained in a different topological space.

It was shown in [6; 8; 11] that the solution of system (1) in the sense of the integral and approximate approaches can be obtained from the solution of the system in differentials in the algebra of new generalised functions.

References

1. Antosik P, Legeza J. Products of measures and functions of finite variations. In: *Proceedings of the International conference on generalized functions and operational calculus; 29 September – 6 October 1975; Varna, Bulgaria*. Sophia: Bulgarian Academy of Sciences; 1979. p. 20–26.
2. Pandit SG, Deo SG. *Differential systems involving impulses*. Berlin: Springer; 1982. 106 p. (Lecture notes in mathematics; volume 954). DOI: 10.1007/BFb0067476.
3. Zavalishchin ST, Sesekin AN. *Dynamic impulse systems: theory and applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers; 1997. 271 p. (Mathematics and its applications; volume 394).
4. Das PC, Sharma RR. Existence and stability of measure differential equations. *Czechoslovak Mathematical Journal*. 1972; 22(1):145–158. DOI: 10.21136/cmj.1972.101082.
5. Ligeza J. On generalized solutions of some differential nonlinear equations of order n . *Annales Polonici Mathematici*. 1975; 31(2):115–120. DOI: 10.4064/ap-31-2-115-120.
6. Лазакович НВ. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов. *Доклады Академии наук БССР*. 1994;38(5):23–27.
7. Жук АИ, Хмызов АК. Системы квазидифференциальных уравнений в прямом произведении алгебр мнемофункций. Симметрический случай. *Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика*. 2010;2:87–93.
8. Жук АИ, Яблонский ОЛ. Оценки скорости сходимости к ассоциированным решениям дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций. *Доклады Национальной академии наук Беларуси*. 2015;59(2):17–22.
9. Жук АИ, Яблонский ОЛ. Неавтономные системы дифференциальных уравнений в алгебре обобщенных функций. *Труды Института математики*. 2011;19(1):43–51.
10. Жук АИ, Яблонский ОЛ, Спаськов СА. Ассоциированные решения системы неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами. Смешанный случай. *Весці БДПУ. Серыя 3, Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія*. 2019;4:16–22.
11. Zhuk AI, Zashchuk HN. On associated solutions of the system of non-autonomous differential equations in the Lebesgue spaces. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2022;1:6–13. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-1-6-13.
12. Каримова ТИ, Яблонский ОЛ. Об ассоциированных решениях нестационарных систем уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов. *Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика*. 2009;2:81–86.
13. Groh J. A nonlinear Volterra – Stieltjes integral equation and a Gronwall inequality in one dimension. *Illinois Journal of Mathematics*. 1980;24(2):244–263. DOI: 10.1215/ijm/1256047720.
14. Жук АИ, Яблонский ОЛ. Системы дифференциальных уравнений в алгебре обобщенных функций. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук*. 2011;1:12–16.

Received 12.03.2024 / revised 20.10.2024 / accepted 20.10.2024.

УДК 515.12

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОЙ ТОПОЛОГИИ ОЧАНОВСКОГО ТИПА

А. С. БЕДРИЦКИЙ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Исследуется связь одной топологии очановского типа с другими топологиями гиперпространства, в частности с локально конечной топологией, топологией Фелла и топологией, порожденной метрикой Хаусдорфа. Во второй части статьи решается задача непрерывного продолжения исходного отображения $X \xrightarrow{f} Y$ на гиперпространства, снабженные указанной выше очановской топологией. Доказано, что замкнутые отображения и только они допускают такое продолжение.

Ключевые слова: топология очановского типа; локально конечная топология; топология Фелла; метрика Хаусдорфа; замкнутое отображение.

ON SOME PROPERTIES OF ONE OČAN TYPE TOPOLOGY

A. S. BIADRYTSKI^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Abstract. The relation between one Očan type topology and other hyperspace topologies, such as locally-finite topology, Fell topology, Hausdorff metric topology are studied. In the second part of the article we solve the problem of continuous extension of a map $X \xrightarrow{f} Y$ on hyperspaces endowed with the Očan topology mentioned above. As a result, it's proved that closed maps and only them have such extension.

Keywords: Očan type topology; locally finite topology; Fell topology; Hausdorff metric topology; closed map.

Образец цитирования:

Бедрицкий А.С. О некоторых свойствах одной топологии очановского типа. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;3:31–39. EDN: EATFLI

For citation:

Biadrytski AS. On some properties of one Očan type topology. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;3:31–39. Russian. EDN: EATFLI

Автор:

Александр Сергеевич Бедрицкий – аспирант кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент В. Л. Тимохович.

Author:

Aliaksandr S. Biadrytski, postgraduate student at the department of geometry, topology and mathematics teaching methodology, faculty of mechanics and mathematics. *bedrickias@bsu.by*

Введение

Классическими и наиболее распространенными методами топологизации экспоненты $\exp X$ топологического пространства X являются задание на ней топологии Вьеториса [1; 2; 3, с. 192] и задание метрики Хаусдорфа [2; 3, с. 441] в случае метризуемости пространства X . В процессе развития теории экспоненциальных пространств возникли и другие топологии, схожие по процедуре своего задания с топологией Вьеториса (их можно назвать топологиями вьеторисовского типа), такие как топология Фелла [4], локально конечная топология [5], а также топологии «hit and miss» [6; 7], являющиеся обобщением топологий Вьеториса и Фелла.

Несколько иной подход к введению топологии на экспоненте был предложен Ю. С. Очаном в работах [8; 9] (такие топологии впоследствии названы очановскими). Топологии очановского типа и их приложения далее рассматривали Р. П. Кашуба [10], В. В. Попов [11; 12], Л. Я. Энгельсон [13] и Г. Пранинскас [14]. Отметим также, что топологией очановского типа является топология Пиксли – Роя [15, р. 51; 16], используемая при изучении экспоненты конечных множеств.

В настоящей работе исследуется одна из топологий очановского типа, определенная в [17] и обозначенная здесь через τ_0 . В первой части статьи выясняется связь этой топологии с другими топологиями на экспоненте, в частности с топологией Фелла и локально конечной топологией, а во второй части статьи решается задача непрерывного продолжения отображения $X \xrightarrow{f} Y$ до отображения $\exp X \xrightarrow{g} \exp Y$, где $\exp X$ и $\exp Y$ снабжены указанной выше топологией τ_0 , что «сближает» статью с публикациями [18; 19], в которых эта задача рассматривалась для экспоненты с топологией Вьеториса.

Отметим, что указанная задача относится к достаточно обширной области исследования функториальных свойств топологических конструкций. Кроме экспоненты с той или иной топологией (как в упомянутых выше работах [18; 19]) и компактных расширений (классические примеры – стоун-чеховская βX [3, с. 267] и волмэновская ωX [3, с. 272; 20] компактификации пространства X), такими конструкциями могут быть и расширения более общей природы (Ω -насыщения $s_\beta X$ [21; 22]), функциональные пространства вида $C(X, Y)$ (исходные объекты – упорядоченные пары (X, Y) топологических пространств [23–25]) и др.

Опишем основные понятия и обозначения, встречающиеся в тексте. Предполагаем, что далее все топологические пространства удовлетворяют аксиоме отделимости T_1 . Для $A \subset X$ через $[A]_X$ и $|A|$ будем обозначать замыкание множества A в пространстве X и мощность множества A соответственно. Под экспонентой (или гиперпространством) $\exp X$ топологического пространства X понимаем множество всех непустых замкнутых подмножеств пространства X . Введем следующие обозначения: $U^+ = \{F \in \exp X \mid F \subset U\}$, $U^- = \{F \in \exp X \mid F \cap U \neq \emptyset\}$, где $U \subset X$; $O(A, B) = \{F \in \exp X \mid A \subset F \subset B\}$, где $A, B \subset X$; $\hat{X} = \{\{x\} \in \exp X \mid x \in X\}$. Напомним, что предбазу топологии Вьеториса τ_V на $\exp X$ образуют множества вида U^+ и U^- , где U – открытое в X множество, а база τ_V состоит из множеств вида

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \left\{ F \in \exp X \mid F \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ и } F \cap U_i \neq \emptyset \text{ для всех } i, 1 \leq i \leq n \right\}, \text{ где } U_i \text{ – открытые в } X \text{ множе-}$$

ства. Предбаза топологии Фелла τ_F образована множествами $(X \setminus K)^+$ и U^- , где K – замкнутое компактное множество, а U – открытое в X множество. Базу τ_F составляют множества вида $\langle U_1, \dots, U_n \rangle =$

$$\left\{ F \in \exp X \mid F \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ и } F \cap U_i \neq \emptyset \text{ для всех } i, 1 \leq i \leq n \right\}, \text{ где } U_i \text{ – открытые в } X \text{ множества, а допол-}$$

нение до множества $\bigcup_{i=1}^n U_i$ компактно. Топология τ_0 [17] порождена базой, состоящей из множеств

вида $O(A, U)$, где A – либо пустое, либо конечное множество в X , состоящее не менее чем из двух точек, а U – открытое в X множество. Экспоненту с топологией τ_0 далее будем обозначать через $\exp_0 X$.

База, образованная множествами вида $\langle \mathcal{A} \rangle = \left\{ F \in \exp X \mid F \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \text{ и } F \cap U_\alpha \neq \emptyset \text{ для всех } \alpha \in \Lambda \right\}$, где

$\mathcal{A} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ – локально конечное семейство открытых в X множеств, порождает на экспоненте локально конечную топологию τ_{LF} [5].

Для метризуемого топологического пространства X обозначим через Ω_X множество всех допустимых (т. е. согласованных с топологией) метрик на X . Для метрики $\rho \in \Omega_X$ примем следующие обозначения:

$B_\rho(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$ – ε -окрестность точки $x \in X$ (или открытый шар); $B_\rho(A, \varepsilon) = \bigcup_{x \in A} B_\rho(x, \varepsilon)$ – ε -раздутье множества $A \subset X$ относительно метрики ρ ; $\hat{\rho}$ – соответствующая метрика Хаусдорфа на $\text{exp } X$ ($\hat{\rho}(F, P) = \inf \{\varepsilon > 0 \mid B_\rho(F, \varepsilon) \supset P, B_\rho(P, \varepsilon) \supset F\} = \max \left\{ \sup_{x \in F} \rho(x, P); \sup_{y \in P} \rho(y, F) \right\}$); $\tau_{\hat{\rho}}$ – топология на $\text{exp } X$, заданная метрикой $\hat{\rho}$ (здесь допускаем $\hat{\rho}(F, P) = \infty$ для некоторых $F, P \in \text{exp } X$, что не влияет на определение топологии $\tau_{\hat{\rho}}$).

Для множества $\mathcal{M} = \{\tau_{\hat{\rho}} \mid \rho \in \Omega_X\}$ в полной решетке \mathcal{T} всех топологий на $\text{exp } X$ определены инфимум τ_{inf} и супремум τ_{sup} ($\tau_{\text{inf}} = \bigcap \{\tau_{\hat{\rho}} \mid \rho \in \Omega_X\}$), а топология τ_{sup} задана предбазой $\cup \{\tau_{\hat{\rho}} \mid \rho \in \Omega_X\}$. Как оказалось, $\tau_{\text{sup}} = \tau_{\text{LF}}$ [5]. Для инфимальной топологии τ_{inf} справедливо соотношение $\tau_F \leq \tau_{\text{inf}}$ (т. е. $\tau_F \subset \tau_{\text{inf}}$), каждое из соотношений $\tau_{\text{inf}} = \tau_F$, $\tau_V \leq \tau_{\text{inf}}$, $\tau_{\text{inf}} = \tau_V$ и $\tau_{\text{inf}} = \tau_{\text{LF}}$ равносильно компактности пространства X , а соотношение $\tau_{\text{inf}} \leq \tau_V$ равносильно наличию в X счетной базы [26; 27].

Соотношение топологии τ_0 с другими экспоненциальными топологиями

Приведем некоторые свойства топологии τ_0 , установленные в [17]. Отметим сначала, что отображение $X \ni x \rightarrow \{x\} \in \hat{X}$ является гомеоморфизмом пространства X и подпространства $\hat{X} \subset \text{exp}_0 X$ (экспоненциальные топологии с указанным свойством называют допустимыми [2]). Заметим, что не всякая топология очановского типа обладает этим свойством: например, очановские топологии, рассмотренные в работах [11–14], индуцируют на \hat{X} , как правило, дискретную топологию.

Определим далее в $\text{exp}_0 X$ подпространства $\text{exp}_n X = \{F \in \text{exp}_0 X \mid |F| \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\text{exp}_\infty X = \bigcup_{n=1}^\infty \text{exp}_n X$, $\text{exp}_\omega X = \{F \in \text{exp}_0 X \mid |F| \leq \aleph_0\}$ и сформулируем утверждение, описывающее структуру пространства $\text{exp}_0 X$.

Предложение 1 [17]. *Подпространство $\text{exp}_n X$ при любом $n \in \mathbb{N}$ замкнуто в $\text{exp}_0 X$, подпространство $\text{exp}_\infty X$ всюду плотно в $\text{exp}_0 X$, и при любом $n \in \mathbb{N}$ любая точка $F \in \text{exp}_{n+1} X \setminus \text{exp}_n X$ изолирована в $\text{exp}_{n+1} X$.*

Кроме того, имеет место следующее предложение.

Предложение 2 [17]. *Если F – замкнутое подмножество множества X , то $\text{exp}_0 F$ – замкнутое подпространство в $\text{exp}_0 X$.*

Приведем далее утверждение об отделимости пространства $\text{exp}_0 X$.

Предложение 3 [17]. *Пространство $\text{exp}_0 X$ есть T_1 -пространство. Пространство $\text{exp}_0 X$ хаусдорфово (регулярно, вполне регулярно) тогда и только тогда, когда пространство X хаусдорфово (соответственно, регулярно, вполне регулярно).*

При хаусдорфовости пространства X случай компактности $\text{exp}_0 X$ описывает следующее предложение.

Предложение 4 [17]. *Для хаусдорфова пространства X эквивалентны условия:*

- 1) $\text{exp}_0 X$ компактно;
- 2) $\text{exp}_0 X$ счетно компактно;
- 3) X конечно.

Характером множества A в X называют минимальную мощность окрестностной базы множества A (т. е. семейства α окрестностей множества A такого, что для любой окрестности U множества A найдется множество $V \in \alpha$, содержащееся в U).

Предложение 5 [17]. *Пусть пространство X регулярно. Пространство $\text{exp}_0 X$ удовлетворяет первой аксиоме счетности тогда и только тогда, когда X не более чем счетно, а множество D всех предельных точек пространства X компактно и имеет не более чем счетный характер в X .*

Предложение 6 [17]. *Пространство $\text{exp}_0 X$ метризуемо тогда и только тогда, когда X – не более чем счетный метризуемый компакт.*

Следующая теорема сформулирована в [17] без доказательства, однако ввиду ее важности для дальнейшего изложения считаем уместным привести ниже ее полное доказательство.

Теорема 1 [17]. *Справедливо соотношение $\tau_V \leq \tau_0$. При этом топологии τ_V и τ_0 совпадают тогда и только тогда, когда пространство X дискретно.*

Доказательство. Множества вида $U^+ \in \tau_V$, где U открыто в X , очевидным образом принадлежат топологии τ_0 , поскольку $U^+ = O(\emptyset, U) \in \tau_0$. Рассмотрим теперь элемент предбазы топологии τ_V вида V^-

и произвольное множество $F \in V^-$. Если $F = \{x\}$, то $F \in O(\emptyset, V) \subset V^-$. Если $|F| \geq 2$, то возьмем, например, множество $O(\{x, y\}, X)$, где $x \in F \cap V$, а $y \in F \setminus \{x\}$. В таком случае $F \in O(\{x, y\}, X) \subset V^-$. Тем самым получаем, что $V^- \in \tau_0$. Так как все элементы предбазы топологии τ_V принадлежат топологии τ_0 , то $\tau_V \leq \tau_0$.

Пусть теперь $\tau_V = \tau_0$ и, в частности, $\tau_0 \leq \tau_V$. Выберем произвольным образом две различные точки $x, y \in X$ (случай одноточечного пространства X тривиален) и образуем множество $O(\{x, y\}, X)$. Исходя из условия, оно принадлежит топологии Вьеториса, значит, для множества $\{x, y\} \in O(\{x, y\}, X)$ найдется элемент базы топологии τ_V вида $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ такой, что $\{x, y\} \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \subset O(\{x, y\}, X)$. Пусть V – пересечение множеств из семейства $\{U_1, \dots, U_n\}$, содержащих точку x , а W – пересечение множеств из семейства $\{U_1, \dots, U_n\}$, содержащих точку y . Тогда будет справедливым включение $\langle V \setminus \{y\}, W \setminus \{x\} \rangle \subset \langle U_1, \dots, U_n \rangle$. Предположим, что хотя бы одно из множеств $V \setminus \{y\}, W \setminus \{x\}$ содержит более одной точки. Пусть, например, $z \in V \setminus \{y\}$ и $z \neq x$. В таком случае множество $\{z, y\}$ лежит в $\langle V \setminus \{y\}, W \setminus \{x\} \rangle$, а вместе с тем и в $O(\{x, y\}, X)$. Следовательно, $\{x, y\} \subset \{z, y\}$, откуда вытекает равенство $z = x$. Получили противоречие. Значит, открытые множества $V \setminus \{y\}, W \setminus \{x\}$ одноточечны, а из произвольности выбора точек x и y вытекает, что пространство X дискретно.

Докажем обратное утверждение. Пусть пространство X дискретно. Достаточно показать, что $\tau_0 \leq \tau_V$. Рассмотрим произвольный элемент базы топологии τ_0 вида $O(A, U)$. Если $A = \emptyset$, то $O(\emptyset, U) = U^+ \in \tau_V$. Если $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ($a_i \neq a_j$ при $i \neq j, n \geq 2$), то искомое соотношение получим, представив множество $O(A, U)$ в виде $O(A, U) = \{a_1\}^- \cap \dots \cap \{a_n\}^- \cap U^+$, где $\{a_i\}^- \in \tau_V$ для любого $i, 1 \leq i \leq n$, ввиду дискретности пространства X . Теорема доказана.

Следствие 1. *Справедливо соотношение $\tau_F \leq \tau_0$. При этом топологии τ_F и τ_0 совпадают тогда и только тогда, когда пространство X конечно.*

Доказательство. Доказательство первой части утверждения очевидным образом вытекает из теоремы 1 и соотношения $\tau_F \leq \tau_V$.

Пусть теперь $\tau_F = \tau_0$. Из этого равенства и соотношений $\tau_F \leq \tau_V$ и $\tau_V \leq \tau_0$ (см. теорему 1) следует совпадение топологий $\tau_F = \tau_0 = \tau_V$. Согласно теореме 1 равенство $\tau_0 = \tau_V$ влечет дискретность пространства X . Поскольку соотношение $\tau_F = \tau_V$ равносильно компактности пространства X (см., например, [28, р. 144]), то получаем, что пространство X является конечным.

Докажем обратное утверждение. Пусть пространство X конечно. Следовательно, $\tau_F = \tau_V$. Поскольку X также является дискретным пространством, то из теоремы 1 получаем совпадение топологий $\tau_V = \tau_0$. Следствие доказано.

Теорема 2. *Соотношение $\tau_0 \leq \tau_{LF}$ имеет место тогда и только тогда, когда пространство X дискретно.*

Доказательство. Пусть X дискретно. Тогда в силу теоремы 1 $\tau_V = \tau_0$. Далее получаем требуемое из известного соотношения $\tau_V \leq \tau_{LF}$.

Пусть теперь $\tau_0 \leq \tau_{LF}$. Выберем произвольным образом две различные точки $x, y \in X$ и образуем множество $O(\{x, y\}, X) \in \tau_0$. Исходя из условия, для множества $\{x, y\}$ найдется окрестность из базы топологии τ_{LF} вида $\langle \mathcal{A} \rangle$ такая, что $\{x, y\} \in \langle \mathcal{A} \rangle \subset O(\{x, y\}, X)$, где \mathcal{A} – локально конечное семейство открытых в X множеств. Нетрудно показать, что в таком случае семейство \mathcal{A} будет конечным, т. е. $\mathcal{A} = \{U_1, \dots, U_n\}$, и, следовательно, $\langle \mathcal{A} \rangle = \langle U_1, \dots, U_n \rangle \in \tau_V$. Далее рассуждения те же, что и при доказательстве второй части теоремы 1 (случай $\tau_0 \leq \tau_V$). Теорема доказана.

Теорема 3. *Соотношение $\tau_{LF} \leq \tau_0$ имеет место тогда и только тогда, когда в пространстве X любое локально конечное семейство открытых множеств конечно.*

Доказательство. Если в X любое локально конечное семейство открытых множеств конечно, то $\tau_{LF} = \tau_V$ [5]. Далее получим искомое соотношение $\tau_{LF} \leq \tau_0$, применив теорему 1.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\tau_{LF} \leq \tau_0$. Предположим, что в X существует бесконечное локально конечное семейство открытых множеств \mathcal{A} . В таком случае можем образовать замкнутое множество P , выбрав в каждом множестве из \mathcal{A} по одной точке. Ясно, что $P \in \langle \mathcal{A} \rangle$. Исходя из условия, можно подобрать конечное множество $A \subset P$, содержащее по крайней мере две точки, и открытое в X множество U таким образом, что $P \in O(A, U) \subset \langle \mathcal{A} \rangle$. Это значит, что $A \in \langle \mathcal{A} \rangle$. Но тогда вопреки предположению получим, что семейство \mathcal{A} конечно. Теорема доказана.

Из теорем 2 и 3 вытекает следствие 2.

Следствие 2. Топологии τ_{LF} и τ_O совпадают тогда и только тогда, когда пространство X конечно.

Пусть далее пространство X метризуемо, $\rho \in \Omega_X$ (т. е. ρ – некоторая допустимая метрика на X) и $\hat{\rho}$ – соответствующая метрика Хаусдорфа на $\text{exp } X$.

Теорема 4. Соотношение $\tau_{\hat{\rho}} \leq \tau_O$ имеет место тогда и только тогда, когда метрическое пространство (X, ρ) вполне ограничено.

Доказательство. Пусть $\tau_{\hat{\rho}} \leq \tau_O$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим открытый шар $B_{\hat{\rho}}(X, \varepsilon)$ в метрическом пространстве $(\text{exp } X, \hat{\rho})$. Исходя из условия, это множество принадлежит τ_O . Тогда для множества X (как элемента экспоненты) найдется окрестность вида $O(A, U)$ такая, что $X \in O(A, U) \subset \subset B_{\hat{\rho}}(X, \varepsilon)$ (при этом U , очевидно, совпадает с X). Для конечного множества $A \subset X$ существуют две возможности: $A = \emptyset$ и $|A| \geq 2$. Рассмотрим первый случай. Тогда $O(\emptyset, X) = \text{exp } X$, и, значит, $B_{\hat{\rho}}(X, \varepsilon) = \text{exp } X$. Выберем некоторую точку $x_0 \in X$. Тогда $\hat{\rho}(\{x_0\}, X) = \sup_{x \in X} \rho(x, x_0) < \varepsilon$, и, следовательно, $\rho(x, x_0) < \varepsilon$ для любого $x \in X$. Значит, множество $\{x_0\}$ – конечная ε -сеть для пространства X . Перейдем ко второму случаю, когда $|A| \geq 2$. Из включения $O(A, X) \subset B_{\hat{\rho}}(X, \varepsilon)$ следует, что $\hat{\rho}(A, X) = \sup_{x \in X} \rho(x, A) < \varepsilon$, откуда $\rho(x, A) < \varepsilon$ для любого $x \in X$. Таким образом, множество $A \subset X$ является конечной ε -сетью для пространства X , что и требовалось доказать.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть X вполне ограничено. Рассмотрим произвольное замкнутое множество $F \in \text{exp } X$ и его окрестность (в экспоненте) $B_{\hat{\rho}}(F, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Возможны два случая: $F = \{a\}$ (т. е. множество F одноточечное) и $|F| \geq 2$. В первом случае положим, что $U = B_{\rho}(a, \varepsilon)$, и рассмотрим множество $O(\emptyset, U)$. Очевидно, что $F \in O(\emptyset, U)$, а для любого $P \in O(\emptyset, U)$ выполняются включения $P \subset B_{\rho}(F, \varepsilon)$ и $F \subset B_{\rho}(P, \varepsilon)$, откуда $\hat{\rho}(F, P) < \varepsilon$, и, следовательно, $P \in B_{\hat{\rho}}(F, \varepsilon)$. Соотношения $F \in O(\emptyset, U) \subset B_{\hat{\rho}}(F, \varepsilon)$ доказаны. Во втором случае воспользуемся тем, что любое множество в X тоже вполне ограничено (см., например, [3, с. 396]), и выберем конечное множество $A \subset F$ так, чтобы $F \subset \bigcup_{a \in A} B_{\rho}(a, \varepsilon)$. При этом можем считать, что A неодноточечно, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $n \geq 2$. Рассмотрим множество $O(A, U)$, где $U = \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \varepsilon)$. Ясно, что $F \in O(A, U)$, а для любого $P \in O(A, U)$ выполняются соотношения $P \subset B_{\rho}(A, \varepsilon) \subset B_{\rho}(F, \varepsilon)$ и $F \subset B_{\rho}(A, \varepsilon) \subset B_{\rho}(P, \varepsilon)$, откуда $\hat{\rho}(F, P) < \varepsilon$, и, следовательно, $P \in B_{\hat{\rho}}(F, \varepsilon)$. Получаем включения $F \in O(A, U) \subset B_{\hat{\rho}}(F, \varepsilon)$. Итак, в обоих случаях имеем соотношение $\tau_{\hat{\rho}} \leq \tau_O$. Теорема доказана.

Теорема 5. Соотношение $\tau_O \leq \tau_{\hat{\rho}}$ имеет место тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\rho(x, y) \geq \varepsilon$ для любых различных точек $x, y \in X$ (метрику с таким свойством можно назвать равномерно дискретной).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\tau_O \leq \tau_{\hat{\rho}}$. Предположим, что в X существует предельная точка ξ , тогда найдется последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ такая, что $x_n \neq x_k$ при $n \neq k$, $x_n \neq \xi$ и $\rho(x_n, \xi) < \frac{1}{n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Образует множества $A = \{\xi\} \cup \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ и $A_n = \{x_k | k \leq n\}$. В таком случае $\hat{\rho}(A_n, A) < \frac{2}{n}$, поскольку $B_{\rho}\left(A_n, \frac{2}{n}\right) \supset A$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т. е. A_n сходится к A относительно топологии $\tau_{\hat{\rho}}$, а значит, и относительно топологии τ_O . Но для окрестности $O(\{\xi, x_1\}, X) \in \tau_O$ множества A (как элемента $\text{exp } X$) имеет место соотношение $A_n \notin O(\{\xi, x_1\}, X)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Получили противоречие. Таким образом, пространство X дискретно.

Предположим теперь, что в X существуют последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ такие, что $x_n \neq y_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\rho(x_n, y_n) \rightarrow 0$. Можем считать, что $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что ни одна из последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ не содержит стационарной подпоследовательности. Действительно, допустим, что $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ – стационарная подпоследовательность и $x_{n_i} = z$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Тогда $y_{n_i} \rightarrow z$ и $y_{n_i} \neq z$ при любом $i \in \mathbb{N}$, что противоречит дискретности пространства X . В таком случае можно выбрать последовательность номеров $n_1 < n_2 < \dots$ так, чтобы $\{x_{n_i} | i \in \mathbb{N}\} \cap \{y_{n_i} | i \in \mathbb{N}\} = \emptyset$. Опишем процедуру выбора таких подпоследовательностей. В качестве x_{n_1} и y_{n_1} возьмем x_1 и y_1 . Пусть номера $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ выбраны таким образом, что $x_{n_i} \neq y_{n_j}$ при $i \neq j$. Поскольку последовательности $(x_n)_{n=1}^\infty$ и $(y_n)_{n=1}^\infty$ не имеют стационарных подпоследовательностей, то можно выбрать номер $m > n_k$ такой, что множества $\{x_{n_i} | 1 \leq i \leq k\} \cup \{y_{n_i} | 1 \leq i \leq k\}$ и $\{x_p | p \geq m\} \cup \{y_p | p \geq m\}$ дизъюнкты. Тогда полагаем, что $n_{k+1} = m$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $x_n \neq x_k$ при $n \neq k$, $y_n \neq y_k$ при $n \neq k$ и $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cap \{y_n | n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$.

Далее пусть $D = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$, $D_n = D \cup \{y_k | k \geq n\}$. Тогда из неравенства $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ вытекает оценка $\hat{\rho}(D, D_n) = \sup_{k \geq n} \rho(y_k, D) \leq \frac{1}{n}$, а с ней вытекает и сходимость D_n к D относительно топологии $\tau_{\hat{\rho}}$ и (как следствие соотношения $\tau_0 \leq \tau_{\hat{\rho}}$) относительно топологии τ_0 . Но для окрестности $O(\emptyset, D) \in \tau_0$ множества D имеем $D_n \notin O(\emptyset, D)$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Получили противоречие. Необходимость доказана.

Достаточность. Исходя из условия, выберем такое $\varepsilon > 0$, что $\rho(x, y) \geq \varepsilon$ для любых различных точек $x, y \in X$, и для произвольного множества $F \in \text{exp } X$ рассмотрим окрестность $B_{\hat{\rho}}(F, \varepsilon)$. Пусть $P \in B_{\hat{\rho}}(F, \varepsilon)$, т. е. $\hat{\rho}(F, P) < \varepsilon$. Тогда имеем: 1) $\rho(x, P) < \varepsilon$ для любого $x \in F$; 2) $\rho(y, F) < \varepsilon$ для любого $y \in P$. Ввиду выбора $\varepsilon > 0$ из 1) получаем, что $F \subset P$, а из 2) следует включение $P \subset F$. Таким образом, $B_{\hat{\rho}}(F, \varepsilon) = \{F\}$, откуда вытекает дискретность пространства $(\text{exp } X, \hat{\rho})$, что в свою очередь влечет искомое соотношение $\tau_0 \leq \tau_{\hat{\rho}}$. Теорема доказана.

Следствие 3. Топологии τ_0 и $\tau_{\hat{\rho}}$ совпадают в том и только в том случае, когда пространство X конечно.

Исследуем далее взаимосвязь топологий τ_0 и τ_{inf} . Приведем некоторые свойства τ_{inf} , которые понадобятся в последующем изложении.

Напомним, что пространство X называется секвенциальным, если для любого не замкнутого в X множества A найдутся точка $x \in X \setminus A$ и последовательность $(a_n)_{n=1}^\infty \subset A$, сходящаяся к x .

Будем писать $F_n \xrightarrow{\text{inf}} F$ ($F_n \xrightarrow{\hat{\rho}} F$), если последовательность $(F_n)_{n=1}^\infty \subset \text{exp } X$ сходится к F относительно топологии τ_{inf} (метрики Хаусдорфа $\hat{\rho}$ соответственно).

Предложение 7 [27]. Пространство $\text{exp } X$ с топологией τ_{inf} секвенциально.

Следующее предложение описывает связь между сходимостью в τ_{inf} и сходимостью по метрике Хаусдорфа.

Предложение 8 [27]. Если $(F_n)_{n=1}^\infty \subset \text{exp } X$, $F \in \text{exp } X$ и $F_n \xrightarrow{\text{inf}} F$, то найдутся метрика $\rho \in \Omega_X$ и подпоследовательность $(F_{n_i})_{i=1}^\infty$, для которых $F_{n_i} \xrightarrow{\hat{\rho}} F$.

Следующие предложения описывают связь топологии τ_{inf} с топологиями Вьеториса τ_V и Фелла τ_F .

Предложение 9 [27]. Справедливо соотношение $\tau_F \leq \tau_{\text{inf}}$.

Предложение 10 [27]. Для метризуемого пространства X равносильны условия:

- 1) $\tau_{\text{inf}} = \tau_V$;
- 2) $\tau_V \leq \tau_{\text{inf}}$;
- 3) X компактно;
- 4) $\tau_{\text{inf}} = \tau_F$.

Теорема 6. Соотношение $\tau_{\text{inf}} \leq \tau_0$ имеет место тогда и только тогда, когда пространство X обладает счетной базой.

Доказательство. Пусть X обладает счетной базой. В таком случае X допускает вполне ограниченную метрику ρ (см., например, [3, с. 398]). Тогда из теоремы 4 получаем соотношение $\tau_{\hat{\rho}} \leq \tau_0$, откуда в свою очередь вытекает $\tau_{\text{inf}} \leq \tau_0$.

Идея доказательства обратного утверждения та же, что и в [27, теорема 9]. Предположим, что в X нет счетной базы. Тогда, поскольку X имеет σ -дискретную базу (см., например, [3, с. 418]), в X можно выбрать вполне упорядоченное замкнутое дискретное (как подпространство) множество $A = \{a_\lambda | \lambda < \omega_1\}$ ($a_\alpha \neq a_\beta$ при $\alpha \neq \beta$), где ω_1 – первый несчетный ординал. Пусть $A_\lambda = \{a_\alpha | \alpha < \lambda\}$, $\mathcal{H} = \{A_\lambda | \lambda < \omega_1\}$. Ясно,

что $A \notin \mathcal{H}$, но при этом $A \in [\mathcal{H}]_O$ (замыкание множества \mathcal{H} в τ_O), а так как $\tau_{\text{inf}} \leq \tau_O$, то $A \in [\mathcal{H}]_{\text{inf}}$ (замыкание множества \mathcal{H} в τ_{inf}). Ввиду предложений 7 и 8 найдутся множество $B \in \text{exp } X \setminus \mathcal{H}$, последовательность $(A_{\lambda_n})_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ и метрика $\rho \in \Omega_X$ такие, что $A_{\lambda_n} \xrightarrow{\hat{\rho}} B$.

Исследуем далее взаимное расположение множеств A и B . Предположим сначала, что множество $B \setminus A$ не пусто. В таком случае фиксируем некоторую точку $b_0 \in B \setminus A$. Обозначим $\varepsilon_0 = \rho(b_0, A)$. Ясно, что $\varepsilon_0 > 0$. Тогда для любого множества A_{λ_n} справедлива оценка $\sup_{b \in B} \rho(b, A_{\lambda_n}) \geq \rho(b_0, A_{\lambda_n}) \geq \rho(b_0, A) = \varepsilon_0$, откуда $\hat{\rho}(B, A_{\lambda_n}) \geq \varepsilon_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, что противоречит сходимости $A_{\lambda_n} \xrightarrow{\hat{\rho}} B$. Таким образом, $B \subset A$.

Далее предположим, что найдутся точки $a_\alpha \notin B$ и $a_\beta \in B$ такие, что $\alpha < \beta$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $B_\rho(a_\alpha, \varepsilon) \cap A = \{a_\alpha\}$ и $B_\rho(a_\beta, \varepsilon) \cap A = \{a_\beta\}$. Для всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого номера, $\hat{\rho}(B, A_{\lambda_n}) < \varepsilon$, и, следовательно, $a_\beta \in A_{\lambda_n}$. Поскольку $a_\alpha \in A_{\lambda_n}$ (так как $\alpha < \beta$) и $\hat{\rho}(B, A_{\lambda_n}) < \varepsilon$, то $a_\alpha \in B$. Получили противоречие. Таким образом, если $a_\beta \in B$, то $a_\alpha \in B$ для всех $\alpha < \beta$.

Пусть далее существует не более чем счетный ординал λ_0 такой, что $\lambda < \lambda_0$ для любой точки $a_\lambda \in B$. Можно полагать, что λ_0 – первый ординал среди таких ординалов, и тогда $B = A_{\lambda_0}$, что невозможно, поскольку $B \in \text{exp } X \setminus \mathcal{H}$.

Итак, получаем равенство $B = A$. Известно (см., например, [3, с. 25]), что для всякой последовательности ординалов $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, меньших, чем ω_1 , найдется такой ординал $\lambda_0 < \omega_1$, что $\lambda_i < \lambda_0$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$, при котором $B_\rho(a_{\lambda_0}, \varepsilon) \cap A = \{a_{\lambda_0}\}$. Поскольку $B = A$, то $\hat{\rho}(B, A_{\lambda_n}) \geq \varepsilon$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, что противоречит сходимости $A_{\lambda_n} \xrightarrow{\hat{\rho}} B$. Теорема доказана.

Следствие 4. Для метризуемого пространства X равносильны условия:

- 1) $\tau_O \leq \tau_{\text{inf}}$;
- 2) X конечно;
- 3) $\tau_O = \tau_{\text{inf}}$.

Доказательство. Импликация 1) \Rightarrow 2). Так как $\tau_V \leq \tau_O$ (см. теорему 1), то $\tau_V \leq \tau_{\text{inf}}$, что равносильно $\tau_{\text{inf}} = \tau_F$ (см. предложение 10), откуда получаем равенство $\tau_F = \tau_O$, которое (см. следствие 1) эквивалентно конечности пространства X . Импликация 2) \Rightarrow 3). Поскольку пространство X конечно, то $\text{exp } X$ – конечное множество, и, следовательно, в силу выполнения для τ_O и τ_{inf} аксиомы отделимости T_1 , τ_O и τ_{inf} – одна и та же дискретная топология. Импликация 3) \Rightarrow 1) очевидна. Следствие доказано.

Следствие 5. Топологии τ_{inf} и τ_O несравнимы тогда и только тогда, когда вес пространства X не счетен.

Непрерывное продолжение отображения на экспоненты с топологией τ_O

Исследуем вопрос об условиях существования непрерывного продолжения $\text{exp}_O X \xrightarrow{g} \text{exp}_O Y$ отображения $X \xrightarrow{f} Y$. Отображение $\text{exp } X \xrightarrow{g} \text{exp } Y$ будем называть продолжением отображения $X \xrightarrow{f} Y$ на экспоненты $\text{exp } X$ и $\text{exp } Y$, если $g(\{x\}) = \{f(x)\}$ для любого $\{x\} \in \text{exp } X$. Если, кроме того, $g(F) = [f(F)]_Y$ для любого $F \in \text{exp } X$, то отображение $\text{exp } X \xrightarrow{g} \text{exp } Y$ назовем каноническим продолжением. Далее каноническое продолжение будем обозначать через \bar{f} . Выясним условия «каноничности» непрерывного продолжения для топологии τ_O .

Теорема 7. Пусть для непрерывного продолжения $\text{exp}_O X \xrightarrow{g} \text{exp}_O Y$ отображения $X \xrightarrow{f} Y$ имеет место равенство $g(A) = f(A)$ для любого конечного подмножества A пространства X . Тогда $g = \bar{f}$.

Доказательство. Пусть $F \in \text{exp } X$ и $|F| = \infty$. Вначале отметим, что если $F \in O(\emptyset, U)$, где U открыто в X , то $F \in O(A, U) \subset O(\emptyset, U)$ для любого конечного множества $A \subset F$ такого, что $|A| \geq 2$. Рассмотрим окрестность V (в Y) некоторой точки $\xi \in g(F)$. Множество V^- есть окрестность $g(F)$ в $\text{exp}_O Y$ ввиду соотношения $\tau_V \leq \tau_O$ (см. теорему 1). Из непрерывности отображения g для множества F (как элемента экспоненты) можно подобрать окрестность вида $O(A, U)$ так, чтобы $g(O(A, U)) \subset V^-$, где $|A| \geq 2$. Поскольку $A \in O(A, U)$, то $g(A) = f(A) \in V^-$, т. е. $f(A) \cap V \neq \emptyset$, откуда $f(F) \cap V \neq \emptyset$. Ввиду произвольности выбора окрестности V получаем, что $\xi \in [f(F)]_Y$, и, следовательно, $g(F) \subset [f(F)]_Y$. Далее предположим, что существует точка $\eta \in [f(F)]_Y \setminus g(F)$. Так как множество $g(F)$ замкнуто, то

найдется также точка $y \in f(F) \setminus g(F)$. Рассмотрим окрестность $O(\emptyset, Y \setminus \{y\})$ множества $g(F)$ в $\text{exp}_O Y$. В силу непрерывности отображения g для множества F можно подобрать окрестность вида $O(A, U)$, где $|A| \geq 2$, так, чтобы $g(O(A, U)) \subset O(\emptyset, Y \setminus \{y\})$. Выберем далее точку $x \in f^{-1}(y) \cap F$. Тогда множество $\{x\} \cup A \in \text{exp}_O X$ является элементом $O(A, U)$, значит, $g(\{x\} \cup A) = f(\{x\} \cup A) \in O(\emptyset, Y \setminus \{y\})$, т. е. $f(x) \in f(\{x\} \cup A) \subset Y \setminus \{y\}$. Таким образом, получили противоречие (так как $y = f(x)$). Следовательно, имеет место включение $[f(F)]_Y \subset g(F)$. Итак, $g(F) = [f(F)]_Y$. Теорема доказана.

Выясним теперь условия непрерывности канонического продолжения \bar{f} . Исходное отображение $X \xrightarrow{f} Y$ считаем далее непрерывным.

Теорема 8. *Отображение $\text{exp}_O X \xrightarrow{\bar{f}} \text{exp}_O Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда отображение $X \xrightarrow{f} Y$ замкнуто (т. е. $f(F)$ замкнуто в Y для любого замкнутого в X множества F).*

Доказательство. Необходимость. Пусть отображение \bar{f} непрерывно. Предположим, что существует замкнутое множество $F \subset X$, для которого $[f(F)]_Y \setminus f(F) \neq \emptyset$. Выберем точки $\xi \in [f(F)]_Y \setminus f(F)$ и $y \in f(F)$ и образуем в $\text{exp}_O Y$ окрестность $O(\{\xi, y\}, Y)$ множества $\bar{f}(F) = [f(F)]_Y$. Тогда, исходя из непрерывности \bar{f} , найдется окрестность множества F вида $O(A, U)$ такая, что $\bar{f}(O(A, U)) \subset O(\{\xi, y\}, Y)$. В случае если $A = \emptyset$, рассмотрим множество $\{x\} \in O(\emptyset, U)$, где $x \in F$ и $f(x) = y$. Тогда $\bar{f}(\{x\}) = \{f(x)\} \in O(\{\xi, y\}, Y)$, и, значит, $\{\xi, y\} \subset \{f(x)\} = \{y\}$, что невозможно. Если $|A| \geq 2$, то $\bar{f}(A) = f(A) \in O(\{\xi, y\}, Y)$, следовательно, множество $f(A)$ содержит множество $\{\xi, y\}$, откуда (ввиду включения $f(A) \subset f(F)$) получаем, что $\xi \in f(F)$ вопреки предположению. Значит, $[f(F)]_Y = f(F)$. Замкнутость отображения $X \xrightarrow{f} Y$ доказана.

Достаточность. Пусть отображение $X \xrightarrow{f} Y$ замкнуто. Для образа $\bar{f}(F) = f(F)$ точки F (в экспоненте) рассмотрим произвольную окрестность вида $O(B, V)$. Если множество B пусто, то в силу замкнутости отображения f имеет место включение $\bar{f}(O(\emptyset, U)) \subset O(B, V)$, где $U = f^{-1}(V)$. Пусть теперь $|B| \geq 2$. В таком случае для множества B можно подобрать конечное множество $A \subset F$ так, чтобы $f(A) = B$. Тогда для множества F образуем окрестность вида $O(A, U)$, где $U = f^{-1}(V)$. Замкнутость функции f обеспечит включение $\bar{f}(O(A, U)) \subset O(B, V)$. Теорема доказана.

В завершение рассмотрим отображение exp_O из категории CLOS топологических T_1 -пространств и непрерывных замкнутых отображений в категорию TOP₁ топологических T_1 -пространств и непрерывных отображений, сопоставляющее каждому объекту X из категории CLOS его экспоненту $\text{exp}_O X$, а каждому морфизму $X \xrightarrow{f} Y$ категории CLOS его непрерывное продолжение $\text{exp}_O X \xrightarrow{\bar{f}} \text{exp}_O Y$. Теорема 8 позволяет сформулировать следствие 5.

Следствие 5. *Отображение exp_O является ковариантным функтором из категории CLOS в категорию TOP₁.*

Замечание. В силу теоремы 8 категорию CLOS можно считать естественной (т. е. максимальной в рамках категории TOP₁) областью определения функтора exp_O .

Библиографические ссылки

1. Victoris L. Bereiche zweiter Ordnung. *Monatshefte für Mathematik und Physik*. 1922;32:258–280. DOI: 10.1007/BF01696886.
2. Michael E. Topologies on spaces of subsets. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1951;71:152–182.
3. Энгелькин П. *Общая топология*. Антоновский МЯ, Архангельский АВ, переводчики. Москва: Мир; 1986. 744 с.
4. Fell JMG. A Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact non-Hausdorff space. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1962;13(3):472–476. DOI: 10.2307/2034964.
5. Beer GA, Himmelberg CJ, Prikry K, van Vleck FS. The locally finite topology on 2^X . *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1987;101(1):168–172. DOI: 10.2307/2046570.
6. Beer GA, Tamaki RK. On hit-and-miss hyperspace topologies. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*. 1993;34(4):717–728.
7. Holá L, Levi S. Decomposition properties of hyperspace topologies. *Set-Valued Analysis*. 1997;5:309–321.
8. Очан ЮС. Пространство подмножеств топологического пространства. *Доклады Академии наук СССР*. 1941;32(2):107–109.

9. Очан ЮС. Пространство подмножеств топологического пространства. *Математический сборник*. 1943;12(3):340–352.
10. Kašuba RP. The generalized Očan topology on sets of subsets and topological Boolean rings. *Mathematische Nachrichten*. 1980; 97(1):47–56. DOI: 10.1002/mana.19800970106.
11. Попов ВВ. О нормальности экспоненты в топологиях очановского типа. *Математические заметки*. 1982;32(3):375–484.
12. Попов ВВ. О строении экспоненты дискретного пространства. *Математические заметки*. 1984;35(5):757–767.
13. Энгельсон ЛЯ. Точно-экспоненциальная топология. *Ученые записки Латвийского университета*. 1976;257(2):121–126.
14. Пранинскас Г. О топологической характеристике некоторых свойств мер посредством очановских топологий. *Lietuvos matematikos rinkinys*. 2010;51:75–79.
15. Hart KP, Nagata J, Vaughan JE. *Encyclopedia of general topology*. [S. l.]: Elsevier; 2003. 526 p. DOI: 10.1016/B978-0-444-50355-8.x5000-4.
16. van Douwen EK. The Pixley – Roy topology on spaces of subsets. In: Reed GM, editor. *Set-theoretic topology*. Cambridge: Academic Press; 1977. p. 111–134.
17. Кукрак ГО, Тимохович ВЛ. Об экспоненциальном пространстве с топологией очановского типа. *Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова*. 1999;2–3(3):94–97.
18. Кукрак ГО, Тимохович ВЛ. Расширение Волмэна и экспонента. Фунториальные свойства. *Труды Института математики*. 2022;30(1–2):37–43.
19. Бедрицкий АС, Тимохович ВЛ. Модификация условия (WO) Харриса и фунториальные свойства экспоненты и расширения Волмэна. *Труды Института математики*. 2022;30(1–2):4–11.
20. Harris D. The Wallman compactification as a functor. *General Topology and its Applications*. 1971;1(3):273–281. DOI: 10.1016/0016-660X(71)90098-5.
21. Бедрицкий АС, Тимохович ВЛ. Фунториальные свойства Ω -насыщения топологического пространства. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2023;1:31–37.
22. Бедрицкий АС. О фунториальных свойствах Ω -насыщения топологического T_1 -пространства. *Труды Института математики*. 2023;31(1):6–13.
23. Кукрак ГО, Тимохович ВЛ, Фролова ДС. Некоторые топологические свойства функтора $C(X, Y)$. *Труды Института математики*. 2018;26(1):71–78.
24. Кукрак ГО, Тимохович ВЛ. О непрерывности функторов вида $C(X, Y)$. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2020;1:22–29. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-1-22-29.
25. Кукрак ГО, Тимохович ВЛ. Ограниченная топология и функтор $C(X, Y)$. *Труды Института математики*. 2020;28(1–2): 57–62.
26. Costantini C, Vitolo P. On the infimum of the Hausdorff metric topologies. *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1995;70(2):441–480. DOI: 10.1112/plms/s3-70.2.441.
27. Бедрицкий АС, Тимохович ВЛ. О топологиях экспоненты метризуемого топологического пространства. *Труды Института математики*. 2023;31(2):15–27.
28. Beer G. *Topologies on closed and closed convex sets*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers; 1993. 340 p.

Получена 11.04.2024 / исправлена 06.10.2024 / принята 06.10.2024.
Received 11.04.2024 / revised 06.10.2024 / accepted 06.10.2024.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

УДК 539.3, 539.422.23, 531.011, 51-74, 519-62

ПОСТРОЕНИЕ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОГО БЛОЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ГЕОМЕХАНИКИ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

М. А. НИКОЛАЙЧИК¹⁾, ЧЖАН ШИЦИ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Рассматриваются методы численного моделирования, которые являются эффективными инструментами решения инженерно-геомеханических задач. Приводится процедура построения механико-математической модели одного типа вязкоупругого блочного элемента. На основе такого типа блочных элементов представляется возможным использование метода дискретных элементов для моделирования состояния массива горных пород в областях, где предположение о сплошности нарушается. Результирующие уравнения, описывающие поведение предложенного блочного элемента, получены с применением классических законов механики. Выполнен ряд численных экспериментов, рассмотрены различные варианты начальных условий, а также параметры связей между элементами блока. Разработан алгоритм, позволяющий описывать динамику блока, состоящего из n элементов. Проведена оценка быстродействия разработанного алгоритма с использованием

Образец цитирования:

Николайчик МА, Чжан Шици. Построение механико-математической модели вязкоупругого блочного элемента для решения динамических задач геомеханики методом дискретных элементов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;3:40–61 (на англ.).
EDN: GORQYA

For citation:

Nikolaitchik MA, Zhang Shiqi. Construction of mechanical and mathematical model of viscoelastic block element for solving geomechanics dynamic problems using discrete element method. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;3:40–61.
EDN: GORQYA

Авторы:

Михаил Александрович Николайчик – кандидат физико-математических наук; заведующий научно-исследовательской лабораторией прикладной механики механико-математического факультета.

Чжан Шици – магистрант кафедры теоретической и прикладной механики механико-математического факультета. Научный руководитель – М. А. Журавков.

Authors:

Mikhail A. Nikolaitchik, PhD (physics and mathematics); head of the laboratory of applied mechanics, faculty of mechanics and mathematics.

nikolaitchik.m@gmail.com

Zhang Shiqi, master's degree student at the department of theoretical and applied mechanics, faculty of mechanics and mathematics.
shiqizhang177@gmail.com

последовательных и параллельных вычислений. Полученные результаты могут применяться для решения динамических задач геомеханики методом дискретных элементов в областях породного массива, в которых нарушается гипотеза о сплошности.

Ключевые слова: численное моделирование; механико-математическое моделирование; механика деформируемого твердого тела; элементы дискретного метода; граничные условия; подземная геомеханика; деформируемый блочный элемент.

Благодарность. Исследование выполнено в рамках совместного проекта «Высокопроизводительный метод дискретных элементов для сыпучих материалов произвольной формы и его применение в геотехнике холодных регионов и горнодобывающих районов» Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований и Национального фонда естественных наук Китая.

CONSTRUCTION OF MECHANICAL AND MATHEMATICAL MODEL OF VISCOELASTIC BLOCK ELEMENT FOR SOLVING GEOMECHANICS DYNAMIC PROBLEMS USING DISCRETE ELEMENT METHOD

M. A. NIKOLAITCHIK^a, ZHANG SHIQI^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: M. A. Nikolaitchik (nikolaitchik.m@gmail.com)

Abstract. Numerical simulation methods have become one of the effective tools to solve geomechanical engineering problems. The paper presents a procedure for constructing a mechanical and mathematical model of one type of viscoelastic block element. Based on this type of block element, it seems possible to apply the discrete element method for modelling the state of a rock massif in areas where the continuity assumption is violated. The resulting equations describing the behaviour of the proposed block element are obtained using classical laws of mechanics. A number of numerical experiments were carried out, different variants of initial conditions were considered, as well as parameters of connections between the elements of the block. An algorithm is developed to describe the block consisting of n elements dynamics. The performance of the developed algorithm using sequential and parallel computations has been evaluated. The obtained results can be used to solve dynamic problems of geomechanics by the discrete element method in the areas of rock massif where the continuity hypothesis is violated.

Keywords: numerical simulation; mechanic-mathematical modelling; mechanics of deformable solids; discrete method elements; boundary conditions; underground geomechanics; deformable block element.

Acknowledgements. This research was carried out as part of the joint project «High-performance discrete element method for granular materials of arbitrary shape and its application in geotechnics of cold regions and mining areas» of the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research and the National Natural Science Foundation of China.

Introduction

Currently, combined continuous and discrete models are increasingly used when solving subsurface geomechanical problems. In 1996, researcher T. Belytschko from the Northwestern University in the United States proposed a meshless approximation based on moving least-squares, kernels, and partitions of unity [1]. Then in 2004, S. H. Li and others from Asia proposed a continuum-based discrete element method for a continuous deformation and failure process [2]. And just after two years, in 2006, A. K. Ariffin and his colleagues used the numerical modelling based on the combination of finite element method (FEM) and the discrete element method (DEM) to simulate crack propagation under mixed mode loading [3]. In 2008, A. Karami and D. Stead investigates the processes of joint surface damage and near-surface intact rock tensile failure using a hybrid FEM and DEM code [4]. Also J. P. Morris and other researchers investigated the effect of explosive and impact loading on geological media using the FEM and DEM methods [5]. In 2022, D. S. Zhurkina and her colleagues simulated the modelling of shear localisation and transition of the geoenvironment to unstable deformation modes based on the DEM [6]. In addition, many scientists have analysed the application of numerical methods in geomechanics¹.

¹Zhuravkov M. A. Modern numerical methods in mechanics : a course of lectures. Minsk : Belarus. State Univ., 2022. 132 p.

Continuous numerical methods (FEM, boundary element method (BEM)) are used when studying the stress-strain state (SSS) in regions distant from the underground rock mass structure [7]. Continuum methods [8] are not completely suitable for considering regions of rock masses with clearly identified block structures or fracture zones, whereas discrete methods allow the disruption of the continuity hypothesis to be of great help in studying rocks. And when studying the behaviour of nearby regions, it is more suitable and accurately to use the DEM for modelling with various modifications, which makes it possible to directly consider cracks and block structures [9].

Let us consider the modelling problem of constructing general models that allow us to study deformation processes and rock mass states in the regions where massive structures are formed. For the rock mass, its initial state can be considered within the framework of continuum mechanics, while its structure cannot be ignored when studying the SSS of rock mass when it is in an obviously massive region.

According to the simplified definition of regular packing [10], its parameters can be determined experimentally rather than theoretically, by calibrating the model using field measurement data from real rock masses in the structural state under study.

Therefore, we imagine discontinuous regions of a rock mass as regular accumulations of blocks. In the DEM, deformations in the block structure are considered to be due only to the connections between individual elements [11].

Let us consider the following approach to study the deformation of individual blocks, representing the block as a system consisting of multiple internal solid elements interconnected by several connections (fig. 1).

Therefore, the deformation of the block occurs due to the deformation of the connections between elements, which are considered as solid bodies. In this case, the entire discontinuous area is a system of several such block elements, which in turn are connected to each other by certain connections. That is, in order to simulate damaged or fractured areas in a rock mass, such block elements should be placed over all discontinuous areas.

We introduce the following restrictions on the shape of the individual elements in the overall block structure. The shape of the elements is symmetrical. Additionally, elements can have various shapes and sizes. We impose the same restriction on the connections between elements: in the general structure, the connections of the element i to its neighbours are symmetrical.

Therefore, the following problem is considered as a basic modelling problem: the study of the state of a planar structure consisting of internal elements which are interconnected by elastic and viscous connections when subjected to external loads (see fig. 1).

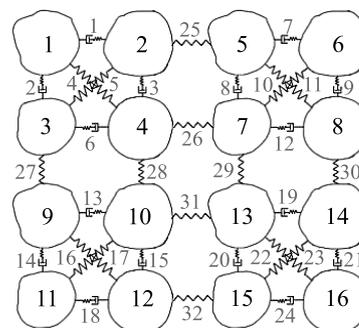


Fig. 1. The model of blocks consisting of 16 elements

Construction of basic models

Let us consider the following model problem. As mentioned before, the state of the block shown in the previous fig. 1 is studied in the case of $m_i = m$, $i = 1, 16$. That is, the mass of each element is m , and the distance between the centroids of the internal components is l . Elements are connected by elastic and viscous damping links: $l_4, l_5, l_{10}, l_{11}, l_{16}, l_{17}, l_{22}, l_{23}, l_{25}, l_{26}, l_{27}, l_{28}, l_{29}, l_{30}, l_{31}, l_{32}$ are elastic connections with stiffness coefficient k ; $l_1, l_2, l_3, l_6, l_7, l_8, l_9, l_{12}, l_{13}, l_{14}, l_{15}, l_{18}, l_{19}, l_{20}, l_{21}, l_{24}$ are viscous links with a damping coefficient c . Each element m_i in the system is displaced x_i in the horizontal X -axis direction by a certain amount due to the overall (see fig. 1).

We solve the problem analytically using the Lagrangian equations of the second kind². In order to consider the damping, it is necessary to introduce additional terms in the right part of the Lagrangian equations, taking into account the presence of medium resistance. Let the damping coefficient be η . Let us define a dissipation function G such that the resistance of the medium f and the dissipation function G satisfy the following relationship³:

$$f = -\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}. \quad (1)$$

It can be seen from the appearance of (1) that the dissipation function G has a power dimension, which itself reflects the loss rate of mechanical energy [12]. Taking into account the assumptions introduced, the Lagrangian equations of the second kind can be written as follows:

²Vyarvilskaya O. N., Medvedev D. G., Savchuk V. P. A short course in theoretical mechanics : textbook. Minsk : Belarus. State Univ., 2020. 207 p.

³Shakirzyanov R. A., Shakirzyanov F. R. Dynamics and stability of structures : textbook. 2nd ed., revised. Kazan : Publ. House of the Kazan State Univ. of Archit. and Eng., 2015. 120 p.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_i}, \quad i = \overline{1, 16}. \quad (2)$$

For calculating, it is easier to divide the entire system into four parts, the first part contains elements 1, 2, 3, 4 (fig. 2). Calculate the Lagrangian equation for the first part.

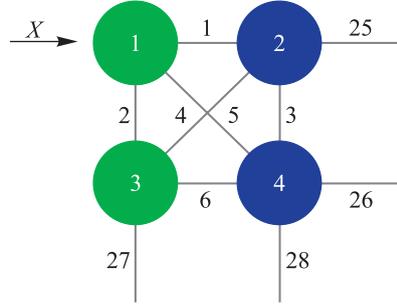


Fig. 2. The first part of model consisting of 16 elements

The kinetic energy (3) for this part is

$$T = \sum_{i=1}^4 T_i = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_3^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_4^2. \quad (3)$$

The potential energy (4) of the system is

$$\Pi = \sum_{j=1}^6 \frac{k}{2} \Delta l_j^2. \quad (4)$$

It is determined by the potential energy of elastic connections (springs). From geometric considerations for the first part, the spring displacements (5) are equal to

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= (x_1 + x_2), \\ \Delta l_2 &= \sqrt{l^2 + (x_1 - x_3)^2} - l, \\ \Delta l_3 &= \sqrt{l^2 + (x_2 - x_4)^2} - l, \\ \Delta l_4 &= \sqrt{l^2 + (l - x_1 - x_4)^2} - l, \\ \Delta l_5 &= \sqrt{l^2 + (l - x_2 - x_3)^2} - l, \\ \Delta l_6 &= (x_3 + x_4), \\ \Delta l_{25} &= (x_2 + x_5), \\ \Delta l_{26} &= (x_4 + x_7), \\ \Delta l_{27} &= \sqrt{l^2 + (x_3 - x_9)^2} - l, \\ \Delta l_{28} &= \sqrt{l^2 + (x_4 - x_{10})^2} - l. \end{aligned} \quad (5)$$

Then, the expression for potential energy takes the form defined by formula (6):

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{k}{2} \left((x_1 + x_2)^2 + \left(\sqrt{l^2 + (x_1 - x_3)^2} - l \right)^2 + \left(\sqrt{l^2 + (l - x_2 - x_3)^2} - l \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sqrt{l^2 + (x_2 - x_4)^2} - l \right)^2 + \left(\sqrt{l^2 + (l - x_1 - x_4)^2} - l \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (x_3 + x_4)^2 + (x_2 + x_5)^2 + (x_4 + x_7)^2 + \left(\sqrt{l^2 + (x_3 - x_9)^2} - l \right)^2 + \left(\sqrt{l^2 + (l - x_4 - x_{10})^2} - l \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (6)$$

As a result, the Lagrange function (7) is written as follows:

$$L = \frac{1}{2}m(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - \frac{k}{2} \left((x_1 + x_2)^2 + \left(\sqrt{l^2 + (x_1 - x_3)^2} - l \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\sqrt{l^2 + (l - x_2 - x_3)^2} - l \right)^2 + \left(\sqrt{l^2 + (x_2 - x_4)^2} - l \right)^2 + \left(\sqrt{l^2 + (l - x_1 - x_4)^2} - l \right)^2 + \right. \\ \left. + (x_3 + x_4)^2 + (x_2 + x_5)^2 + (x_4 + x_7)^2 + \left(\sqrt{l^2 + (x_3 - x_9)^2} - l \right)^2 + \left(\sqrt{l^2 + (l - x_4 - x_{10})^2} - l \right)^2 \right). \quad (7)$$

For the dissipation function G (8) it takes form as

$$G = \sum_{j=1}^6 \frac{\eta}{2} \Delta \dot{l}_j^2. \quad (8)$$

Where only vicious connections (damper) are considered, the geometric considerations for the first part, the damper displacements (9) are equal to

$$\begin{aligned} \Delta \dot{l}_1 &= (\dot{x}_1 + \dot{x}_2), \\ \Delta \dot{l}_2 &= \frac{(x_1 - x_3)(\dot{x}_1 - \dot{x}_3)}{\sqrt{l^2 + (x_1 - x_3)^2}}, \\ \Delta \dot{l}_3 &= \frac{(x_2 - x_4)(\dot{x}_1 - \dot{x}_4)}{\sqrt{l^2 + (x_2 - x_4)^2}}, \\ \Delta \dot{l}_6 &= (\dot{x}_3 + \dot{x}_4). \end{aligned} \quad (9)$$

Then the equation of the dissipation function G (10) is

$$G = \frac{\eta}{2} \left((\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + \left(\frac{(x_1 - x_3)(\dot{x}_1 - \dot{x}_3)}{\sqrt{l^2 + (x_1 - x_3)^2}} \right)^2 + \left(\frac{(x_2 - x_4)(\dot{x}_2 - \dot{x}_4)}{\sqrt{l^2 + (x_2 - x_4)^2}} \right)^2 + (\dot{x}_3 + \dot{x}_4)^2 \right). \quad (10)$$

As a result, equations (2) for the first part where $i = 1, 2, 3, 4$ are written explicitly (11) as follows:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + k \left((x_1 + x_2) + \left(l^2 + (x_1 - x_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_1 - x_3)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_1 - x_3) - \\ - \left(\left(l^2 + (l - x_1 - x_4)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (l - x_1 - x_4)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (l - x_1 - x_4) \right) = \\ = -\eta \left((\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + \frac{(x_1 - x_3)^2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_3)}{l^2 + (x_1 - x_3)^2} \right), \\ m\ddot{x}_2 + k \left((x_1 + x_2) + \left(l^2 + (x_2 - x_4)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_2 - x_4)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_2 - x_4) - \\ - \left(\left(l^2 + (l - x_2 - x_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (l - x_2 - x_3)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (l - x_2 - x_3) + (x_2 + x_5) \right) = \\ = -\eta \left((\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + \frac{(x_2 - x_4)^2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_4)}{l^2 + (x_2 - x_4)^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}_3 + k & \left[(x_3 + x_4) - \left(\left(l^2 + (x_1 - x_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_1 - x_3)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_1 - x_3) + \right. \\
 & \left. + \left(\left(l^2 + (x_3 - x_9)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_3 - x_9)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_3 - x_9) - \right. \\
 & \left. - \left(\left(l^2 + (l - x_2 - x_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (l - x_2 - x_3)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (l - x_2 - x_3) \right] = \\
 & = -\eta \left(\dot{x}_3 + \dot{x}_4 - \frac{(x_1 - x_3)^2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_3)}{l^2 + (x_1 - x_3)^2} \right),
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}_4 + k & \left[(x_3 + x_4) - \left(\left(l^2 + (x_2 - x_4)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_2 - x_4)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_2 - x_4) + \right. \\
 & \left. + \left(\left(l^2 + (x_4 - x_{10})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_4 - x_{10})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_4 - x_{10}) - \right. \\
 & \left. - \left(\left(l^2 + (l - x_1 - x_4)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (l - x_1 - x_4)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (l - x_1 - x_4) + (x_4 + x_7) \right] = \\
 & = -\eta \left(\dot{x}_3 + \dot{x}_4 - \frac{(x_2 - x_4)^2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_4)}{l^2 + (x_2 - x_4)^2} \right).
 \end{aligned}$$

For the remaining three parts ($i = \overline{5, 8}, i = \overline{9, 12}, i = \overline{13, 16}$), the same analysis method will be constructed. The second part contains elements 5, 6, 7, 8 (fig. 3).

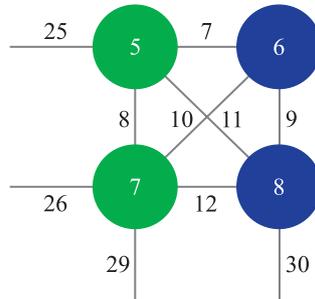


Fig. 3. The second part of model consisting of 16 elements

Equations (2) for the second part where $i = 5, 6, 7, 8$ are written explicitly (12) as follows:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}_5 + k & \left[(x_5 + x_6) + \left(\left(l^2 + (x_5 - x_7)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_5 - x_7)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_5 - x_7) - \right. \\
 & \left. - \left(\left(l^2 + (l - x_5 - x_8)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (l - x_5 - x_8)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (l - x_5 - x_8) + (x_2 + x_5) \right] = \\
 & = -\eta \left(\dot{x}_5 + \dot{x}_6 + \frac{(x_5 - x_7)^2 (\dot{x}_5 - \dot{x}_7)}{l^2 + (x_5 - x_7)^2} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & m\ddot{x}_6 + k \left((x_5 + x_6) + \left(l^2 + (x_6 - x_8)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_6 - x_8)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_6 - x_8) - \\
 & - \left(\left(l^2 + (l - x_6 - x_7)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (l - x_6 - x_7)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (l - x_6 - x_7) \right) = \\
 & = -\eta \left(\dot{x}_5 + \dot{x}_6 + \frac{(x_6 - x_8)^2 (\dot{x}_6 - \dot{x}_8)}{l^2 + (x_6 - x_8)^2} \right), \\
 & m\ddot{x}_7 + k \left((x_7 + x_8) - \left(l^2 + (x_5 - x_7)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_5 - x_7)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_5 - x_7) + \\
 & + \left(\left(l^2 + (x_7 - x_{13})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_7 - x_{13})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_7 - x_{13}) - \\
 & - \left(\left(l^2 + (l - x_6 - x_7)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (l - x_6 - x_7)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (l - x_6 - x_7) + (x_4 + x_7) \right) = \\
 & = -\eta \left(\dot{x}_7 + \dot{x}_8 - \frac{(x_5 - x_7)^2 (\dot{x}_5 - \dot{x}_7)}{l^2 + (x_5 - x_7)^2} \right), \\
 & m\ddot{x}_8 + k \left((x_7 + x_8) - \left(l^2 + (x_6 - x_8)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_6 - x_8)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_6 - x_8) + \\
 & + \left(\left(l^2 + (x_8 - x_{14})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_8 - x_{14})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_8 - x_{14}) - \\
 & - \left(\left(l^2 + (l - x_5 - x_8)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (l - x_5 - x_8)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (l - x_5 - x_8) \right) = \\
 & = -\eta \left(\dot{x}_7 + \dot{x}_8 - \frac{(x_6 - x_8)^2 (\dot{x}_6 - \dot{x}_8)}{l^2 + (x_6 - x_8)^2} \right).
 \end{aligned} \tag{12}$$

The third part contains elements 9, 10, 11, 12 (fig. 4):

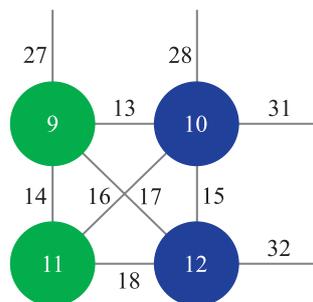


Fig. 4. The third part of model consisting of 16 elements

Equations (2) for the third part where $i = 9, 10, 11, 12$ are written explicitly (13) as follows:

$$\begin{aligned}
 & m\ddot{x}_9 + k \left[(x_9 + x_{10}) + \left((l^2 + (x_9 - x_{11})^2)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_9 - x_{11})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_9 - x_{11}) - \right. \\
 & \quad \left. - \left((l^2 + (x_3 - x_9)^2)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_3 - x_9)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_3 - x_9) - \right. \\
 & \quad \left. - \left((l^2 + (l - x_9 - x_{12})^2)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (l - x_9 - x_{12})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (l - x_9 - x_{12}) \right] = \\
 & \quad = -\eta \left[(\dot{x}_9 + \dot{x}_{10}) + \frac{(x_9 - x_{11})^2 (\dot{x}_9 - \dot{x}_{11})}{l^2 + (x_9 - x_{11})^2} \right], \\
 & m\ddot{x}_{10} + k \left[(x_9 + x_{10}) + \left((l^2 + (x_{10} - x_{12})^2)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_{10} - x_{12})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_{10} - x_{12}) - \right. \\
 & \quad \left. - \left((l^2 + (x_4 - x_{10})^2)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_4 - x_{10})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_4 - x_{10}) - \right. \\
 & \quad \left. - \left((l^2 + (l - x_{10} - x_{11})^2)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (l - x_{10} - x_{11})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (l - x_{10} - x_{11}) + (x_{10} + x_{13}) \right] = \\
 & \quad = -\eta \left[(\dot{x}_9 + \dot{x}_{10}) + \frac{(x_{10} - x_{12})^2 (\dot{x}_{10} - \dot{x}_{12})}{l^2 + (x_{10} - x_{12})^2} \right], \tag{13} \\
 & m\ddot{x}_{11} + k \left[(x_{11} + x_{12}) - \left((l^2 + (x_9 - x_{11})^2)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_9 - x_{11})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_9 - x_{11}) - \right. \\
 & \quad \left. - \left((l^2 + (l - x_{10} - x_{11})^2)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (l - x_{10} - x_{11})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (l - x_{10} - x_{11}) \right] = \\
 & \quad = -\eta \left[(\dot{x}_{11} + \dot{x}_{12}) - \frac{(x_9 - x_{11})^2 (\dot{x}_9 - \dot{x}_{11})}{l^2 + (x_9 - x_{11})^2} \right], \\
 & m\ddot{x}_{12} + k \left[(x_{11} + x_{12}) - \left((l^2 + (x_{10} - x_{12})^2)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_{10} - x_{12})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_{10} - x_{12}) - \right. \\
 & \quad \left. - \left((l^2 + (l - x_9 - x_{12})^2)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (l - x_9 - x_{12})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (l - x_9 - x_{12}) + (x_{12} + x_{15}) \right] = \\
 & \quad = -\eta \left[(\dot{x}_{11} + \dot{x}_{12}) - \frac{(x_{10} - x_{12})^2 (\dot{x}_{10} - \dot{x}_{12})}{l^2 + (x_{10} - x_{12})^2} \right].
 \end{aligned}$$

The fourth part contains elements 13, 14, 15, 16 (fig. 5):

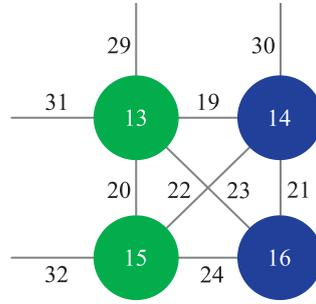


Fig. 5. The fourth part of model consisting of 16 elements

Equations (2) for the fourth part where $i = 13, 14, 15, 16$ are written explicitly (14) as follows:

$$\begin{aligned}
 & m\ddot{x}_{13} + k \left[(x_{13} + x_{14}) + \left((l^2 + (x_{13} - x_{15})^2)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_{13} - x_{15})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_{13} - x_{15}) - \right. \\
 & \quad \left. - \left((l^2 + (x_7 - x_{13})^2)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_7 - x_{13})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_7 - x_{13}) - \right. \\
 & \quad \left. - \left((l^2 + (l - x_{13} - x_{16})^2)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (l - x_{13} - x_{16})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (l - x_{13} - x_{16}) + (x_{10} + x_{13}) \right] = \\
 & \quad = -\eta \left(\dot{x}_{13} + \dot{x}_{14} + \frac{(x_{13} - x_{15})^2 (\dot{x}_{13} - \dot{x}_{15})}{l^2 + (x_{13} - x_{15})^2} \right), \\
 & m\ddot{x}_{14} + k \left[(x_{13} + x_{14}) + \left((l^2 + (x_{14} - x_{16})^2)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_{14} - x_{16})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_{14} - x_{16}) - \right. \\
 & \quad \left. - \left((l^2 + (x_8 - x_{14})^2)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_8 - x_{14})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_8 - x_{14}) - \right. \\
 & \quad \left. - \left((l^2 + (l - x_{14} - x_{15})^2)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (l - x_{14} - x_{15})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (l - x_{14} - x_{15}) \right] = \\
 & \quad = -\eta \left(\dot{x}_{13} + \dot{x}_{14} + \frac{(x_{14} - x_{16})^2 (\dot{x}_{14} - \dot{x}_{16})}{l^2 + (x_{14} - x_{16})^2} \right), \\
 & m\ddot{x}_{15} + k \left[(x_{15} + x_{16}) - \left((l^2 + (x_{13} - x_{15})^2)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_{13} - x_{15})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_{13} - x_{15}) - \right. \\
 & \quad \left. - \left((l^2 + (l - x_{14} - x_{15})^2)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (l - x_{14} - x_{15})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (l - x_{14} - x_{15}) + (x_{15} + x_{16}) \right] = \\
 & \quad = -\eta \left(\dot{x}_{15} + \dot{x}_{16} - \frac{(x_{13} - x_{15})^2 (\dot{x}_{13} - \dot{x}_{15})}{l^2 + (x_{13} - x_{15})^2} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}_{16} + k \left((x_{15} + x_{16}) - \left(l^2 + (x_{14} - x_{16})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_{14} - x_{16})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_{14} - x_{16}) - \\
 - \left(\left(l^2 + (l - x_{13} - x_{16})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (l - x_{13} - x_{16})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (l - x_{13} - x_{16}) = \\
 = -\eta \left((\dot{x}_{15} + \dot{x}_{16}) - \frac{(x_{14} - x_{16})^2 (\dot{x}_{14} - \dot{x}_{16})}{l^2 + (x_{14} - x_{16})^2} \right).
 \end{aligned} \tag{14}$$

In order to solve this set of differential equations about time, we choose the NDSolve method in computer software *Wolfram Mathematica* [13].

When computing NDSolve, there are usually three stages. Firstly, the given system of equations is converted into a function that represents the terms on the right-hand side of the system of equations in the normal form. Secondly, it is solved iteratively starting from the initial conditions. Thirdly, the data stored during the iterative process is processed into one or more InterpolatingFunction objects. Using the functions in NDSolve, one can have more control over the iterative process. These steps are tied together by an NDSolve StateData object, which can retain all the solved differentials.

In order to get a specific solution, we also need to enter the initial boundary conditions in the NDSolve code. So now we will consider various variants for different initial conditions for the introduced block model.

Under the initial displacement. The parameters and the initial conditions are

$$m = 2 \text{ kg}, l = 0.1 \text{ m}, k = 100 \text{ N/m}, c = 0.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}, t = 10 \text{ s}.$$

There is an initial displacement in the horizontal direction to any element which is shown below (fig. 6), and in this variant the value is $x_1 = 0.05 \text{ m}$.

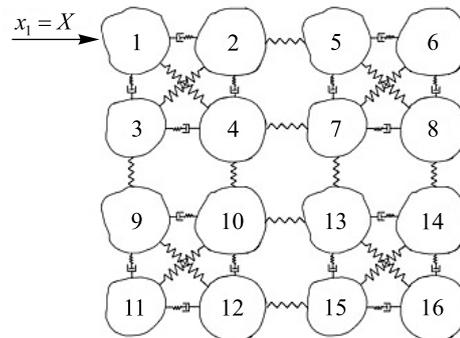


Fig. 6. The initial displacement

And the following pictures (fig. 7) show the motion of the system in the first 10 s under the initial displacement conditions.

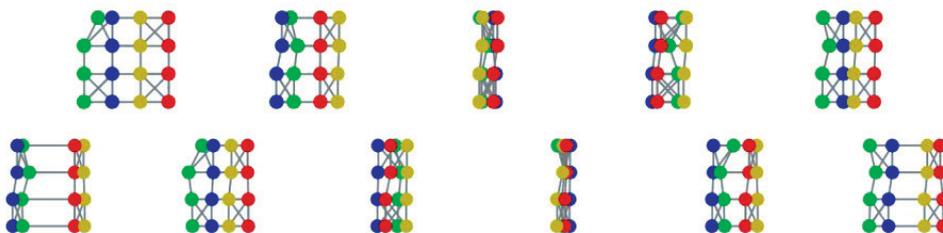


Fig. 7. The motion of model in 0–10 s under initial displacement

Under the initial velocity. The parameters and the initial conditions are

$$m = 2 \text{ kg}, l = 0.1 \text{ m}, k = 100 \text{ N/m}, c = 0.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}, t = 10 \text{ s}.$$

There is an initial velocity in the horizontal direction to any element which is shown below (fig. 8), and in this variant the value is $v_1 = 0.5 \text{ m/s}$.

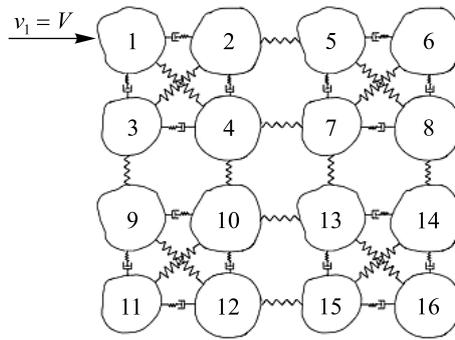


Fig. 8. The initial velocity

And the following pictures (fig. 9) show the motion of the system in the first 10 s under the initial velocity conditions.

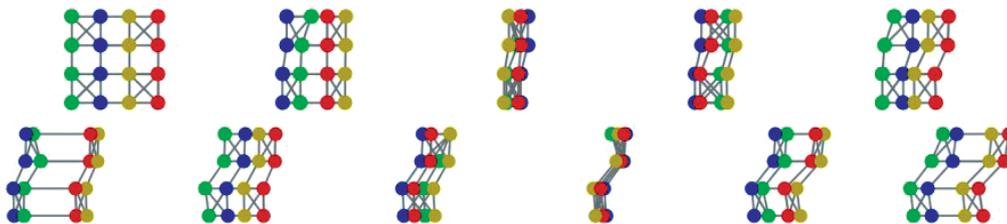


Fig. 9. The motion of model in 0–10 s under initial velocity

Under the initial impulse. The parameters and the initial conditions are

$$m = 2 \text{ kg}, l = 0.1 \text{ m}, k = 100 \text{ N/m}, c = 0.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}, t = 10 \text{ s}.$$

There is an initial impulse in the horizontal direction to any element which is shown below (fig. 10), and the initial impulse with the function (15) in this variant (fig. 11) is

$$F(t) = P \left(tH(t) - 2 \left(t - \frac{1}{2} \right) H \left(t - \frac{1}{2} \right) + (t-1)H(t-1) \right), \quad (15)$$

where H is the Heaviside function⁴.

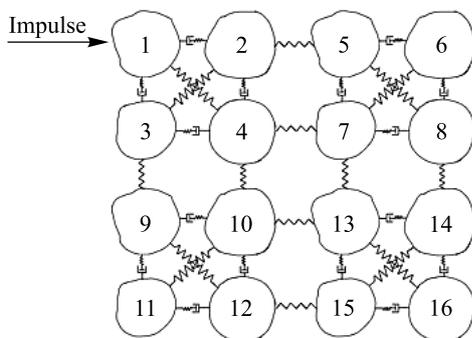


Fig. 10. The initial impulse

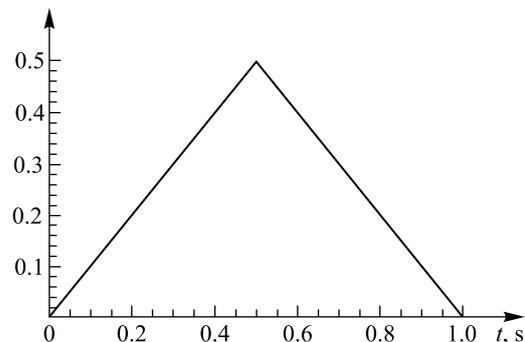


Fig. 11. Dynamic load in the form of a triangular impulse

The variant can be solved by using the momentum theorem written as formula (16):

$$F(t)\Delta t = m(v_1 - v_0). \quad (16)$$

And the initial velocity of system is 0, so compute the velocity (17) at $t = 1$ s:

$$v_1 = \frac{F(t)\Delta t + mv_0}{m} = \frac{\int_0^{t_1} F(\tau) d\tau}{m}. \quad (17)$$

⁴Evseev N. A. Elements of harmonic analysis. Novosibirsk : Novosibirsk State Univ., 2017. 97 p.

Then the same impulse condition is translated to the condition when $t = 1$ s, the velocity of the element 1 is v_1 . In this variant $v_{1(t=1)} = 0.125$ m/s. And the following picture (fig. 12) shows the motion of the system in the first 10 s under the initial impulse condition.

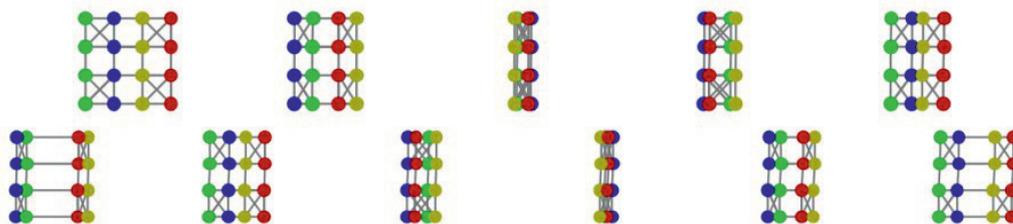


Fig. 12. The motion of model in 0–10 s under initial impulse

Under the different elastic coefficients. Different elastic coefficients will change the motion state of the model [14]. For the same initial conditions and parameters $m = 2$ kg, $l = 0.1$ m, $c = 0.5$ N · s/m, $t = 10$ s.

Let us study the difference between the elastic coefficient decreasing by 10 times ($k = 10$ N/m) and increasing by 10 times ($k = 1000$ N/m) under the same initial displacement conditions described in subdivision «Under the initial displacement» where $x_1 = 0.05$ m (fig. 13).

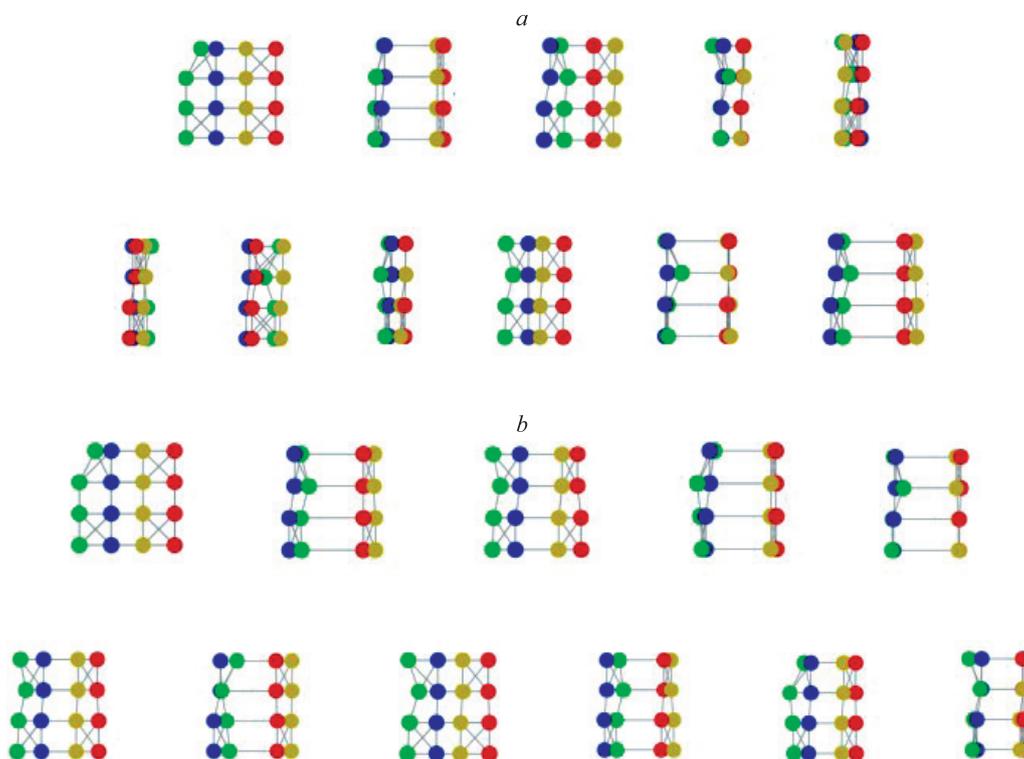


Fig. 13. The motion of the model in 0–10 s under the different elastic coefficients:
 $k = 10$ N/m (a); $k = 1000$ N/m (b)

Implementation of parallel computing in the *Wolfram Mathematica* system

The *Wolfram Mathematica's* computer algebra system is a very efficient means of calculation. Today the system contains about 5000 functions, many of which were originally written in an optimised form (especially for low-level calculations). Most computational functions in *Wolfram Mathematica*, such as dimensionality reduction operations, statistical data processing, processing images and other are widely used. However, there is a set of tools (such as `ParallelSum`, `Parallelise`, `ParallelMap`, `ParallelTable`, `ParallelArray`, `ParallelCombine`, etc.) that can significantly speed up code calculations when implementing multi-threaded tasks [15].

Let us take the previous task as an example. We used `NDSolve` for sequential calculation before. The calculation rule is time iteration, and the `AbsoluteTiming` function outputs the final calculation result in seconds.

The calculation time is as follows. Of course, it should be emphasised that all computer calculations in this paper were performed based on the following configuration: Intel(R) Core(TM) i5-9300-H CPU/NVIDIA GeForce GTX 1650. The absolute time of the sequential calculation for the code is $T_1 = 0.988\,049$ s.

Parallel computing refers to the process of using multiple computing resources to solve computing problems at the same time. It is an effective means to improve the computing speed and processing the power of computer systems [16]. Its basic idea is to use multiple processors to collaboratively solve the same problem, that is, to decompose the problem to be solved into several parts, and each part is calculated in parallel by an independent processor. A parallel computing system can be either a specially designed supercomputer containing multiple processors or a cluster of several independent computers interconnected in some way. Data processing is completed through parallel computing clusters, and the processing results are returned to the user.

Different from NDSolve, ParallelEvaluate performs parallel calculations on differential equations, which greatly shortens the calculation time while achieving the same calculation purpose.

Under the same configuration environment, the absolute time of parallel calculation is $T_p = 0.176\,067$ s.

In order to measure the effect of parallel computing, we introduce two parameters: acceleration and efficiency.

The formula of acceleration (18) is

$$S_p = \frac{T_1}{T_p}, \quad (18)$$

where p refers to the number of central processing units, which in the paper is $p = 2$; T_1 refers to the execution time of the sequential execution algorithm; T_p refers to the execution time of a parallel algorithm when there are p processors.

The formula of efficiency (19) is

$$E_p = \frac{S_p}{p}. \quad (19)$$

When $S_p = p$, it can be called linear acceleration. When the acceleration ratio of a certain parallel algorithm is an ideal acceleration ratio, if the number of processors is doubled, the execution speed will also be doubled, that is, as ideal means, it has excellent scalability [17].

The value of efficiency E_p is generally between 0 and 1, and it is used to indicate how fully the processors involved in calculations are fully utilised when solving problems compared to the cost of communication and synchronisation. It is easy to see from the definition that the efficiency of an algorithm with a linear speedup and an algorithm executed on a single processor is 1.

Now let us calculate the computational efficiency and acceleration of different operation methods (table 1).

Table 1

Acceleration and efficiency of different computing solution

Time, T		Acceleration, $S_p = \frac{T_1}{T_p}$	Efficiency, $E_p = \frac{S_p}{p}$
Sequential calculation	Parallel calculation		
0.988 049	0.176 067	5.611 778	2.805 889

From the results in the last table, it is clear that $E_p > 1$, that is we obtain superlinear acceleration. In the process of parallel computing, sometimes there is a situation where the acceleration ratio is larger than the number of processors. The acceleration ratio obtained in this case is called a superlinear acceleration ratio [18].

The superlinear acceleration ratio has the following causes, such as the «cache effect» caused by the different storage levels of modern computers; specifically, compared with sequential computing, in parallel computing, not only are there more processors involved in calculations, caches from different processors are also pooled. In view of this, the cache of the collection is sufficient to provide the storage required for calculations. There is no need to use slower memory when executing the algorithm. Therefore, the memory reading time can be greatly reduced, what creates an additional acceleration effect for actual calculations.

Construction of models with order n

We have calculated and verified the motion status of 16 elements. Now when the number of elements increases exponentially to k (fig. 14), in another words it means we have the number of amount (20):

$$k = 4^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (20)$$

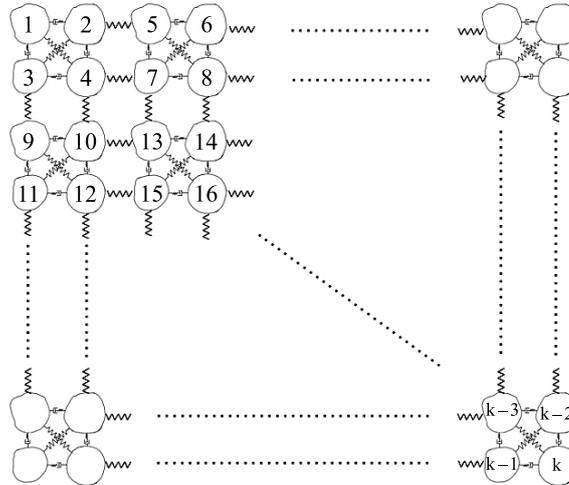


Fig. 14. The number of elements reaches to k

Using the second Lagrangian equation the kinetic energy (21) of the system is

$$T = \sum_{i=1}^k T_i = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \dots + \frac{1}{2} m \dot{x}_k^2. \quad (21)$$

With the potential energy of the system, the equation of motion of the entire system can be calculated by the formula (22):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = - \frac{\partial G}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, k}. \quad (22)$$

When the number of elements reaches k, we focus on two types of elements. The first type is the four elements in the corners, and the second type is the four elements in the center of the entire model.

In order, we first study the motion equations (table 2) of the four elements in the corners (fig. 15).

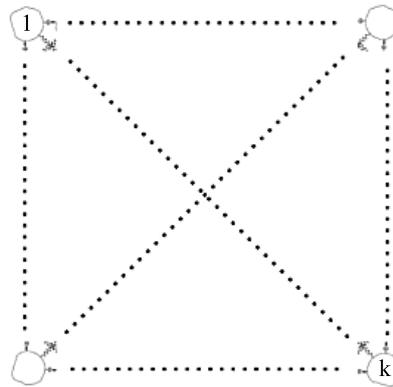


Fig. 15. The four elements in the corners

Table 2

Equation of motion for four elements in the corners

Location	The number of element	Equation of motion
Upper left corner	t = 1	$m \ddot{x}_1 + k \left[(x_1 + x_2) + \left((l^2 + (x_1 - x_3)^2)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left((l^2 + (x_1 - x_3)^2)^{\frac{1}{2}} (x_1 - x_3) - \right. \right.$ $\left. \left. - \left((l^2 + (l - x_1 - x_4)^2)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left((l^2 + (l - x_1 - x_4)^2)^{\frac{1}{2}} (l - x_1 - x_4) \right) \right] =$ $= -\eta \left(\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \frac{(x_1 - x_3)^2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_3)}{l^2 + (x_1 - x_3)^2} \right)$

Ending of the table 2

Location	The number of element	Equation of motion
Upper right corner	$t = \frac{4}{3}(4^{n-1} - 1) + 2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)	$m\ddot{x}_t + k \left((x_{t-1} + x_t) + \left(l^2 + (x_t - x_{t+2})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_t - x_{t+2})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_t - x_{t+2}) -$ $- \left(\left(l^2 + (l - x_t - x_{t+1})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (l - x_t - x_{t+1})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (l - x_t - x_{t+1}) \right) =$ $= -\eta \left(\dot{x}_{t-1} + \dot{x}_t + \frac{(x_t - x_{t+2})^2 (\dot{x}_t - \dot{x}_{t+2})}{l^2 + (x_t - x_{t+2})^2} \right)$
Lower left corner	$t = \frac{8}{3}(4^{n-1} - 1) + 3$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)	$m\ddot{x}_t + k \left((x_t + x_{t+1}) - \left(l^2 + (x_{t-2} - x_t)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_{t-2} - x_t)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_{t-2} - x_t) -$ $- \left(\left(l^2 + (l - x_{t-1} - x_t)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (l - x_{t-1} - x_t)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (l - x_{t-1} - x_t) \right) =$ $= -\eta \left(\dot{x}_t + \dot{x}_{t+1} - \frac{(x_{t-2} - x_t)^2 (\dot{x}_{t-2} - \dot{x}_t)}{l^2 + (x_{t-2} - x_t)^2} \right)$
Lower right corner	$t = 4^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)	$m\ddot{x}_t + k \left((x_{t-1} + x_t) - \left(l^2 + (x_{t-2} - x_t)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_{t-2} - x_t)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_{t-2} - x_t) -$ $- \left(\left(l^2 + (l - x_{t-3} - x_t)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (l - x_{t-3} - x_t)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (l - x_{t-3} - x_t) \right) =$ $= -\eta \left(\dot{x}_{t-1} + \dot{x}_t - \frac{(x_{t-2} - x_t)^2 (\dot{x}_{t-2} - \dot{x}_t)}{l^2 + (x_{t-2} - x_t)^2} \right)$

Then we study the motion equations (table 3) of the four elements in the center of the system which are shown in fig. 16.

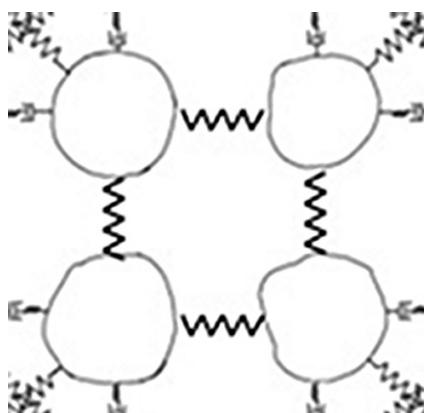


Fig. 16. The four elements in the center

Table 3

Equation of motion for four elements in the center

Location	The number of element	Equation of motion
Upper left	$t = 4^n - 1$ ($n = 2, 3, 4, \dots$)	$m\ddot{x}_t + k \left((x_{t-1} + x_t) - \left(l^2 + (x_{t-2} - x_t)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_{t-2} - x_t)^2 \right)^{\frac{1}{2}} (x_{t-2} - x_t) -$ $- \left(l^2 + (l - x_{t-3} - x_t)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \left(l^2 + (l - x_{t-3} - x_t)^2 \right)^{\frac{1}{2}} (l - x_{t-3} - x_t) \Big) =$ $= -\eta \left(\dot{x}_{t-1} + \dot{x}_t - \frac{(x_{t-2} - x_t)^2 (\dot{x}_{t-2} - \dot{x}_t)}{l^2 + (x_{t-2} - x_t)^2} \right)$
Upper right	$t = \frac{20}{3}(4^{n-2} - 1) + 7$ ($n = 2, 3, 4, \dots$)	$m\ddot{x}_t + k \left((x_t + x_{t+1}) - \left(l^2 + (x_{t-2} - x_t)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_{t-2} - x_t)^2 \right)^{\frac{1}{2}} (x_{t-2} - x_t) +$ $+ \left(l^2 + \left(x_t - x_{\frac{9t}{5} + \frac{2}{5}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \left(l^2 + \left(x_t - x_{\frac{9t}{5} + \frac{2}{5}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(x_t - x_{\frac{9t}{5} + \frac{2}{5}} \right) -$ $- \left(l^2 + (l - x_{t-1} - x_t)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \left(l^2 + (l - x_{t-1} - x_t)^2 \right)^{\frac{1}{2}} (l - x_{t-1} - x_t) +$ $+ \left(x_{\frac{3t}{5} - \frac{1}{5}} + x_t \right) \Big) = -\eta \left(\dot{x}_t + \dot{x}_{t+1} - \frac{(x_{t-2} - x_t)^2 (\dot{x}_{t-2} - \dot{x}_t)}{l^2 + (x_{t-2} - x_t)^2} \right)$
Lower left	$t = \frac{28}{3}(4^{n-2} - 1) + 10$ ($n = 2, 3, 4, \dots$)	$m\ddot{x}_t + k \left((x_{t-1} + x_t) + \left(l^2 + (x_t - x_{t+2})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_t - x_{t+2})^2 \right)^{\frac{1}{2}} (x_t - x_{t+2}) -$ $- \left(l^2 + \left(x_{\frac{3t}{7} - \frac{2}{7}} - x_t \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \left(l^2 + \left(x_{\frac{3t}{7} - \frac{2}{7}} - x_t \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(x_{\frac{3t}{7} - \frac{2}{7}} - x_t \right) -$ $- \left(l^2 + (l - x_t - x_{t+1})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \left(l^2 + (l - x_t - x_{t+1})^2 \right)^{\frac{1}{2}} (l - x_t - x_{t+1}) +$ $+ \left(x_t + x_{\frac{9t}{7} + \frac{1}{7}} \right) \Big) = -\eta \left(\dot{x}_{t-1} + \dot{x}_t + \frac{(x_t - x_{t+2})^2 (\dot{x}_t - \dot{x}_{t+2})}{l^2 + (x_t - x_{t+2})^2} \right)$

Ending of the table 3

Location	The number of element	Equation of motion
Lower right	$t = \frac{8}{3}(4^{n-1} - 1) + 3$ $(n = 2, 3, 4, \dots)$	$m\ddot{x}_t + k \left((x_{t-1} + x_t) + \left(l^2 + (x_t - x_{t+2})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_t - x_{t+2})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_t - x_{t+2}) -$ $- \left(\left(l^2 + \left(x_{\frac{5}{9}t - \frac{2}{9}} - x_t \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + \left(x_{\frac{5}{9}t - \frac{2}{9}} - x_t \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \left(x_{\frac{5}{9}t - \frac{2}{9}} - x_t \right) -$ $- \left(\left(l^2 + (l - x_t - x_{t+3})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (l - x_t - x_{t+3})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (l - x_t - x_{t+3}) +$ $+ \left(x_{\frac{7}{9}t - \frac{1}{9}} + x_t \right) = -\eta \left(\dot{x}_t + \dot{x}_{t+1} + \frac{(x_t - x_{t+2})^2 (\dot{x}_t - \dot{x}_{t+2})}{l^2 + (x_t - x_{t+2})^2} \right)$

Simulation when system consists of 64 elements. We have studied the situation when there are 4 ($n = 1$) and 16 ($n = 2$) elements. Now we calculate and verify the motion state of the system when $n = 3, 4, 5$, and simulate the four elements in the center of the system.

When $n = 3$, then the total number of amount is $k = 64$ (fig. 17).

In order, we calculate the Lagrangian equations of motion for the four elements in the center (fig. 18, table 4).

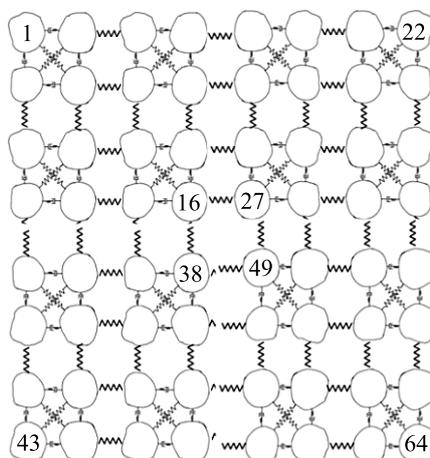


Fig. 17. The system when $n = 3$

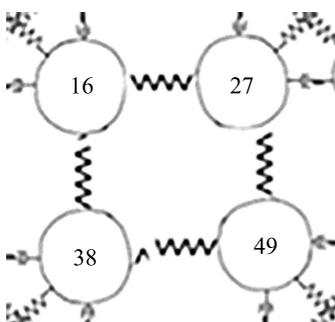


Fig. 18. The four elements in the center of the system when there are totally 64 elements

Table 4

Equation of motion for four elements in the center when $n = 3$

Location	The number of element	Equation of motion
Upper left	$t = 16$	$m\ddot{x}_{16} + k \left((x_{15} + x_{16}) - \left(l^2 + (x_{14} - x_{16})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_{14} - x_{16})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_{14} - x_{16}) -$ $- \left(l^2 + (l - x_{13} - x_{16})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \left(l^2 + (l - x_{13} - x_{16})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (l - x_{13} - x_{16}) \Big) =$ $= -\eta \left(\dot{x}_{15} + \dot{x}_{16} - \frac{(x_{14} - x_{16})^2 (\dot{x}_{14} - \dot{x}_{16})}{l^2 + (x_{14} - x_{16})^2} \right)$
Upper right	$t = 27$	$m\ddot{x}_{27} + k \left((x_{27} + x_{28}) - \left(l^2 + (x_{25} - x_{27})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_{25} - x_{27})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_{25} - x_{27}) +$ $+ \left(l^2 + (x_{27} - x_{49})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \left(l^2 + (x_{27} - x_{49})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_{27} - x_{49}) -$ $- \left(l^2 + (l - x_{26} - x_{27})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \left(l^2 + (l - x_{26} - x_{27})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (l - x_{26} - x_{27}) + (x_{16} + x_{27}) \Big) =$ $= -\eta \left(\dot{x}_{27} + \dot{x}_{28} - \frac{(x_{25} - x_{27})^2 (\dot{x}_{25} - \dot{x}_{27})}{l^2 + (x_{25} - x_{27})^2} \right)$
Lower left	$t = 38$	$m\ddot{x}_{38} + k \left((x_{37} + x_{38}) + \left(l^2 + (x_{38} - x_{40})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_{38} - x_{40})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_{38} - x_{40}) -$ $- \left(l^2 + (x_{16} - x_{38})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \left(l^2 + (x_{16} - x_{38})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_{16} - x_{38}) -$ $- \left(l^2 + (l - x_{38} - x_{39})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \left(l^2 + (l - x_{38} - x_{39})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (l - x_{38} - x_{39}) + (x_{38} + x_{49}) \Big) =$ $= -\eta \left(\dot{x}_{37} + \dot{x}_{38} + \frac{(x_{38} - x_{40})^2 (\dot{x}_{38} - \dot{x}_{40})}{l^2 + (x_{38} - x_{40})^2} \right)$
Lower right	$t = 49$	$m\ddot{x}_{49} + k \left((x_{49} + x_{50}) + \left(l^2 + (x_{49} - x_{51})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \left(l^2 + (x_{49} - x_{51})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_{49} - x_{51}) -$ $- \left(l^2 + (x_{27} - x_{49})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \left(l^2 + (x_{27} - x_{49})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (x_{27} - x_{49}) -$ $- \left(l^2 + (l - x_{49} - x_{52})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \left(l^2 + (l - x_{49} - x_{52})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (l - x_{49} - x_{52}) + (x_{38} + x_{49}) \Big) =$ $= -\eta \left(\dot{x}_{49} + \dot{x}_{50} + \frac{(x_{49} - x_{51})^2 (\dot{x}_{49} - \dot{x}_{51})}{l^2 + (x_{49} - x_{51})^2} \right)$

Then we simulate the motion image of the four elements in the center of the system. The initial boundary conditions are displacement, velocity and impulse as in the previous task.

Initial condition (displacement). For the variant where the initial condition is displacement, we reduce the displacement from 0.5 to 0.05 m and finally reduce it to 0.005 m, in order to study the difference in the motion of the model (table 5).

Table 5

The movement of the four elements in the center under different initial displacement with total of 64 elements

The parameters and the initial conditions are $m = 2 \text{ kg}, l = 0.1 \text{ m}, k = 100 \text{ N/m}, c = 0.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}, t = 10 \text{ s}, x_1 = 0.5 \text{ m}$										
$t = 0 \text{ s}$	$t = 1 \text{ s}$	$t = 2 \text{ s}$	$t = 3 \text{ s}$	$t = 4 \text{ s}$	$t = 5 \text{ s}$	$t = 6 \text{ s}$	$t = 7 \text{ s}$	$t = 8 \text{ s}$	$t = 9 \text{ s}$	$t = 10 \text{ s}$
The parameters and the initial conditions are $m = 2 \text{ kg}, l = 0.1 \text{ m}, k = 100 \text{ N/m}, c = 0.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}, t = 10 \text{ s}, x_1 = 0.05 \text{ m}$										
$t = 0 \text{ s}$	$t = 1 \text{ s}$	$t = 2 \text{ s}$	$t = 3 \text{ s}$	$t = 4 \text{ s}$	$t = 5 \text{ s}$	$t = 6 \text{ s}$	$t = 7 \text{ s}$	$t = 8 \text{ s}$	$t = 9 \text{ s}$	$t = 10 \text{ s}$
The parameters and the initial conditions are $m = 2 \text{ kg}, l = 0.1 \text{ m}, k = 100 \text{ N/m}, c = 0.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}, t = 10 \text{ s}, x_1 = 0.005 \text{ m}$										
$t = 0 \text{ s}$	$t = 1 \text{ s}$	$t = 2 \text{ s}$	$t = 3 \text{ s}$	$t = 4 \text{ s}$	$t = 5 \text{ s}$	$t = 6 \text{ s}$	$t = 7 \text{ s}$	$t = 8 \text{ s}$	$t = 9 \text{ s}$	$t = 10 \text{ s}$

Initial condition (velocity). The parameters and the initial conditions are

$$m = 2 \text{ kg}, l = 0.1 \text{ m}, k = 100 \text{ N/m}, c = 0.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}, t = 10 \text{ s}.$$

There is an initial velocity in the horizontal direction to any element which is shown in fig. 19, and in this variant the initial velocity is $v_1 = 0.5 \text{ m/s}$.

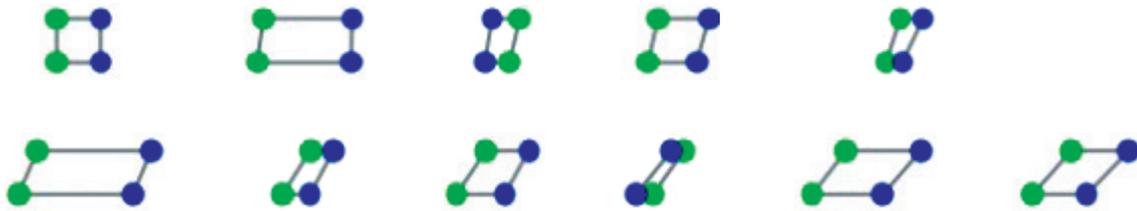


Fig. 19. The movement of the four elements in the center under the initial velocity with total of 64 elements

Initial condition (impulse). The parameters and the initial conditions are

$$m = 2 \text{ kg}, l = 0.1 \text{ m}, k = 100 \text{ N/m}, c = 0.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}, t = 10 \text{ s}.$$

There is an initial impulse in the horizontal direction to any element which is shown in fig. 20, and in this variant the initial impulse with the function is the same as in the previous study.

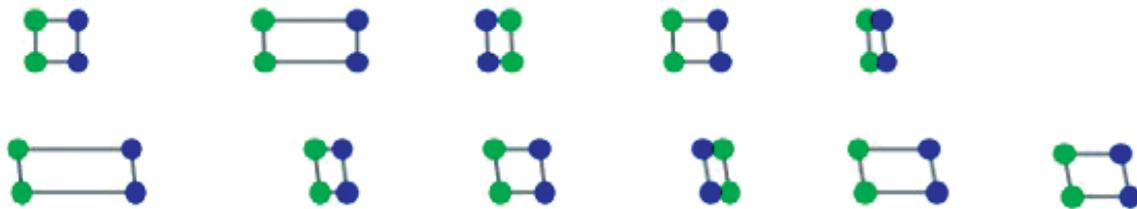


Fig. 20. The movement of the four elements in the center under initial impulse with total of 64 elements

Simulation when the system consists of 256 elements. When $n = 4$, then the number of amount is $k = 256$ (fig. 21).

As what we did in the previous study then we also simulate the motion image of the four elements in the center of the system (fig. 22). The initial boundary conditions are displacement, velocity and impulse as in the previous task (table 6).

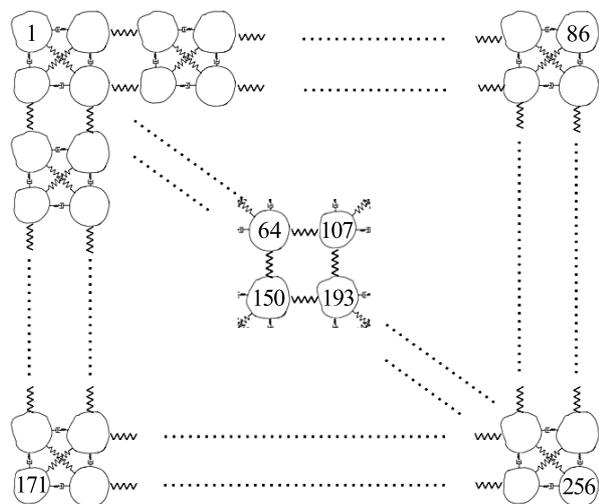


Fig. 21. The system when $n = 4$

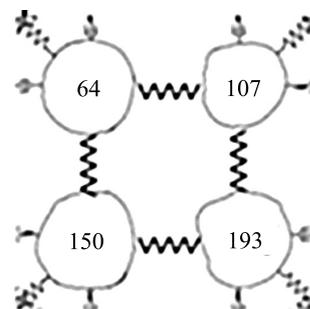


Fig. 22. The four elements in the center of the system when there are totally 256 elements

Table 6

The simulation of four elements in the center of the system which contains 256 elements under the different initial conditions

<p>Initial condition (displacement): $m = 2 \text{ kg}, l = 0.1 \text{ m}, k = 100 \text{ N/m}, c = 0.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}, t = 10 \text{ s}, x_1 = 0.5 \text{ m}$</p>					
<p>Initial condition (velocity): $m = 2 \text{ kg}, l = 0.1 \text{ m}, k = 100 \text{ N/m}, c = 0.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}, t = 10 \text{ s}, v_1 = 0.5 \text{ m/s}$</p>					
<p>Initial condition (impulse): $m = 2 \text{ kg}, l = 0.1 \text{ m}, k = 100 \text{ N/m}, c = 0.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}, t = 10 \text{ s},$ the impulse is the same as previous task</p>					

Simulation when the system consists of 256 elements. When $n = 5$, then the number of amount is $k = 1024$ (fig. 23).

We already study the situation when $n = 3$ and $n = 4$. As what we did in the previous study then we also simulate the motion image of the four elements in the center of the system (fig. 24). The initial boundary conditions are displacement, velocity and impulse as in the previous task (table 7).

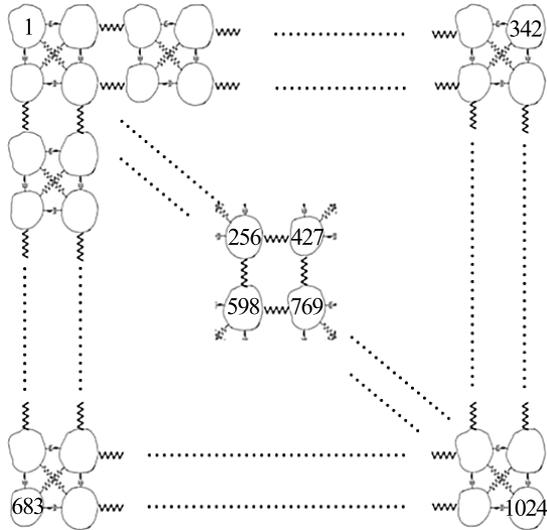


Fig. 23. The system when $n = 5$

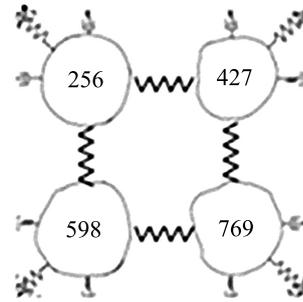


Fig. 24. The four elements in the center of the system when there are totally 1024 elements

Table 7

The simulation of four elements in the center of system which contains 1024 elements under the different initial conditions

Initial condition (displacement): $m = 2 \text{ kg}, l = 0.1 \text{ m}, k = 100 \text{ N/m}, c = 0.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}, t = 10 \text{ s}, x_1 = 0.5 \text{ m}$	
Initial condition (velocity): $m = 2 \text{ kg}, l = 0.1 \text{ m}, k = 100 \text{ N/m}, c = 0.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}, t = 10 \text{ s}, v_1 = 0.5 \text{ m/s}$	
Initial condition (impulse): $m = 2 \text{ kg}, l = 0.1 \text{ m}, k = 100 \text{ N/m}, c = 0.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}, t = 10 \text{ s},$ the impulse is the same as in the previous task	

Conclusions

This article introduces the application of numerical simulation methods in geomechanical engineering problems, relevant principles and lists specific situations under different boundary conditions. Finally, it points out the development directions and problems that still exist in current numerical simulation experiments. The research proposes a block element that can take into account its deformation capability under external loads. Based on this type of block element, it seems promising to simulate the SSS of the rock mass region through the discrete element method, since considering the rock mass region within the framework of the continuum model is a rather «rough» approximation assumption. Another important fact is that the introduced block elements can be used to study problems under static as well as dynamic loads.

For real geological and rock soil mechanics problems, the solution proposed in this article can be used as a basic model construction method. In order to further improve the accuracy and practicality of the solution, this can be achieved by changing the structure and size of the block units, as well as the density and connection methods of various link keys between units. Developing codes that compute faster and more accurate models is a direction for future research. With the increasing scale of geomechanical engineering, our requirements for the level of scientific research and the accuracy of solutions in engineering construction are getting higher and higher. That is the reason numerical simulation methods have become an effective solution. Numerical simulation is of great significance for understanding the SSS and movement change of rock and soil blocks in geomechanical engineering. It can also provide theoretical basis for actual engineering and play a role in safety protection.

References

1. Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, Fleming M, Krysl P. Meshless methods: an overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1996;139(1–4):3–47. DOI: 10.1016/S0045-7825(96)01078-X.
2. Li SH, Zhao MH, Wang YN, Wang JG. A continuum-based discrete element method for continuous deformation and failure process. In: Forschungsbereich Struktursimulation und Ingenieurholzbau. *6th World Congress on Computational Mechanics (WCCM VI) in conjunction with the 2nd Asian-Pacific Congress on Computational Mechanics (APCOM'04); 2004 September 5–10; Beijing, China*. Beijing: Tsinghua University Press; 2004. 5 p.
3. Ariffin AK, Huzni S, Nor MJM, Mohamed NAK. Hybrid finite-discrete element simulation of crack propagation under mixed mode loading condition. *Key Engineering Materials*. 2006;306–308:495–500. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.306-308.495.
4. Karami A, Stead D. Asperity degradation and damage in the direct shear test: a hybrid FEM/DEM approach. *Rock Mechanics and Rock Engineering*. 2008;41(2):229–266. DOI: 10.1007/s00603-007-0139-6.
5. Morris JP, Rubin MB, Block GI, Bonner MP. Simulations of fracture and fragmentation of geologic materials using combined FEM/DEM analysis. *International Journal of Impact Engineering*. 2006;33(1–12):463–473. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2006.09.006.
6. Zhurkina DS, Klishin SV, Lavrikov SV, Leonov MG. DEM-based modeling of shear localization and transition of geomedium to unstable deformation. *Fiziko-tehnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh*. 2022;3:13–22. Russian. DOI: 10.15372/FTPRI20220302.
7. Jiang M, Yu H-S. Application of discrete element method to geomechanics. In: Wu W, Yu H-S, editors. *Modern trends in geomechanics*. Berlin: Springer; 2006. p. 241–269 (Springer proceedings in physics; volume 106).
8. Chigarev AV, Botogova MG, Mikhasev GI. Propagation of a surface wave near a randomly rough surface. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2023;1:38–48. Russian.
9. Chanyshev AI, Abdulin IM. New formulations of geomechanical problems with regard to post-limit deformation of rocks. *Fiziko-tehnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh*. 2022;5:12–27. DOI: 10.15372/FTPRI20220502.
10. Zhuravkov M, Shunying J, Kanavalau A. Modeling of deformation processes in rock massif in the vicinity of underground goafs considering the formation of discontinuity zones. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*. 2020;10(2):92–97. DOI: 10.1016/j.taml.2020.01.012.
11. Shi G-H. *Discontinuous deformation analysis: a new numerical model for the statics and dynamics of block systems* [dissertation]. Berkeley: University of California; 1988. 378 p.
12. Zhuravkov MA, Starovoitov EI. *Matematicheskie modeli mekhaniki tverdykh tel* [Mathematical models of solid state mechanics]. Minsk: Belarusian State University; 2021. 535 p. Russian.
13. Boyce WE, DiPrima RC. *Elementary differential equations and boundary value problems*. New York: John Wiley and Sons; 1995. 485 p.
14. Sansour C, Skatulla S. A strain gradient generalized continuum approach for modelling elastic scale effects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2009;198(15–16):1401–1412. DOI: 10.1016/j.cma.2008.12.031.
15. Stewart J. *Calculus*. 3rd edition. Pacific Grove: Brooks Cole; 1995. 112 p.
16. Aggarwal A, Chazelle B, Guibas L, O'Dunlaing C, Yap C. Parallel computational geometry. *Algorithmica*. 1988;3(3):293–327.
17. Atallah MJ, Goodrich MT. Efficient parallel solutions to some geometric problems. *Journal of Parallel and Distributed Computing*. 1986;3(4):492–507. DOI: 10.1016/0743-7315(86)90011-0.
18. Kumar V, Grama A, Gupta A, Karypis G. *Introduction to parallel computing: design and analysis of algorithms*. Redwood City: Benjamin Cummings; 1994. 600 p.

Received 30.05.2024 / revised 22.10.2024 / accepted 22.10.2024.

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ И МЕЖМОЛЕКУЛЯРНЫХ СИЛ НА СВОБОДНЫЕ МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МИКРОКОНСОЛИ

Г. И. МИХАСЕВ¹⁾, В. В. МИСНИК²⁾, М. Г. БОТОГОВА³⁾

¹⁾Харбинский политехнический университет,
ул. Вест Дажу, 92, 150001, г. Харбин, Китай

²⁾Пеленг, ул. Макаенка, 25, 220114, г. Минск, Беларусь

³⁾Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Рассматриваются свободные малые колебания микроконсоли вблизи деформированного статического положения с учетом межмолекулярных и электростатических сил, действующих со стороны неподвижного электрода. На первом этапе с применением подхода, основанного на аппроксимации результирующих боковых сил линейными или параболическими функциями аксиальной координаты, определяется начальное статическое отклонение консоли, обусловленное действием внешних сил, при этом начальное отклонение оценивается при значениях напряжения и межмолекулярных сил, меньших критических значений. Для изучения свободных малых колебаний изначально деформированной консоли линеаризуется нелинейное дифференциальное уравнение в окрестности деформированного статического положения. Полученное определяющее уравнение с переменными коэффициентами решается с использованием как асимптотического подхода, так и метода Рунге – Кутты. Проанализировано влияние приложенного напряжения и межмолекулярных сил, включая силы Ван-дер-Ваальса и Казимира.

Ключевые слова: микроконсоль; электростатические силы; межмолекулярные силы; свободные малые колебания.

Благодарность. Исследование выполнено при финансовой поддержке Харбинского политехнического университета (грант № AUGA5710012624) и в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (задание 1.7.01.2).

Образец цитирования:

Михасев ГИ, Мисник ВВ, Ботогова МГ. Влияние электростатических и межмолекулярных сил на свободные малые колебания микроконсоли. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024; 3:62–72 (на англ.).
EDN: OHFGGI

For citation:

Mikhasev GI, Misnik VV, Botogova MG. Effect of electrostatic and intermolecular forces on free small vibrations of a micro-cantilever. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;3:62–72.
EDN: OHFGGI

Авторы:

Геннадий Иванович Михасев – доктор физико-математических наук; профессор кафедры астронавтики и механики школы астронавтики.

Вячеслав Владимирович Мисник – инженер-исследователь космического отделения научно-конструкторского управления «Космос».

Марина Георгиевна Ботогова – кандидат физико-математических наук; заведующий кафедрой био- и наномеханики механико-математического факультета.

Authors:

Gennadi I. Mikhasev, doctor of science (physics and mathematics); professor at the department of astronautical science and mechanics, school of astronautics.

mikhasev@hit.edu.cn

<https://orcid.org/0000-0002-9409-9210>

Vyacheslav V. Misnik, research and development engineer at the space division of the scientific design department «Cosmos».

slava.misnik@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0001-7519-3343>

Marina G. Botogova, PhD (physics and mathematics); head of the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.

batahova@bsu.by

<https://orcid.org/0000-0002-4839-450X>

EFFECT OF ELECTROSTATIC AND INTERMOLECULAR FORCES ON FREE SMALL VIBRATIONS OF A MICRO-CANTILEVER

G. I. MIKHASEV^a, V. V. MISNIK^b, M. G. BOTOGOVA^c

^aHarbin Institute of Technology, 92 West Dazhi Street, Harbin 150001, China

^bPeleng, 25 Makajonka Street, Minsk 220114, Belarus

^cBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: G. I. Mikhasev (mikhasev@hit.edu.cn)

Abstract. The paper deals with free small vibrations of a micro-cantilever near the deformed static position incorporating the electrostatic and intermolecular forces acting from the fixed electrode. First, the initial static deviation of the cantilever due to the external forces is determined using the approach based on the approximation of the resultant lateral forces by the linear or parabolic functions of the axial coordinate, the initial deflection being evaluated under the values of voltage and intermolecular forces less than the critical ones. To study free small vibrations of the initially deformed cantilever, we linearise the nonlinear differential equation in the neighbourhood of the deformed static position. The derived governing equation with variable coefficients is solved using both the asymptotic approach and the Runge – Kutta method. The effect of the applied voltage and the intermolecular forces, including the van der Waals and Casimir ones, is analysed.

Keywords: micro-cantilever; electrostatic forces; intermolecular forces; free small vibrations.

Acknowledgements. The research was carried out with the financial support of the Harbin Institute of Technology (grant No. AUGA5710012624) and within the framework of the state programme of scientific research «Convergence-2025» (assignment 1.7.01.2).

Introduction

Over the past fifteen years, a large number of papers devoted to studying the phenomenon of pull-in instability and vibrations of electrostatically actuated micro- and nano-beams was published. A detailed analysis of these contributions can be found in the review article [1]. The increased attention to this topic is explained, firstly, by the widespread use of low-dimensional electrically actuated beams as sensing elements in various kinds of micro- and nano-electromechanical systems (MEMS/NEMS), such as micro- and nano-sized sensors and actuators, switches and tweezers and in other nanotube-based devices. The second reason that again and again attracts researchers to this topic is the extreme complexity of the mathematical models governing the mechanical behaviour of low-dimensional beams taking into account the electromechanical and intermolecular forces. The incorporation of the van der Waals (vdW) and Casimir forces into a model leads to a high degree of nonlinearity, which increases when size effects are taken into account. We do not discuss here the problem of capturing the size effects [2] as it was done, for example, in [3; 4], but we focus on free vibrations of a micro-sized cantilever near the deformed static position which is due to the intermolecular and electrostatic forces acting from a fixed electrode (fig. 1).

If a gap between the fixed electrode and electrostatically actuated micro-cantilever is very small, then even if the electrostatic force is absent, the movable electrode is attracted towards the fixed one due to the intermolecular forces. Thus, the initially the micro-cantilever is always pre-strained, and the initial static deformation becoming larger under an applied voltage. If suddenly applied voltage turns out to be less than the critical pull-in voltage, at which the electrical circuit is closed, then the movable cantilever electrode begins vibrating around the initial static deformed position. And vice versa, when the voltage is turned off, the movable electrode, before returning to its original position, makes oscillatory movements around this final position. In other words, any sudden change in the electrical voltage leads to deformation of the micro-cantilever, which may be accompanied by unwanted vibrations and unintended circuit closure. To predict the dynamics of a cantilever as a micro-switch element, it is crucial studying its eigenmodes and corresponding eigenfrequencies, taking into account the intermolecular forces acting on it.

Due to the strong nonlinearity, the dynamic response of electrically actuated micro- or nano-sized beams is as a rule predicted using different semi-analytical approaches and numerical methods, which are usually associated with some computational difficulties. Moreover, in some cases, if the problem is formulated incorrectly, they can lead to solutions that ignore the initial deviation caused by intermolecular forces. For example, in [5–7] zero displacements and velocities for beams were taken as the initial conditions, which in fact lead to a solution that describes oscillations in the vicinity of the undeformed state of a micro- or nano-beam.

In our opinion, an alternative approach taking into account above mentioned issues could be an approach based on splitting the stress-strain state of the beam into a static deformed state and the dynamic state corresponding to the beam vibrations near the deformed static position. This approach has been utilised by K. F. Wang and his colleagues [8] to study large amplitude free vibrations of electrically actuated clamped-clamped nano-beams. In the mentioned paper, the nonlinear dynamic response of the nano-beam under the Casimir forces was analysed considering various complicating factors, such as surface energy and temperature changes. The authors show that the effect of the initial nonlinear static deformation on the fundamental frequency is significant and it increases together with the applied voltage. However, solutions to the nonlinear dynamics equations were found in the form of harmonic functions, which is more consistent with linear oscillations of a mechanical system. It also seems doubtful to ignore the vdW forces when displacements of the beam become very large and comparable to the gap value. A simpler version of this approach is based on the linearisation of the beam dynamic state in the vicinity of the deformed static position. Of course, this simplification does not allow predicting large amplitude vibrations, but it turns to be very effective for analysing small vibrations near the initially deformed pre-buckling position. Such approach has been applied by L. Xu and his colleagues [9; 10] to investigate the effect of the vdW forces on small oscillations of a micro-cantilever, at that the electrostatic and Casimir forces were not considered by the authors, and the static deflection caused by the vdW forces has been determined approximately with a large error (see, for example, equation (13) in [9]).

Taking into account the above critical remarks, we aim in this study to reconsider the approach based on splitting the nonlinear dynamic equation into the static and dynamic ones and give a simple methodology which, in contrast to the mentioned papers, allows more correct predicting the initial static deformed state, which strongly affects the eigenmodes of free vibrations. The novelty of our study lies in the implementation of the approach [3; 4] verified by outcomes of the atomistic simulation [11], which relies on approximations of the lateral forces acting on a beam by linear or parabolic functions and permits to correctly predict the static deviation of the micro-cantilever via correct choosing the type of intermolecular forces. Such approach results in a boundary-value problem for a differential equation with correctly found variable coefficients governing small vibrations of the deformed beam, which is readily integrated by using any numerical method, for example, the Runge – Kutta one. In contrast to many contributions, the results of numerical computations given in the present study are invariant with respect to the geometrical and physical parameters of the micro-mechanical systems, and can be used for the wide range of their variation.

Mathematical model

Consider a micro-switch which consists of a fixed electrode and a micro-cantilever of length L , width b and thickness h separated by a dielectric spacer with an initial gap g , as shown in fig. 1. The beam material is assumed to be elastic with Young's modulus E and density ρ .

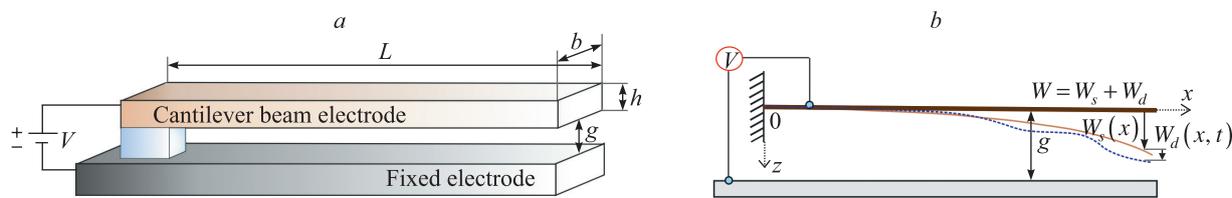


Fig. 1. Schematic configuration of a micro-switch (a) and vibration mode W_d of a cantilever near the static deviation W_s (b)

Let $W(x, t)$ be a transverse displacement of the cantilever, where x is a coordinate of a point at the midline, and t is time. In general, the displacement W can be forced by the inertia forces and different external forces such as the distributed electrostatic force F_e , generated by a voltage V applied to the fixed electrode, and the intermolecular force F_m , where $m = 3$ and $m = 4$ correspond to the vdW and Casimir forces, respectively. Applied voltage or (and) intermolecular forces result in the deflection of the beam towards the electrode. At a critical voltage value V^* , called the pull-in voltage, or at a very small initial gap g^* , the phenomenon of the pull-in instability of the micro-switch occurs, which consists in the retraction of the cantilever onto the stationary electrode. We assume here that $V < V^*$, and $g > g^*$ so that all forces acting on the micro-cantilever result in a static deviation $W_s(x) < g$ without the pull-in instability effect. The problem is to study small free vibrations of the micro-cantilever with an amplitude $W_s(x, t)$ in the neighbourhood of its initial stationary deflection W_s taking into account both the electrostatic and intermolecular forces.

Free bending vibrations of an elastic beam is governed by the equation

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = q(x), \quad (1)$$

where EI is the bending rigidity of the beam; S is the cross-sectional area; $q(x) = F_e + F_m$ is the distributed lateral load per unit length. The electrostatic force, including the fringing one, and the vdW and Casimir forces as well are given by

$$F_e = \frac{\varepsilon_0 b V^2}{2(g - W)^2} \left(1 + 0.65 \frac{g - W}{b} \right), \quad F_3 = \frac{Ab}{6\pi(g - W)^3}, \quad F_4 = \frac{\pi^2 \bar{h} cb}{240(g - W)^4}. \quad (2)$$

In relations (2), $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ is the permittivity of vacuum, A is the Hamaker constant, $\bar{h} = 1.055 \cdot 10^{-14} \text{ J} \cdot \text{s}$ is Plank's constant divided by 2π , and $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ is the speed of light. The boundary conditions for the cantilever read

$$W(0, t) = W_x(0, t) = 0, \quad W_{xx}(L, t) = W_{xxx}(L, t) = 0, \quad (3)$$

where the subscript following the hatch denotes differentiation with respect to the corresponding variable.

We introduce dimensionless parameters and variables:

$$s = \frac{x}{L}, \quad \tau = \omega_c t, \quad U = \frac{W}{g}, \quad \gamma = 0.65 \frac{g}{b}, \quad \beta = \frac{\varepsilon_0 b V^2 L^4}{2g^3 EI}, \quad (4)$$

$$\alpha_3 = \frac{AbL^4}{6\pi g^4 EI}, \quad \alpha_4 = \frac{\pi^2 \bar{h} cb L^4}{245 g^5 EI},$$

where $\omega_c = \sqrt{\frac{EI}{\rho S L^4}}$ is the characteristic frequency. Then, according to (4), equation (1) can be rewritten in the dimensionless form:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial s^4} + \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{\gamma\beta}{1-U} + \frac{\beta}{(1-U)^2} + \frac{\alpha_m}{(1-U)^m}, \quad (5)$$

where $m = 3$ or $m = 4$ for the vdW and Casimir forces, respectively.

Equation (5) possesses a strong nonlinearity and does not admit an explicit solution. We will seek an approximate solution in the form of the superposition of the static and dynamic components:

$$U(x, \tau) = u(s) + w(s, \tau), \quad (6)$$

where $u(s)$ is a static deviation due to the intermolecular and (or) electrostatic forces; $w(s, \tau)$ is an additional small dynamic deflection, which describes free linear vibrations of the micro-cantilever near the deformed static position. We substitute (6) into equation (5) and assume that $|w(s, \tau)| \ll 1$ for any τ and $s \in [0, 1]$. Then expanding the right-hand side in equation (5) into a series in powers of w and keeping only linear terms, we arrive at the following equation:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial s^4} - \frac{\gamma\beta}{1-u} - \frac{\beta}{(1-u)^2} - \frac{\alpha_m}{(1-u)^m} =$$

$$= -\frac{\partial^4 w}{\partial s^4} - \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \frac{\gamma\beta w}{(1-u)^2} + \frac{2\beta w}{(1-u)^3} + \frac{m\alpha_m w}{(1-u)^{m+1}}, \quad m = 3, 4. \quad (7)$$

Because equation (7) should be satisfied for any τ it can be split into the two equations:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial s^4} = \frac{\gamma\beta}{1-u} + \frac{\beta}{(1-u)^2} + \frac{\alpha_m}{(1-u)^m} \quad (8)$$

and

$$\frac{\partial^4 w}{\partial s^4} - \left[\frac{\gamma\beta}{(1-u)^2} + \frac{2\beta}{(1-u)^3} + \frac{m\alpha_m}{(1-u)^{m+1}} \right] w + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0, \quad (9)$$

from which equation (8) defines the static deviation of the cantilever, and equation (9) governs free small vibrations near this deflected position.

Substituting (6) into (3) leads to the boundary conditions

$$u(0) = u_s(0) = 0, \quad u_{ss}(1) = u_{sss}(1) = 0, \quad (10)$$

$$w(0, \tau) = w_s(0, \tau) = 0, \quad w_{ss}(1, \tau) = w_{sss}(1, \tau) = 0 \quad (11)$$

for equations (8) and (9), respectively.

Static deviation of micro-cantilever

Consider the static problem (8), (10). Due to the nonlinearity of the external force experienced by the cantilever, this problem does not allow obtaining an exact solution in the explicit form. We use the approach proposed in [12] and later refined in papers [3; 4]. In accordance to this approach, the lateral dimensionless force

$$f[u(s)] = \frac{\gamma\beta}{1-u} + \frac{\beta}{(1-u)^2} + \frac{\alpha_m}{(1-u)^m}, \quad (12)$$

not depending on the its nature, is approximated by a linear or quadratic function of s :

$$f(s) = f_0 + (f_T - f_0)s^n, \quad (13)$$

where $n = 1$ or $n = 2$; $f_0 = \beta + \gamma\beta + \alpha_m$; f_T is the lateral force acting on the cantilever tip. As was proposed in [3], the models, for which $n = 1$ and $n = 2$, are called the linear distributed load (LDL) and quadratic distributed load (QDL) models, respectively.

If we assume the LDL model, then equation (8) with the boundary conditions (10) has the solution

$$u(s) = \frac{f_T - f_0}{120} s^5 + \frac{f_0}{24} s^4 - \frac{f_0 + f_T}{12} s^3 + \frac{f_0 + 2f_T}{12} s^2, \quad (14)$$

and the force f_T introduced by equation (12) will be as follows:

$$f_T = \frac{\gamma\beta}{1-u_T} + \frac{\beta}{(1-u_T)^2} + \frac{\alpha_m}{(1-u_T)^m}, \quad (15)$$

where u_T is the deflection of the cantilever tip calculated by equation (14) and equal to

$$u_T = \frac{11f_T + 4f_0}{120}. \quad (16)$$

In the framework of the QDL model, a solution of the static problem (8), (10) is given by the polynomial

$$u(s) = \frac{f_T - f_0}{360} s^6 + \frac{f_0}{24} s^4 - \frac{f_T + 2f_0}{18} s^3 + \frac{f_T + f_0}{8} s^2 \quad (17)$$

with the force f_T defined from the same equation (15), but with the tip deflection evaluated as

$$u_T = \frac{26f_T + 19f_0}{360}. \quad (18)$$

We note that the accuracy of such models for estimating the static component (17) was verified in [3] by comparing with available data of the atomistic simulations [11].

For the freestanding micro-cantilever ($\beta = 0$), regardless of the model assumed, equation (15) together with (16) or (18) yield the relationship $\alpha_m = \alpha_m(u_T)$. Then, relying on the condition $\frac{d\alpha_m}{du_T} = 0$, one can calculate the critical value α_m^* of a parameter α_m ($m = 3, 4$) and the associated displacement u_T^* . Having known the critical value α_m^* , we can estimate the lower and upper bounds for the gap g and the beam length L beyond which the micro-cantilever may fall onto the base due to the intermolecular forces [3]:

$$\frac{L}{g} < 4 \sqrt[4]{\frac{\pi\alpha_3^* E h^3}{2A}}, \quad (19)$$

and

$$L < \sqrt[4]{\frac{20\alpha_4^* E h^3 g^5}{\pi^2 \bar{h} c}}, \quad g > \sqrt[5]{\frac{\pi^2 \bar{h} c L^4}{20\alpha_4^* E h^3}} \quad (20)$$

for the micro-cantilever subjected to the vdW and Casimir forces, respectively.

Under the applied voltage V , $\beta > 0$, and equation (15) together with (16) or (18) give the relationship $\beta = \beta(u_T)$. Then the condition $\frac{d\beta}{du_T} = 0$ allows finding the critical value β^* corresponding to the pull-in voltage V_{PI} , which is defined as

$$V_{PI} = \sqrt{\frac{E(gh)^3 \beta^*}{6\epsilon_0 L^4}}. \quad (21)$$

In what follows, we assume that for the freestanding beam, inequalities (19), (20) hold simultaneously, and in the case of applied voltage V , we set the additional inequality $V < V_{PI}$, where V_{PI} is evaluated by (21). If these conditions are satisfied, then the micro-cantilever just deviates from its initial position toward the fixed electrode by the value $u(s) < u_T^*$ for any $s \in [0, 1]$ and does not fall onto it. Figure 2 displays the dimensionless pre-buckling tip displacement u_T of the micro-cantilever for different values of the vdW parameter α_3 calculated on the base of LDL model. Here, the critical value $\alpha_3^* = 1.004$, while for the QDL model $\alpha_3^* = 1.139$.

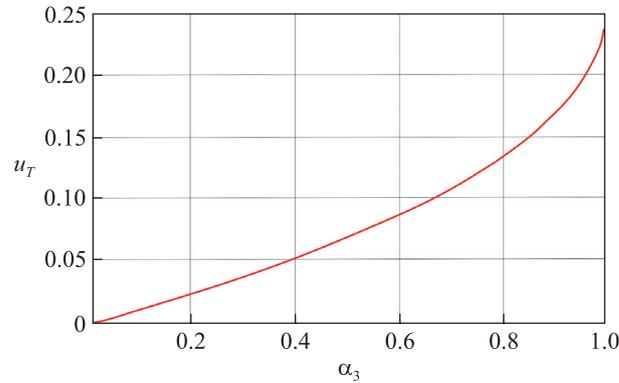


Fig. 2. Tip deflection u_T of a freestanding micro-cantilever versus the parameter α_3 calculated on the base of the LDL model

We study free small vibrations of the micro-cantilever near the deformed static position, which are governed by equation (9) with the boundary conditions (11). Seeking a solution in the form $w(s, t) = y(s)e^{i\omega t}$, where $i = \sqrt{-1}$ is the imaginary unit, and ω is a natural frequency, and inserting it into (9), (11), we arrive at the boundary-value problem

$$\frac{d^4 y}{ds^4} - \left[\lambda + \frac{\gamma\beta}{(1-u)^2} + \frac{2\beta}{(1-u)^3} + \frac{m\alpha_m}{(1-u)^{m+1}} \right] y = 0, \quad (22)$$

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(1) = y'''(1) = 0, \quad (23)$$

where $\lambda = \omega^2$ is a required eigenvalue, and $u(s)$ is the initial static deviation found above.

Free vibrations of freestanding micro-cantilever

First, we consider equation (22) for the case when $\beta = 0$ and $m = 3$:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial s^4} - \frac{3\alpha_3 y}{[1-u(s)]^4} - \lambda y = 0. \quad (24)$$

It is obvious that equation (24), as well as equation (22) for the general case, do not admit an exact solution due the variable coefficients depending on $u(s)$. However, they can be readily integrated numerically and by

using an asymptotic approach for the special case when the initial displacement $u(s)$ is small. The asymptotic solution will be used only to validate further numerical calculations.

Asymptotic approach. Let $u = \mu z(s)$, where $\mu = u(1) \ll 1$. Then the formal asymptotic solution of the boundary-value problem (23), (24) can be sought in the form of series:

$$y(s; \mu) = y_0(s) + \mu y_1(s) + \mu^2 y_2(s) + \dots, \quad (25)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \mu \lambda_1 + \mu^2 \lambda_2 + \dots$$

Substituting (25) into equation (24) and the boundary conditions (23), with the function $(1 - \mu z)^{-4}$ being expanded into the Taylor series, we arrive at the sequence of boundary-value problems which can be considered step-by-step.

In the leading approximation, one has the homogeneous boundary-value problem

$$y_0^{(IV)} - 3\alpha_3 y_0 - \lambda_0 y_0 = 0, \quad (26)$$

$$y_0(0) = 0, y_0'(0) = 0, y_0''(1) = 0, y_0'''(1) = 0,$$

which has the solution

$$y_0 = C \left(F_1(s, k_n) - \frac{F_3(s, k_n)}{F_2(s, k_n)} F_3(s, k_n) \right)$$

with

$$k_n^4 = 4\alpha_3 + \lambda_0, F_2(s, k) = \frac{1}{2}(\sinh ks + \cos ks),$$

$$F_1(s, k) = \frac{1}{2}(\cosh ks - \cos ks), F_3(s, k) = \frac{1}{2}(\sinh ks - \sin ks),$$

$$k_1 = 1.875, k_2 = 4.694, k_3 = 7.855, k_4 = 10.996, \dots$$

Note that of all available k_n , one needs to consider only those values for which

$$\lambda_0 = \lambda_{0n} = k_n^4 - 3\alpha_3 > 0. \quad (27)$$

In the first-order approximation, we have the inhomogeneous boundary-value problem

$$y_1^{(IV)} - (3\alpha_3 + \lambda_0) y_1 = \lambda_1 y_0 + 12\alpha_3 z(s) y_0, \quad (28)$$

$$y_1(0) = 0, y_1'(0) = 0, y_1''(1) = 0, y_1'''(1) = 0,$$

which is the problem on the spectrum of the homogeneous boundary-value problem (26). With the self-adjointness of problem (26) taken into account, the condition for the existence of a solution to problem (28) results in the relation for a correction:

$$\lambda_1 = \lambda_{1n} = - \frac{12\alpha_3 \int_0^1 z(s) y_0^2(s) ds}{\int_0^1 y_0^2(s) ds}. \quad (29)$$

The procedure for seeking all unknown parameters and functions from (25) can be formally continued. By interrupting this process, we found the parameters $\lambda_{0n}, \lambda_{1n}$ as functions of α_3 based on only two approximations. Figure 3, *a*, displays the first four eigenvalues λ_{0n} versus α_3 calculated within the LDL model. It can be seen that inequality (27) holds for any natural n and all values of the vdW parameter $\alpha_3 < 1$ corresponding to the pre-buckling position. It is also seen that the zero approximation of the parameter λ is not strongly influenced by the parameter α_3 ; an increase in α_3 leads to a decrease only in the first root λ_{01} (it should be noted that curves in fig. 3, *a*, are plotted in the logarithmic scale). As for the correction λ_{1n} , evaluated by (29) and corresponding to λ_{0n} , it reveals a large dependence on the vdW parameter α_3 , it increasing in value along with α_3 for any mode number n .

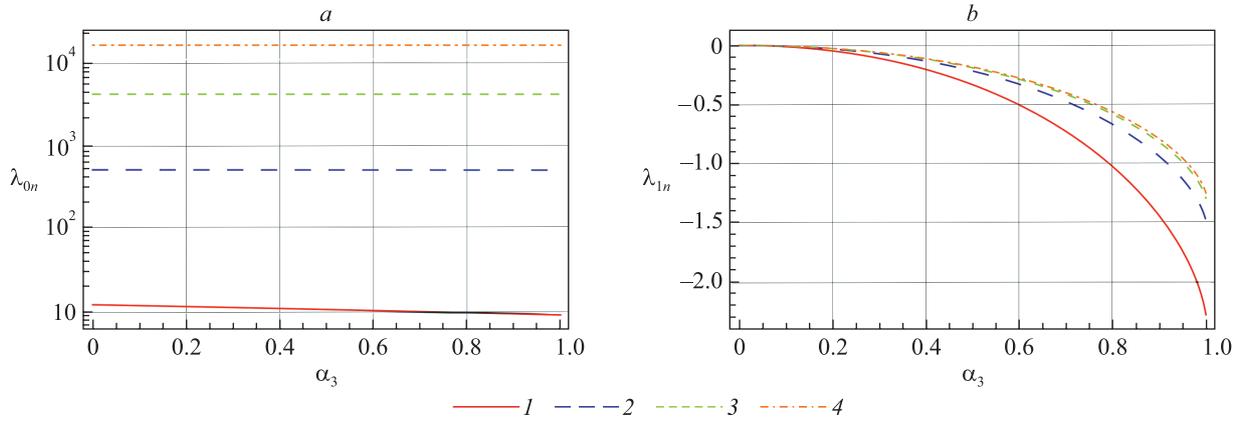


Fig. 3. The first four eigenvalues λ_{0n} (a) and the corresponding corrections λ_{1n} versus the vdW parameter α_3

Numerical solution. Equation (24) with the boundary conditions (23) can be solved numerically. We rewrite it in the form of a system of differential equations

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{C}(s; \lambda) \mathbf{Y}^T, \quad (30)$$

where $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ is the four-component vector with $y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', y_4 = y'''$ the icon T means transpose, and \mathbf{C} is the (4×4) -matrix introduced as

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_{41} = \lambda + \frac{3\alpha_3}{[1 - z(s)]^4}.$$

The corresponding boundary conditions read

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_3(1) = y_4(1) = 0. \quad (31)$$

We consider the following independent Cauchy problems for equation (30):

$$\mathbf{Y}|_{s=0} = (0, 0, 0, 1) \text{ and } \mathbf{Y}|_{s=0} = (0, 0, 1, 0). \quad (32)$$

These problems are to be solved simultaneously using, for example, the Runge – Kutta method. Let $\mathbf{Y}^{(1)} = (y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)}, y_4^{(1)})$ and $\mathbf{Y}^{(2)} = (y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, y_3^{(2)}, y_4^{(2)})$ be solutions of the problems (30), (32)₁ and (30), (32)₂, respectively. Composing the function $\mathbf{Y} = c_1 \mathbf{Y}^{(1)} + c_2 \mathbf{Y}^{(2)}$ and substituting it into conditions (31)₂ at point $s = 1$, we arrive at the homogeneous algebraic equations with respect to unknown constants c_1, c_2 :

$$\begin{aligned} c_1 y_3^{(1)}(1) + c_2 y_3^{(2)}(1) &= 0, \\ c_1 y_4^{(1)}(1) + c_2 y_4^{(2)}(1) &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

The condition for the existence of a nontrivial solution to equations (33) leads to the equation

$$y_3^{(1)}(1) y_4^{(2)}(1) - y_4^{(1)}(1) y_3^{(2)}(1) = 0 \quad (34)$$

with respect to the required parameter λ .

Numerical integration of the above Cauchy problems for equation (30) was performed using the NDSolve-function in the Wolfram code with intermediate vector orthonormalisation. At each integration step, the elements of the vectors $\mathbf{Y}^{(1)}, \mathbf{Y}^{(2)}$ were determined with accuracy up to six decimal places, while equation (34) was solved with accuracy up to three decimal places. Figure 4 demonstrates the behaviour of the first positive eigenvalue λ of the boundary-value problem (23), (24) versus the vdW parameter α_3 , established both by the numerical integration (dotted line) and using the asymptotic approach (red circles) within the LDL model. Firstly, we note the satisfactory agreement of the results obtained by the two methods, a slight divergence being observed beginning only from $\alpha_3 = 0.5$, which increases and reaches the value not exceeding 2 % for $\alpha_3 = 0.7$. This divergence is due to an error of the asymptotic approach, which increases together with the static tip deviation $\mu = u(1)$. Secondly, fig. 4 shows that the lowest natural frequency of the freestanding cantilever decreases along with the gap g between the electrodes.

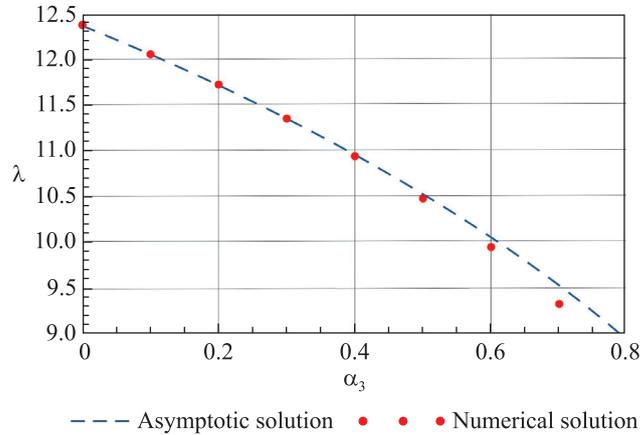


Fig. 4. The first positive eigenvalue λ of the boundary-value problem (23), (24) versus the vdW parameter α_3 defined using the numerical and asymptotic methods

Effect of electrostatic forces on free vibrations of micro-cantilever

Now, returning to equation (22), we will study the influence of the electrostatic forces on the natural frequencies considering the forces of intermolecular interaction. The lateral forces acting on the cantilever from the fixed electrode will be approximated by both the linear and quadratic functions (13) in the framework of the LDL and QDL models. Calculations of the first positive eigenvalue for the boundary-value problem (22), (23) will be done using the numerical procedure developed above with

$$c_{41} = \lambda + \frac{\beta\gamma}{[1 - z(s)]^2} + \frac{2\beta}{[1 - z(s)]^3} + \frac{m\alpha_m}{[1 - z(s)]^4}$$

assumed in the matrix C, where $m = 3$ and $m = 4$ for the vdW and Casimir forces, respectively.

In fig. 5, the first positive dimensionless parameters λ are plotted as functions of the vdW parameter α_3 at $\gamma = 1$ for different values of the voltage parameter β in the framework of the LDL (see fig. 5, a) and QDL models (see fig. 5, b). Curves marked with numbers 1, 2, 3, 4 correspond to the values $\beta = 0, 0.15, 0.3, 1.0$, respectively. The calculations were carried out only for $\beta < \beta^*$ and at the interval $0 \leq \alpha_3 < \alpha_3^*$, where β^*, α_3^* are the critical values corresponding to pull-in instability of the cantilever, the higher the voltage β being, the shorter the interval of variation of the parameter α_3 . When α_3 or β reaches its critical value, the mobile cantilever collapses onto the substrate [10]. It is seen that for fixed values of the parameter α_3 , the QDL model gives higher values of the eigenfrequency than the LDL model. The divergence in results is slight for small α_3 , however it increases together with α_3 . It is also seen that for any values of β the natural frequencies decrease as the vdW parameter α_3 increases, this decrease becoming dramatic as α_3 approaching α_3^* .

Figure 6 shows the results of calculations similar to those given above, but demonstrating λ versus the Casimir parameter α_4 . It is seen that behaviour of all curves are the same as in fig. 5.

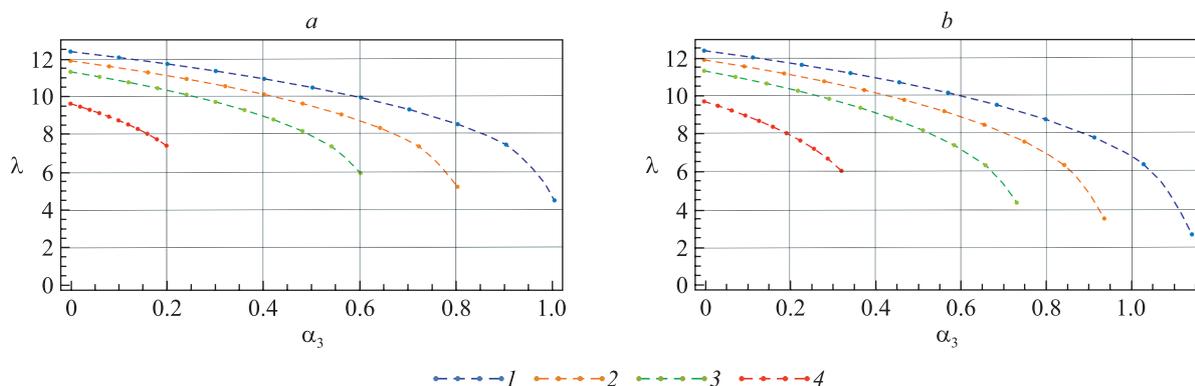


Fig. 5. The first positive eigenvalue λ versus the vdW parameter α_3 for different values of the voltage parameter β calculated in the framework of the LDL (a) and QDL (b) models: $\beta = 0$ (1), $\beta = 0.15$ (2), $\beta = 0.3$ (3), $\beta = 1.0$ (4)

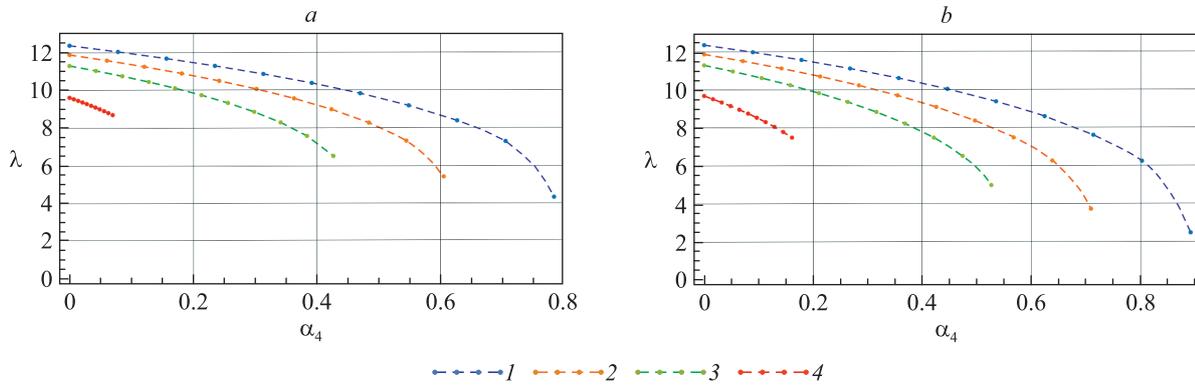


Fig. 6. The first positive eigenvalue λ of the micro-cantilever versus the Casimir parameter α_4 for different values of the voltage parameter β calculated in the framework of the LDL (a) and QDL (b) models: $\beta = 0$ (1), $\beta = 0.15$ (2), $\beta = 0.3$ (3), $\beta = 1.0$ (4)

However, a more detail comparison of the curves in fig. 5 and 6, made for the same parameter β and the adopted model, shows that the incorporation of the Casimir forces results in a weaker reduction in the first natural frequency than accounting for the vdW forces when the voltage becomes close to the critical value β^* .

Conclusions

In this work, free small vibrations of a micro-cantilever as an element of the micro-switch were investigated considering the electrostatic and intermolecular forces, including the vdW and Casimir ones. We revised the approach stated earlier (see, for example, [9; 10]), which is based on splitting the stress-strain state of the micro-cantilever into the static and dynamic states. Assuming a solution of the original nonlinear dynamic equation in the form of the superposition of static and dynamic components, we derived the nonlinear differential equation, governing the static deviation caused by the intermolecular forces, and the linear equation with variable coefficients describing free small oscillations in the vicinity of the static strained state. The novelty of our approach compared to the similar ones realised in [9; 10] is in the effective method, which allows correct estimating the static component strongly influencing the subsequent calculations of the natural frequencies of free vibrations near the deformed state. The static component was first correctly determined within the well-established LDL and QDL models [3; 4], according to which the resulting lateral force acting on the movable cantilever is approximated by either the linear or parabolic function of the axial coordinate. The differential equation governing small vibrations of the micro-cantilever near the static deformed position was derived in the form which is invariant with respect to the geometrical and physical parameters of the micro-electromechanical systems and can be utilised for studying small vibrations with a wide range of variation of these parameters. In the case of a small static deviation of the beam, we determined several first natural frequencies and corresponding modes using the asymptotic approach with a small parameter equal to the tip deviation. For the general case with a finite static tip deviation, we proposed the numerical procedure based on the Runge – Kutta method. All computations were performed for the vdW and Casimir forces not exceeding the critical pull-in instability values. The comparison of results obtained by different methods showed a good agreement for small values of the vdW parameter α_3 corresponding to relatively large clearances between the electrodes. As an expected result, we confirm that increasing the voltage and intermolecular forces leads to a decrease in the natural frequencies, with this effect turning to be strong for the lower natural frequency and becoming weak as the mode number increases. In general, the calculations performed for the adapted models without specifying the parameters of the micro-electromechanical systems also revealed that for the fixed values of the vdW or Casimir parameters, the QDL model gives higher values of the eigenfrequency with respect to the LDL model.

We note that the simple procedure developed in this paper, which relies on the adopted LDL and QDL models [3; 4], may be considered as a benchmark for subsequent investigations to study small and finite vibrations of the electrically actuated nano-beam considering size effects within the nonlocal theory of elasticity [2].

References

1. Khaniki HB, Ghayesh MH, Amabili M. A review on the statics and dynamics of electrically actuated nano and micro structures. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2021;129:103658. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103658.
2. Eringen AC. *Theory of nonlocal elasticity and some applications*. Princeton: Princeton University; 1984 April. Report number: 62.
3. Mikhasev G, Radi E, Misnik V. Pull-in instability analysis of a nanocantilever based on the two-phase nonlocal theory of elasticity. *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 2022;8(4):1456–1466. DOI: 10.22055/jacm.2022.40638.3619.

4. Mikhasev G, Radi E, Misnik V. Modeling pull-in instability of CNT nanotweezers under electrostatic and van der Waals attractions based on the nonlocal theory of elasticity. *International Journal of Engineering Science*. 2024;195:104012. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2023.104012.
5. Zand MM, Ahmadian MT. Dynamic pull-in instability of electrostatically actuated beams incorporating Casimir and van der Waals forces. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2010;224(9):2037–2047. DOI: 10.1243/09544062JMES1716.
6. Askari AR, Tahani M, Moeenfard H. A frequency criterion for doubly clamped beam-type N/MEMS subjected to the van der Waals attraction. *Applied Mathematical Modelling*. 2017;41:650–666. DOI: 10.1016/j.apm.2016.09.025.
7. Alipour A, Zand MM, Daneshpajoo H. Analytical solution to nonlinear behavior of electrostatically actuated nanobeams incorporating van der Waals and Casimir forces. *Scientia Iranica F*. 2015;22(3):1322–1329.
8. Wang KF, Zeng S, Wang BL. Large amplitude free vibration of electrically actuated nanobeams with surface energy and thermal effects. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2017;131–132:227–233. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.06.049.
9. Xu L, Qian F, Liu Y. Effects of van der Waals force on natural frequency for micro cantilever. *AIP Advances*. 2015;5:117116. DOI: 10.1063/1.4935569.
10. Xu L, Jia X. Electromechanical dynamics for micro beams. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2006;6(2):233–251. DOI: 10.1142/S0219455406001939.
11. Dequesnes M, Rotkin SV, Aluru NR. Calculation of pull-in voltages for carbon-nanotube-based nanoelectromechanical switches. *Nanotechnology*. 2002;13(1):120–131. DOI: 10.21203/rs.3.rs-1612949/v2.
12. Yang J, Jia XL, Kitipornchai S. Pull-in instability of nano-switches using nonlocal elasticity theory. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2008;41(3):035103. DOI: 10.1088/0022-3727/41/3/035103.

Received 16.08.2024 / revised 09.10.2024 / accepted 13.11.2024.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

УДК 519.168, 575.174

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОМБИНАЦИЙ ГЕНОМНЫХ МУТАЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПОЛНОГЕНОМНОГО ПОИСКА АССОЦИАЦИЙ НА ПРИМЕРЕ МИКОБАКТЕРИИ ТУБЕРКУЛЕЗА

ЧЭНЬ ЮЙСЯН¹⁾, А. М. АНДРИАНОВ²⁾, А. В. ТУЗИКОВ¹⁾

¹⁾Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,
ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Беларусь

²⁾Институт биоорганической химии НАН Беларуси,
ул. Академика Купревича, 5, корп. 2, 220084, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Полногеномный поиск ассоциаций играет ключевую роль в выявлении взаимосвязей между геномами и фенотипами. Многие исследования в этой области посвящены изучению генетических вариаций и их взаимодействий в геномах. Однако, несмотря на достигнутый значительный прогресс в данном направлении, рассматриваемая проблема по-прежнему является крайне актуальной и требует разработки эффективных методов

Образец цитирования:

Чэнь Юйсян, Андрианов АМ, Тузиков АВ. Идентификация комбинаций геномных мутаций с помощью полногеномного поиска ассоциаций на примере микобактерии туберкулеза. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;3:73–89. EDN: PTGHLY

For citation:

Chen Yu-Xiang, Andrianov AM, Tuzikov AV. Identification of combinations of genomic mutations using genome-wide association studies by example of *Mycobacterium tuberculosis*. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;3:73–89. Russian. EDN: PTGHLY

Авторы:

Чэнь Юйсян – младший научный сотрудник лаборатории математической кибернетики.

Александр Михайлович Андрианов – доктор химических наук, профессор; главный научный сотрудник лаборатории белковой инженерии.

Александр Васильевич Тузиков – доктор физико-математических наук, член-корреспондент НАН Беларуси, профессор; заведующий лабораторией математической кибернетики.

Authors:

Chen Yu-Xiang, junior researcher at the laboratory of mathematical cybernetics.

c894424323@outlook.com

Alexander M. Andrianov, doctor of science (chemistry), full professor; chief researcher at the laboratory of protein engineering. alexandre.andriano@yandex.ru

Alexander V. Tuzikov, doctor of science (physics and mathematics), corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus, full professor; head of the laboratory of mathematical cybernetics.

tuzikov@newman.bas-net.by

и алгоритмов ее решения. Для поиска ассоциированных с фенотипом комбинаций однонуклеотидных полиморфизмов в настоящей статье предложены четыре новых алгоритма, основанных на изучении взаимодействия однонуклеотидных полиморфизмов в двух режимах – аддитивном и мультипликативном. На первом этапе эти алгоритмы используют полный перебор пар однонуклеотидных полиморфизмов для предсказания их ассоциации с фенотипом, а на втором этапе – жадные процедуры для поиска комбинаций, включающих до пяти однонуклеотидных полиморфизмов с наибольшими величинами ассоциации. Разработанный вычислительный подход протестирован на наборе данных, содержащем 3178 геномов микобактерии туберкулеза, для выявления комбинаций мутаций и прогнозирования устойчивости различных штаммов микобактерии туберкулеза к 20 лекарственным препаратам. Полученные результаты сопоставлены с результатами прогнозирования лекарственной устойчивости микобактерии туберкулеза современными программными системами *Mykrobe* и *TB-Profiler*. Для 5 препаратов первой линии и 1 препарата второй линии (офлоксацина) системы *Mykrobe* и *TB-Profiler* по правильности предсказания несколько превосходят предложенные авторами алгоритмы, однако для остальных 14 препаратов второй линии уступают им.

Ключевые слова: полногеномный поиск ассоциаций; взаимодействие однонуклеотидных полиморфизмов; лекарственно-устойчивый туберкулез.

Благодарность. Работа выполнена при поддержке консорциума по лекарственно-устойчивому туберкулезу (<https://tbportals.niaid.nih.gov>), Международного научно-технического центра (проект PR150), а также Китайского совета по стипендиям (<https://www.csc.edu.cn/>).

IDENTIFICATION OF COMBINATIONS OF GENOMIC MUTATIONS USING GENOME-WIDE ASSOCIATION STUDIES BY EXAMPLE OF *MYCOBACTERIUM TUBERCULOSIS*

CHEN YU-XIANG^a, A. M. ANDRIANOV^b, A. V. TUZIKOV^a

^a*United Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus,
6 Surganava Street, Minsk 220012, Belarus*

^b*Institute of Bioorganic Chemistry, National Academy of Sciences of Belarus,
5 Akademika Kuprevicha Street, 2 building, Minsk 220084, Belarus*

Corresponding author: A. V. Tuzikov (tuzikov@newman.bas-net.by)

Abstract. Genome-wide association studies play a key role in identifying relationships between genomes and phenotypes. Many studies in this field are devoted to the investigations of genetic variations and their interactions in genomes. However, despite significant progress achieved in this direction, the problem under consideration is still highly relevant and requires the development of effective methods and algorithms for solving it. In this paper, four new algorithms based on the study of single nucleotide polymorphism interactions in the two modes, additive and multiplicative, are proposed to find combinations of single nucleotide polymorphisms associated with phenotypes. In the first stage, the algorithms use exhaustive search of single nucleotide polymorphism pairs to predict their association with phenotype, and in the second stage, greedy procedures are applied to find combinations of up to five single nucleotide polymorphisms with the best association values. The developed computational approach is tested on the dataset containing 3178 *Mycobacterium tuberculosis* genomes to identify single nucleotide polymorphism combinations and predict resistance of *Mycobacterium tuberculosis* strains to 20 drugs. The results obtained are compared with those of the modern prediction software systems *Mykrobe* and *TB-Profiler*. For the 5 first-line drugs and the 1 second-line drug (Ofloxacin), *Mykrobe* and *TB-Profiler* systems slightly exceed the prediction accuracy of the proposed algorithms, but for the other 14 second-line drugs, they are inferior to them.

Keywords: genome-wide association studies; GWAS; single nucleotide polymorphism interaction; drug-resistant tuberculosis.

Acknowledgements. This work was supported by the drug-resistant tuberculosis consortium (<https://tbportals.niaid.nih.gov>), the International Science and Technology Centre (project PR150), as well as the China Scholarship Council (<https://www.csc.edu.cn/>).

Введение

Полногеномный поиск ассоциаций (*genome-wide association studies*, GWAS) включает методы, используемые для выявления взаимосвязей между геномами и фенотипами. Основная цель этих исследований – понимание биологии фенотипов, расширение знаний и разработка новых алгоритмов анализа геномных данных. С помощью GWAS получено большое количество результатов в области популяционной генетики и генетики сложных признаков, биологии заболеваний, их диагностики и лечения [1].

Механизмы взаимосвязей между геномами и фенотипами сложны, и многие из них пока не имеют достоверного объяснения. Однако за последние почти 20 лет был достигнут значительный прогресс в их понимании и использовании [1; 2].

Ряд исследований основаны на изучении взаимосвязи между генетическими вариациями и фенотипами. Однонуклеотидные полиморфизмы (ОНП) в геномах могут вызывать фенотипические проявления или быть связанными с ними. Хорошо известно, что большинство фенотипов ассоциированы не с одной генетической вариацией в конкретной геномной позиции, а со многими из них. Изучение взаимодействия ОНП играет ключевую роль в GWAS. При этом проблема выявления подобных зависимостей представляет собой сложную комбинаторную задачу. Учитывая тот факт, что количество генетических вариаций в геномах может измеряться сотнями тысяч или даже миллионами, задача изучения таких зависимостей становится неразрешимой с помощью современных компьютеров. Разработанные подходы к решению данной проблемы либо исследуют все ОНП, либо выделяют из этого множества подмножества с нужными свойствами, которые затем используются для выявления маркеров с лучшими прогностическими характеристиками. Полный перебор (исчерпывающий поиск) комбинаций ОНП – простой и надежный метод, который предсказывает взаимосвязи между генетическими вариациями и фенотипами. Однако из-за огромной вычислительной сложности он не может найти широкого применения. По этой причине был разработан алгоритм с поддержкой взаимодействия ОНП на графических картах, протестированный на нескольких наборах данных [3]. В работе [4] генетический алгоритм и SVM-классификатор применяли для поиска подмножеств ОНП, наиболее предпочтительных с точки зрения классификатора, а в работе [5] был предложен алгоритм случайного леса для отбора подмножеств ОНП, связанных с фенотипами.

Один из популярных подходов к поиску ассоциаций между геномными мутациями и фенотипами заключается в объединении мутаций генов и изучении проблемы ассоциации между генами и фенотипами [6]. В этом случае размерность задачи существенно уменьшается, и появляются новые возможности для биологической интерпретации фенотипов. Данному подходу посвящено множество публикаций. В частности, в работе [7] предложен новый инструмент, использующий сводную статистику для обнаружения ассоциаций на уровне генов, а не отдельных ОНП. Этот инструмент позволяет значительно сократить объем вычислений и является более мощным, чем другие программные средства, применяющие аналогичный подход. Взвешивание генетических вариаций в гене – одна из основных проблем при разработке подходов к поиску ассоциаций на уровне генов, влияющая на их эффективность. Генный тест, также использующий сводную статистику и названный OWC, продемонстрировал более высокую мощность на модельных и реальных данных по сравнению с другими популярными методами [8]. Изучение взаимодействия генов и их совместного влияния на сложные фенотипы является актуальной темой современных исследований [9].

Микобактерия туберкулеза (МБТ) – возбудитель инфекционного заболевания, называемого туберкулезом. В 2022 г. им заболели 10,6 млн человек во всем мире, из них у 410 тыс. человек развился туберкулез с множественной лекарственной устойчивостью или устойчивый к рифампицину туберкулез, а 1,3 млн человек умерли. Число диагностированных и начавших лечение людей было намного меньше, чем предполагаемое число заболевших [10]. Методы прогнозирования лекарственной устойчивости на основе анализа ОНП могут предоставить врачам ценную информацию для рекомендации более эффективных препаратов и схем лечения, необходимых для сокращения числа случаев лекарственной устойчивости [11; 12]. В исследовании [13] взаимодействия ОНП были проанализированы для предсказания лекарственной устойчивости МБТ и выявления ассоциированных с ней пар генов. Одномерная сверточная нейронная сеть превзошла другие традиционные классификаторы машинного обучения в поиске комбинаций ОНП, связанных с лекарственной устойчивостью МБТ [14]. Согласно результатам исследования [14] для 8 препаратов эта нейронная сеть обеспечила более высокую точность прогнозирования, чем современная программа предсказания лекарственной устойчивости МБТ *Mykrobe* [15].

За последнее десятилетие было разработано много моделей для предсказания лекарственной устойчивости [15–23]. Однако задача корректного прогнозирования устойчивости к лекарствам на основе информации о наличии определенных мутаций в геноме по-прежнему остается крайне актуальной и требует разработки новых подходов к ее решению.

В настоящем исследовании для прогнозирования лекарственной устойчивости МБТ использован поиск ОНП в геномах на основе данных портала по туберкулезу (<https://tbportals.niaid.nih.gov>), который включает экспериментальную информацию об устойчивости к 20 лекарственным препаратам для 3178 геномов МБТ, содержащихся в базе данных GenBank (<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/genbank/>). Для этого были разработаны четыре алгоритма поиска комбинаций ОНП, ассоциированных с лекарственной устойчивостью МБТ. Данные алгоритмы основаны на изучении взаимодействия ОНП в двух режимах – аддитивном и мультипликативном. На первом этапе алгоритмы используют полный перебор пар ОНП для расчета

их связи с устойчивостью к 20 лекарственным препаратам, а на втором этапе – жадные процедуры для поиска комбинаций, включающих до пяти ОНП, которые наилучшим образом связаны с лекарственной устойчивостью.

Материалы и методы исследования

Задача GWAS. Для каждого лекарственного препарата d исследуемые образцы подразделяются на устойчивые и чувствительные к нему. Таким образом, эталонный набор данных \mathbf{S} геномов МБТ можно представить в виде

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_d^+ \cup \mathbf{S}_d^-,$$

где \mathbf{S}_d^+ – подмножество образцов, устойчивых к препарату d , а \mathbf{S}_d^- – подмножество образцов, чувствительных к препарату d .

В рассматриваемом случае каждый образец S_i , $i = 1, 2, \dots, m$, представляет собой последовательность, состоящую из четырех нуклеотидов $s_{i,j} \in \{A, T, C, G\}$:

$$S_i = (s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,n}).$$

Здесь n – количество нуклеотидов в геноме. Величина n отличается для разных организмов. Например, для генома МБТ $n = 4\,418\,596$. Последовательность нуклеотидов в геноме может содержать различные однопозиционные мутации, обычно называемые ОНП, означающие замену одного нуклеотида в определенной позиции на другой нуклеотид и присутствующие в достаточно большой части популяции (более 1 %). Некоторые ОНП важны для жизни организма, а также связаны с его фенотипом (или признаком), в рассматриваемом случае с устойчивостью микроорганизма к какому-либо лекарству. Предполагается, что задан вектор фенотипа $\mathbf{y}_d = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$, где m – размер набора данных \mathbf{S} , и $y_i = 1$, если образец S_i устойчив к препарату d . В противном случае $y_i = 0$ и образец S_i чувствителен к данному препарату.

Рассматриваемая в статье задача GWAS заключается в поиске в геноме ОНП, ассоциированных с фенотипами, если такие ОНП существуют. В этом случае размерность задачи может быть уменьшена до анализа только последовательности ОНП, а не всего генома. Предположим, что набор геномных данных \mathbf{S} содержит последовательность $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, состоящую из p ОНП, полученных при сравнении геномов из базы данных с эталонным геномом, причем каждый x_i , $i = 1, 2, \dots, p$, соответствует некоторому ОНП в образцах генома. Отметим, что рассматриваемые ОНП встречаются в не менее чем 1 % геномов из набора данных \mathbf{S} . Тогда вектор $\mathbf{x}_{i,0} = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,p})$ описывает значения ОНП для генома S_i , $x_{i,k} = 1$, если ОНП с номером $k \leq p$ существует в этом геноме, и $x_{i,k} = 0$ в противном случае. Все ОНП в наборе данных \mathbf{S} для препарата d определяются матрицей ОНП

$$\mathbf{X}_d = (x_{i,j})_{m \times p}. \quad (1)$$

В статье рассматривается следующая задача: по матрице ОНП \mathbf{X}_d (1) и вектору фенотипов \mathbf{y}_d следует идентифицировать отдельные ОНП или их комбинации, связанные с фенотипом.

Сначала исследуем взаимосвязи между отдельными ОНП, представленными в наборе образцов и заданными векторами $\mathbf{x}_{0,j} = (x_{1,j}, x_{2,j}, \dots, x_{m,j})^T$ для $j = 1, 2, \dots, p$, а именно между столбцами матрицы ОНП \mathbf{X}_d (1) и вектором фенотипа \mathbf{y}_d . Такой подход называется одномолекулярным тестом. Далее исследуем взаимосвязи между комбинациями нескольких ОНП и вектором фенотипа, т. е. выполним многомаркерный тест. Во втором случае задача приобретает комбинаторный характер, поэтому для проверки разных комбинаций ОНП будем использовать эвристики. Можно объединить вектор-столбцы, соответствующие комбинации двух ОНП, с помощью различных операций и ввести в матрицу ОНП \mathbf{X}_d (1) объединенный ОНП. В данной работе для каждой координаты вектор-столбцов при объединении соответствующих вектор-столбцов отдельных ОНП используются логические операции «или» либо «и». Операция «или» предполагает аддитивный эффект отдельных ОНП для предсказания фенотипа, такое взаимодействие ОНП называется аддитивным. Использование операции «и» означает, что взаимодействие мультипликативно и предсказание фенотипа происходит, когда оба одиночных ОНП предсказывают этот фенотип.

Исходные данные. Набор данных \mathbf{S} содержал 3178 геномов и результаты тестов на устойчивость к 20 лекарственным препаратам, включая 5 препаратов первой линии, а именно этамбутол (EMB), изониазид (INH), пипразинамид (PZA), рифампицин (RIF), стрептомицин (SM), и 15 препаратов второй линии, таких как амикацин (AMK), амоксициллин – клавуланат (AMX – CL), капреомицин (CM), циклосерин (CS), этионамид (ETO), имипенем – циластатин (IMI), канамицин (KM), левофлоксацин (LFX), линезолид (LZD), моксифлоксацин (MFX), моксифлоксацин 0,25 (MFX 0,25), офлоксацин (OFX), парааминосалициловая кислота (PAS), протионамид (PTH) и микобутин (рифабутин) (RFB). Эти данные

были взяты с портала по туберкулезу [24], представляющего собой платформу для исследований лекарственно-устойчивого туберкулеза, которая содержит проверенную информацию об устойчивости или чувствительности образцов МБТ к рассматриваемым препаратам. В табл. 1 представлено распределение чувствительных и устойчивых образцов для каждого препарата из набора данных.

Таблица 1

Характеристика набора данных

Table 1

Characterisation of the dataset

Препарат	Количество чувствительных геномов	Количество устойчивых геномов	Препарат	Количество чувствительных геномов	Количество устойчивых геномов
EMB	839	617	IMI	384	180
INH	438	977	KM	861	767
PZA	447	498	LFX	777	1188
RIF	627	933	LZD	719	766
SM	539	875	MFX	1159	413
AMK	942	1302	MFX 0,25	254	137
AMX – CL	626	297	OFX	589	385
CM	943	1185	PAS	705	1264
CS	810	576	PTH	605	1127
ETO	155	158	RFB	197	169

Меры качества предсказания. Качество предсказания фенотипа на основе ОНП в рассматриваемой позиции генома можно оценить по матрице ОНП и вектору фенотипов с помощью нескольких показателей, таких как

$$\begin{aligned}
 \text{точность} &= \frac{TP}{TP + FP}, \\
 \text{полнота} &= \frac{TP}{TP + FN}, \\
 \text{специфичность} &= \frac{TN}{TN + FP}, \\
 \text{правильность} &= \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN},
 \end{aligned} \tag{2}$$

где TP – число истинно положительных предсказаний; TN – число истинно отрицательных предсказаний; FP – число ложноположительных предсказаний; FN – число ложноотрицательных предсказаний.

Прогнозирование лекарственной устойчивости основано на наличии соответствующего ОНП. Если образец устойчив к препарату d и предсказан как устойчивый, то результат прогнозирования считается истинно положительным. Аналогично, если образец чувствителен к препарату d и предсказан как чувствительный, то прогноз является истинно отрицательным. Однако ни одно предсказание не идеально. Так, если образец устойчив к препарату d , а прогнозируется, что он чувствителен, то такое предсказание считается ложноотрицательным. Аналогично, если образец чувствителен к препарату d , но предсказан как устойчивый, то результат прогнозирования будет ложноположительным.

Из формулы (2) следует, что точность – это отношение общего числа правильно предсказанных положительных образцов к общему числу образцов, предсказанных как положительные. Полнота представляет собой отношение общего числа правильно предсказанных положительных образцов к общему числу положительных образцов. Специфичность определяется как отношение общего числа правильно предсказанных отрицательных образцов к общему числу отрицательных образцов. Правильность отражает долю правильно предсказанных образцов, как положительных, так и отрицательных, от общего количества образцов.

Алгоритмы взаимодействия ОНП. Если исходная последовательность ОНП $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ содержит тысячи элементов, то можно вычислить значения меры правильности $a(x_i, x_j)$ (2) для комбини-

рованных ОНП, образованных всеми парами одиночных ОНП (x_i, x_j) . В дальнейшем полученная информация используется для поиска наиболее важных комбинаций ОНП.

Выберем q пар (x_i, x_j) , $q \geq 1$, с наибольшими значениями $a(x_i, x_j)$, которые содержат различные ОНП. Продолжим отобранные пары ОНП до комбинаций, состоящих из не более чем l ОНП, $l \geq 2$, с помощью жадного алгоритма следующим образом. Для всех отобранных пар (x_i, x_j) рассмотрим комбинации трех ОНП (x_i, x_j, x_r) для каждого x_r из начальной последовательности \mathbf{x} , отличного от x_i и x_j . Выберем произвольную комбинацию трех ОНП (x_i, x_j, x_k) с максимальным значением $a(x_i, x_j, x_k)$. Аналогичным образом можно получить комбинации, состоящие из не более чем l ОНП, начиная с отобранной пары (x_i, x_j) . Наконец, выберем либо один ОНП, либо комбинацию ОНП, ассоциированные с устойчивостью к рассматриваемому препарату, с максимальным значением меры правильности. Эта процедура может быть формализована алгоритмами 1 и 2 для аддитивного и мультипликативного режимов взаимодействия ОНП соответственно.

Алгоритм 1 (аддитивное взаимодействие ОНП).

Дана последовательность ОНП $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, отсортированных в невозрастающем порядке значений меры правильности $a(x_1) \geq a(x_2) \geq \dots \geq a(x_p)$.

Шаг 1. Вычислим значения $a(x_i, x_j)$ для каждой пары ОНП, используя аддитивный режим взаимодействия.

Шаг 2. Выберем q пар ОНП с максимальными значениями меры правильности.

Шаг 3. Продолжим каждую выбранную пару до комбинации, содержащей не более l ОНП, с помощью жадного алгоритма для аддитивных взаимодействий.

Шаг 4. Выберем либо отдельный ОНП, либо комбинацию не более чем l ОНП, связанные с устойчивостью к рассматриваемому препарату, с максимальным значением меры правильности.

Алгоритм 2 (мультипликативное взаимодействие ОНП).

Дана последовательность ОНП $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, отсортированных в невозрастающем порядке значений меры правильности $a(x_1) \geq a(x_2) \geq \dots \geq a(x_p)$.

Шаг 1. Вычислим значения $a(x_i, x_j)$ для каждой пары ОНП, используя мультипликативный режим взаимодействия.

Шаг 2. Выберем q пар ОНП с максимальными значениями меры правильности.

Шаг 3. Продолжим каждую выбранную пару до комбинации, содержащей не более l ОНП, с помощью жадного алгоритма для мультипликативных взаимодействий.

Шаг 4. Выберем либо отдельный ОНП, либо комбинацию не более чем l ОНП, связанные с устойчивостью к рассматриваемому препарату, с максимальным значением меры правильности.

Выбор режима взаимодействия ОНП влияет на прогностические свойства комбинированных мутаций. Аддитивные взаимодействия имеют тенденцию к уменьшению числа истинно отрицательных и увеличению числа ложноположительных предсказаний, в то время как мультипликативные взаимодействия имеют тенденцию к увеличению числа ложноотрицательных и уменьшению числа истинно положительных предсказаний. В связи с этим представляется разумным использовать смешанный режим аддитивного и мультипликативного взаимодействий. Рассмотрим два дополнительных алгоритма. Алгоритм 3 применяет мультипликативное взаимодействие для продолжения пар ОНП, полученных с помощью аддитивного взаимодействия, а алгоритм 4 использует аддитивное взаимодействие для продолжения пар ОНП, полученных с помощью мультипликативного взаимодействия.

Алгоритм 3 (аддитивно-мультипликативное взаимодействие ОНП).

Дана последовательность ОНП $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, отсортированных в невозрастающем порядке значений меры правильности $a(x_1) \geq a(x_2) \geq \dots \geq a(x_p)$.

Шаг 1. Вычислим значения $a(x_i, x_j)$ для каждой пары ОНП, используя аддитивный режим взаимодействия.

Шаг 2. Выберем q пар ОНП с максимальными значениями меры правильности.

Шаг 3. Продолжим каждую выбранную пару до комбинации, содержащей не более l ОНП, с помощью жадного алгоритма с использованием мультипликативных взаимодействий.

Шаг 4. Выберем либо отдельный ОНП, либо комбинацию не более чем l ОНП, связанные с устойчивостью к рассматриваемому препарату, с максимальным значением меры правильности.

Алгоритм 4 (мультипликативно-аддитивное взаимодействие ОНП).

Дана последовательность ОНП $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, отсортированных в невозрастающем порядке значений меры правильности $a(x_1) \geq a(x_2) \geq \dots \geq a(x_p)$.

Шаг 1. Вычислим значения $a(x_i, x_j)$ для каждой пары ОНП, используя мультипликативный режим взаимодействия.

Шаг 2. Выберем q пар ОНП с максимальными значениями меры правильности.

Шаг 3. Продолжим каждую выбранную пару до комбинации, содержащей не более l ОНП, с помощью жадного алгоритма с использованием аддитивных взаимодействий.

Шаг 4. Выберем либо отдельный ОНП, либо комбинацию не более чем l ОНП, связанные с устойчивостью к рассматриваемому препарату, с максимальным значением меры правильности.

Если длина последовательности \mathbf{x} измеряется сотнями тысяч элементов, то прямая проверка значений меры правильности для всех пар (x_i, x_j) становится невозможной из-за ограниченности вычислительных ресурсов. В этом случае можно выбрать подпоследовательность исходной последовательности \mathbf{x} , содержащую разумное количество мутаций, которое еще позволяет вычислить значения используемой меры качества предсказания для всех пар ее элементов, а затем, следуя описанным выше процедурам, получить комбинации не более чем l ОНП с помощью жадного алгоритма. Понятно, что все алгоритмы могут быть использованы и для других мер качества предсказания (2).

Результаты и их обсуждение

Применение алгоритмов к препаратам первой линии. Для снижения вычислительной сложности для каждого препарата первой линии отобраны 25 пар ОНП ($q = 25$) с наибольшим значением меры правильности, которые были продолжены с помощью разработанных алгоритмов до комбинированных ОНП, содержащих не более 5 мутаций ($l = 5$). Для препаратов EMB, INH, PZA и SM максимальные значения меры правильности (79,5; 90,8; 75,8 и 82,1 % соответственно) получены с помощью алгоритма 1 (табл. 2). Для препарата RIF наибольшая величина меры правильности (88,9 %) была достигнута с использованием алгоритма 4. Из рис. 1 видно, что комбинации двух ОНП, использующие либо аддитивный, либо мультипликативный режим взаимодействия, дают лучшие значения рассматриваемой меры качества предсказания, чем одиночные ОНП.

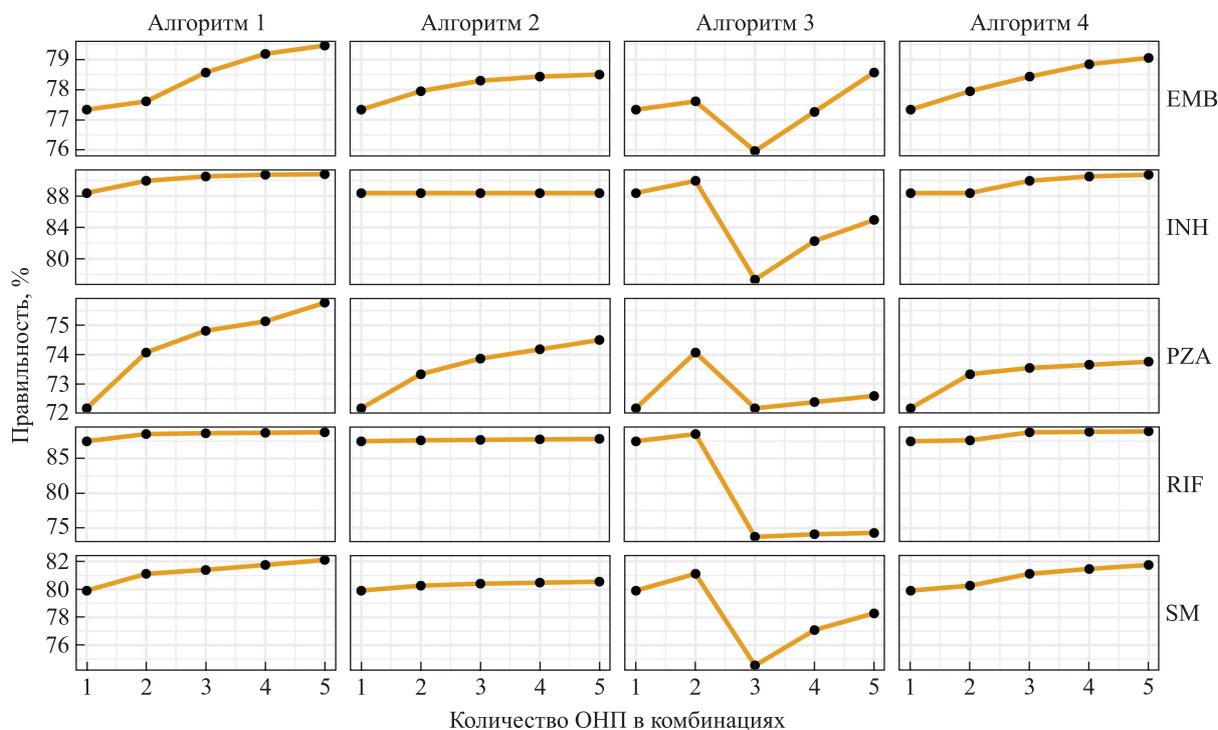


Рис. 1. Комбинации l ОНП, $l \in \{2, 3, 4, 5\}$, наиболее значимо ассоциированные с устойчивостью к препаратам первой линии
Fig. 1. Combinations of l single nucleotide polymorphisms (SNPs), $l \in \{2, 3, 4, 5\}$, most significantly associated with resistance to the first-line drugs

Таблица 2

Правильность прогнозирования устойчивости
 к препаратам первой линии

Table 2

Accuracy of predicting resistance
 to the first-line drugs

Препарат	Количество предсказаний				Правильность, %
	TN	FP	FN	TP	
<i>Алгоритм 1</i>					
EMB	590	249	50	567	79,5
INH	401	37	93	884	90,8
PZA	292	155	74	424	75,8
RIF	504	123	52	881	88,8
SM	371	168	85	790	82,1
<i>Алгоритм 2</i>					
EMB	587	252	61	556	78,5
INH	423	15	149	828	88,4
PZA	259	188	53	445	74,5
RIF	523	104	86	847	87,8
SM	382	157	118	757	80,6
<i>Алгоритм 3</i>					
EMB	597	242	70	547	78,6
INH	421	17	125	852	90,0
PZA	269	178	67	431	74,1
RIF	508	119	60	873	88,5
SM	354	185	82	793	81,1
<i>Алгоритм 4</i>					
EMB	573	266	39	578	79,1
INH	402	36	95	882	90,7
PZA	223	224	24	474	73,8
RIF	514	113	60	873	88,9
SM	358	181	77	798	81,8

Примечание. Полу жирным начертанием выделены наилучшие значения меры правильности для каждого препарата.

Применение алгоритмов к препаратам второй линии. Значения меры правильности предсказания, полученные с помощью рассматриваемых алгоритмов для препаратов второй линии, представлены в табл. 3. В большинстве случаев лучшие результаты дает алгоритм 4, для 5 препаратов – алгоритм 1, для 3 препаратов – алгоритм 2. Почти везде наибольшая величина меры правильности предсказания по двум ОНП превышает лучший результат, достигнутый при использовании одного ОНП (рис. 2). По мере увеличения количества ОНП в комбинациях ($l \in \{2, 3, 4, 5\}$) максимальное значение меры правильности предсказания изменяется (см. рис. 2).

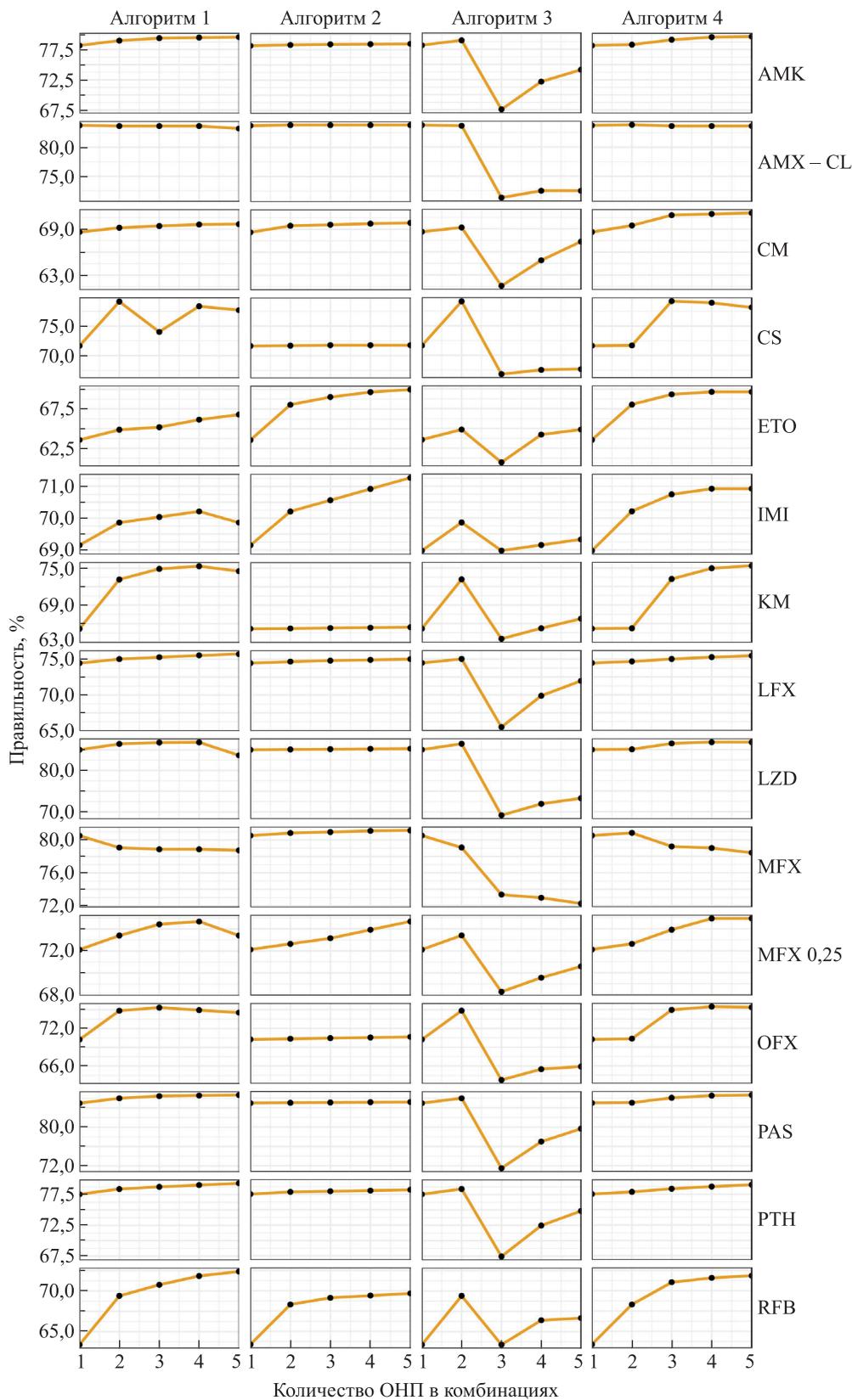


Рис. 2. Комбинации l ОНП, $l \in \{2, 3, 4, 5\}$,
наиболее значимо ассоциированные с устойчивостью к препаратам второй линии

Fig. 2. Combinations of l SNPs, $l \in \{2, 3, 4, 5\}$,
most significantly associated with resistance to the second-line drugs

Таблица 3

Правильность прогнозирования устойчивости
 к препаратам второй линии

Table 3

Accuracy of predicting resistance
 to the second-line drugs

Препарат	Количество предсказаний				Правильность, %
	TN	FP	FN	TP	
<i>Алгоритм 1</i>					
AMK	549	393	66	1236	79,5
AMX – CL	592	34	116	181	83,7
CM	384	559	87	1098	69,6
CS	739	71	218	358	79,1
ETO	83	72	34	124	66,1
IMI	322	62	106	74	70,2
KM	689	172	230	537	75,3
LFX	382	395	82	1106	75,7
LZD	575	144	52	714	86,8
MFX	1062	97	209	204	80,5
MFX 0,25	204	50	49	88	74,7
OFX	525	64	176	209	75,4
PAS	505	200	63	1201	86,6
PTH	332	273	85	1042	79,3
RFB	133	64	37	132	72,4
<i>Алгоритм 2</i>					
AMK	567	375	108	1194	78,5
AMX – CL	593	33	116	181	83,9
CM	943	0	1185	0	44,3
CS	810	0	576	0	58,4
ETO	155	0	158	0	49,5
IMI	376	8	154	26	71,3
KM	813	48	515	252	65,4
LFX	428	349	142	1046	75,0
LZD	583	136	83	683	85,3
MFX	1078	81	215	198	81,2
MFX 0,25	235	19	80	57	74,7
OFX	568	21	265	120	70,6
PAS	705	0	1264	0	35,8
PTH	361	244	133	994	78,2
RFB	155	42	69	100	69,7
<i>Алгоритм 3</i>					
AMK	549	393	79	1223	79,0
AMX – CL	592	34	116	181	83,7
CM	404	539	117	1068	69,2
CS	739	71	218	358	79,1
ETO	65	90	20	138	64,9

Окончание табл. 3
Ending of the table 3

Препарат	Количество предсказаний				Правильность, %
	TN	FP	FN	TP	
IMI	345	39	133	47	69,5
KM	773	88	349	418	73,2
LFX	388	389	102	1086	75,0
LZD	576	143	59	707	86,4
MFX	1062	97	209	204	80,5
MFX 0,25	228	26	78	59	73,4
OFX	549	40	205	180	74,8
PAS	505	200	76	1188	86,0
PTH	335	270	104	1023	78,4
RFB	126	71	41	128	69,4
<i>Алгоритм 4</i>					
AMK	553	389	68	1234	79,6
AMX – CL	593	33	116	181	83,9
CM	500	443	172	1013	71,1
CS	740	70	218	358	79,2
ETO	85	70	25	133	69,6
IMI	342	42	122	58	70,9
KM	690	171	230	537	75,4
LFX	382	395	87	1101	75,5
LZD	577	142	54	712	86,8
MFX	1072	87	214	199	80,9
MFX 0,25	224	30	68	69	74,9
OFX	526	63	176	209	75,5
PAS	506	199	65	1199	86,6
PTH	332	273	90	1037	79,0
RFB	116	81	22	147	71,9

Примечание. Полужирным начертанием выделены наилучшие значения меры правильности для каждого препарата.

Сравнение с другими алгоритмами. Эффективность разработанных алгоритмов была сопоставлена с эффективностью программных систем *Mykrobe* [15] и *TB-Profiler* [20], которые относятся к числу лучших вычислительных инструментов для предсказания лекарственной устойчивости МБТ. В системе *Mykrobe* используется граф де Брейна для представления генома и байесовский вывод для предсказания устойчивости к лекарственным препаратам. Система *TB-Profiler* строит прогноз устойчивости к лекарственным препаратам на основе анализа ОНП и набора правил для их интерпретации.

Значения меры правильности, полученные с помощью программ *Mykrobe* (версия 0.13.0) и *TB-Profiler* (версия 5.0.1) для 13 препаратов, были вычислены с использованием того же набора данных, который применялся в разработанных авторами алгоритмах. Результаты сравнения алгоритмов 1–4 с программными системами *Mykrobe* и *TB-Profiler* приведены в табл. 4, анализ которой свидетельствует о том, что для всех препаратов первой линии и препарата OFX второй линии системы *Mykrobe* и *TB-Profiler* по правильности прогнозирования незначительно превосходят алгоритмы 1–4, однако для остальных препаратов второй линии уступают им. Дополнительным преимуществом предложенных авторами алгоритмов является интуитивно понятная интерпретация полученных результатов, поскольку устойчивость к конкретному препарату предсказывается по наличию соответствующих индивидуальных мутаций в геноме образца и по режиму их взаимодействия.

Сравнение разработанных алгоритмов с системами *Mykrobe* и *TB-Profiler*
для прогнозирования устойчивости к противотуберкулезным препаратам первой и второй линий

Table 4

Comparison of the developed algorithms with *Mykrobe* and *TB-Profiler* systems
for prediction of resistance to the first-line and second-line anti-tuberculosis drugs

Препарат	Количество предсказаний				Полнота, %	Специ- фичность, %	Точность, %	Правиль- ность, %	Алгоритм или программа
	TN	FP	FN	TP					
EMB	590	249	50	567	91,9	70,3	69,5	79,5	Алгоритм 1
	661	178	83	534	86,5	78,8	75,0	82,1	<i>Mykrobe</i>
	604	235	42	575	93,2	72,0	71,0	81,0	<i>TB-Profiler</i>
INH	401	37	93	884	90,5	91,6	96,0	90,8	Алгоритм 1
	419	19	104	873	89,4	95,7	97,9	91,3	<i>Mykrobe</i>
	417	21	99	878	89,9	95,2	97,7	91,5	<i>TB-Profiler</i>
PZA	292	155	74	424	85,1	65,3	73,2	75,8	Алгоритм 1
	374	73	101	397	79,7	83,7	84,5	81,6	<i>Mykrobe</i>
	361	86	87	411	82,5	80,8	82,7	81,7	<i>TB-Profiler</i>
RIF	514	113	60	873	93,6	82,0	88,5	88,9	Алгоритм 4
	532	95	69	864	92,6	84,8	90,1	89,5	<i>Mykrobe</i>
	530	97	58	875	93,8	84,5	90,0	90,1	<i>TB-Profiler</i>
SM	371	168	85	790	90,3	68,8	82,5	82,1	Алгоритм 1
	349	190	46	829	94,7	64,7	81,4	83,3	<i>Mykrobe</i>
	357	182	61	814	93,0	66,2	81,7	82,8	<i>TB-Profiler</i>
AMK	553	389	68	1234	94,8	58,7	76,0	79,6	Алгоритм 3
	898	44	878	424	32,6	95,3	90,6	58,9	<i>Mykrobe</i>
	895	47	870	432	33,2	95,0	90,2	59,1	<i>TB-Profiler</i>
AMX – CL	593	33	116	181	60,9	94,7	84,6	83,9	Алгоритм 2
	Неприменимо								<i>Mykrobe</i>
	Неприменимо								<i>TB-Profiler</i>
CM	500	443	172	1013	85,5	53,0	69,6	71,1	Алгоритм 4
	899	44	838	347	29,3	95,3	88,7	58,6	<i>Mykrobe</i>
	894	49	794	391	33,0	94,8	88,9	60,4	<i>TB-Profiler</i>
CS	740	70	218	358	62,2	91,4	83,6	79,2	Алгоритм 4
	Неприменимо								<i>Mykrobe</i>
	788	22	518	58	10,1	97,3	72,5	61,0	<i>TB-Profiler</i>
ETO	85	70	25	133	84,2	54,8	65,5	69,6	Алгоритм 4
	76	79	44	114	72,2	49,0	59,1	60,7	<i>Mykrobe</i>
	70	85	36	122	77,2	45,2	58,9	61,3	<i>TB-Profiler</i>
IMI	376	8	154	26	14,4	97,9	76,5	71,3	Алгоритм 2
	Неприменимо								<i>Mykrobe</i>
	Неприменимо								<i>TB-Profiler</i>
KM	690	171	230	537	70,0	80,1	75,8	75,4	Алгоритм 4
	586	275	168	599	78,1	68,1	68,5	72,8	<i>Mykrobe</i>
	573	288	155	612	79,8	66,6	68,0	72,8	<i>TB-Profiler</i>

Окончание табл. 4
Ending of the table 4

Препарат	Количество предсказаний				Полнота, %	Специфичность, %	Точность, %	Правильность, %	Алгоритм или программа
	TN	FP	FN	TP					
LFX	382	395	82	1106	93,1	49,2	73,7	75,7	Алгоритм 1
	699	78	588	600	50,5	90,0	88,5	66,1	<i>Mykrobe</i>
	695	82	552	636	53,5	89,4	88,6	67,7	<i>TB-Profiler</i>
LZD	575	144	52	714	93,2	80,0	83,2	86,8	Алгоритм 1
	719	0	764	2	0,3	100,0	100,0	48,6	<i>Mykrobe</i>
	719	0	763	3	0,4	100,0	100,0	48,6	<i>TB-Profiler</i>
MFX	1078	81	215	198	47,9	93,0	71,0	81,2	Алгоритм 2
	783	376	90	323	78,2	67,6	46,2	70,4	<i>Mykrobe</i>
	753	406	80	333	80,6	65,0	45,1	69,1	<i>TB-Profiler</i>
MFX 0,25	224	30	68	69	50,4	88,2	69,7	74,9	Алгоритм 4
	Неприменимо								<i>Mykrobe</i>
	Неприменимо								<i>TB-Profiler</i>
OFX	526	63	176	209	54,3	89,3	76,8	75,5	Алгоритм 4
	535	54	110	275	71,4	90,8	83,6	83,2	<i>Mykrobe</i>
	525	64	99	286	74,3	89,1	81,7	83,3	<i>TB-Profiler</i>
PAS	505	200	63	1201	95,0	71,6	85,7	86,6	Алгоритм 1
	Неприменимо								<i>Mykrobe</i>
	690	15	1149	115	9,1	97,9	88,5	40,9	<i>TB-Profiler</i>
PTH	332	273	85	1042	92,5	54,9	79,2	79,3	Алгоритм 1
	Неприменимо								<i>Mykrobe</i>
	Неприменимо								<i>TB-Profiler</i>
RFB	133	64	37	132	78,1	67,5	67,3	72,4	Алгоритм 1
	Неприменимо								<i>Mykrobe</i>
	Неприменимо								<i>TB-Profiler</i>

Примечание. Полу жирным начертанием выделены наилучшие значения меры правильности для каждого препарата и алгоритм либо программа, с помощью которых они были получены.

В табл. 5 приведены ОНП, показавшие наилучшие результаты, и соответствующие им гены. В большинстве случаев эти ОНП распределены по разным генам, и только у некоторых препаратов несколько важных ОНП находятся в пределах одного гена.

Таблица 5

Важные ОНП и соответствующие им гены

Table 5

Important SNPs and corresponding genes

Препарат	ОНП	Гены	Правильность, %
<i>Первая линия</i>			
EMB	rs4247429	<i>embB</i>	79,5
	rs761155	<i>rpoB</i>	
	rs4248003	<i>embB</i>	
	rs4247431	<i>embB</i>	
	rs2101193	<i>ureD</i>	

Продолжение табл. 5
 Continuation of the table 5

Препарат	ОНП	Гены	Правильность, %
INH	rs2155168	<i>katG</i>	90,8
	rs1673425	NA	
	rs761155	<i>rpoB</i>	
	rs781687	<i>rpsL</i>	
	rs184866	<i>pntAb</i>	
PZA	rs2904110	<i>dhaA</i>	75,8
	rs781822	<i>rpsL</i>	
	rs4247429	<i>embB</i>	
	rs4248003	<i>embB</i>	
	rs4247431	<i>embB</i>	
RIF	rs1977	NA	88,9
	rs2155168	<i>katG</i>	
	rs761155	<i>rpoB</i>	
	rs7582	<i>gyrA</i>	
	rs1473246	<i>rrs</i>	
SM	rs1472359	<i>rrs</i>	82,1
	rs761155	<i>rpoB</i>	
	rs781687	<i>rpsL</i>	
	rs781822	<i>rpsL</i>	
	rs184866	<i>pntAb</i>	
<i>Вторая линия</i>			
AMK	rs1093406	<i>PE_PGRS17</i>	79,6
	rs2155168	<i>katG</i>	
	rs1673425	NA	
	rs1473246	<i>rrs</i>	
	rs4247431	<i>embB</i>	
AMX – CL	rs2923391	<i>ruvB</i>	83,9
	rs1473246	<i>rrs</i>	
CM	rs2155168	<i>katG</i>	71,1
	rs3590686	NA	
	rs1473246	<i>rrs</i>	
	rs337976	<i>PE_PGRS4</i>	
	rs4247431	<i>embB</i>	
CS	rs7582	<i>gyrA</i>	79,2
	rs1933988	NA	
	rs7570	<i>gyrA</i>	
ETO	rs840496	<i>PE_PGRS10</i>	69,6
	rs761155	<i>rpoB</i>	
	rs104962	<i>Rv0095c</i>	
	rs2045310	<i>PE_PGRS32</i>	
	rs24698	<i>fhaA</i>	

Продолжение табл. 5
Continuation of the table 5

Препарат	ОНП	Гены	Правильность, %
IMI	rs2944769	<i>PE_PGRS45</i>	71,3
	rs2196855	<i>Rv1945</i>	
	rs336005	<i>Rv0278c</i>	
	rs71336	<i>Rv0064</i>	
	rs3732624	<i>PPE54</i>	
KM	rs7582	<i>gyrA</i>	75,4
	rs1093406	<i>PE_PGRS17</i>	
	rs7570	<i>gyrA</i>	
	rs1473246	<i>rrs</i>	
	rs493324	<i>pta</i>	
LFX	rs2155168	<i>katG</i>	75,7
	rs781687	<i>rpsL</i>	
	rs781822	<i>rpsL</i>	
	rs1472359	<i>rrs</i>	
	rs1473246	<i>rrs</i>	
LZD	rs2155168	<i>katG</i>	86,8
	rs761155	<i>rpoB</i>	
	rs1473246	<i>rrs</i>	
	rs761139	<i>rpoB</i>	
MFX	rs1473246	<i>rrs</i>	81,2
	rs1224367	NA	
	rs1499274	<i>pncB1</i>	
	rs3746409	<i>PPE55</i>	
	rs177857	<i>PE1</i>	
MFX 0,25	rs7582	<i>gyrA</i>	74,9
	rs3883796	<i>Rv3466</i>	
	rs3738503	<i>PE_PGRS50</i>	
	rs2715344	NA	
OFX	rs7582	<i>gyrA</i>	75,5
	rs92199	<i>Rv0083</i>	
	rs7570	<i>gyrA</i>	
	rs2030634	<i>esxM</i>	
PAS	rs2155168	<i>katG</i>	86,6
	rs1673425	NA	
	rs1473246	<i>rrs</i>	
	rs4247429	<i>embB</i>	
	rs4247431	<i>embB</i>	

Окончание табл. 5
 Ending of the table 5

Препарат	ОНП	Гены	Правильность, %
РТН	rs2155168	<i>katG</i>	79,3
	rs781687	<i>rpsL</i>	
	rs781822	<i>rpsL</i>	
	rs1472359	<i>rrs</i>	
	rs1473246	<i>rrs</i>	
RFB	rs1626935	<i>zwf2</i>	72,4
	rs1130195	<i>ispE</i>	
	rs4243221	NA	
	rs4247429	<i>embB</i>	
	rs1161026	<i>esxJ</i>	

Примечание. Аббревиатура NA означает, что данный ОНП не находится в гене.

Заключение

Таким образом, в данном исследовании предложены четыре новых алгоритма для выявления комбинаций индивидуальных мутаций, ассоциированных с устойчивостью патогенных организмов к лекарственным препаратам. Разработанные алгоритмы основаны на анализе геномов и концепции взаимодействия мутаций, предполагающей, что комбинации нескольких ОНП позволяют предсказывать фенотип с более высоким значением меры правильности, чем одиночные ОНП. Рассмотрены два режима взаимодействия мутаций – аддитивный и мультипликативный. Предложенные алгоритмы используют различные последовательности режимов взаимодействия ОНП. Важным моментом является то, что все алгоритмы на первом этапе применяют полный перебор пар мутаций для поиска тех из них, которые демонстрируют наибольшие значения меры правильности предсказания устойчивости к лекарству. На втором этапе отобранные пары ОНП используются для получения комбинаций, содержащих до 5 мутаций, с помощью жадного алгоритма. Очевидно, что исчерпывающий поиск пар ОНП возможен лишь при ограничении числа отдельных ОНП, делающем процедуру вычислительно выполнимой. В случае прогнозирования устойчивости МБТ к лекарственным препаратам максимальное количество ОНП, которые необходимо рассмотреть, составляет менее 10 000, поэтому исчерпывающий поиск позволил проверить все их пары. В итоге удалось выявить комбинации, содержащие до 5 мутаций и ассоциированные с устойчивостью к 20 препаратам, применяемым в настоящее время для лечения туберкулеза. В будущем авторы планируют усовершенствовать предложенный подход и найти комбинации ОНП с более высокими величинами ассоциации с лекарственной устойчивостью МБТ.

Библиографические ссылки

1. Visscher PM, Wray NR, Zhang Q, Sklar P, McCarthy MI, Brown MA, et al. 10 years of GWAS discovery: biology, function, and translation. *The American Journal of Human Genetics*. 2017;101(1):5–22. DOI: 10.1016/j.ajhg.2017.06.005.
2. Abdellaoui A, Yengo L, Verweij KJH, Visscher PM. 15 years of GWAS discovery: realizing the promise. *The American Journal of Human Genetics*. 2023;110(2):179–194. DOI: 10.1016/j.ajhg.2022.12.011.
3. Zhu Zhixiang, Tong Xiaoran, Zhu Zhihong, Liang Meimei, Cui Wenyan, Su Kunkai, et al. Development of GMDR-GPU for gene – gene interaction analysis and its application to WTCCC GWAS data for type 2 diabetes. *PloS One*. 2013;8(4):e61943. DOI: 10.1371/journal.pone.0061943.
4. Díez Díaz F, Sánchez Lasheras F, Moreno V, Moratalla-Navarro F, Molina de la Torre AJ, Martín Sánchez V. GASVeM: a new machine learning methodology for multi-SNP analysis of GWAS data based on genetic algorithms and support vector machines. *Mathematics*. 2021;9(6):654. DOI: 10.3390/math9060654.
5. Nguyen T-T, Huang JZ, Wu Q, Nguyen TT, Li MJ. Genome-wide association data classification and SNPs selection using two-stage quality-based random forests. *BMC Genomics*. 2015;16(supplement 2):S5. DOI: 10.1186/1471-2164-16-S2-S5.
6. Ritchie MD, Van Steen K. The search for gene – gene interactions in genome-wide association studies: challenges in abundance of methods, practical considerations, and biological interpretation. *Annals of Translational Medicine*. 2018;6(8):157. DOI: 10.21037/atm.2018.04.05.

7. Berrandou T-E, Balding D, Speed D. LDAK-GBAT: fast and powerful gene-based association testing using summary statistics. *The American Journal of Human Genetics*. 2023;110(1):23–29. DOI: 10.1016/j.ajhg.2022.11.010.
8. Zhang J, Liang X, Gonzales S, Liu J, Gao XR, Wang X. A gene based combination test using GWAS summary data. *BMC Bioinformatics*. 2023;24:2. DOI: 10.1186/s12859-022-05114-x.
9. Evans LM, Arehart CH, Grotzinger AD, Mize TJ, Brasher MS, Stitzel JA, et al. Transcriptome-wide gene – gene interaction associations elucidate pathways and functional enrichment of complex traits. *PLoS Genetics*. 2023;19(5):e1010693. DOI: 10.1371/journal.pgen.1010693.
10. World Health Organization. *Global tuberculosis report – 2023*. Geneva: World Health Organization; 2023. XIV, 57 p.
11. Goossens SN, Sampson SL, Van Rie A. Mechanisms of drug-induced tolerance in *Mycobacterium tuberculosis*. *Clinical Microbiology Reviews*. 2020;34(1):e00141-20. DOI: 10.1128/cmr.00141-20.
12. Islam MM, Hameed HMA, Mugweru J, Chhotaray C, Wang C, Tan Y, et al. Drug resistance mechanisms and novel drug targets for tuberculosis therapy. *Journal of Genetics and Genomics*. 2017;44(1):21–37. DOI: 10.1016/j.jgg.2016.10.002.
13. Cui Z-J, Yang Q-Y, Zhang H-Y, Zhu Q, Zhang Q-Y. Bioinformatics identification of drug resistance-associated gene pairs in *Mycobacterium tuberculosis*. *International Journal of Molecular Sciences*. 2016;17(9):1417. DOI: 10.3390/ijms17091417.
14. Kuang X, Wang F, Hernandez KM, Zhang Z, Grossman RL. Accurate and rapid prediction of tuberculosis drug resistance from genome sequence data using traditional machine learning algorithms and CNN. *Scientific Reports*. 2022;12:2427. DOI: 10.1038/s41598-022-06449-4.
15. Hunt M, Bradley P, Lapierre SG, Heys S, Thomsit M, Hall MB, et al. Antibiotic resistance prediction for *Mycobacterium tuberculosis* from genome sequence data with Mykrobe. *Wellcome Open Research*. 2019;4:191. DOI: 10.12688/wellcomeopenres.15603.1.
16. Benavente ED, Coll F, Furnham N, McNerney R, Glynn JR, Campino S, et al. PhyTB: phylogenetic tree visualisation and sample positioning for *M. tuberculosis*. *BMC Bioinformatics*. 2015;16:155. DOI: 10.1186/s12859-015-0603-3.
17. Ezewudo M, Borens A, Chiner-Oms Á, Miotto P, Chindelevitch L, Starks AM, et al. Integrating standardized whole genome sequence analysis with a global *Mycobacterium tuberculosis* antibiotic resistance knowledgebase. *Scientific Reports*. 2018;8:15382. DOI: 10.1038/s41598-018-33731-1.
18. Gröschel M, Owens M, Freschi L, Vargas R Jr, Marin MG, Phelan J, et al. GenTB: a user-friendly genome-based predictor for tuberculosis resistance powered by machine learning. *Genome Medicine*. 2021;13:138. DOI: 10.1186/s13073-021-00953-4.
19. Iwai H, Kato-Miyazawa M, Kirikae T, Miyoshi-Akiyama T. CASTB (the comprehensive analysis server for the *Mycobacterium tuberculosis* complex): a publicly accessible web server for epidemiological analyses, drug-resistance prediction and phylogenetic comparison of clinical isolates. *Tuberculosis*. 2015;95(6):843–844. DOI: 10.1016/j.tube.2015.09.002.
20. Phelan JE, O’Sullivan DM, Machado D, Ramos J, Oppong YEA, Campino S, et al. Integrating informatics tools and portable sequencing technology for rapid detection of resistance to anti-tuberculous drugs. *Genome Medicine*. 2019;11:41. DOI: 10.1186/s13073-019-0650-x.
21. Sekizuka T, Yamashita A, Murase Y, Iwamoto T, Mitarai S, Kato S, et al. TGS-TB: total genotyping solution for *Mycobacterium tuberculosis* using short-read whole-genome sequencing. *PLoS One*. 2015;10(11):e0142951. DOI: 10.1371/journal.pone.0142951.
22. Sergeev RS, Kavaliou IS, Sataneuski UV, Gabrielian A, Rosenthal A, Tartakovsky M, et al. Genome-wide analysis of MDR and XDR tuberculosis from Belarus: machine-learning approach. *IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics*. 2019;16(4):1398–1408. DOI: 10.1109/TCBB.2017.2720669.
23. Steiner A, Stucki D, Coscolla M, Borrell S, Gagneux S. *KvarQ*: targeted and direct variant calling from fastq reads of bacterial genomes. *BMC Genomics*. 2014;15:881. DOI: 10.1186/1471-2164-15-881.
24. Rosenthal A, Gabrielian A, Engle E, Hurt DE, Alexandru S, Crudu V, et al. The TB Portals: an open-access, web-based platform for global drug-resistant-tuberculosis data sharing and analysis. *Journal of Clinical Microbiology*. 2017;55(11):3267–3282. DOI: <https://doi.org/10.1128/jcm.01013-17>.

Получена 25.08.2024 / исправлена 16.10.2024 / принята 16.10.2024.
Received 25.08.2024 / revised 16.10.2024 / accepted 16.10.2024.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

УДК 002.6, 004.7, 004.722

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОГРАММНО-КОНФИГУРИРУЕМЫХ СЕТЕЙ В УСЛОВИЯХ КОМПЬЮТЕРНЫХ АТАК

*И. В. КОТЕНКО¹⁾, И. Б. САЕНКО¹⁾,
С. Ю. СКОРОБОГАТОВ¹⁾, О. С. ЛАУТА²⁾, В. П. КОЧИН³⁾*

¹⁾Санкт-Петербургский федеральный исследовательский центр РАН,
14-я линия Васильевского острова, 39, 199178, г. Санкт-Петербург, Россия

²⁾Государственный университет морского и речного флота
им. адмирала С. О. Макарова, ул. Двинская, 5/7, 198035, г. Санкт-Петербург, Россия

³⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Образец цитирования:

Котенко ИВ, Саенко ИБ, Скоробогатов СЮ, Лаута ОС, Кочин ВП. Методика оценки устойчивости программно-конфигурируемых сетей в условиях компьютерных атак. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;3:90–102.
EDN: WFDUZG

For citation:

Kotenko IV, Saenko IB, Skorobogatov SY, Lauta OS, Kochyn VP. Methodology for assessing the reliability of software-defined networks under computer attacks. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;3:90–102. Russian.
EDN: WFDUZG

Авторы:

Игорь Витальевич Котенко – заслуженный деятель науки Российской Федерации, доктор технических наук, профессор; главный научный сотрудник.

Игорь Борисович Саенко – доктор технических наук, профессор; ведущий научный сотрудник.

Сергей Юрьевич Скоробогатов – соискатель.

Олег Сергеевич Лаута – доктор технических наук, доцент; профессор кафедры комплексного обеспечения информационной безопасности Института водного транспорта.

Виктор Павлович Кочин – кандидат технических наук, доцент; проректор по учебной работе и интернационализации образования.

Authors:

Igor V. Kotenko, honored scientist of the Russian Federation, doctor of science (engineering), full professor; chief researcher. ivkote@comsec.spb.ru

Igor B. Saenko, doctor of science (engineering), full professor; leading researcher.

ibsaen@comsec.spb.ru

Sergey Y. Skorobogatov, competitor.

skorobogatovsu-vas@yandex.ru

Oleg S. Lauta, doctor of science (engineering), docent; professor at the department of integrated information security, Water Transport Institute.

laos-82@yandex.ru

Victar P. Kochyn, PhD (engineering), docent; vice-rector for academic affairs and internationalisation of education.

kochyn@bsu.by

Аннотация.

Введение. Важной особенностью технологии программно-конфигурируемых сетей (SDN) является централизованное управление сетью с помощью контроллера, реализованное посредством протокола управления. Контроллер является самым уязвимым элементом SDN, атака на который может повлиять на устойчивость ее функционирования.

Постановка задачи. Разработка математических основ оценки устойчивости SDN позволит с помощью аналитических выражений вычислить показатели устойчивости SDN. В качестве базового показателя предлагается использовать коэффициент исправного действия по устойчивости SDN.

Методы. Оценка показателей устойчивости SDN выполнена с применением методов теории марковских процессов. В целях обеспечения устойчивости функционирования SDN в статье обоснован алгоритм контроля за состоянием контроллеров и их автоматической перестройкой.

Результаты. Осуществлена вербальная и математическая постановка научной задачи на исследование, а обшая задача декомпозирована на частные задачи, такие как концептуальное моделирование подсистемы интеллектуального мониторинга состояния информационно-телекоммуникационной сети общего пользования, разработка метода синтеза ее подсистемы интеллектуального мониторинга состояния и формирование научно-технических предложений по реализации данного метода.

Практическая значимость. Предложенная методика позволяет оценить устойчивость SDN в условиях характерных для нее компьютерных атак и, используя полученные показатели устойчивости, сформировать общие требования к системе защиты.

Ключевые слова: компьютерные атаки; устойчивость; программно-конфигурируемые сети; цепи Маркова.

Благодарность. Исследование выполнено за счет гранта Санкт-Петербургского научного фонда № 23-РБ-01-09.

METHODOLOGY FOR ASSESSING THE RELIABILITY OF SOFTWARE-DEFINED NETWORKS UNDER COMPUTER ATTACKS

I. V. KOTENKO^a, I. B. SAENKO^a,
S. Y. SKOROBOGATOV^a, O. S. LAUTA^b, V. P. KOCHYN^c

^aSaint Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences,
39, 14th Line V. O., Saint Petersburg 199178, Russia

^bAdmiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,
5/7 Dvinskaja Street, Saint Petersburg 198035, Russia

^cBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: V. P. Kochyn (kochyn@bsu.by)

Abstract.

Introduction. An important feature of SDN technology is centralised network management using a controller realised using the OpenFlow control protocol and allowing not only to manage network devices, but also to collect network statistics, which permits to solve emerging network problems more effectively by configuring all network devices simultaneously. The controller is the most vulnerable element, an attack on which can affect the stability of its the entire infrastructure.

Problem statement. The development of mathematical foundations for assessing SDN stability will allow us to calculate SDN stability indicators using analytical expressions. As the main indicator, it is proposed to use the coefficient of serviceable action for SDN stability.

Methods. The estimation of SDN stability indicators is carried out using methods of the theory of Markov processes. In order to ensure the stability of the SDN operation, this paper substantiates an algorithm for monitoring the state of controllers and their automatic adjustment.

Results. A verbal and mathematical formulation of the scientific problem for the study is carried out, and the general problem is decomposed into specific problems, namely, conceptual modelling of the subsystem of intelligent monitoring of the state of the public information and telecommunications network, development of a method for synthesising its subsystem of intelligent monitoring of the state, as well as the formation of scientific and technical proposals for the implementation of this method.

Practical significance. The proposed methodology makes it possible to estimate the stability of a software-defined network in the conditions of computer attacks characteristic for it, as well as to form general requirements for the protection system using the obtained stability indicators.

Keywords: computer attacks; stability; software-defined networks; Markov chains.

Acknowledgements. The research was supported by the Saint Petersburg Science Foundation grant No. 23-RB-01-09.

Введение

Важной особенностью технологии программно-конфигурируемых сетей (software-defined networks, SDN) является централизованное управление сетью с помощью контроллера, реализованное посредством протокола управления OpenFlow, позволяющего не только управлять сетевыми устройствами, но и собирать сетевую статистику, что способствует более эффективному решению возникающих в сети проблем и реконфигурирует одновременно все устройства сети.

Протокол OpenFlow позволяет реализовать управляемую и высоконадежную среду благодаря следующим возможностям [1]:

- модель потока ориентирована на обеспечение безопасности;
- централизованное управление позволяет рационально контролировать производительность сети в условиях кибератак;
- настройка политики безопасности обеспечивается программным контролем;
- сдерживание и изоляция от кибератак осуществляются через гибкое управление трафиком.

Концептуальная структура SDN включает уровень прикладных приложений, API, уровень управления, OpenFlow и уровень передачи данных.

Уровень передачи данных выполняет функции коммутаторов уровней L2 и L3 по обработке и передаче сетевого трафика. Набор правил каждый коммутатор получает от контроллера по каналу управления и протоколу управления OpenFlow. В свою очередь, протокол OpenFlow предоставляет контроллеру возможность использовать специальные таблицы маршрутизации и (или) модификации пакетов. Правила, передаваемые с помощью протокола OpenFlow, могут быть как групповыми, так и дискретными для каждого потока в отдельности. Пакеты, поступившие на входной буфер коммутатора, сначала проверяются на соответствие их заголовков шаблонам правил из нулевой таблицы, а заголовки пакетов сравниваются с шаблонами правил, и в случае совпадения выполняется инструкция согласно выбранному правилу.

В SDN можно выделить три основные составляющие: контроллер, канал управления (OpenFlow) и маршрутизатор (коммутатор) OpenFlow. Как и в классической архитектуре, базовыми элементами являются маршрутизаторы (коммутаторы), которые выполняют обработку сетевого трафика уровней L2 и L3. Однако в данном случае на сетевые устройства возложена функция пересылки трафика между конечными пользователями, а все решения, связанные с фильтрацией и перестроениями маршрутов, которые в классической реализации сети выполняли протоколы динамической маршрутизации, осуществляет контроллер.

Контроллер, в свою очередь, обладает двумя интерфейсами: сервером OpenFlow, который непосредственно управляет сетью и проверяет состояние портов и устройств посредством протокола OF-CONFIG, и интерфейсом API, предоставляемым сетевым приложениям.

Понимание процессов функционирования SDN определяется двумя уровнями технологии SDN: уровнем управления (control plane) и уровнем передачи данных (data plane).

Связь между уровнями осуществляет протокол управления OpenFlow. Для работы протокола управления реализуется соответствующий защищенный канал. Он может быть как отдельным физическим соединением контроллер – коммутатор, так и логическим каналом, проходящим через другие устройства SDN. По каналу управления происходит информационный обмен. Команды управления передаются от контроллера к коммутатору, а информация о состоянии логических переключателей и канала связи между устройствами передается от коммутатора к контроллеру. Одним из основных преимуществ данного решения является централизованное управление. Централизация позволяет динамически изменять маршруты передачи трафика в сети, исходя из меняющейся обстановки. При создании новых маршрутов и подключении новых каналов контроллер, отвечающий за конкретный сегмент, рассылает каждому устройству необходимые правила. Данная особенность существенно отличает SDN от классического подхода, где при изменениях в структуре администратор поэлементно вручную или по протоколам управления SSH/TELNET вынужден прописывать нужные правила [2].

На основе проведенного анализа можно выделить основные векторы угроз для данной концепции. К ним относятся:

- пользователи сети SDN, получающие сетевые услуги;
- канал от пользовательского до сетевого устройства;
- сетевое устройство OpenFlow;
- канал управления и мониторинга OpenFlow;
- контроллер SDN.

Контроллер является ключевым компонентом в управлении всей инфраструктурой SDN, но наиболее уязвимым элементом SDN, поскольку атака на него может повлиять на устойчивость функционирования SDN.

Экономическая парадигма современного мира привела к тому, что разработчики сетевого оборудования экономят на всем, что, в свою очередь, влияет на общую устойчивость информационно-телекоммуникационных сетей, включая SDN. Таким образом, SDN, с одной стороны, создает определенный риск, открывая злоумышленникам новые горизонты, а с другой – дает новые возможности по разработке альтернативных сервисов информационной безопасности [3–5].

Степень разработанности темы

Сегодня известны три основных направления по обеспечению устойчивости SDN в условиях таргетированных (целевых) информационно-технических воздействий [6]. Первый способ – это оптимизация маршрута, используемого для сокращения технологического цикла управления центральным контроллером [7]. В работах [8–10] были рассмотрены вариации усовершенствованного алгоритма Дейкстры по модели взвешенного графа. Для решения задачи маршрутизации потоков в условиях коллизий в работе [11] использован итерационный метод Кларка – Райта, предназначенный для оценки операции слияния между маршрутами. Особенностью этого метода является получение выигрышей путем сокращения стоимости, которое достигается комбинированием двух коротких маршрутов в один большой маршрут. Эвристический метод вставок по принципу «ближайшего соседа», а также его ответвление «табу-поиск» рассматривались в работе [12]. Но, несмотря на простоту решения, данные подходы базируются на формально не обоснованных соображениях.

Второй подход к обеспечению устойчивости SDN – структурный – основан на особенностях архитектуры сети. Часто важным фактором является устойчивость не всей сети, а ее главной части – системы управления. Кибератаки на SDN в 89 % случаев направлены на подсистему управления, так как сбой в ее работе приводит к общему «падению». В исследовании [13] структурная устойчивость SDN оценивается по четырем основным показателям: робастности, возможности резервирования, гибкости управления ресурсом и быстродействию. Такая оценка позволяет отделить процесс маршрутизации от пересылки данных, что является ключевой особенностью для сетей подобного рода.

Ряд исследований в области структурной устойчивости SDN направлены на резервирование контроллеров [14–16] с большим количеством дублируемых трибунарных (tributary) каналов, использование альтернативных алгебраических топологий (например, FatTree) [17], а также на создание гибридов [18–20] разноуровневых топологий, таких как звезда и двойное кольцо, с организацией защиты каналов доступа по принципу 1 + 1. Для всех рассмотренных типов организации структурной устойчивости SDN характерны общие недостатки: несовместимость виртуальной конфигурации с сетевыми контроллерами и высокая стоимость согласованного однотипного «железа» [21].

К третьему варианту повышения устойчивости сети отнесем комбинированные способы, которые сочетают в себе характерные особенности первых двух вариантов. Так, в работе [22] рассмотрен схожий с предлагаемым нами метод превентивного выявления факта воздействия на центральный контроллер SDN, но в отличие от нашего подхода в исследовании [22] систему защиты сети эмулируют на уровне приложений и для отсева аномальных запросов к управляющей подсистеме используют комплементарный фильтр, который, как известно, имеет характерные временные задержки при переходных процессах.

Общим вопросам количественной оценки устойчивости сложных динамических систем, к числу которых относятся SDN, посвящен ряд работ, например [23; 24]. В них исследователи рассматривают устойчивость системы как способность «планировать и готовиться к стихийным бедствиям, поглощать их, реагировать на них и восстанавливаться после них, а также адаптироваться к новым условиям» [24, р. 136]. В этих работах предлагается подход к оценке устойчивости компьютерной сети, основанный на учете критической функциональности и особенностей внешних воздействий на элементы сети. Критическая функциональность может быть определена как качество системы [25], а также как показатель производительности системы, который вводится для получения интегрированного показателя устойчивости (например, критическая функциональность может вычисляться как процент функционирующих узлов).

Таким образом, анализ известных работ по устойчивости компьютерных сетей в условиях воздействия на них компьютерных атак (КА) позволяет сделать следующие выводы:

- стохастическое аналитическое моделирование и методы теории марковских процессов имеют большое значение для обоснования мер защиты в современных системах информационной безопасности;
- с минимальными вычислительными затратами стохастические модели должны рассчитывать функции распределения интересующих нас случайных величин;
- стохастические модели должны обеспечивать моделирование любых атак и высокую гибкость.

Подходы, рассмотренные выше, не в полной мере соответствуют приведенным выводам. В основе описываемого ниже подхода к оценке устойчивости SDN лежат методы теории марковских процессов, так как они позволяют устранить этот недостаток.

Оценивая устойчивость сети, необходимо определить критерии, при которых сеть перестанет выполнять возложенные на нее функции.

При рассмотрении транспортной составляющей разумно предположить, что сеть перестанет быть работоспособной при следующих условиях:

- отказе контроллера транспортной сети либо подмене контроллера в целях управления нарушителем сетью в своих интересах;
- отказе маршрутизаторов, отвечающих за транспортную составляющую сети;
- подмене топологии, при которой нарушитель выдает себя за маршрутизатор транспортной сети и создает черные дыры для передаваемого трафика;
- отказе каналов связи между узлами сети.

Учитывая описанные выше условия, оценим устойчивость SDN при резервировании сетевых устройств. Для этого необходимо представить сеть в виде марковского процесса с дискретными состояниями в непрерывном времени; время пребывания в одном состоянии распределено по показательному закону.

На рис. 1 представлен граф дискретных состояний и условных переходов.

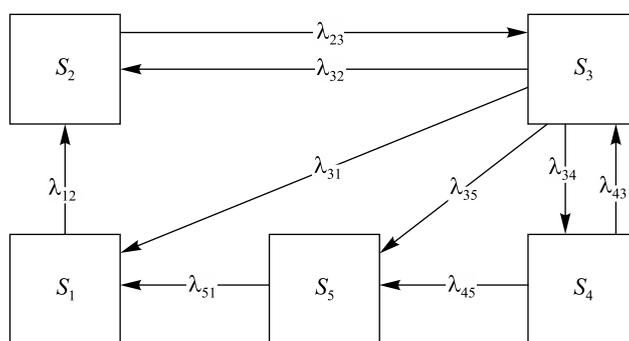


Рис. 1. Граф условных состояний системы передачи данных SDN
 Fig. 1. SDN state and transition graph

Заметим, что на графе не рассматривается переход из состояния S_2 в состояние S_5 . По нашему мнению, переход из состояния S_2 в состояние S_5 не оказывает большого влияния на устойчивость SDN, так как разведка ведется постоянно и не несет прямой угрозы функционированию сети, требующей восстановления и устранения последствий успешной компьютерной атаки. Иными словами, при составлении мы сделали акцент именно на возможности противодействия КА, но не разведке противника.

В таблице приведено описание условных дискретных состояний распределенной корпоративной SDN в условиях кибератак.

**Описание условных дискретных состояний
 распределенной корпоративной SDN в условиях кибератак**

**Description of conditional discrete states
 of distributed enterprise SDN under cyber attacks**

Условное обозначение состояния	Описание условного дискретного состояния
S_1	Стабильное устойчивое функционирование без отказов
S_2	Функционирование в условиях технической компьютерной разведки (осуществление нарушителем сбора информации о будущем объекте кибератаки)
S_3	Функционирование в условиях проведения кибератак и в отношении SDN
S_4	Функционирование при успешной атаке (успешное подключение к атакуемой сети, получение доступа к атакуемому контроллеру)
S_5	Обнаружение аномалий в сети, выявление кибератаки, устранение последствий успешной атаки

По нашему мнению, выбор такого количества и состава состояний вполне достаточен для поставленной цели исследования, хотя не исключена возможность дальнейшей детализации состояний. Этот вопрос мы рассматриваем как направление будущих исследований.

Назовем исходные данные для задачи.

1. Граф укрупненных устойчивых состояний SDN в условиях проведения КА $G = (S, \lambda)$.
2. Множество состояний S SDN в условиях ведения КА

$$S = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}.$$

3. Множество потоков событий Λ при изменении состояний SDN в условиях проведения КА

$$\Lambda = \{\lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{23}, \dots, \lambda_{ij}\}.$$

4. Характеристики устойчивых укрупненных состояний SDN при воздействии кибератак. Примером такой характеристики является время прохождения информации. Оно стремится к бесконечности для состояния S_1 и при реализации DDoS-атаки для состояния S_4 .

5. Значения интенсивностей потоков событий при воздействии КА, которые получаются следующим образом. Каждая учитываемая КА поэтапно моделируется на имитационной компьютерной модели, построенной в виртуальной среде EVE-NG, в целях получения временных характеристик ее этапов. Далее путем математических расчетов при помощи метода топологического преобразования стохастических сетей [23] получаются искомые значения интенсивностей событий.

6. Вектор вероятностей начальных состояний системы $p_i(0) = \{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$.
7. Нормировочное условие

$$\sum_{i=0}^4 p_i(t) = 1.$$

Моменты вероятностных переходов SDN из одного состояния в другое при использовании стратегии защиты неопределенны, случайны и происходят под действием потоков событий, которые характеризуются интенсивностями $\{\lambda_{ij}\}$. Интенсивности являются важной характеристикой потоков событий и представляют среднее число событий, приходящих за единицу времени. Численные значения интенсивностей зададим в соответствии с имитационной моделью. При решении системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (однородный марковский процесс) переходим к непрерывному времени $t \rightarrow 0$. По размеченному графу G сформируем систему дифференциальных уравнений с неизвестными функциями $\{p_i(t)\}$, которые определяют вероятность нахождения системы в состоянии S_i . При этом следуем правилу, что в правой части каждого дифференциального уравнения для $p_i(t)$ произведение $\lambda_{ji} p_j(t)$ добавляется со знаком «плюс», а произведение $\lambda_{ij} p_i(t)$ – со знаком «минус». Вектор вероятностей начальных состояний системы $\{p_i(0)\}$ необходим для точного решения этой системы.

$$D(P, T) = \begin{cases} \frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda_{51}p_5(t) + \lambda_{31}p_3(t) - \lambda_{12}p_1(t), \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda_{12}p_1(t) + \lambda_{12}p_3(t) - \lambda_{23}p_2(t), \\ \frac{dp_3(t)}{dt} = \lambda_{23}p_2(t) + \lambda_{31}p_1(t) + \lambda_{35}p_5(t) + \lambda_{34}p_4(t) - (\lambda_{23} + \lambda_{34})p_3(t), \\ \frac{dp_4(t)}{dt} = \lambda_{43}p_3(t) + \lambda_{45}p_5(t) - \lambda_{34}p_4(t), \\ \frac{dp_5(t)}{dt} = \lambda_{51}p_1(t) - (\lambda_{35} + \lambda_{45})p_5(t), \\ \sum_{i=0}^4 p_i(t) = 1. \end{cases}$$

Устойчивость SDN является достаточно обширным понятием даже в объеме устойчивости SDN в условиях КА, потому что, как было сказано ранее, появление новых угроз информационной безопасности есть процесс постоянный. Поэтому устойчивость следует рассматривать как способность распределенной корпоративной сети с использованием технологии SDN противостоять определенному классу КА, S_4 является состоянием функционирования SDN при успешном осуществлении КА.

Таким образом, зная вероятность $p_4(t)$ нахождения сети SDN в состоянии S_4 , можно найти вероятность устойчивого функционирования всей сети $P_{уст.}(t)$:

$$P_{уст.}(t) = 1 - p_4(t). \quad (1)$$

Блок-схема предлагаемой методики оценки устойчивости распределенной SDN в условиях кибератак имеет вид, представленный на рис. 2.

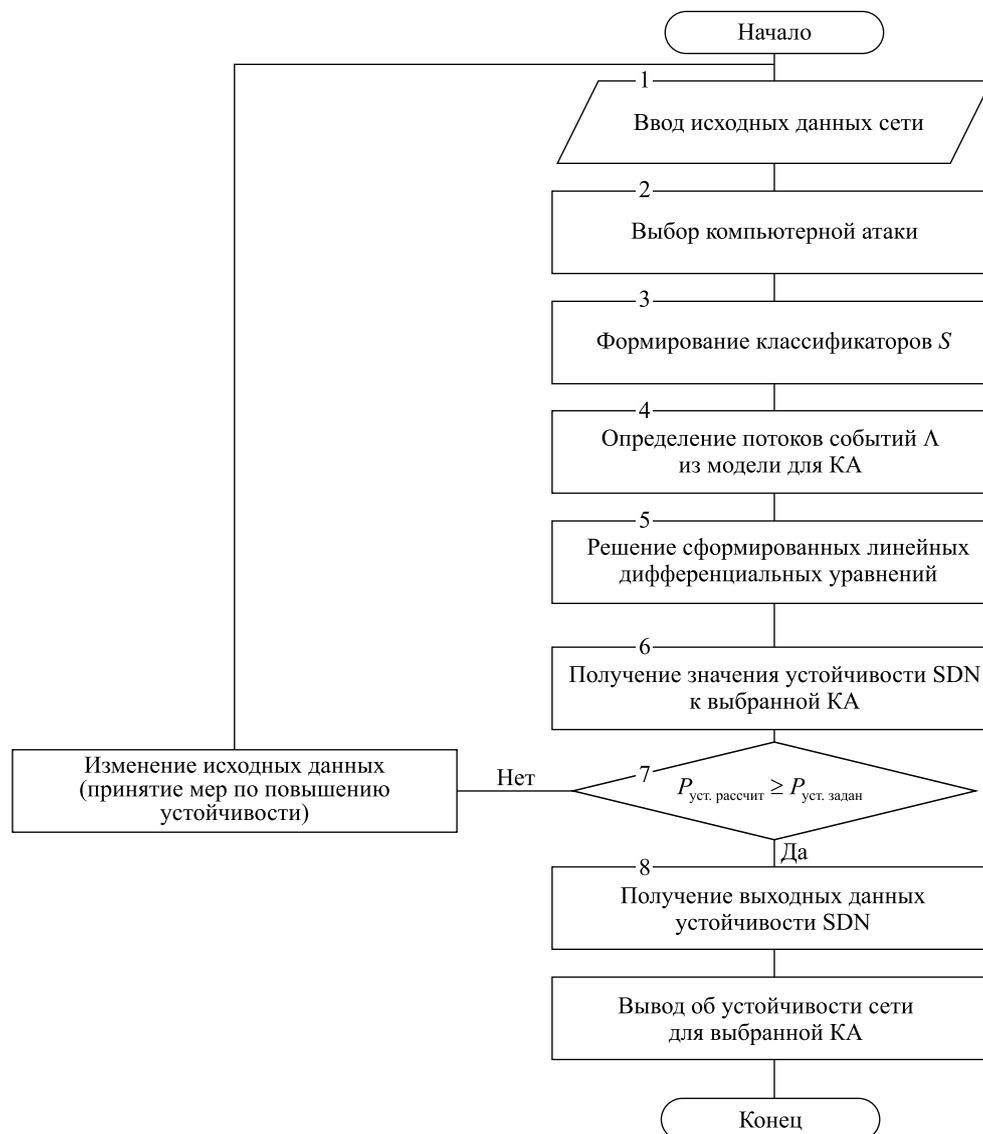


Рис. 2. Блок-схема алгоритма оценки устойчивости SDN в условиях кибератак

Fig. 2. Flowchart of an algorithm describing the technique for assessing the resilience of SDN under cyber attacks

Методика позволяет при определении наиболее актуальных атак для корпоративной SDN рассчитать степень ее устойчивости. Результаты и основанные на них выводы позволяют получить адекватную оценку устойчивости SDN в моделируемых условиях к КА, характерным для данной сети.

Оценка устойчивости SDN в условиях КА

Для оценки устойчивости SDN в условиях КА были разработаны и реализованы три структуры сети:

- 1) структура SDN, состоящая из трех элементов с одним контроллером;
- 2) структура SDN на основе двух контроллеров с перехватом функций управления по заданному алгоритму в условиях КА;
- 3) структура SDN с двумя контроллерами, когда один контроллер является основным и выполняет функции управления, а второй контроллер находится в режиме горячего резервирования.

Результаты расчета представлены в виде графиков (рис. 3–5). Для расчета показателя устойчивости SDN использовалось выражение (1). Пороговое значение 0,2 определяет ориентировочное, на наш взгляд, значение вероятности устойчивого функционирования сети. При значениях показателя устойчивости ниже порогового значения сеть перестает быть устойчивой.

Анализ результатов показал, что рассматриваемые структуры SDN в условиях воздействия КА типов «синхронная атака» и «взлом или сбой контроллера» не соответствуют требованиям по устойчивости. В целях обеспечения устойчивости функционирования SDN в условиях КА необходимо разработать алгоритм контроля за состоянием контроллеров и их автоматической перестройкой, так как через 18 мин успешной реализации КА вероятность устойчивого функционирования сети начинает стремиться к нулю.

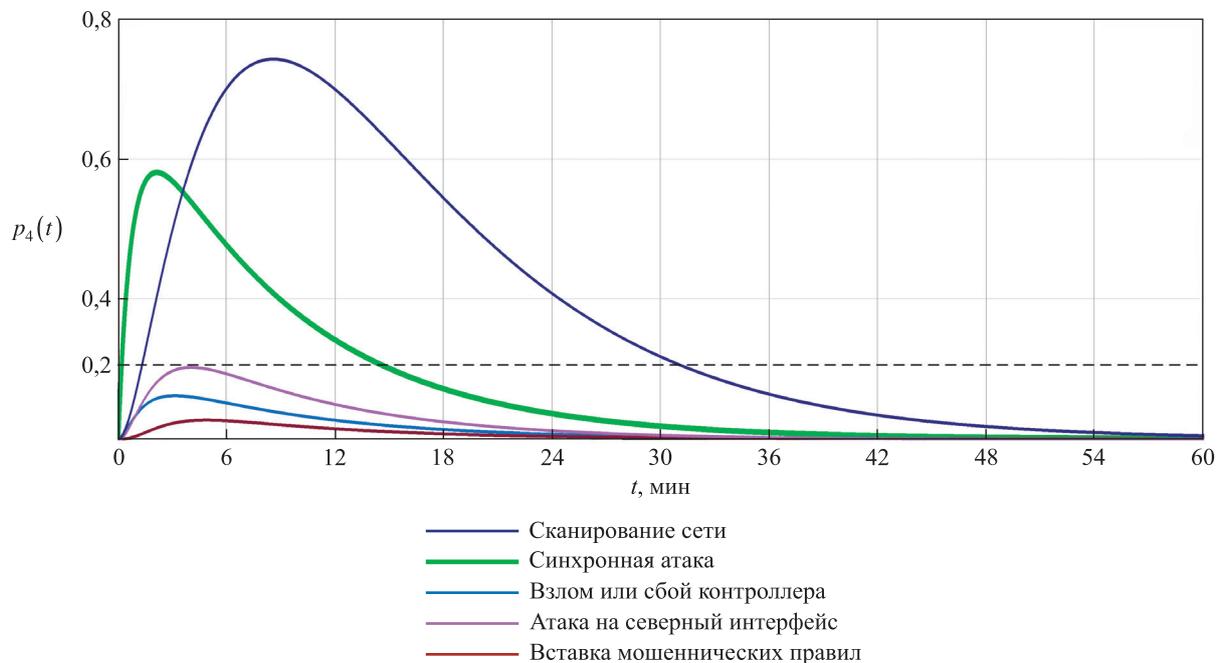


Рис. 3. Зависимость вероятности устойчивой работы SDN от времени реализации КА для структуры 1

Fig. 3. SDN resilience assessment results for structure 1

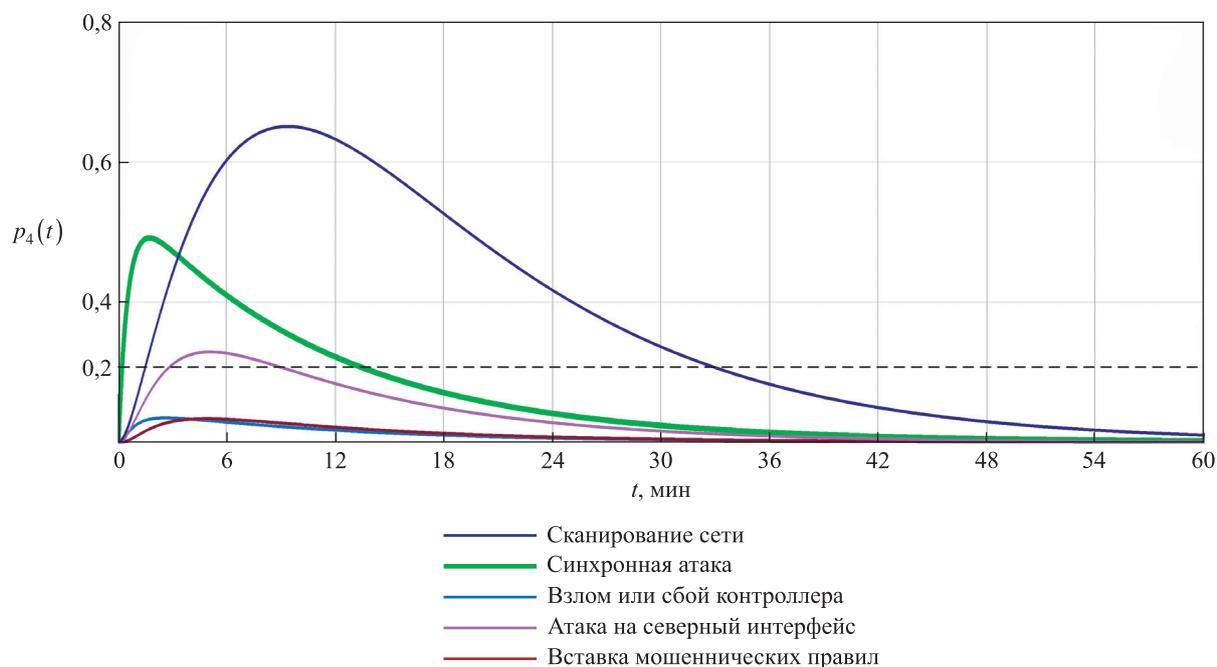


Рис. 4. Зависимость вероятности устойчивой работы SDN от времени реализации КА для структуры 2

Fig. 4. SDN resilience assessment results for structure 2

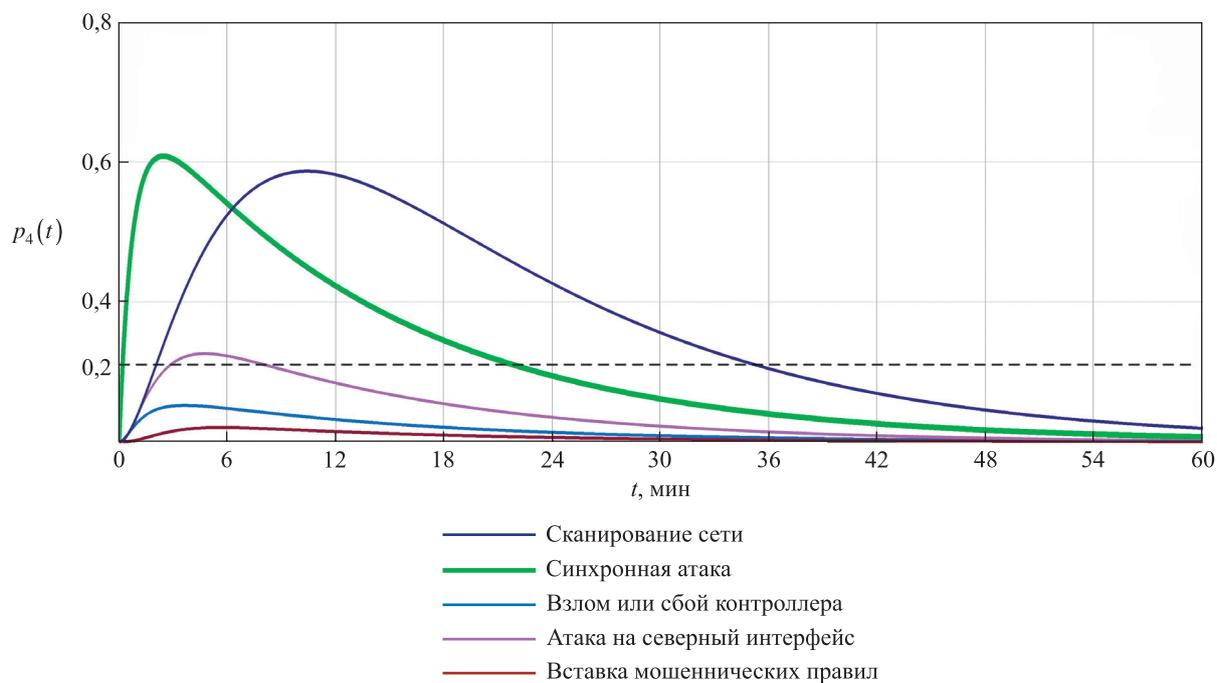


Рис. 5. Зависимость вероятности устойчивой работы SDN от времени реализации КА для структуры 3

Fig. 5. SDN resilience assessment results for structure 3

Таким образом, на базе проведенных исследований по применению SDN, а также по их устойчивости к КА были сформированы общие требования к системе противодействия. Основным способом достижения требуемого уровня устойчивости SDN может стать разработка алгоритмов резервирования контроллеров, а также алгоритмов резервирования и переключения программных коммутаторов.

Алгоритм контроля за состоянием контроллеров и их автоматической перестройкой

Учитывая вышеизложенное, можно сформулировать требования к отказоустойчивому контуру управления SDN, который включает в себя три основных уровня:

- 1) контур управления уровнем передачи;
- 2) инфраструктуру мониторинга и управления OpenFlow;
- 3) межконтроллерную коммуникационную инфраструктуру.

Сложность функционирования такого контура заключается в формировании условий инициирования процессов восстановления SDN при реализации различных КА злоумышленником.

Для решения задачи по повышению устойчивости SDN в условиях КА необходима система защиты (рис. 6), в основу которой заложен алгоритм восстановления сети, выделяющий два уровня:

- 1) уровень передачи;
- 2) уровень управления.

При проведении КА злоумышленник осуществляет ряд последовательных действий, при обнаружении которых система защиты должна сигнализировать об этом сетевому администратору, а также рекомендовать применение сценария противодействия. При этом признаки КА для уровней SDN будут различными. Например, для атаки типа «взлом или сбой контроллера», направленной на программный коммутатор, будет характерно повышение трафика, проходящего через контроллер, повышение задержки ответа от контроллера или отсутствие ответа от него, а для атаки типа «взлом или сбой контроллера», направленной на контроллер, – повышение нагрузки процессора, количества запросов и т. д. В этом случае очевидна необходимость разделить условия реагирования программных коммутаторов и контроллеров в зависимости от типов КА.

Для построения системы отказоустойчивости SDN в условиях КА разработана клиент-серверная структура, которая состоит из агентов, функционирующих на программных маршрутизаторах, и сервера, функционирующего на контроллере (рис. 7).

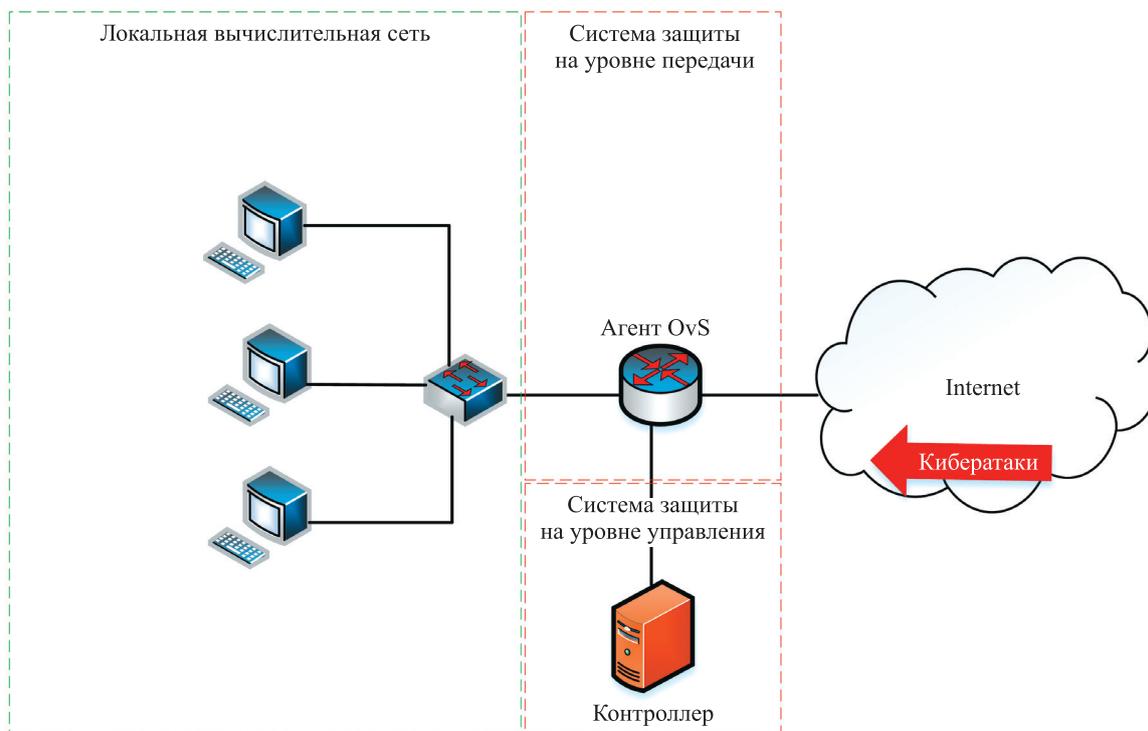


Рис. 6. Вариант предлагаемой структуры построения системы защиты SDN в условиях КА
Fig. 6. A variant of the proposed structure of the SDN protection system in cyberattacks conditions

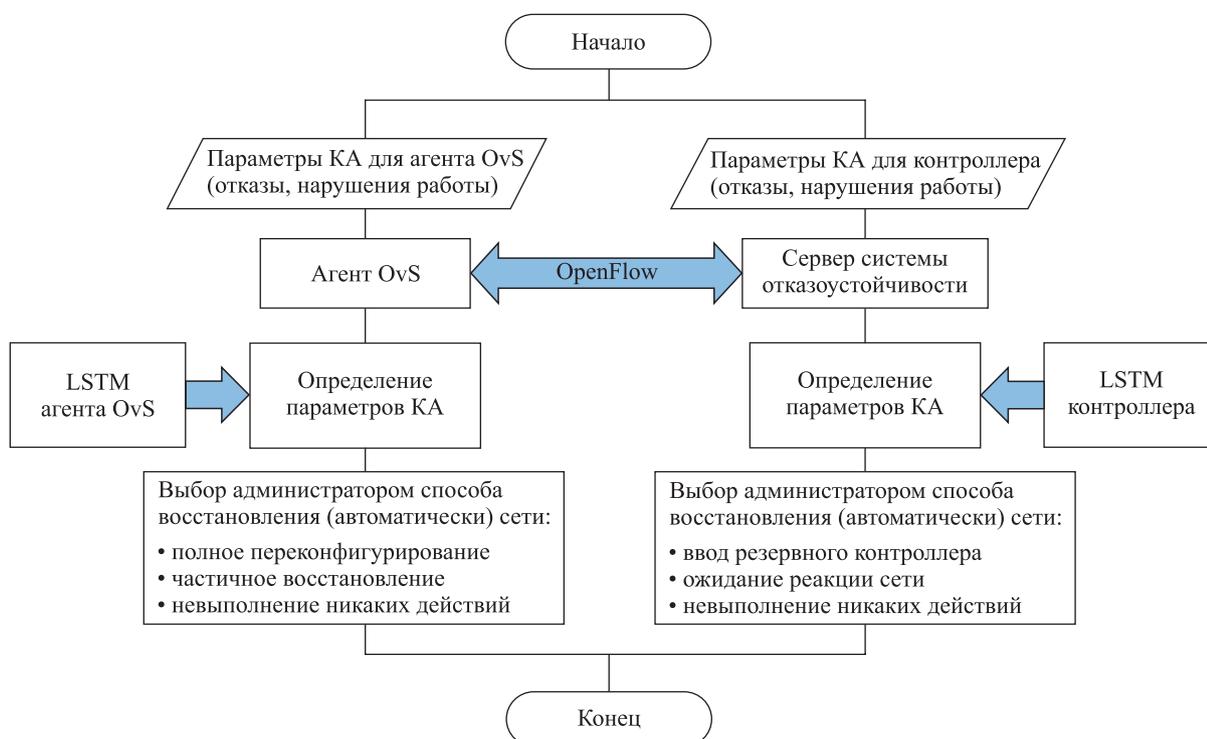


Рис. 7. Обобщенная структура системы обеспечения отказоустойчивости сегмента SDN
Fig. 7. Algorithm for the operation of the fault tolerance system of the SDN segment

Алгоритм восстановления сети в рамках представленной на рис. 6 системы защиты реализуется и увязывается с обобщенной структурой системы обеспечения отказоустойчивости следующим образом. На программном маршрутизаторе (см. рис. 7) работает агент OvS, а на контроллере развернут сервер системы отказоустойчивости, агент OvS и сервер системы отказоустойчивости взаимодействуют по протоколу OpenFlow. Агент OvS является полноценным анализатором аномалий функционирования SDN, в основе которого лежит рекуррентная нейронная сеть с долгой краткосрочной памятью (long short-term memory, LSTM) для программных маршрутизаторов. При этом, определив наиболее вероятный сценарий проводимой атаки, агент OvS предлагает сетевому администратору запуск сценария противодействия (восстановления).

Далее после принятия решения должностным лицом выполняется выбранный сценарий. Из базы данных конфигураций загружается порядок действий, производятся автоматические настройки и подключение к резервному контроллеру при выборе режима полной переконфигурации.

Сервер системы отказоустойчивости запускается в двух версиях – master (ведущий) и slave (подчиненный). Для их совместной работы реализуется сервис синхронизации, который отвечает за переключение контроллеров между собой, а также зеркалирование служебной информации, необходимой для принятия решений на проведение сценария восстановления.

Для определения КА, так же как и в агенте OvS, используется LSTM-сеть. Набор данных, предназначенный для ее обучения, будет отличаться от используемого в агенте OvS. Проводимые КА могут быть направлены на различные элементы сети и вызывать разные последствия. Таким образом, важным фактором функционирования сервера является отсутствие противоречий между выполняемыми агентом сценариями противодействия и сервером системы даже при отсутствии канала управления OpenFlow между ними.

Блок-схема функционирования сервера предлагаемой системы обеспечения устойчивости SDN представлена на рис. 8.

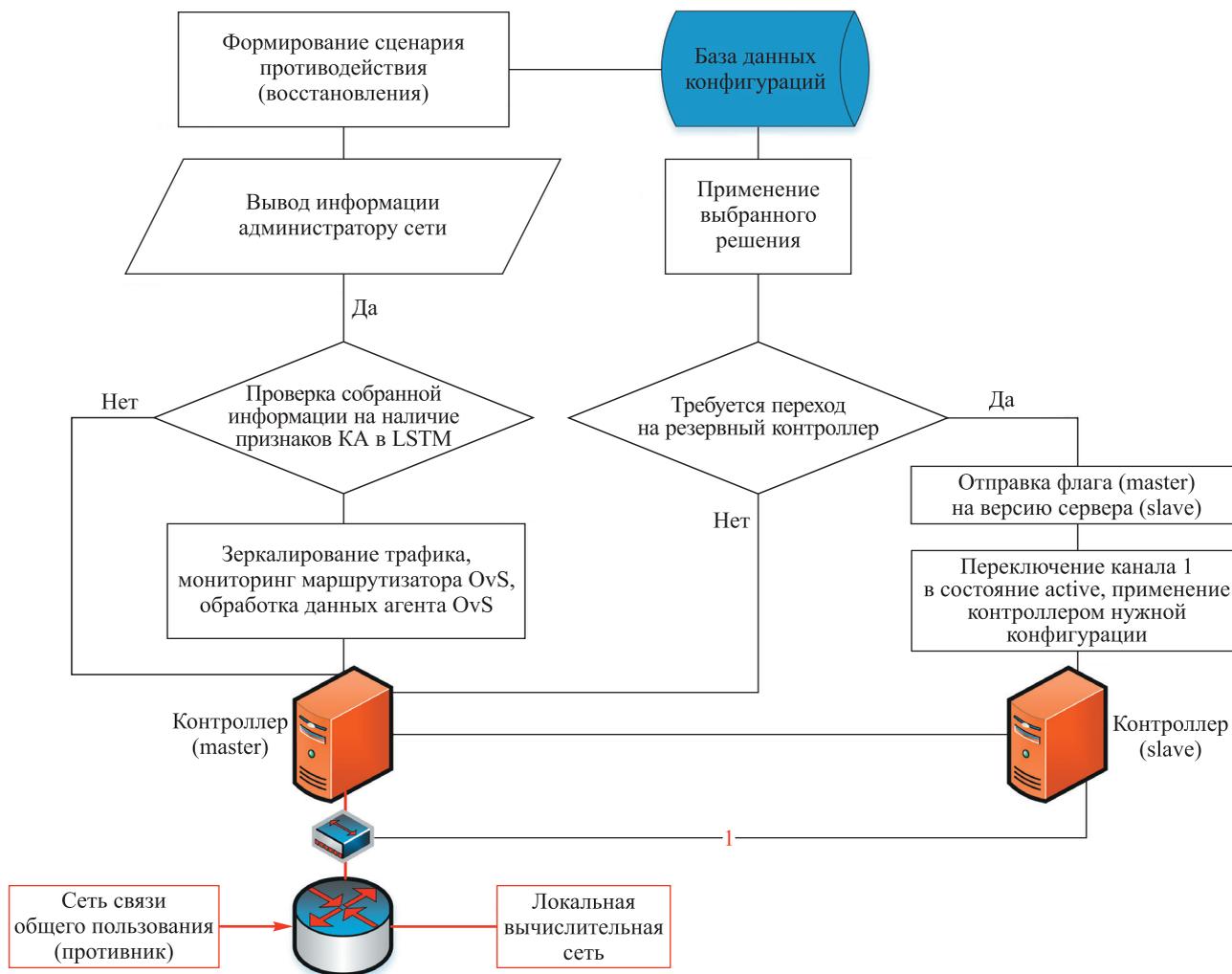


Рис. 8. Блок-схема функционирования сервера системы обеспечения устойчивости SDN

Fig. 8. Functioning diagram for the SDN resilience system server

Таким образом, архитектура системы обеспечения устойчивости SDN состоит из агентов OvS, запускаемых вместе с программными маршрутизаторами и отвечающих за принятие мер по реконфигурации сети в случае обнаружения КА с помощью нейронной сети LSTM, и сервера системы, отвечающего за принятие мер на уровне управления вплоть до ввода в работу резервного контроллера (slave).

Заключение

Проведенный в статье анализ работ, посвященных тематике оценки устойчивости сетей SDN в условиях КА, позволил сделать вывод о том, что стохастическое аналитическое моделирование и методы теории марковских процессов имеют большое значение для обоснования мер защиты в этих сетях, причем стохастические модели должны обеспечивать вычисление функций распределения интересующих нас случайных величин с минимальными вычислительными затратами. На основании результатов проведенного анализа работ по тематике исследования для оценки устойчивости функционирования сетей SDN в условиях КА предложена марковская модель. Одним из состояний графа состояний и переходов марковской модели является функционирование SDN при успешной реализации кибератаки, что позволяет оценить вероятность устойчивости SDN как вероятность противоположного события.

Предложенная марковская модель положена в основу разработанной методики оценки устойчивости сетей SDN в условиях КА, которая позволяет обосновать наиболее устойчивую топологию сети и рассчитать показатели КА. Расчет вероятностно-временных характеристик известных КА осуществляется на базе компьютерного имитационного моделирования в виртуальной среде EVE-NG.

Полученные с помощью предложенной методики вероятностно-временные значения в дальнейшем используются в качестве исходных данных при оценке угроз и обосновании требований по защите SDN от КА. Компьютерное моделирование, проведенное для выбранных в статье вариантов построения сети SDN, продемонстрировало результативность разработанной методики и позволило выработать предложения по архитектуре системы обеспечения устойчивости SDN и ее функционированию. Описанные решения могут быть использованы при проектировании сложных интегрированных систем [26–28].

Дальнейшие исследования будут направлены на разработку аналитических моделей для реализации контрмер в сетях SDN и интеграцию их с моделями кибератак.

Библиографические ссылки

1. Egilmez HE, Dane ST, Bagci KT, Tekalp AM. OpenQoS: an OpenFlow controller design for multimedia delivery with end-to-end quality of service over software-defined networks. In: Asia Pacific Signal and Information Processing Association. *Proceedings of the 2012 Asia Pacific Signal and Information Processing Association annual summit and conference; 2012 December 3–6; Hollywood, USA*. [S. l.]: IEEE; 2012. p. 1–8.
2. Lei Y, Lanson JP, Kaldawy RM, Estrada J, Shue CA. Can host-based SDNs rival the traffic engineering abilities of switch-based SDNs? In: Chemouil P, Krief F, Ahmed T, Hoßfeld T, Secci S, Stanica R, editors. *Proceedings of the 11th International conference on network of the future (NoF); 2020 October 12–14; Bordeaux, France*. [S. l.]: IEEE; 2020. p. 91–99. DOI: 10.1109/NoF50125.2020.9249110.
3. Xia W, Wen Y, Foh CH, Niyato D, Xie H. A survey on software-defined networking. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*. 2015;17(1):27–51. DOI: 10.1109/COMST.2014.2330903.
4. Vestin J, Kassler A, Akerberg J. Resilient software defined networking for industrial control networks. In: IEEE. *Proceedings of the 10th International conference on information, communications and signal processing (ICICS); 2015 December 2–4; Singapore*. [S. l.]: IEEE; p. 1–5. DOI: 10.1109/ICICS.2015.7459981.
5. Kreutz DF, Ramos MV, Veríssimo P, Rothenberg CE, Azodolmolky S, Uhlig S. Software-defined networking: a comprehensive survey. *Proceedings of the IEEE*. 2015;103(1):14–76. DOI: 10.1109/JPROC.2014.2371999.
6. Ahmadi V, Jalili A, Khorramizadeh SM, Keshtgari M. A hybrid NSGA-II for solving multiobjective controller placement in SDN. In: Iran University of Science and Technology. *Proceedings of the 2nd International conference on knowledge-based engineering and innovation (KBEI); 2015 November 5–6; Tehran, Iran*. [S. l.]: IEEE; p. 663–669. DOI: 10.1109/KBEI.2015.7436122.
7. Agarwal S, Kodialam M, Lakshman T. Traffic engineering in software defined networks. In: Marsan MA, Colombo G, editors. *Proceedings IEEE INFOCOM; 2013 April 14–19; Turin, Italy*. [S. l.]: IEEE; p. 2211–2219. DOI: 10.1109/INFOCOM.2013.6567024.
8. Kotani D, Suzuki K, Shimonishi H. A design and implementation of OpenFlow Controller handling IP multicast with fast tree switching. In: IEEE. *Proceedings of the 12th International symposium on applications and the Internet; 2012 July 16–20; Izmir, Turkey*. [S. l.]: IEEE; p. 60–67. DOI: 10.1109/SAINT.2012.17.
9. Nencioni G, Helvik BE, Gonzalez AJ, Heegaard PE, Kamisinski A. Impact of SDN controllers deployment on network availability. ArXiv:1703.05595 [cs.NI] [Preprint]. 2017 [cited 2024 August 1]: [5 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1703.05595>. DOI: 10.48550/arXiv.1703.05595.
10. Bannour F, Souihi S, Mellouk A. Scalability and reliability aware SDN controller placement strategies. In: IEEE. *Proceedings of the 13th International conference on network and service management (CNSM); 2017 November 26–30; Tokyo, Japan*. [S. l.]: IEEE; 2017; p. 1–4. DOI: 10.23919/CNSM.2017.8255989.
11. Pichpibul T, Kawtummachai R. An improved Clarke and Wright savings algorithm for the capacitated vehicle routing problem. *ScienceAsia*. 2012;38:307–318. DOI: 10.2306/SCIENCEASIA1513-1874.2012.38.307.

12. Ros FJ, Ruiz PM. On reliable controller placements in software-defined networks. *Computer Communications*. 2016;77:41–51. DOI: 10.1016/j.comcom.2015.09.008.
13. Yao G, Bi J, Li Y, Guo L. On the capacitated controller placement problem in software defined networks. *IEEE Communications Letters*. 2014;18(8):1339–1342. DOI: 10.1109/LCOMM.2014.2332341.
14. Park SM, Ju S, Lee J. Efficient routing for traffic offloading in software-defined network. *Procedia Computer Science*. 2014; 34:674–679. DOI: 10.1016/j.procs.2014.07.096.
15. Singh S, Jha RK. A survey on software defined networking: architecture for next generation network. *Journal of Network and Systems Management*. 2017;25(2):321–374. DOI: 10.1007/s10922-016-9393-9.
16. Lange S, Gebert S, Spoerhase J, Rygielski P, Zinner T, Kounev S, et al. Specialized heuristics for the controller placement problem in large scale SDN networks. In: Universiteit Gent. *Proceedings of the 27th International teletraffic congress; 2015 September 8–10; Ghent, Belgium*. [S. l.]: IEEE; 2015. p. 210–218. DOI: 10.1109/ITC.2015.32.
17. Rabia S, I SI, Lilia G, Benjamin K. SDMANET: enhancing MANETs with hybrid protocols through SDN integration. In: IEEE. *Proceedings of the International conference on artificial intelligence, computer, data sciences and applications (ACDSA); 2024 February 1–2; Victoria, Seychelles*. [S. l.]: IEEE; 2024. p. 1–8. DOI: 10.1109/ACDSA59508.2024.10467333.
18. Li J, Chang X, Ren Y, Zhang Z, Wang G. An effective path load balancing mechanism based on SDN. In: IEEE. *Proceedings of the 13th International conference on trust, security and privacy in computing and communications; 2014 September 24–26; Beijing, China*. [S. l.]: IEEE; 2014. p. 527–533. DOI: 10.1109/TrustCom.2014.67.
19. Celenioglu MR, Alsadi M, Mantar HA. Design, implementation and evaluation of SDN-based resource management model. In: Badra M, Boukerche A, Urien P, editors. *Proceedings of the 7th International conference on new technologies, mobility and security (NTMS); 2015 July 27–29; Paris, France*. [S. l.]: IEEE; 2015. p. 1–8. DOI: 10.1109/NTMS.2015.7266484.
20. Li W, Meng W, Kwok LF. A survey on OpenFlow-based software defined networks: security challenges and countermeasures. *Journal of Network and Computer Applications*. 2016;68:126–139. DOI: 10.1016/j.jnca.2016.04.011.
21. Koushika AM, Selvi ST. Load balancing using software defined networking in cloud environment. In: IEEE. *Proceedings of the International conference on recent trends in information technology; 2014 April 10–12; Chennai, India*. [S. l.]: IEEE; 2019. p. 1–8. DOI: 10.1109/ICRTIT.2014.6996164.
22. Govindarajan K, Meng KC, Ong H, Tat WM, Sivanand S, Leong LS. Realizing the quality of service (QoS) in software-defined networking (SDN) based cloud infrastructure. In: Telkom University. *Proceedings of the 2nd International conference on information and communication technology (ICoICT); 2014 May 28–30; Bandung, Indonesia*. [S. l.]: IEEE; 2014. p. 505–510. DOI: 10.1109/ICoICT.2014.6914113.
23. Kotenko IV, Saenko IB, Kotsynyak MA, Lauta OS. Assessment of cyber-resilience of computer networks based on simulation of cyber attacks by the stochastic networks conversion method. *SPIIRAS Proceedings*. 2017;6(55):160–184. Russian. DOI: 10.15622/sp.55.7.
24. Kotenko I, Saenko I, Lauta O. Modeling the impact of cyber attacks. In: Kott A, Linkov I, editors. *Cyber resilience of systems and networks. Risk, systems and decisions*. Cham: Springer; 2019. p. 135–169. DOI: 10.1007/978-3-319-77492-3_7.
25. Lucero B, Viswanathan V, Linsey J, Turner C. Analysis of critical functionality for meta analogy via performance specification. *Proceedings of the International design engineering technical conferences and computers and information in engineering conference*. 2013;2A:DETC2013-13472. DOI: 10.1115/DETC2013-13472.
26. Kochyn V. Conceptual model of complex integrated systems. In: Moscow Polytechnic University. *Proceedings of the 2024 International Russian smart industry conference (SmartIndustryCon); 2024 March 24–30; Sochi, Russia*. [S. l.]: IEEE; 2024. p. 740–745. DOI: 10.1109/SmartIndustryCon61328.2024.10516134.
27. Kochyn VP, Zherelo AV. Designing a secure fail-safe cloud repository of paperworks of students and employees of educational institutions. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2021;3:104–108. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-3-104-108.
28. Kochyn VP. A model of complex integrated systems. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2024;1:71–78. Russian. EDN: NANGXU.

Получена 08.08.2024 / исправлена 23.10.2024 / принята 23.10.2024.
Received 08.08.2024 / revised 23.10.2024 / accepted 23.10.2024.

МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ МАССЫ ПЛАСТИКОВЫХ ДЕТАЛЕЙ РЕДУКТОРА, ИЗГОТАВЛИВАЕМЫХ С ПОМОЩЬЮ 3D-ПЕЧАТИ, НА ОСНОВЕ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

Т. Ю. КИМ^{1),2)}, А. В. ПЕЧКОВСКАЯ¹⁾, Е. И. ПЕЧКОВСКИЙ¹⁾

¹⁾Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,
ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Беларусь

²⁾Ургенский филиал Ташкентского университета информационных технологий
им. Мухаммеда аль-Хорезми, ул. аль-Хорезми, 110, 220100, г. Ургенч, Узбекистан

Аннотация. Приводится разработка функции пригодности для генетического алгоритма, направленной на минимизацию массы компонентов редуктора, изготавливаемых из полилактида методом FDM-печати. Для шестерен, оптимизируемых с помощью генетических алгоритмов, лучшие результаты могут быть получены в пространстве решений, которое формируется ограничениями на контактную прочность, выносливость при изгибе, статическую прочность вала и усталостную прочность. Показано, что эволюционная оптимизация конструкции пластиковых деталей, изготавливаемых методом FDM-печати, позволила уменьшить их массу без снижения прочности и функциональности. Предложен метод вычисления массы компонентов редуктора, превосходящий существующие методы по точности расчетов. Полученные результаты предполагается использовать при проектировании и прототипировании узлов робототехнических аппаратов, требовательных к массе деталей. Компьютерное моделирование выполнено в среде *Matlab*.

Ключевые слова: генетические алгоритмы; *Matlab*; редуктор; шестерня; зубчатое колесо; оптимизация; масса; эволюционные алгоритмы; 3D-печать; FDM-печать.

Благодарность. Работа выполнена при поддержке Государственного комитета по науке и технологиям Республики Беларусь и Министерства науки и технологий Китайской Народной Республики (грант № Ф22КИТГ-002 «Медицинские роботы на основе человеко-машинного взаимодействия»). Авторы выражают признательность профессору Чжэцзянского технологического университета доктору Фу Минглю за ценные рекомендации и помощь в подготовке работы.

Образец цитирования:

Ким ТЮ, Печковская АВ, Печковский ЕИ. Метод оптимизации массы пластиковых деталей редуктора, изготавливаемых с помощью 3D-печати, на основе генетического алгоритма. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2024;3:103–111. EDN: YVRDBM

For citation:

Kim TYu, Pechkouskaya AV, Pechkouski YaI. Method for optimising the mass of plastic gearbox components in 3D printing using a genetic algorithm. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2024;3:103–111. Russian. EDN: YVRDBM

Авторы:

Татьяна Юрьевна Ким – младший научный сотрудник лаборатории робототехнических систем¹⁾, ассистент кафедры информационных технологий²⁾.

Анастасия Викторовна Печковская – стажер младшего научного сотрудника лаборатории робототехнических систем.

Евгений Игоревич Печковский – ведущий инженер-конструктор лаборатории робототехнических систем.

Authors:

Tatyana Yu. Kim, junior researcher at the laboratory of robotic systems^a and assistant at the department of information technologies^b.

tatyana_kim92@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-4126-6572>

Anastasiya V. Pechkouskaya, probationer of junior researcher at the laboratory of robotic systems.

anastasiya.pechkovskaya@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0006-1175-9604>

Yauheni I. Pechkouski, leading design engineer at the laboratory of robotic systems.

pechkovskijevgenij7@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0002-1530-4667>

METHOD FOR OPTIMISING THE MASS OF PLASTIC GEARBOX COMPONENTS IN 3D PRINTING USING A GENETIC ALGORITHM

T. Yu. KIM^{a, b}, A. V. PECHKOUSKAYA^a, Ya. I. PECHKOUSKI^a

^aUnited Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus,
6 Surganova Street, Minsk 220012, Belarus

^bUrgench branch of the Tashkent University of Information Technologies
named after Muhammad Al-Khwarizmi, 110 Al-Khwarizmi Street, Urgench 220100, Uzbekistan

Corresponding author: T. Yu. Kim (tatyana_kim92@mail.ru)

Abstract. This paper proposes the development of a fitness function for a genetic algorithm aimed at minimising the mass of gearbox components manufactured from polylactide using the FDM printing method. For gears optimised using genetic algorithms, the best results can be obtained in a solution space defined by constraints on contact strength, bending endurance, static shaft strength and fatigue strength. It is shown that evolutionary optimisation of the design of plastic parts manufactured using the FDM printing method makes it possible to reduce their mass without compromising strength and functionality. To improve the quality of optimisation, a technique for calculating the mass of gears is developed that surpasses the existing techniques in the accuracy of the results. It is expected that the obtained results will be used in the design and prototyping of robotic units that are demanding on the mass of parts. Computer modelling is herein performed in the *Matlab* environment.

Keywords: genetic algorithms; *Matlab*; gearbox; gear; optimisation; mass; evolutionary algorithms; 3D printing; FDM printing.

Acknowledgements. This work was supported by the State Committee on Science and Technology of the Republic of Belarus and Ministry of Science and Technology of the People's Republic of China (grant No. F22KITG-002 «Medical robots based on human – machine interaction»). The authors express their deep gratitude to doctor Fu Minglei, professor at the Zhejiang University of Technology, for his kind advices and valuable.

Введение

Эволюционные методы проектирования и оптимизации находят применение в различных областях техники. В частности, генетические алгоритмы используются в электронике при оптимизации антенн и проектировании электронных устройств [1]. В области искусственных нейронных сетей эволюционные алгоритмы находят применение в обучении сетей, использующих недифференцируемые функции активации, подборе оптимальной структуры и архитектуры искусственных нейронных сетей, оптимизации весовых коэффициентов и других параметров сети [2–4]. При проведении физических резервуарных вычислений [5–7], предусматривающих использование нелинейных динамических систем различной природы для обработки сигналов и информации, эволюционный подход может применяться для конструирования резервуаров – механических, оптических или электронных структур, являющихся вычислительным ядром. В робототехнике эволюционная оптимизация используется для совершенствования различных механизмов. Например, в конструкции робота с прыжковой локомоцией [8] энергия для прыжка накапливается в пружине, причем источником энергии служит электродвигатель с редуктором. Простота, эффективность и низкая масса редуктора играют важную роль в движении рассматриваемого робота. Этот и подобный ему редукторы могут изготавливаться с помощью аддитивных технологий (в частности, метода FDM-печати).

На сегодняшний день аддитивные технологии, которые предполагают послойное нанесение материала [9], все более востребованы при прототипировании и макетировании, а также мелкосерийном производстве. В то время как большинство производств основаны на методах механической обработки, 3D-печать дает возможность изготавливать изделия сложной геометрической формы, не подверженные коррозии и обладающие более низким, чем многие конструкционные металлы, коэффициентом трения.

Изготовление изделий методом 3D-печати, равно как и изготовление классическими методами, требует оптимизации массы компонентов редуктора. В частности, многие исследования в этой области сосредоточены на минимизации массы зубчатой передачи редуктора [10; 11]. Так, получил распространение генетический алгоритм, предназначенный для оптимизации функций дискретных переменных. Например, в статье [12] представлен процесс автоматизированного проектирования зубчатых передач путем минимизации объема передач с использованием генетического алгоритма.

Таким образом, целью настоящей работы является совершенствование процесса оптимизации параметров компонентов робототехнических устройств, изготавливаемых методом FDM-печати. В качестве

иллюстрации рассматривается эволюционная оптимизация параметров зубчатых колес, применяемых в понижающем редукторе цилиндрического типа, таким образом, чтобы сделать возможным изготовление компонентов редуктора с заданными характеристиками на основе аддитивных технологий из полилактида (*polylactic acid*, PLA) [13].

Реализация генетического алгоритма для оптимизации массы редуктора

Для определения работоспособности редуктора при минимальной массе необходимо учитывать ряд характеристик, которые являются входными параметрами генетического алгоритма. К таким параметрам относятся крутящий момент на шестерне (T_1) и колесе (T_2), плотность PLA-пластика (ρ), передаточное число (u), длина вала шестерни (l_1) и колеса (l_2). В ходе натурных экспериментов для PLA-пластика были определены средняя твердость PLA-пластика (HB), расчетное число циклов работы передачи (L), допустимые значения пределов прочности на растяжение материала (b_i , $i = 1, 2, \dots, 8$) при следующих параметрах печати:

- толщине слоя 0,2 мм;
- заполняемости пластиком 30 %.

Генетический алгоритм был реализован с помощью библиотеки Global Optimization Toolbox в среде *Matlab*¹. Первым шагом в использовании генетического алгоритма было формирование начальной популяции особей, где каждая особь определяется вектором \mathbf{E} фиксированной длины, который имеет следующий вид:

$$\mathbf{E} = (b, d_1, d_2, z_1, m).$$

Полученные элементы вектора \mathbf{E} являются выходными параметрами генетического алгоритма. Они определены в табл. 1.

Таблица 1

Граничные условия для генетического алгоритма

Table 1

Boundary conditions for genetic algorithm

Параметры	Обозначение	Диапазон значений
Ширина рабочего венца	b	10–32
Диаметр вала шестерни	d_1	10–30
Диаметр вала колеса	d_2	20–40
Количество зубьев шестерни	z_1	18–30
Модуль зацепления	m	2,75–4,00

В каждой итерации популяция была представлена в виде набора особей подобно тому, как это сделано в работе [14]. В целях снижения массы компонентов редуктора и повышения качества поиска оптимального решения установлены граничные условия для генетического алгоритма (см. табл. 1), расшифровка параметров приведена на рис. 1.

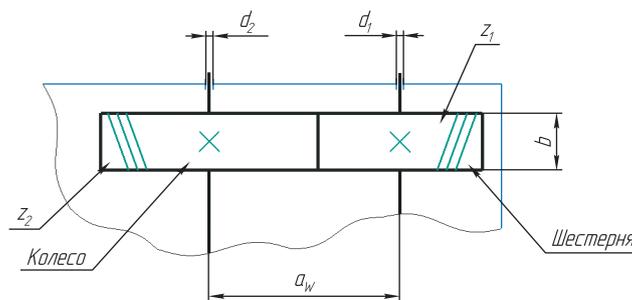


Рис. 1. Схема цилиндрической прямозубой передачи редуктора (a_w – межосевое расстояние; z_2 – количество зубьев колеса)

Fig. 1. Diagram of a cylindrical spur gearbox transmission (a_w – center distance; z_2 – number of pinion teeth)

¹Genetic algorithm options // MathWorks : website. Natick, 1994–2024. URL: <https://www.mathworks.com/help/gads/genetic-algorithm-options.html> (date of access: 29.08.2024).

Далее целесообразно рассмотреть формирование функции пригодности для генетического алгоритма на примере одноклассового цилиндрического редуктора, имеющего общемашиностроительное применение. Функция пригодности – это особый тип целевой функции, используемой для оценки качества кандидатов или их пригодности для решения задачи. Она принимает на вход элементы вектора \mathbf{E} и возвращает значения, показывающие, насколько это решение близко к достижению поставленной цели. В данном контексте функция пригодности будет направлена на минимизацию массы компонентов редуктора, что является критически важным для повышения эффективности и снижения производственных затрат при печати. Редуктор содержит шестерню, колесо и два вала. Все расчеты подробно изложены для шестерни, для колеса же приведены только результаты вычислений. Следует отметить, что в работе использована более сложная модель зубчатого колеса, чем те модели, которые описаны в литературе. Например, в публикации [12] рассмотрен метод, который находит объем зубьев через усеченный конус. Однако подобный метод предоставляет лишь приближенные значения размера зубчатого колеса. Далее будет использоваться метод, дающий более точные значения.

Формирование функции пригодности. Функция пригодности $F(b, d_1, d_2, z_1, m)$ определяется как суммарная масса исполнительных компонентов редуктора M_{gearbox} , которую следует минимизировать:

$$[F(b, d_1, d_2, z_1, m)] = [M_{\text{gearbox}}] = \rho(V_{\text{gear_shaft}} + V_{\text{pinion_shaft}} + V_{\text{gear}} + V_{\text{pinion}}), \quad (1)$$

где $V_{\text{gear_shaft}}$ и $V_{\text{pinion_shaft}}$ – объем вала шестерни и колеса соответственно, однако для шестерни используются длина вала l_1 и диаметр вала d_1 , а для колеса – длина вала l_2 и диаметр вала d_2 ; V_{gear} и V_{pinion} – объем шестерни и колеса соответственно.

Для того чтобы найти массу компонентов редуктора, определим основные геометрические размеры цилиндрической прямозубой передачи. Далее вычислим площадь поверхности каждого компонента, затем – общую массу компонентов редуктора.

Объем шестерни рассчитывается по формуле

$$V_{\text{gear}} = (S_{\text{deep}}(z_1 - 1) + \pi R_f^2 - S_{\text{shp}})b - 2V_{\text{chamfer}}z_1, \quad (2)$$

где S_{deep} – площадь впадины; R_f – радиус окружности впадины зубьев шестерни; S_{shp} – площадь шпоночного отверстия вала; V_{chamfer} – объем фаски.

Контур зубьев представляет собой окружность, радиус которой r равен половине шага делительной окружности. Распределим четыре окружности радиусом r на края окружностей радиусом R , R_a и R_f , где R – радиус делительной окружности шестерни, а R_a – радиус окружности вершины зубьев шестерни, как на рис. 2.

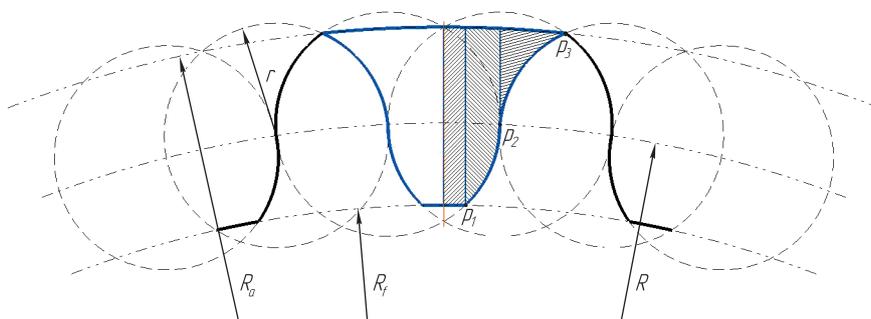


Рис. 2. Формирование формы зуба и вычисление площади впадины S_{deep}
 Fig. 2. Tooth shaping and calculation of the cavity area S_{deep}

Найдем площадь впадины S_{deep} , которая на рис. 2 выделена синим цветом. Поскольку фигура симметрична, ее следует разделить пополам.

$$S_{\text{deep}} = 2 \left(\int_0^{p_1} (\sqrt{R_a^2 - x^2} - 2R - \sqrt{R_f^2 - x^2}) dx + \int_{p_1}^{p_2} (\sqrt{R_a^2 - x^2} - R + \sqrt{r^2 - (x - \frac{r}{2})^2}) dx + \int_{p_2}^{p_3} (\sqrt{R_a^2 - x^2} - R - \sqrt{r^2 - (x - \frac{3r}{2})^2}) dx \right), \quad (3)$$

где p_1, p_2, p_3 – точки пересечения окружностей (делительной, внешней, внутренней), а $x \in [0, R]$.

Следующим шагом является формирование ограничений на контактную прочность, выносливость при изгибе, статическую прочность вала и усталостную прочность, которые представлены в виде математических функций.

При формировании каждой новой особи производится расчет предварительных геометрических размеров передачи, определяемых из приведенных ниже условий обеспечения работоспособности. Результаты работы генетического алгоритма, представляющие собой геометрические размеры передачи, проверяются на соответствие заданным ограничениям. В случае получения удовлетворительного результата предварительные размеры принимаются в качестве окончательных.

Формирование ограничений для генетического алгоритма. Задачей генетического алгоритма является поиск таких значений ширины рабочего венца (b), диаметра вала шестерни (d_1), диаметра вала колеса (d_2), количества зубьев шестерни (z_1) и модуля зацепления (m) зубчатой передачи редуктора (см. табл. 1), при которых значение целевой функции (1) будет минимальным при соблюдении ряда ограничений, рассмотренных ниже.

$$\left[\min_{\mathbf{E}} F(\mathbf{E}) = \left[M_{\text{gearbox}} \right] \right] : \left[g_i(\mathbf{E}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, 8 \right], \quad (4)$$

где $F(\mathbf{E})$ – функция пригодности; $g_i(\mathbf{E}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, 8$, – ограничения на контактную прочность, выносливость при изгибе для шестерни и колеса, статическую прочность при кратковременных перегрузках, усталостную прочность для быстроходного и тихоходного валов.

Ограничения на контактную прочность. Исходя из опыта авторов, допустимое контактное напряжение составляет $b_1 = 357,12$. Данное значение было получено с учетом коэффициента безопасности шестерни, коэффициента нагрузки, предела контактной выносливости, основанного на средней твердости PLA-пластика (H_B) и расчетном числе циклов работы передачи (L). Определим контактное напряжение:

$$g_1(b, d_1) = b_1 - Z_H \sqrt{\frac{2T_1(u+1)K_H}{bd_1^2}} \leq 0, \quad (5)$$

где Z_H – коэффициент, учитывающий механические свойства материала сопряженных колес; K_H – коэффициент нагрузки.

Ограничения на выносливость при изгибе для шестерни и колеса. С учетом твердости материала и коэффициента запаса прочности рассчитаны допустимые пределы выносливости при изгибе, которые составляют $b_2 = 157$ для колеса и $b_3 = 167$ для шестерни. Определим напряжение при изгибе зубьев колеса:

$$g_2(b, d_2, z_1, m) = b_2 - \frac{2T_1 Y_{F_2}}{d_2 b m} K_{F_\alpha} K_{F_\beta} K_{F_v} \leq 0, \quad (6)$$

где Y_{F_2} – расчетный коэффициент формы зуба для прямозубой передачи без смещения исходного контура колеса; K_{F_α} – коэффициент, учитывающий распределение нагрузки между зубьями; K_{F_β} – коэффициент, учитывающий распределение нагрузки по ширине зубчатого венца при изгибе; K_{F_v} – коэффициент, учитывающий динамическую нагрузку при изгибе. Определим напряжение при изгибе зубьев шестерни:

$$g_3(b, d_1, z_1, m) = b_3 - \frac{\sigma_{F_2} Y_{F_1}}{Y_{F_2}} \leq 0, \quad (7)$$

где σ_{F_2} – расчетное напряжение при изгибе зубьев колеса (6); Y_{F_1} – расчетный коэффициент формы зуба для прямозубой передачи без смещения исходного контура шестерни.

Ограничения на статическую прочность при кратковременных перегрузках. Допустимое напряжение $b_4 = 123$ находится в зависимости от предела текучести материала вала при изгибе² и от коэффициента запаса прочности пластичных материалов. Выходной вал редуктора приводит в движение объект, поэтому требуется провести прочностной расчет вала на эквивалентное напряжение, действующее в критическом сечении вала, согласно уравнению³

²Куклин Н. Г., Куклина Г. С. Детали машин : учеб. для машиностроит. специальностей техникумов. 4-е изд., перераб. и доп. М. : Высш. шк., 1987. 383 с.

³Дунаев П. Ф., Леликов О. П. Конструирование узлов и деталей машин : учеб. пособие для техн. специальностей вузов. 5-е изд., перераб. и доп. М. : Высш. шк., 1998. 447 с.

$$g_4(b, d_1, m) = b_4 - \frac{K_p M_c}{\frac{\pi d_1^3}{32} - \frac{bh(2d_1 - h)^2}{16d_1}} \leq 0, \quad (8)$$

где K_p – коэффициент перегрузки; M_c – суммарный изгибающий момент силы, меняющий положение относительно вала; h – высота зуба.

Ограничения на усталостную прочность для быстроходного и тихоходного валов [11]. Целью расчета валов на усталостную прочность является определение коэффициентов запаса выносливости S во всех предположительно критических сечениях вала. Расчет валов на усталостную прочность ведут, исходя из условия $b_5 \leq S \leq b_6$, где $b_5 = 2$, $b_6 = 4$ – необходимые значения коэффициента запаса выносливости. Расчетное значение коэффициента запаса выносливости вала в его предположительно критическом сечении определяется по следующей формуле:

$$S = \frac{S_\sigma S_\tau}{\sqrt{S_\sigma^2 + S_\tau^2}}, \quad (9)$$

где S_σ – коэффициент запаса выносливости по нормальным напряжениям; S_τ – коэффициент запаса выносливости по касательным напряжениям.

При ограничениях на усталостную прочность для быстроходного и тихоходного валов редуктора применяется формула (9), однако для быстроходного вала используются диаметр вала d_1 и входной крутящий момент T_1 , а для тихоходного вала – диаметр вала d_2 и входной крутящий момент T_2 .

Приведем окончательный вид ограничений на усталостную прочность для быстроходного ($g_5(b, d_1, m)$ и $g_6(b, d_1, m)$) и тихоходного ($g_7(b, d_2, m)$ и $g_8(b, d_2, m)$) валов:

$$g_5(b, d_1, m) = b_5 - S_{\text{fast}} < 0, \quad (10)$$

$$g_6(b, d_1, m) = S_{\text{fast}} - b_6 < 0, \quad (11)$$

$$g_7(b, d_2, m) = b_7 - S_{\text{quite}} < 0, \quad (12)$$

$$g_8(b, d_2, m) = S_{\text{quite}} - b_8 < 0, \quad (13)$$

где S_{fast} и S_{quite} – расчетные значения коэффициента запаса выносливости в предположительно критическом сечении для быстроходного и тихоходного валов соответственно, полученные по формуле (9).

Набор переменных $[b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8]$ авторы приняли за допустимые значения, которые были определены заранее. При вычислении значений функции пригодности $F(b, d_1, d_2, z_1, m)$ находится расчетное значение работоспособности, и во время эволюционного моделирования вышеперечисленные ограничения определяют условия пригодности параметров шестерни, колеса и вала.

Операторы генетического алгоритма. В процессе работы генетического алгоритма используются такие генетические операторы, как селекция, скрещивание, мутация и элитный отбор [14]. Селекция предназначена для отбора родительских особей в новое поколение. Функция пригодности $F(b, d_1, d_2, z_1, m)$ оценивается для каждой особи в популяции, и для формирования следующего поколения отбираются не менее двух особей с наилучшей приспособленностью. Наиболее эффективным оказался метод стохастической равномерной селекции, используемый по умолчанию. Суть данного метода заключается в том, что родительские особи могут выбираться более одного раза и передавать свои гены нескольким потомкам. В процессе скрещивания формируется следующее поколение. Из семи предложенных в библиотеке параметров путем перебора была выбрана функция арифметического пересечения Arithmetic, которая использует среднеарифметическое взвешенное значение от предыдущего поколения. На рис. 3, а, проиллюстрирован промежуточный процесс скрещивания, где случайным образом выбираются элементы вектора \mathbf{E} , до которого особи обмениваются генами. Мутация применяется для случайно выбранной особи, у которой один из произвольно выбранных генов меняется на случайное число (рис. 3, б). Значение этого числа устанавливается методом Гаусса (табл. 2). После одного цикла итерации идет отбор элитных особей. Путем подсчета элиты определяется число лучших особей, которые гарантированно переходят в следующее поколение без изменений. Их количество должно быть меньше количества особей в популяции либо равно ему. В проведенных экспериментах количество элитных особей составило 2 % от общего количества особей (см. табл. 2).

<i>a/a</i> Особь _{<i>i</i>}					<i>b/b</i> Особь до мутации				
$(b)_i$	$(d_1)_i$	$(d_2)_i$	$(z_1)_i$	$(m)_i$	$(b)_i$	$(d_1)_i$	$(d_2)_i$	$(z_1)_i$	$(m)_i$
30	23,94	32	38	4,5	30	23,94	32	40	4
Особь _{<i>i+1</i>}					Особь после мутации				
$(b)_{i+1}$	$(d_1)_{i+1}$	$(d_2)_{i+1}$	$(z_1)_{i+1}$	$(m)_{i+1}$	$(b)_{i+1}$	$(d_1)_{i+1}$	$(d_2)_{i+1}$	$(z_1)_{i+1}$	$(m)_{i+1}$
32	21,51	25	40	4	30	23,94	28	40	4
Потомок									
$(b)_i$	$(d_1)_i$	$(d_2)_i$	$(z_1)_{i+1}$	$(m)_{i+1}$					
30	23,94	32	40	4					

Рис. 3. Промежуточный результат генетических операций:
a – скрещивания; *b* – мутации

Fig. 3. Intermediate result of genetic operations:
a – crossover; *b* – mutation

Выбранные генетические операторы и значения параметров генетического алгоритма приведены в табл. 2. Значения параметров подробно описаны в справочной системе пакета *Matlab R2024a*⁴.

Таблица 2

Операторы и значения параметров
генетического алгоритма

Table 2

Operators and values
of genetic algorithm parameters

Операторы	Параметры
Population type	100
Creation function	Uniform
Rank	Rank
Selection function	Stochastic uniform
Mutation function	Gaussian
Elite count	2
Crossover function	Arithmetic
Crossover fraction	0,8
Max generations	25
Upper bounds	(32, 30, 25, 40, 4)
Lower bounds	(20, 10, 18, 30, 2,75)

Результаты работы генетического алгоритма

По завершении работы генетического алгоритма все решения были сведены к оптимальному вектору E с элементами (b, d_1, d_2, z_1, m) . В ходе эксперимента выбраны семь вариантов значений параметров (табл. 3), которые удовлетворяют ограничениям и обеспечивают минимальное значение функции пригодности (4). Средняя масса компонентов редуктора из пластиковых деталей составляет 455 г. Учитывая, что заполняемость пластиком при FDM-печати равна 30 %, масса компонентов редуктора составит 318,5 г.

⁴Genetic algorithm options // MathWorks : website. Natick, 1994–2024. URL: <https://www.mathworks.com/help/gads/genetic-algorithm-options.html> (date of access: 29.08.2024).

Таблица 3

Значения параметров компонентов редуктора, полученные с помощью эволюционного отбора

Table 3

Values of gearbox component parameters obtained through evolutionary selection

Параметры	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6	Вариант 7
b	13,625	15,571	10	31	27,25	23,94	10
d_1	10,277	18,22	10	10,2	10,4	30	12,27
d_2	10,201	20,19	10	12,6	10	40	10
z_1	20	30	24	25	20	25	25
m	3,999	3,97	3,98	3,97	3,99	4	3,95

Поиск оптимального значения функции пригодности показан на рис. 4, где в пространстве поиска отображаются кривые лучших и средних значений. Функция пригодности принимает минимальное значение, когда кривая средних значений сходится к кривой лучших значений после 100-го поколения.

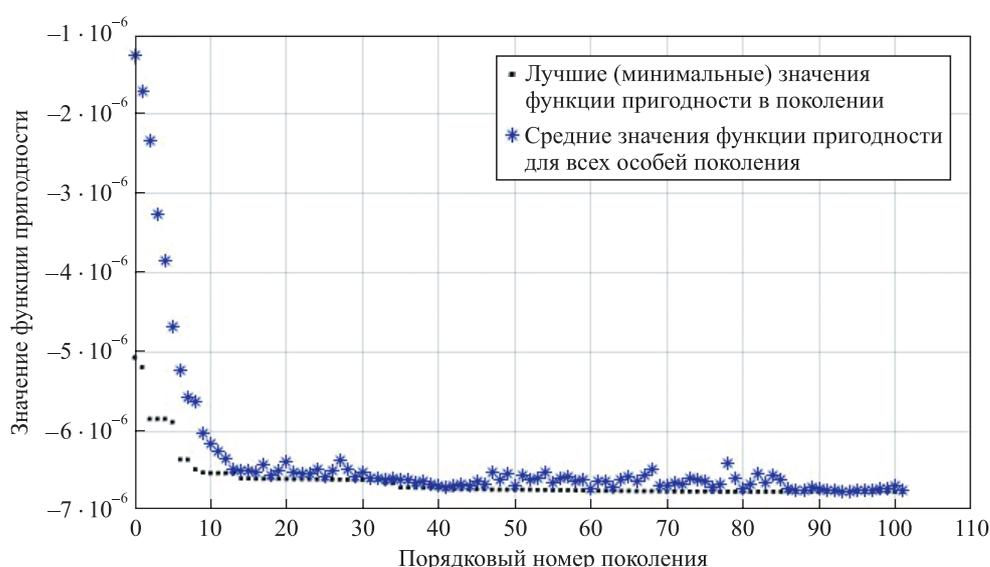


Рис. 4. Процесс работы генетического алгоритма
 Fig. 4. The process of operation of the genetic algorithm

Предложенный метод оптимизации массы зубчатой передачи редуктора, основанный на генетическом алгоритме и применяемый при 3D-печати, может быть эффективно использован для выбора параметров печати. Разработанная функция пригодности, описанная формулами (1)–(3), и ограничения, представленные формулами (5)–(8) и (10)–(13), позволили определить оптимальные значения параметров компонентов редуктора. В результате при FDM-печати удалось снизить массу шестерни на 45 % по сравнению с массой литой шестерни, сохранив при этом заданные параметры.

Заключение

В настоящем исследовании разработана функция пригодности, основанная на минимизации суммарной массы исполнительных компонентов редуктора, включая валы и шестерни, с учетом их объемов и плотности PLA-пластика. Для вычисления массы компонентов необходимо определить основные геометрические размеры цилиндрической прямозубой передачи и вычислить площадь поверхности каждого компонента. Контур зубьев шестерни моделируется с использованием окружностей различных радиусов, что позволяет точно определить площадь впадин и, следовательно, объем и массу каждого компонента. Сформированные ограничения на контактную прочность, выносливость при изгибе, статическую прочность вала и усталостную прочность позволили снизить массу пластиковых деталей без ущерба для прочности и функциональности с помощью эволюционной оптимизации их конструкции.

Для повышения качества оптимизации был разработан метод вычисления массы компонентов редуктора, превосходящий существующие методы по точности расчетов. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании и прототипировании узлов робототехнических аппаратов, требовательных к массе деталей.

Было вычислено семь вариантов значений параметров, удовлетворяющих ограничениям (см. табл. 3). Средняя масса пластиковых компонентов редуктора составила 318,5 г при заполняемости пластиком, равной 30 %.

Библиографические ссылки

1. Zebulum RS, Pacheco MAC, Vellasco MMBR. *Evolutionary electronics: automatic design of electronic circuits and systems by genetic algorithms*. Boca Raton: CRC Press; 2001. 307 p. (Jain LC, editor. International series on computational intelligence).
2. Stanley KO, Clune J, Lehman J, Miikkulainen R. Designing neural networks through neuroevolution. *Nature Machine Intelligence*. 2019;1(1):24–35. DOI: 10.1038/s42256-018-0006-z.
3. Iba H, Noman N, editors. *Deep neural evolution: deep learning with evolutionary computation*. Singapore: Springer; 2020. XII, 438 p. (Bäck T, Kari L, editors. Natural computing series).
4. Galván E, Mooney P. Neuroevolution in deep neural networks: current trends and future challenges. *IEEE Transactions on Artificial Intelligence*. 2021;2(6):476–493. DOI: 10.1109/TAI.2021.3067574.
5. Sychou U. A single-node classifier implementation on Chua oscillator within a physical reservoir computing framework. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2021;31(11):2150161. DOI: 10.1142/S0218127421501613.
6. Sychou UA, Krot AM, Prakupovich RA. The development of a signal classification method based on Chua's oscillator within the reservoir computing framework. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2023;1:88–101. Russian. EDN: MNYDFF.
7. Nakajima K, Fischer I, editors. *Reservoir computing: theory, physical implementations, and applications*. Singapore: Springer; 2021. XIX, 458 p. (Bäck T, Kari L, editors. Natural computing series).
8. Haldane DW, Plecnik MM, Yim JK, Fearing RS. Robotic vertical jumping agility via series-elastic power modulation. *Science Robotics*. 2016;1(1):2048. DOI: 10.1126/scirobotics.aag2048.
9. Singh S, Prakash C, Ramakrishna S. *Additive manufacturing: foundation knowledge for the beginners*. New Jersey: World Scientific; 2020. XX, 156 p.
10. Yokota T, Taguchi T, Gen M. A solution method for optimal weight design problem of the gear using genetic algorithms. *Computers & Industrial Engineering*. 1998;35(3–4):523–526. DOI: 10.1016/S0360-8352(98)00149-1.
11. Savsani V, Rao RV, Vakharia DP. Optimal weight design of a gear train using particle swarm optimization and simulated annealing algorithms. *Mechanism and Machine Theory*. 2010;45(3):531–541. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2009.10.010.
12. Gologlu C, Zeyveli M. A genetic approach to automate preliminary design of gear drives. *Computers & Industrial Engineering*. 2009;57(3):1043–1051. DOI: 10.1016/j.cie.2009.04.006.
13. Rezvani Ghomi E, Khosravi F, Saedi Ardahaeci A, Dai Y, Neisiany RE, Foroughi F, et al. The life cycle assessment for polylactic acid (PLA) to make it a low-carbon material. *Polymers*. 2021;13(11):1854. DOI: 10.3390/polym13111854.
14. Kim TYu, Prakupovich RA. Optimization of the PID coefficients for the line-follower mobile robot controller employing genetic algorithm. *Informatics*. 2021;18(4):53–68. Russian. DOI: 10.37661/1816-0301-2021-18-4-53-68.

Получена 30.08.2024 / исправлена 04.10.2024 / принята 18.10.2024.
Received 30.08.2024 / revised 04.10.2024 / accepted 18.10.2024.

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ В БГУ РАБОТ INDICATIVE ABSTRACTS OF THE PAPERS DEPOSITED IN BSU

УДК 51(075.8)

Мартон М. В. **Высшая математика** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0532-09 «Страноведение и переводческая деятельность», профилизация «География и английский язык» / М. В. Мартон, Н. А. Моисеева ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 305 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 302–305. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/319604>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 01.10.2024, № 013401102024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Высшая математика» предназначен для студентов специальности 6-05-0532-09 «Страноведение и переводческая деятельность». В ЭУМК содержатся лекционный материал, задания для практических занятий, планы лабораторных работ, примерные тестовые задания, примерные задания для управляемой самостоятельной работы студентов, контрольные работы, примерный тематический план, содержание учебного материала, вопросы для подготовки к зачету, темы для рефератов, список литературы.

УДК 004(075.8) + 004.056.5(075.8)

Мартон М. В. **Информационные технологии и кибербезопасность** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-1036-04 «Международная логистика» / М. В. Мартон, Н. А. Моисеева ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 207 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 205–207, 302–305. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/319605>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 01.10.2024, № 013501102024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Информационные технологии и кибербезопасность» предназначен для студентов специальности 6-05-1036-04 «Международная логистика». В ЭУМК содержатся лекционный материал, планы лабораторных работ, примерные тестовые задания, примерные задания для управляемой самостоятельной работы студентов, контрольные работы, примерный тематический план, содержание учебного материала, вопросы для подготовки к зачету, список литературы.

УДК 519.6(075.8)

Численные методы [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», профилизации: «Веб-программирование и интернет-технологии», «Математическое и программное обеспечение мобильных устройств» : в 2 ч. Ч. 1. Интерполирование функций и приближенное вычисление интегралов / М. В. Игнатенко ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 150 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 148–150. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/319933>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 04.10.2024, № 013704102024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Численные методы» разработан в соответствии с образовательным стандартом первой ступени высшего образования для специальности 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки». ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Численные методы» для студентов данной специальности. В ЭУМК содержатся конспект лекций, перечень лабораторных занятий с материалами для работы, задания по управляемой самостоятельной работе.

УДК 622.83:519.6(075.8)

Журавков М. А. **Основные подходы, принципы и особенности механико-математического моделирования в геомеханике** [Электронный ресурс] : курс лекций / М. А. Журавков, С. Н. Лопатин ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 125 с. : ил. Библиогр.: с. 120–123. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/320041>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 07.10.2024, № 013807102024.

В представленном курсе лекций рассматриваются основные общие правила, базовые принципы и особенности механико-математического моделирования, построения гранично-краевых задач геомеханики. В качестве примеров рассматриваются задачи подземной геомеханики (механики горных пород и массивов). Представленный материал может использоваться при чтении таких дисциплин, как «Математические модели механики деформированного твердого тела и основы механики разрушения», «Механико-математические модели современной геомеханики», «Механика сыпучих и дискретных сред», «Компьютерное моделирование в задачах подземной гидромеханики», «Численные методы в задачах геогидромеханики», «Компьютерная механика» и др. Материал данного курса лекций представляет интерес для специалистов в области теоретической и прикладной механики, математического и компьютерного моделирования, численных методов и может быть рекомендован широкому кругу читателей, интересующихся применением современных методов математического моделирования в прикладных науках.

УДК 514(075.8)(076.2)

Карневич О. Н. **Методы решения задач по геометрии** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-06 «Математика» / О. Н. Карневич, Л. Л. Тухолко ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 59 с. : ил. Библиогр.: с. 58–59. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/320243>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 09.10.2024, № 014009102024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Методы решения задач по геометрии» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-06 «Математика». В ЭУМК содержатся материалы лекционных и практических занятий, вопросы к зачету, примерные задания для контрольной работы, список рекомендуемой литературы.

УДК 004.42(075.8)

Расолько Г. А. **Практикум по программированию** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-06 «Математика» / Г. А. Расолько, Е. В. Кремень, Ю. А. Кремень ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 276 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 274. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/320756>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 22.10.2024, № 015322102024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Практикум по программированию» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-06 «Математика». ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, тесты, списки рекомендованной литературы.

УДК 514(075.8)

Кононов С. Г. **Геометрия** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», профилизация «Математика» / С. Г. Кононов ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 79 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 78–79. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/320764>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 22.10.2024, № 015422102024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Геометрия» разработан в соответствии с образовательным стандартом первой ступени высшего образования для специальности 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки» (профилизация «Математика»). ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Геометрия» для студентов данной специальности. В ЭУМК содержатся краткий конспект лекций, перечень лабораторных занятий с материалами для работы в аудитории и дома, материалы для управляемой самостоятельной работы (варианты контрольных работ, примерные варианты тестов по дисциплине, материалы для индивидуальных заданий), примерный список экзаменационных вопросов, список рекомендованной литературы.

УДК 004.42:004.738.5(075.8)

Барвенков С. А. **Веб-программирование** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки» / С. А. Барвенков, В. С. Романчик ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 160 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 160. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/321284>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 04.11.2024, № 016304112024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Веб-программирование» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки». ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, тесты, списки рекомендованной литературы.

УДК 519.6(075.8)

Позняк Ю. В. Введение в компьютерные математические системы [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», профилизации: «Веб-программирование и интернет-технологии», «Математическое и программное обеспечение мобильных устройств» / Ю. В. Позняк ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 128 с. : табл. Библиогр.: с. 127–128. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/321334>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 06.11.2024, № 016506112024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Введение в компьютерные математические системы» разработан в соответствии с образовательным стандартом первой ступени высшего образования для специальности 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки». ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Введение в компьютерные математические системы» для студентов данной специальности. В ЭУМК содержатся материалы для организации лекционных занятий, перечень лабораторных занятий с материалами для работы, задания по управляемой самостоятельной работе.

УДК 514.12(075.8)

Кононов С. Г. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-06 «Математика» / С. Г. Кононов, В. В. Суворов ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 78 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 77–78. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/321407>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 12.11.2024, № 016612112024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Аналитическая геометрия» разработан в соответствии с образовательным стандартом первой ступени высшего образования для специальности 6-05-0533-06 «Математика». ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Аналитическая геометрия» для студентов данной специальности. В ЭУМК содержатся краткий конспект лекций, перечень лабораторных занятий с материалами для работы в аудитории и дома, материалы для управляемой самостоятельной работы (варианты контрольных работ, примерные варианты тестов по дисциплине, материалы для индивидуальных заданий), примерный список экзаменационных вопросов, список рекомендованной литературы.

УДК 51(075.8)

Кононов С. Г. Введение в специальность [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-06 «Математика» / С. Г. Кононов, Г. О. Кукрак, В. Н. Куница ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 126 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 126. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/321675>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 14.11.2024, № 016714112024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Введение в специальность» разработан в соответствии с образовательным стандартом первой ступени высшего образования для специальности 6-05-0533-06 «Математика». ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Введение в специальность» для студентов данной специальности. В ЭУМК содержатся краткий конспект лекций, материалы для управляемой самостоятельной работы (варианты теста, примерный список вопросов к зачету), список рекомендованной литературы.

УДК 519.67(075.8)

Компьютерная математика. Числовой пакет MATLAB [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-06 «Математика» / Л. Л. Голубева, О. А. Лаврова, А. Э. Малевич, Н. Л. Щеглова ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 80 с. : ил. Библиогр.: с. 78–80. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/321683>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 14.11.2024, № 016814112024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Компьютерная математика» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-06 «Математика». ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, тесты, списки рекомендованной литературы.

УДК 519.67(075.8)

Компьютерная математика. Символьный пакет МАТНЕМАТІСА [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-06 «Математика» / Л. Л. Голубева, О. А. Лаврова, А. Э. Малевич, Н. Л. Щеглова ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 263 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 260–263. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/322005>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 18.11.2024, № 017118112024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Компьютерная математика» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-06 «Математика». ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, тесты, списки рекомендованной литературы.

СОДЕРЖАНИЕ

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

- Старовойтов А. П., Кругликов И. В., Оснач Т. М.* Рациональные аппроксимации степенных, тригонометрических рядов и рядов по многочленам Чебышева 6

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

- Жук А. И., Защук Е. Н.* Системы уравнений в дифференциалах с обобщенными производными непрерывных функций..... 22

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

- Бедрицкий А. С.* О некоторых свойствах одной топологии очановского типа 31

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

- Николайчик М. А., Чжан Шици.* Построение механико-математической модели вязкоупругого блочного элемента для решения динамических задач геомеханики методом дискретных элементов 40

- Михасев Г. И., Мисник В. В., Ботогова М. Г.* Влияние электростатических и межмолекулярных сил на свободные малые колебания микроконсоли 62

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

- Чэнь Юйсян, Андрианов А. М., Тузиков А. В.* Идентификация комбинаций геномных мутаций с помощью полногеномного поиска ассоциаций на примере микобактерии туберкулеза..... 73

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

- Котенко И. В., Саенко И. Б., Скоробогатов С. Ю., Лаута О. С., Кочин В. П.* Методика оценки устойчивости программно-конфигурируемых сетей в условиях компьютерных атак 90

- Ким Т. Ю., Печковская А. В., Печковский Е. И.* Метод оптимизации массы пластиковых деталей редуктора, изготавливаемых с помощью 3D-печати, на основе генетического алгоритма 103

- Аннотации депонированных в БГУ работ 112

CONTENTS

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

- Starovoitov A. P., Kruglikov I. V., Osnach T. M.* Rational approximations of power series, trigonometric series and series of Chebyshev polynomials 6

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

- Zhuk A. I., Zashchuk H. N.* Systems of equations in differentials with generalised derivatives of continuous functions 22

GEOMETRY AND TOPOLOGY

- Biadrytski A. S.* On some properties of one Očan type topology..... 31

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

- Nikolaitchik M. A., Zhang Shiqi.* Construction of mechanical and mathematical model of visco-elastic block element for solving geomechanics dynamic problems using discrete element method.... 40
- Mikhasev G. I., Misnik V. V., Botogova M. G.* Effect of electrostatic and intermolecular forces on free small vibrations of a micro-cantilever 62

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

- Chen Yu-Xiang, Andrianov A. M., Tuzikov A. V.* Identification of combinations of genomic mutations using genome-wide association studies by example of *Mycobacterium tuberculosis* 73

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

- Kotenko I. V., Saenko I. B., Skorobogatov S. Y., Lauta O. S., Kochyn V. P.* Methodology for assessing the reliability of software-defined networks under computer attacks 90
- Kim T. Yu., Pechkouskaya A. V., Pechkouski Ya. I.* Method for optimising the mass of plastic gearbox components in 3D printing using a genetic algorithm..... 103
- Indicative abstracts of the papers deposited in BSU..... 112

Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области математики и информатики), техническим наукам (в области информатики).

Журнал включен в наукометрические базы данных Scopus, Mathematical Reviews, Ulrichsweb, Google Scholar, zbMath, Russian Science Citation Index, ПИИЦ, China National Knowledge Infrastructure.

**Журнал Белорусского
государственного университета.
Математика. Информатика.
№ 3. 2024**

Учредитель:
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск, Республика Беларусь.
Почтовый адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск, Республика Беларусь.
Тел. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.
E-mail: jmathinf@bsu.by
URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Журнал Белорусского государственного
университета. Математика. Информатика»
издается с января 1969 г.
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»
(ISSN 1561-834X).

Редакторы *О. А. Семенец, М. А. Подголина*
Технический редактор *В. В. Пижкова*
Корректор *Л. А. Меркуль*

Подписано в печать 29.11.2024.
Тираж 55 экз. Заказ 1164.

Республиканское унитарное предприятие
«СтройМедиаПроект».
ЛП № 02330/71 от 23.01.2014.
Ул. В. Хоружей, 13/61, 220123,
г. Минск, Республика Беларусь.

© БГУ, 2024

**Journal
of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics.
No. 3. 2024**

Founder:
Belarusian State University

Registered address: 4 Niezaliezhnasci Ave.,
Minsk 220030, Republic of Belarus.
Correspondence address: 4 Niezaliezhnasci Ave.,
Minsk 220030, Republic of Belarus.
Tel. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.
E-mail: jmathinf@bsu.by
URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Journal of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics»
published since January, 1969.
Until 2017 named «Vestnik BGU.
Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika»
(ISSN 1561-834X).

Editors *O. A. Semenets, M. A. Podgolina*
Technical editor *V. V. Pishkova*
Proofreader *L. A. Merkul'*

Signed print 29.11.2024.
Edition 55 copies. Order number 1164.

Republic Unitary Enterprise
«StroiMediaProekt».
License for publishing No. 02330/71, 23 January, 2014.
13/61 V. Haruzhaj Str.,
Minsk 220123, Republic of Belarus.

© BSU, 2024