



БЕЛОРУССКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ЖУРНАЛ
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА ИНФОРМАТИКА

JOURNAL
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

MATHEMATICS and INFORMATICS

Издается с января 1969 г.
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)

Выходит три раза в год

3

2017

МИНСК
БГУ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор **ХАРИН Ю. С.** – доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси; директор Научно-исследовательского института прикладных проблем математики и информатики БГУ, заведующий кафедрой математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: kharin@bsu.by

Ответственный секретарь **МАТЕЙКО О. М.** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: matseika@bsu.by

- Абламейко С. В.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Альтенбах Х. Магдебургский университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия.
Беняш-Кривец В. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Гладков А. Л. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Головко В. А. Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь.
Гороховик В. В. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Громак В. И. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Демидо Г. Институт математики и информатики Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва.
Дудкин А. А. Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Дымков М. П. Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь.
Егоров А. Д. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Жоландек Х. Институт математики Варшавского университета, Варшава, Польша.
Журавков М. А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Зубков А. М. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.
Кашин Б. С. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Княжище Л. Б. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Кожанов А. И. Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.
Котов В. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Краснопрошин В. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Кротов В. Г. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Макаров Е. К. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Мандрик П. А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Матус П. П. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Медведев Д. Г. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Михасев Г. И. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Ровба Е. А. Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Гродно, Беларусь.
Сафонов В. Г. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Скиба А. Н. Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель, Беларусь.
Тузигов А. В. Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Чижик С. А. Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Янчевский В. И. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

EDITORIAL BOARD

- Editor-in-chief** **KHARIN Y. S.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor, corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus; director of the Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, head of the department of mathematical modelling and data analysis of the faculty of applied mathematics and computer science of the Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: kharin@bsu.by
- Executive secretary** **MATEIKO O. M.**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of general mathematics and computer science of the faculty of mechanics and mathematics of the Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: matseika@bsu.by
- Ablameyko S. V.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Altenbach H. Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany.
Beniash-Kryvets V. V. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Gladkov A. L. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Golovko V. A. Brest State Technical University, Brest, Belarus.
Gorokhovich V. V. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Gromak V. I. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Dzemyda G. Institute of Mathematics and Informatics of the Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
Doudkin A. A. United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Dymkov M. P. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Egorov A. D. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Zoladek H. Mathematics Institute of the University of Warsaw, Warsaw, Poland.
Zhuravkov M. A. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Zubkov A. M. Lomonosov Moscow State University, Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
Kashin B. S. Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Knyazhishche L. B. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Kozhanov A. I. Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia.
Kotov V. M. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Krasnoproshin V. V. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Krotov V. G. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Makarov E. K. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Mandrik P. A. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Matus P. P. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Medvedev D. G. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Mikhasev G. I. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Rovba E. A. Yanka Kupala Grodno State University, Grodno, Belarus.
Safonov V. G. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Skiba A. N. Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus.
Tuzikov A. V. Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Chizhik S. A. National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Yanchevskii V. I. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

УДК 517.983.34

АНАЛОГИ ФОРМУЛ СОХОЦКОГО ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

В. В. КАШЕВСКИЙ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Доказаны предельные формулы для сингулярных интегралов вида

$$\Phi_n(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(\tau) \ln^n(\tau - z)}{\tau - z} d\tau, \quad n = 1, 2, \dots$$

Предельные значения таких интегралов выражаются через сингулярные интегральные операторы

$$\Psi_n(t) = \int_0^1 \frac{\varphi(\tau) \ln^n |\tau - t|}{\tau - t} d\tau, \quad n = 1, 2, \dots, \quad t \in (0, 1),$$

а также интегральные операторы

$$\int_0^t \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} \ln^k |t - \tau| d\tau.$$

Из указанных формул получено аддитивное представление для сингулярных интегралов

Образец цитирования:

Кашевский В. В. Аналоги формул Сохоцкого для интегральных операторов с дополнительной логарифмической особенностью // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 4–10.

For citation:

Kashevski V. V. Analogue Sochocky formulae for integral operators with additional logarithmic singularity. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 3. P. 4–10 (in Russ.).

Автор:

Витольд Васильевич Кашевский – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики и математической физики физического факультета.

Author:

Vitold V. Kashevski, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics and mathematical physics, faculty of physics.
kshvskii@mail.ru

$$\int_0^1 \frac{\varphi(\tau) \ln|\tau-t|}{\tau-t} d\tau.$$

Формулы, которые доказаны в статье, могут быть использованы для исследования сингулярных операторов и решения интегральных уравнений.

Ключевые слова: интегральные операторы; сингулярные интегралы.

ANALOGUE SOCHOCKY FORMULAE FOR INTEGRAL OPERATORS WITH ADDITIONAL LOGARITHMIC SINGULARITY

V. V. KASHEVSKI^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

In this paper we prove the limit formulas for singular integrals of the form

$$\Phi_n(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(\tau) \ln^n(\tau-z)}{\tau-z} d\tau, \quad n=1, 2, \dots$$

Limit values of such integrals are expressed in terms of singular integral operators

$$\Psi_n(t) = \int_0^1 \frac{\varphi(\tau) \ln^n|\tau-t|}{\tau-t} d\tau, \quad n=1, 2, \dots, \quad t \in (0, 1),$$

and also integral operators

$$\int_0^t \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau-t} \ln^k|t-\tau| d\tau.$$

As an application of these formulas derived additive representation for singular integrals

$$\int_0^1 \frac{\varphi(\tau) \ln|\tau-t|}{\tau-t} d\tau.$$

The formulas are derived in the article can be used for research and operators singular integral equations solutions.

Key words: integral operators; singular integrals.

В теории сингулярных интегральных уравнений и краевых задач для аналитических функций важную роль играют формулы Сохоцкого. Если L – гладкая линия на комплексной плоскости и функция $\varphi: L \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет условию Гёльдера

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq c|t_1 - t_2|^\mu, \quad 0 < \mu \leq 1,$$

то для интеграла типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z} d\tau$$

справедливы следующие предельные формулы Сохоцкого [1; 2]:

$$\Phi^+(z) = +\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau, \quad t \in L,$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau, \quad t \in L.$$

В настоящей работе получены аналогичные формулы для интегралов

$$\Phi_n(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(\tau) \ln^n(\tau - z)}{\tau - z} d\tau, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

В формуле (1) непрерывная ветвь логарифма $\ln(\tau - z)$ выбрана с разрезом вдоль части действительной оси от τ до $+\infty$ так, что

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg(\tau - i) < 0.$$

Нам понадобятся сингулярные интегралы вида

$$\Psi_n(t) = \int_0^1 \frac{\varphi(\tau) \ln^n |\tau - t|}{\tau - t} d\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

с дополнительной логарифмической особенностью.

Лемма 1. Интеграл (2), где функция φ удовлетворяет условию Гёльдера, существует в смысле главного значения и равен

$$\int_0^1 \frac{\varphi(\tau) \ln^n |\tau - t|}{\tau - t} d\tau = \int_0^1 \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} \ln^n |\tau - t| d\tau + \frac{1}{n+1} (\ln^{n+1}(1-t) - \ln^{n+1}t).$$

Доказательство. По определению главного значения интеграла

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\varphi(\tau) \ln^n |\tau - t|}{\tau - t} d\tau &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{t-\varepsilon} \frac{\varphi(\tau) \ln^n |\tau - t|}{\tau - t} d\tau + \int_{t+\varepsilon}^1 \frac{\varphi(\tau) \ln^n |\tau - t|}{\tau - t} d\tau \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{t-\varepsilon} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} \ln^n |\tau - t| d\tau + \int_{t+\varepsilon}^1 \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} \ln^n |\tau - t| d\tau \right) + \varphi(t) \int_0^1 \frac{\ln^n |\tau - t|}{\tau - t} d\tau = \\ &= \int_0^1 \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} \ln^n |\tau - t| d\tau + \frac{1}{n+1} (\ln^{n+1}(1-t) - \ln^{n+1}t). \end{aligned}$$

Здесь последний интеграл сходится как несобственный. Лемма доказана.

Далее, будем использовать следующие обозначения:

$$\ln^\pm(\tau - t) = \begin{cases} \ln|\tau - t|, & \tau > t, \\ \ln|\tau - t| \mp \pi i, & \tau < t. \end{cases}$$

Кроме того, пусть

$$\Psi_t(z) = \int_0^1 \frac{(\varphi(\tau) - \varphi(t)) \ln^n(\tau - z)}{\tau - z} d\tau,$$

$$\Psi_t^\pm(t) = \int_0^1 \frac{(\varphi(\tau) - \varphi(t)) (\ln^\pm(\tau - t))^n}{\tau - t} d\tau, \quad n = 1, 2, \dots$$

Лемма 2. Предположим, что функция φ удовлетворяет условию Гёльдера и $t \in (0; 1)$. Тогда

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \Psi_t(t + iy) = \Psi_t^+(t), \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} \Psi_t(t + iy) = \Psi_t^-(t).$$

Доказательство. Пусть $n = 1$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $z = t + iy$. Достаточно оценить разность

$$\left| \int_0^1 \frac{(\varphi(\tau) - \varphi(t)) \ln^n(\tau - z)}{\tau - z} d\tau - \int_0^1 \frac{(\varphi(\tau) - \varphi(t)) \ln^+(\tau - t)}{\tau - t} d\tau \right| \leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \left| \int_{t-\delta}^t \left(\frac{\ln(\tau-z)}{\tau-z} - \frac{\ln^+(\tau-t)}{\tau-t} \right) (\varphi(\tau) - \varphi(t)) d\tau \right|,$$

$$I_2 = \left| \int_0^{t-\delta} \left(\frac{\ln(\tau-z)}{\tau-z} - \frac{\ln^+(\tau-t)}{\tau-t} \right) (\varphi(\tau) - \varphi(t)) d\tau \right|,$$

$$I_3 = \left| \int_0^{t+\delta} \left(\frac{\ln(\tau-z)}{\tau-z} - \frac{\ln^+(\tau-t)}{\tau-t} \right) (\varphi(\tau) - \varphi(t)) d\tau \right|,$$

$$I_4 = \left| \int_{t+\delta}^1 \left(\frac{\ln(\tau-z)}{\tau-z} - \frac{\ln^+(\tau-t)}{\tau-t} \right) (\varphi(\tau) - \varphi(t)) d\tau \right|.$$

Нам нужна оценка следующей величины:

$$\left| \left(\frac{\ln(\tau-z)}{\tau-z} - \frac{\ln^+(\tau-t)}{\tau-t} \right) \right| \leq \left| \left(\frac{\ln(\tau-z)}{\tau-z} - \frac{\ln(\tau-z)}{\tau-t} \right) \right| + \left| \frac{\ln(\tau-z)}{\tau-t} - \frac{\ln^+(\tau-t)}{\tau-t} \right| = I_{11} + I_{12}. \quad (3)$$

Пусть $t - \delta < \tau < t$. Можно далее считать, что $\delta < \frac{1}{4}$ и $|z - t| < \frac{1}{4}$. Тогда $|z - \tau| < \frac{1}{4}$. Следовательно,

$$|\ln|z - \tau|| > \ln 2. \quad (4)$$

Поскольку $\frac{1}{|z - \tau|} < \frac{1}{|t - \tau|}$, то

$$|\ln|z - \tau|| \leq |\ln|t - \tau||. \quad (5)$$

Далее, с учетом (4) и (5) получим оценку

$$|\arg(\tau - z)| \leq \pi < c_1 |\ln|\tau - t||. \quad (6)$$

Тогда из оценок (5) и (6) вытекает неравенство

$$|\ln(\tau - z)| < c_2 |\ln|\tau - t||. \quad (7)$$

Поэтому

$$I_{11} \leq |\ln(\tau - z)| \frac{|z - t|}{|\tau - z||\tau - t|} \leq c_2 \frac{|\ln|\tau - t||}{|\tau - t|}.$$

Из (6) и (7) получаем аналогичную оценку:

$$I_{12} \leq c_3 \frac{|\ln|\tau - t||}{|\tau - t|}.$$

Итак, при $t - \delta < \tau < t$

$$\left| \left(\frac{\ln(\tau-z)}{\tau-z} - \frac{\ln^+(\tau-t)}{\tau-t} \right) \right| \leq c_4 \frac{|\ln|\tau - t||}{|\tau - t|}. \quad (8)$$

Когда $t < \tau < t + \delta$, получаем аналогичную оценку для (3):

$$\left| \left(\frac{\ln(\tau-z)}{\tau-z} - \frac{\ln^+(\tau-t)}{\tau-t} \right) \right| \leq c_5 \frac{|\ln|\tau - t||}{|\tau - t|}. \quad (9)$$

Если учесть условие Гёльдера и выбирать нужное δ , то из (8) и (9) получим неравенство

$$I_1 + I_3 \leq c_6 \int_0^\delta \frac{\ln(x^{-1})}{x^{1-\mu}} dx \leq c_\mu \ln\left(\frac{1}{\delta}\right) \delta^\mu < \varepsilon. \quad (10)$$

Пусть $0 < \tau < t - \delta$. Теперь

$$\ln \delta < \ln |z - \tau| < \ln \frac{5}{4} < \ln \frac{1}{\delta}.$$

Тогда

$$|\ln |z - \tau|| < \ln \frac{1}{\delta}, \quad (11)$$

$$|\arg(\tau - z)| \leq \pi \leq \frac{\pi}{\ln 4} \ln \frac{1}{\delta}. \quad (12)$$

Из (11) и (12) следует неравенство

$$|\ln(\tau - z)| < c_7 \ln \frac{1}{\delta}. \quad (13)$$

Итак, из (13) при $0 < \tau < t - \delta$

$$\left| \left(\frac{\ln(\tau - z)}{\tau - z} - \frac{\ln^+(\tau - t)}{\tau - t} \right) \right| \leq c_7 \frac{\ln \frac{1}{\delta}}{\delta^2} |z - t|.$$

Теперь при достаточно малом $|z - t|$ получим неравенство $I_2 < \varepsilon$. Аналогично находим, что $I_4 < \varepsilon$.

Из этих оценок и неравенства (10) следует утверждение леммы для случая $n = 1$. Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\ln^{n+1}(\tau - z)}{\tau - z} - \frac{(\ln^+(\tau - t))^{n+1}}{\tau - t} &= \ln(\tau - z) \left(\frac{\ln^n(\tau - z)}{\tau - z} - \frac{(\ln^+(\tau - t))^n}{\tau - t} \right) + \\ &+ \frac{(\ln^+(\tau - t))^n}{\tau - t} (\ln(\tau - z) - \ln^+(\tau - t)), \end{aligned}$$

то для общего случая ($n > 1$) можно применить метод математической индукции. Лемма доказана.

Для предельных значений интегралов (1) введем следующие обозначения:

$$\Phi_n^+(t) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \Phi_n(t + iy), \quad \Phi_n^-(t) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \Phi_n(t + iy).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $t \in (0; 1)$ и интегралы $\Psi_n(t)$ заданы формулами (2). Тогда справедливы следующие предельные формулы:

$$\Phi_n^+(t) = \Psi_n(t) - \frac{\varphi(t)}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k (-\pi i)^{n-k+1} \ln^k t \right) + \int_0^t \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (-\pi i)^{n-k} \ln^k |t - \tau| \right) d\tau, \quad (14)$$

$$\Phi_n^-(t) = \Psi_n(t) - \frac{\varphi(t)}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k (\pi i)^{n-k+1} \ln^k t \right) + \int_0^t \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (\pi i)^{n-k} \ln^k |t - \tau| \right) d\tau. \quad (15)$$

Если $t \in (1; \infty)$, то

$$\Phi_n^\pm(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k (\mp \pi i)^{n-k} \Psi_k(t). \quad (16)$$

Доказательство. Проведем доказательство для $n = 1$ и $t \in (0; 1)$. С одной стороны, поскольку

$$\Psi_t(z) = \int_0^1 \frac{(\varphi(\tau) - \varphi(t)) \ln(\tau - z)}{\tau - z} d\tau = \Phi_1(z) - \frac{\varphi(t)}{2} (\ln^2(1-z) - \ln^2(-z)),$$

то

$$\Psi_t^+(t) = \Phi_1^+(t) - \frac{\varphi(t)}{2} (\ln^2(1-t) - (\ln t - \pi i)^2). \quad (17)$$

С другой стороны, по лемме 2

$$\begin{aligned} \Psi_t^+(t) &= \int_0^1 \frac{(\varphi(\tau) - \varphi(t)) \ln^+(\tau - t)}{\tau - t} d\tau = \int_0^1 \frac{\ln|\tau - t| (\varphi(\tau) - \varphi(t))}{\tau - t} d\tau - \\ &- \pi i \int_0^t \frac{(\varphi(\tau) - \varphi(t))}{\tau - t} d\tau = \Psi_1(t) - \frac{\varphi(t)}{2} (\ln^2(1-t) - (\ln t)^2) - \pi i \int_0^t \frac{(\varphi(\tau) - \varphi(t))}{\tau - t} d\tau. \end{aligned}$$

Если учесть формулу (17), то можно найти

$$\Phi_1^+(t) = (\Psi_1)(t) + \frac{\pi^2}{2} \varphi(t) + \pi i \varphi(t) \ln t - \pi i \int_0^t \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau.$$

Аналогично можно получить формулу для функции $\Phi_1^-(t)$, а также рассмотреть случай $n > 1$. Доказательство формулы (16) проводится так же, как и в случае особого интеграла типа Коши [1; 2].

С помощью формул (14) и (15) можно получить аддитивное представление для сингулярных интегралов (2). Ограничимся случаем $n = 1$.

Теорема 2. *Справедлива следующая формула:*

$$\int_0^1 \frac{\varphi(\tau) \ln|\tau - t|}{\tau - t} d\tau = -\frac{\pi^2}{2} \varphi(t) + \ln(1-t) \int_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_0^1 \frac{\varphi(\tau) \ln \frac{\tau}{1-\tau}}{\tau - t} d\tau - \int_0^1 \frac{R\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad (18)$$

где

$$R\varphi(\tau) = \int_0^\tau \frac{\varphi(x) - \varphi(\tau)}{x - \tau} dx.$$

Доказательство. Рассмотрим три интеграла типа Коши:

$$F_1(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(\tau) \ln \tau}{\tau - z} d\tau, \quad F_2(z) = \int_0^1 \frac{\Psi_2(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad F_3(z) = \int_1^\infty \frac{\Psi_3(\tau)}{\tau - z} d\tau,$$

где

$$\Psi_2(\tau) = \int_0^\tau \frac{\varphi(x) - \varphi(\tau)}{x - \tau} dx, \quad \Psi_3(\tau) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{x - \tau} dx.$$

Из свойств интегралов типа Коши [1; 2] следует, что функции $F_1(z)$, $F_2(z)$, $F_3(z)$ имеют интегрируемые особенности в точках $z = 0$, $z = 1$ и стремятся к нулю, когда z стремится к бесконечности. Кроме того, из теоремы 2 получим при $t \in (0; 1) \cup (1; \infty)$

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = (F_1^+(t) - F_2^+(t) - F_3^+(t)) - (F_1^-(t) - F_2^-(t) - F_3^-(t)).$$

Тогда из принципа аналитического продолжения следует, что

$$\Phi_1(z) = F_1(z) - F_2(z) - F_3(z).$$

Если теперь расписать это равенство для $t \in (0; 1)$ как

$$\Phi_1^+(t) = F_1^+(t) - F_2^+(t) - F_3^+(t),$$

то после преобразований получим формулу (18) при $n = 1$.

Библиографические ссылки

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М. : Наука, 1977.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968.

References

1. Gakhov F. D. [Boundary value problems]. Moscow : Nauka, 1977 (in Russ.).
2. Muskhelishvili N. I. [Singular integral equations]. Moscow : Nauka, 1968 (in Russ.).

*Статья поступила в редколлегию 20.03.2017.
Received by editorial board 20.03.2017.*

ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАУСДОРФОВЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ БАСЕЙНОВ ЭРГОДИЧЕСКИХ МЕР В КОДИРУЮЩИХ ПРОСТРАНСТВАХ

П. Н. ВОРОБЕЙ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассмотрены пространства $X^{\mathbb{N}}$ последовательностей элементов конечного алфавита X (кодирующие пространства) и эргодические меры, заданные на них. Изучены бассейны эргодических мер и хаусдорфовы размерности таких бассейнов относительно ультраметрики, определяемой произведением коэффициентов из единичного отрезка $\theta(x)$, $x \in X$. Для вычисления хаусдорфовых размерностей бассейнов применяются методы Биллингсли – Янг, связывающие хаусдорфову размерность множества с поточечной размерностью некоторой меры на этом множестве. Применяются также теорема Шеннона – Макмиллана – Бреймана в целях получения оценки снизу хаусдорфовой размерности бассейна и частичный аналог теоремы Макмиллана для получения оценки сверху. Цель настоящей работы – получение формулы для расчета размерности рассматриваемых бассейнов, выражающей хаусдорфову размерность через энтропию эргодической меры и коэффициент, определяемый заданной ультраметрикой.

Ключевые слова: хаусдорфова размерность; бассейны эргодических мер; энтропия.

Благодарность. Автор выражает благодарность профессору В. И. Бахтину за постановку задачи и плодотворное обсуждение работы.

CALCULATION OF HAUSDORFF DIMENSIONS OF BASINS OF ERGODIC MEASURES IN ENCODING SPACES

P. N. VARABEI^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

In the article we consider spaces $X^{\mathbb{N}}$ of sequences of elements of finite alphabet X (encoding spaces) and ergodic measures on them, basins of ergodic measures and Hausdorff dimensions of such basins with respect to ultrametrics defined by a product of coefficients of unit interval $\theta(x)$, $x \in X$. We call a basin of ergodic measure a set of points of the encoding space which define empiric measures by means of shift map, which limit (in a weak topology generated by continuous functions) is the ergodic measure. The methods of Billingsley and Young are used, which connects Hausdorff dimension and a pointwise dimension of some measure on the space, as well as Shannon – McMillan – Breiman theorem to obtain a lower bound of the dimension of a basin, and a partial analogue of McMillan theorem to obtain the upper bound. The goal of the article is to obtain a formula which can help us to calculate the Hausdorff dimension via entropy of the ergodic measure and a coefficient defined by the ultrametrics.

Key words: Hausdorff dimension; basin of an ergodic measure; entropy.

Acknowledgements. The author would like to thank professor V. I. Bakhtin for the formulation of the problem, constructive criticism and productive discussion of the manuscript.

Образец цитирования:

Воробей П. Н. Вычисление хаусдорфовых размерностей бассейнов эргодических мер в кодирующих пространствах // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 11–18.

For citation:

Varabei P. N. Calculation of Hausdorff dimensions of basins of ergodic measures in encoding spaces. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 3. P. 11–18 (in Russ.).

Автор:

Павел Николаевич Воробей – аспирант кафедры нелинейного анализа и аналитической экономики механико-математического факультета. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор В. И. Бахтин.

Author:

Pavel N. Varabei, postgraduate student at the department of nonlinear analysis and analytical economics, faculty of mechanics and mathematics.
vorobeypn@gmail.com

Для вычисления хаусдорфовых размерностей фракталов обычно используют принцип распределения масс [1–3], а в более сложных случаях применяют теоремы Биллингсли [4; 5] и Янг [6], которые связывают размерность множества с поточечной размерностью некоторой меры на этом множестве. Размерности бассейнов марковских мер вычислялись в работах Биллингсли. В настоящей работе применены методы Биллингсли – Янг для вычисления размерностей бассейнов эргодических мер, заданных на пространстве последовательностей элементов конечного алфавита. Бассейном эргодической меры называется множество точек кодирующего пространства, которые с помощью отображения сдвига определяют эмпирические меры, сходящиеся к этой эргодической мере в слабой топологии, порожденной непрерывными функциями. Основным результатом представляет собой формулу для расчета размерности таких бассейнов и дан в приведенных ниже теоремах 3 и 5.

Хаусдорфова размерность

Пусть произвольное метрическое пространство Ω покрыто конечной или счетной совокупностью множеств $\mathcal{U} = \{U_i\}$. Обозначим через $\text{diam } \mathcal{U}$ диаметр этого покрытия: $\text{diam } \mathcal{U} = \sup \text{diam } U_i$, где $\text{diam } U_i$ – диаметр U_i . Для каждого числа $\alpha > 0$ положим

$$\text{mes}(\mathcal{U}, \alpha) = \sum_i (\text{diam } U_i)^\alpha.$$

Хаусдорфовой мерой (размерности α) метрического пространства Ω называется

$$\text{mes}(\Omega, \alpha) = \lim_{\text{diam } \mathcal{U} \rightarrow 0} \text{mes}(\mathcal{U}, \alpha),$$

где \mathcal{U} – конечное или счетное покрытие Ω . Можно заметить, что при $\beta > \alpha$

$$\text{mes}(\mathcal{U}, \beta) \leq \text{mes}(\mathcal{U}, \alpha) (\text{diam } \mathcal{U})^{\beta - \alpha}.$$

Отсюда вытекает следующее свойство хаусдорфовой меры: если $\text{mes}(\Omega, \alpha) < \infty$ при некотором α , то тогда $\text{mes}(\Omega, \beta) = 0$ при всех $\beta > \alpha$. Хаусдорфовой размерностью пространства Ω называется число $\dim_H \Omega = \inf \{\alpha \mid \text{mes}(\Omega, \alpha) = 0\}$.

Кодирующее пространство, цилиндрическая метрика и θ -метрика

Пусть задано конечное множество $X = \{1, 2, \dots, s\}$. Рассмотрим пространство последовательностей (кодирующее пространство)

$$X^{\mathbb{N}} = \{x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \mid x_i \in X\}.$$

Обозначим через $Z_n(x)$ множество точек $y = (y_1, y_2, y_3, \dots)$, у которых первые n координат совпадают с соответствующими координатами точки x . Будем называть это множество *цилиндром ранга n* . В частности, $Z_0(x) = X^{\mathbb{N}}$. Фиксируем какую-нибудь положительную функцию η на множестве всех цилиндров, обладающую двумя свойствами: если $Z_n(x) \subset Z_m(y)$, то тогда $\eta(Z_n(x)) \leq \eta(Z_m(y))$, и $\eta(Z_n(x)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любой точки $x \in X^{\mathbb{N}}$. Определим на $X^{\mathbb{N}}$ цилиндрическую метрику:

$$d(x, y) = \eta(Z_n(x)),$$

где $n = n(x, y) = \max \{m : Z_m(x) = Z_m(y)\}$.

Если $x = y$, то положим $d(x, y) = 0$. Очевидно, для любых трех последовательностей $x, y, z \in X^{\mathbb{N}}$ выполняется *усиленное неравенство треугольника*

$$d(x, z) \leq \max \{d(x, y), d(y, z)\}.$$

Метрика, для которой выполняется такое неравенство, называется *ультраметрикой*.

Частным случаем цилиндрической метрики является θ -метрика, определяемая следующим образом. Пусть задан набор чисел $\theta(1), \theta(2), \dots, \theta(s)$ из интервала $(0, 1)$. Функцию η зададим равенством

$$\eta(Z_n(x)) = \prod_{i=1}^n \theta(x_i).$$

Тогда соответствующая метрика $d(x, y)$ имеет вид

$$d(x, y) = \prod_{i=1}^n \theta(x_i),$$

где $n = n(x, y) = \max \{m \mid Z_m(x) = Z_m(y)\}$.

В дальнейшем мы будем работать именно с этой метрикой.

Для вычисления хаусдорфовой размерности подмножеств $X^{\mathbb{N}}$ будет полезна следующая теорема (разные варианты которой были доказаны в [2; 4–7]). Пусть μ – некоторая конечная мера на $X^{\mathbb{N}}$. Функция

$$d_\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(Z_n(x))}{\ln \eta(Z_n(x))}$$

называется *нижней поточечной размерностью меры μ* .

Теорема 1. Если для подмножества $A \subset X^{\mathbb{N}}$ найдется такая конечная борелевская мера μ на $X^{\mathbb{N}}$, что $d_\mu(x) \leq d$ для всех точек $x \in A$, то тогда $\dim_H A \leq d$. Наоборот, если $d_\mu(x) \geq d$ для всех $x \in A$ и при этом внешняя мера $\mu^*(A)$ положительна, то тогда $\dim_H A \geq d$.

Следовательно, если $d_\mu(x) = d$ на всем подмножестве $A \subset X^{\mathbb{N}}$, то его размерность равна d .

Энтропия

Обозначим через σ левый сдвиг на множестве $X^{\mathbb{N}}$:

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Вероятностная мера μ на $X^{\mathbb{N}}$ называется *инвариантной*, если $\mu(\sigma^{-1}(A)) = \mu(A)$ для всех измеримых $A \subset X^{\mathbb{N}}$ (измеримыми будем считать множества, принадлежащие σ -алгебре, порожденной совокупностью всех цилиндров). *Разбиением* множества G называется семейство таких его непересекающихся подмножеств, объединение которых равно G . Обозначим через $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ разбиение, которое включает все множества вида $A \cap B$, где $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$. *Энтропией конечного разбиения \mathcal{A}* , состоящего из измеримых множеств, относительно меры μ будем считать величину

$$H(\mu, \mathcal{A}) = - \sum_{A \in \mathcal{A}} \mu(A) \ln \mu(A).$$

Энтропия конечного разбиения обладает свойством монотонности и субаддитивности [8, с. 94]:

$$H(\mu, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \geq H(\mu, \mathcal{A}),$$

$$H(\mu, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \leq H(\mu, \mathcal{A}) + H(\mu, \mathcal{B}).$$

Легко заметить также, что $H(\mu, \mathcal{A})$ вогнуто по отношению к аргументу μ , поскольку функция $x \mapsto x \ln x$ является выпуклой.

Обозначим через $\xi = \xi^1$ разбиение $X^{\mathbb{N}}$ на цилиндры первого ранга и $\xi^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} \sigma^{-i} \xi$ – разбиение $X^{\mathbb{N}}$ на цилиндры ранга n . *Энтропия инвариантной меры μ* на пространстве $X^{\mathbb{N}}$ определяется следующим образом:

$$h(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mu, \xi^n).$$

Предел в определении энтропии существует в силу субаддитивности энтропии конечного разбиения (по лемме Фекете; также доказательство существования этого предела см. в [8, с. 98]).

Инвариантная вероятностная мера μ называется *эргодической*, если для любого измеримого множества A из равенства $\sigma^{-1}(A) = A$ следует, что $\mu(A) = 1$ или $\mu(A) = 0$. Имеет место следующая теорема, доказательство которой можно найти в [8; 10].

Теорема 2 (Шеннона – Макмиллана – Бреймана). Если μ – эргодическая мера на $X^{\mathbb{N}}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mu(Z_n(x)) = -h(\mu) \text{ п. в.}$$

Эмпирические меры и бассейны вероятностных мер

Всем точкам $x \in X^{\mathbb{N}}$ поставим в соответствие последовательность эмпирических мер $\delta_{x,n}$, каждая из которых сосредоточена на множестве $\{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots, \sigma^{n-1}(x)\}$ и приписывает всякой точке из этого множества меру $\frac{1}{n}$. Тогда мера множества $A \subset X^{\mathbb{N}}$

$$\delta_{x,n}(A) = \frac{\left| \left\{ t = 0, \dots, n-1 \mid \sigma^t(x) \in A \right\} \right|}{n}.$$

Для каждой вероятностной меры μ на $X^{\mathbb{N}}$ определим ее бассейн $B(\mu)$ как множество таких точек $x \in X^{\mathbb{N}}$, для которых последовательность эмпирических мер $\delta_{x,n}$ сходится к μ в слабой топологии, порожденной непрерывными функциями. Напомним, что слабая топология на множестве мер задается окрестностями вида

$$O(\mu) = \left\{ \nu : \left| \int_{X^{\mathbb{N}}} f_i d\nu - \int_{X^{\mathbb{N}}} f_i d\mu \right| < \varepsilon, i = 1, \dots, n \right\}, f_i \in C(X^{\mathbb{N}}).$$

Заметим, что $\mu(B(\mu)) = 1$ для эргодических мер μ . Действительно, для любой функции $f \in L^1(X^{\mathbb{N}}, \mu)$ выполняется эргодическая теорема [8]. Значит, для почти всех $x \in X^{\mathbb{N}}$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\sigma^i(x)) \rightarrow \int_{X^{\mathbb{N}}} f d\mu. \quad (1)$$

В силу сепарабельности пространства $C(X^{\mathbb{N}})$ полной является и мера точек, для которых (1) выполняется сразу для всех $f \in C(X^{\mathbb{N}})$.

Пусть на пространстве $X^{\mathbb{N}}$ зафиксирована некоторая θ -метрика. Введем обозначение $Z_1(i) = \{(x_1, x_2, \dots) \in X^{\mathbb{N}} \mid x_1 = i\}$. Следующая теорема дает оценку размерности бассейна эргодической меры снизу.

Теорема 3. Для любой эргодической меры μ на $X^{\mathbb{N}}$

$$\dim_H B(\mu) \geq \frac{-h(\mu)}{\sum_{i=1}^s \mu(Z_1(i)) \ln \theta(i)}.$$

Доказательство. Заметим, что величина $\delta_{x,n}(Z_1(i))$ равна частоте символа i среди первых n координат точки x , поэтому

$$\frac{1}{n} \ln \eta(Z_n(x)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \theta(x_k) = \sum_{i=1}^s \delta_{x,n}(Z_1(i)) \ln \theta(i).$$

С учетом непрерывности характеристических функций цилиндров для всех $x \in B(\mu)$

$$\sum_{i=1}^s \delta_{x,n}(Z_1(i)) \ln \theta(i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^s \mu(Z_1(i)) \ln \theta(i).$$

Пусть $A(\mu)$ – множество меры 1, для которого выполняется теорема Шеннона – Макмиллана – Бреймана

$$A(\mu) = \left\{ x \in X^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mu(Z_n(x)) = -h(\mu) \right\}.$$

Тогда $C = A(\mu) \cap B(\mu)$ имеет полную меру и для любого $x \in C$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(Z_n(x))}{\ln \eta(Z_n(x))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \ln \mu(Z_n(x))}{\frac{1}{n} \ln \eta(Z_n(x))} = \frac{-h(\mu)}{\sum_{i=1}^s \mu(Z_1(i)) \ln \theta(i)}.$$

Поэтому согласно теореме 1

$$\dim_H B(\mu) \geq \dim_H C = \frac{-h(\mu)}{\sum_{i=1}^s \mu(Z_1(i)) \ln \theta(i)}.$$

Теорема доказана.

Для получения оценки размерности бассейна сверху докажем вспомогательную лемму. Ее доказательство во многом повторяет доказательство леммы из [9, с. 223].

Лемма. Для любой инвариантной меры μ на $X^{\mathbb{N}}$ и $\varepsilon > 0$ существует такая слабая окрестность $O(\mu)$, что при всех достаточно больших n для множества

$$E_n(O(\mu)) = \left\{ x \in X^n \mid \exists y \in Z_n(x) : \delta_{y,n} \in O(\mu) \right\}$$

справедлива оценка

$$\ln |E_n(O(\mu))| \leq n(h(\mu) + \varepsilon).$$

Доказательство. Для заданного $\varepsilon > 0$ фиксируем такое большое m , при котором $m^{-1}H(\mu, \xi^m) < h(\mu) + \frac{\varepsilon}{2}$. Очевидно, функция $H(v, \xi^m)$ непрерывно зависит от вероятностной меры v в слабой топологии (в силу непрерывности характеристических функций цилиндров). Выберем такую малую выпуклую слабую окрестность $O(\mu)$, что

$$\frac{1}{m}H(v, \xi^m) < h(\mu) + \frac{\varepsilon}{2} \text{ для всех } v \in O(\mu). \quad (2)$$

Для каждого $x \in E_n(O(\mu))$ фиксируем по одной точке $y \in Z_n(x)$, для которой $\delta_{y,n} \in O(\mu)$, и составим из этих точек множество Y_n . Очевидно, $|E_n(O(\mu))| = |Y_n|$. Определим вероятностную меру v_n формулой

$$v_n = \frac{1}{|Y_n|} \sum_{y \in Y_n} \delta_y.$$

Тогда

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_*^k v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_*^k \left(\frac{1}{|Y_n|} \sum_{y \in Y_n} \delta_y \right) = \frac{1}{|Y_n|} \sum_{y \in Y_n} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\sigma^k(y)} = \frac{1}{|Y_n|} \sum_{y \in Y_n} \delta_{y,n} \in O(\mu) \quad (3)$$

(поскольку $\delta_{y,n} \in O(\mu)$ и $O(\mu)$ выпукло). Каждый цилиндр $Z_n(x)$ содержит не более одной точки из Y_n , поэтому

$$H(v_n, \xi^n) = - \sum_{x \in X^{\mathbb{N}}} v_n(Z_n(x)) \ln v_n(Z_n(x)) = - \sum_{y \in Y_n} \frac{1}{|Y_n|} \ln \frac{1}{|Y_n|} = \ln |Y_n| = \ln |E_n(O(\mu))|.$$

Заметим, что для $i = 0, \dots, m - 1$ выполняются неравенства:

$$i + m \cdot \left\lfloor \frac{n-i-1}{m} \right\rfloor < n \leq i + m \cdot \left\lfloor \frac{n-i-1}{m} \right\rfloor + m.$$

Также нетрудно видеть, что

$$\xi^{i+m \cdot \left\lfloor \frac{n-i-1}{m} \right\rfloor + m} = \xi^i \vee \sigma^{-i} \xi^m \vee \sigma^{-i-m} \xi^m \vee \dots \vee \sigma^{-i-m \cdot \left\lfloor \frac{n-i-1}{m} \right\rfloor} \xi^m.$$

Следовательно, в силу монотонности и субаддитивности энтропии

$$\begin{aligned} \ln |E_n(O(\mu))| &\leq \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} H \left(v_n, \xi^{i+m \cdot \left\lfloor \frac{n-i-1}{m} \right\rfloor + m} \right) \leq \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \left(H(v_n, \xi^i) + \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-i-1}{m} \right\rfloor} H(v_n, \sigma^{-i-jm} \xi^m) \right) \leq \\ &\leq H(v_n, \xi^m) + \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{n-1} H(v_n, \sigma^{-k} \xi^m) = H(v_n, \xi^m) + \frac{n}{m} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} H(\sigma^k v_n, \xi^m). \end{aligned}$$

Далее, используя известную оценку $H(v_n, \xi^m) \leq \ln |\xi^m|$, вогнутость $H(v, \xi^m)$ по отношению к v и неравенства (3) и (2), получаем

$$\ln |E_n(O(\mu))| \leq \ln |\xi^m| + \frac{n}{m} H \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sigma^k v_n, \xi^m \right) \leq m \ln |\xi| + n \left(h(\mu) + \frac{\varepsilon}{2} \right) = n \left(h(\mu) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{m \ln |\xi|}{n} \right).$$

При выборе таких больших n , для которых $\frac{m \ln |\xi|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, последнее выражение не превосходит $n(h(\mu) + \varepsilon)$. Таким образом, лемма доказана.

Докажем теперь оценку сверху для размерности бассейнов инвариантных вероятностных (а следовательно, и эргодических) мер.

Теорема 4. Для любой инвариантной вероятностной меры μ и $\varepsilon > 0$ существует такая слабая окрестность $O(\mu)$, что для множества

$$A = \left\{ x \in X^{\mathbb{N}} \mid \forall N \exists n > N \text{ и } y \in Z_n(x) : \delta_{y,n} \in O(\mu) \right\}$$

справедлива оценка его размерности

$$\dim_H A \leq \frac{-h(\mu)}{\sum_{i=1}^s \mu(Z_1(i)) \ln \theta(i)} + \varepsilon.$$

В частности, для бассейна $B(\mu)$ получаем

$$\dim_H B(\mu) \leq \frac{-h(\mu)}{\sum_{i=1}^s \mu(Z_1(i)) \ln \theta(i)}.$$

Доказательство. Фиксируем произвольное $\kappa > 0$. С помощью леммы выберем слабую окрестность $O(\mu)$, удовлетворяющую условиям:

$$\left\{ x \in X^{\mathbb{N}} \mid \exists y \in Z_n(x) : \delta_{y,n} \in O(\mu) \right\} \leq e^{n(h(\mu) + \kappa)}$$

для всех достаточно больших n и

$$\sum_{i=1}^s \delta(Z_1(i)) \ln \theta(i) < \sum_{i=1}^s \mu(Z_1(i)) \ln \theta(i) + \kappa$$

для всех $\delta \in O(\mu)$. Тогда для каждого $x \in X^n$, для которого существует $y \in Z_n(x)$, удовлетворяющее условию $\delta_{y,n} \in O(\mu)$, имеем

$$\begin{aligned} \text{diam}(Z_n(x)) &= \text{diam}(Z_n(y)) = \prod_{i=1}^n \theta(y_i) = \exp\left(\sum_{i=1}^n \ln \theta(y_i)\right) = \\ &= \exp\left(n \sum_{i=1}^s \delta_{y,n}(Z_1(i)) \ln \theta(i)\right) < \exp\left(n \sum_{i=1}^s \mu(Z_1(i)) \ln \theta(i) + n\kappa\right). \end{aligned}$$

При любом N множество A покрывается семейством цилиндров

$$\mathcal{U}_N = \bigcup_{n=N}^{\infty} \{Z_n(x) | \exists y \in Z_n(x) : \delta_{y,n} \in O(\mu)\}.$$

Очевидно, $\text{diam} \mathcal{U}_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Используя лемму, оценим при $N \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \text{mes}(\mathcal{U}_N, \alpha) &= \sum_{Z_n(x) \in \mathcal{U}_N} (\text{diam} Z_n(x))^\alpha \leq \sum_{n=N}^{\infty} e^{n(h(\mu) + \kappa)} \exp\left(\alpha n \sum_{i=1}^s \mu(Z_1(i)) \ln \theta(i) + \alpha n \kappa\right) = \\ &= \sum_{n=N}^{\infty} \exp\left(n\left(h(\mu) + \kappa + \alpha \sum_{i=1}^s \mu(Z_1(i)) \ln \theta(i) + \alpha \kappa\right)\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Если

$$\alpha = \frac{-h(\mu)}{\sum_{i=1}^s \mu(Z_1(i)) \ln \theta(i)} + \varepsilon,$$

то можно выбрать такое малое $\kappa > 0$, что выражение (4) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$, поэтому мера $\text{mes}(A, \alpha)$ равна нулю и $\dim_H A \leq \alpha$. Оценка для $\dim_H B(\mu)$ вытекает из произвольности $\varepsilon > 0$ и включения $B(\mu) \subset A$. Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. Edgar G. Measure, Topology, and Fractal Geometry. New York : Springer, 2008.
2. Falconer K. Fractal Geometry. Mathematical foundations and applications. Chichester : Wiley, 2003.
3. Песин Я. Теория размерности и динамические системы. Современный взгляд и приложения. Минск : Институт компьютерных исследований, 2002.
4. Billingsley P. Hausdorff dimension in probability theory. I // Ill. J. Math. 1960. № 4. P. 187–209.
5. Billingsley P. Hausdorff dimension in probability theory. II // Ill. J. Math. 1961. № 5. P. 291–298.
6. Young L.-S. Dimension, entropy and Lyapunov exponents // Ergod. Theory Dyn. Syst. 1982. № 2. P. 109–124.
7. Bakhtin V. I. The McMillan theorem for colored branching processes and dimensions of random fractals // Entropy. 2014. Vol. 16, № 12. P. 6624–6653.
8. Биллингсли П. Эргодическая теория и информация. М. : Мир, 1969.
9. Brin M., Stuck G. Introduction to dynamical systems. Cambridge : Cambridge University Press, 2002.
10. Algoet P. H., Cover T. M. A sandwich proof of the Shannon – McMillan – Breiman theorem // The Ann. Probab. 1988. Vol. 16, № 2. P. 899–909.

References

1. Edgar G. Measure, Topology, and Fractal Geometry. New York : Springer, 2008.
2. Falconer K. Fractal Geometry. Mathematical foundations and applications. Chichester : Wiley, 2003. DOI: 10.1002/0470013850.

3. Pesin Y. [Dimension theory in dynamical systems. Contemporary views and applications]. Minsk : Institute of Computer Science, 2002 (in Russ.).
4. Billingsley P. Hausdorff dimension in probability theory. I. *Ill. J. Math.* 1960. No. 4. P. 187–209.
5. Billingsley P. Hausdorff dimension in probability theory. II. *Ill. J. Math.* 1961. No. 5. P. 291–298.
6. Young L.-S. Dimension, entropy and Lyapunov exponents. *Ergod. Theory Dyn. Syst.* 1982. No. 2. P. 109–124.
7. Bakhtin V. I. The McMillan theorem for colored branching processes and dimensions of random fractals. *Entropy*. 2014. Vol. 16, No. 12. P. 6624–6653.
8. Billingsley P. [Ergodic theory and information]. Moscow : Mir, 1969 (in Russ.).
9. Brin M., Stuck G. Introduction to dynamical systems. Cambridge : Cambridge University Press, 2002.
10. Algoet P. H., Cover T. M. A sandwich proof of the Shannon – McMillan – Breiman theorem. *The Ann. Probab.* 1988. Vol. 16, No. 2. P. 899–909.

Статья поступила в редакцию 30.03.2017.
Received by editorial board 30.03.2017.

ОБ УРАВНЕНИЯХ, СОДЕРЖАЩИХ ПРОИЗВОДНУЮ ДЕЛЬТА-ФУНКЦИИ

Е. В. ШКАДИНСКАЯ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Выражение $u'' + a\delta'u$, содержащее в качестве коэффициента производную дельта-функции, является формальным и не задает оператор в пространстве $L_2(\mathbf{R})$, так как произведение $\delta'u$ не определено. В связи с этим рассматривается семейство операторов, аппроксимирующее это формальное выражение вида

$$(L(\varepsilon, a, \varphi)u)(x) = u''(x) + a(\varepsilon) \cdot \left(\int \psi_\varepsilon(y)u(y)dy \cdot \varphi_\varepsilon(x) + \int \varphi_\varepsilon(y)u(y)dy \cdot \psi_\varepsilon(x) \right),$$

где $\varphi \in D(\mathbf{R})$; $\varphi(x) \in \mathbf{R}$; $\int \varphi(x)dx = 1$; $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$; коэффициент $a(\varepsilon)$ принимает вещественные ненулевые значения. Цель настоящей работы – нахождение предела этого семейства операторов в смысле резольвентной сходимости. Получены, в зависимости от поведения коэффициента $a(\varepsilon)$ и свойств функции φ , пять различных видов пределов резольвент этого семейства операторов, поэтому формальному выражению $u'' + a\delta'u$ нельзя единственным образом поставить в соответствие оператор в $L_2(\mathbf{R})$. Это является принципиальным отличием от случая выражения $u'' + a\delta u$, для которого предел резольвент не зависит от выбора аппроксимирующего семейства.

Ключевые слова: резольвента; резольвентная сходимость; аппроксимация; фундаментальное решение.

ON EQUATIONS CONTAINING DERIVATIVE OF THE DELTA-FUNCTION

A. V. SHKADZINSKAYA^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

The expression $u'' + a\delta'u$, which is consisted derivative of delta-function as a coefficient, is a formal expression and doesn't define operator in $L_2(\mathbf{R})$, because a product $\delta'u$ is not defined. So according to these reasons the study investigated the family of operators, which are approximated by the following formal expression

$$(L(\varepsilon, a, \varphi)u)(x) = u''(x) + a(\varepsilon) \cdot \left(\int \psi_\varepsilon(y)u(y)dy \cdot \varphi_\varepsilon(x) + \int \varphi_\varepsilon(y)u(y)dy \cdot \psi_\varepsilon(x) \right),$$

where $\varphi \in D(\mathbf{R})$; $\varphi(x) \in \mathbf{R}$; $\int \varphi(x)dx = 1$; $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$; coefficient $a(\varepsilon)$ could be real-valued and not null. The main results of the study were finding the limit in the family in sense of resolvent convergence. As the result, the five different

Образец цитирования:

Шкадинская Е. В. Об уравнениях, содержащих производную дельта-функции // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 19–26.

For citation:

Shkadzinskaya A. V. On equations containing derivative of the delta-function. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 3. P. 19–26 (in Russ.).

Автор:

Елена Васильевна Шкадинская – аспирантка кафедры функционального анализа механико-математического факультета. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, профессор А. Б. Антонец.

Author:

Alena V. Shkadzinskaya, postgraduate student at the department of functional analysis, faculty of mechanics and mathematics. alenzija@gmail.com

kinds of limits of resolvents in this family had been received which are depended on a behavior of coefficient $a(\varepsilon)$ and function φ properties. Therefore the formal expression $u'' + a\delta'u$ could not put in accordance to the operator in $L_2(\mathbf{R})$ uniquely. This is the fundamental difference with the case $u'' + a\delta u$ expression for which the limit of resolvents doesn't depend on choosing approximated family.

Key words: resolvent; resolvent convergence; approximation; fundamental solution.

Операторы с дельтообразными коэффициентами активно изучались в течение нескольких последних десятилетий. Один из подходов к исследованию таких операторов связан с введением новых объектов – мнемофункций, которые сохраняют основные свойства обобщенных функций и образуют алгебру, т. е. допускают корректно определенную операцию умножения. При этом строятся вложения пространства обобщенных функций в такую алгебру [1; 2]. Этот подход сводит исследование уравнений с дельтообразными коэффициентами к классическим задачам асимптотического анализа уравнений с малым параметром.

Опишем такой подход в случае формального выражения $u'' + a\delta u$. Для этого выражения строится семейство аппроксимирующих операторов в пространстве $L_2(\mathbf{R})$ вида

$$(L_\varepsilon u)(x) = u''(x) + a(\varepsilon) \int \varphi_\varepsilon(y) u(y) dy \cdot \varphi_\varepsilon(x), \quad (1)$$

где $\varphi \in D(\mathbf{R})$; $\varphi(x) \in \mathbf{R}$; $\int \varphi(x) dx = 1$; $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$; коэффициент $a(\varepsilon)$ принимает вещественные ненулевые значения [3].

Формальный переход к пределу в (1) при $\varepsilon \rightarrow 0$ в случае гладких функций приводит к рассматриваемому выражению $u'' + a\delta u$, но в пространстве операторов, действующих в $L_2(\mathbf{R})$, это семейство не имеет предела. Содержательные результаты заключаются в нахождении предела этого семейства в смысле резольвентной сходимости.

Для семейства (1) известны следующие утверждения [4].

1. Резольвентный предел семейства (1) в пространстве $L_2(\mathbf{R})$ существует тогда и только тогда, когда существует конечный или бесконечный предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a(\varepsilon) = a$.

2. Область определения предельного оператора не зависит от выбора аппроксимирующей функции φ , а зависит только от вида величины a , а именно:

- если $a \in \mathbf{R}$, то область определения $D(L^{(a)})$ предельного оператора $L^{(a)}$ состоит из функций, которые на левой и правой полупрямых имеют абсолютно непрерывные первые производные и вторые производные из пространства $L_2(\mathbf{R})$, а в точке 0 непрерывны и удовлетворяют условию сопряжения

$$u'_0(+0) - u'_0(-0) = -a u(0);$$

- если $a = \infty$, то область определения $D(L^{(\infty)})$ предельного оператора $L^{(\infty)}$ состоит из функций, которые на левой и правой полупрямых имеют абсолютно непрерывные первые производные и вторые производные из пространства $L_2(\mathbf{R})$, а в точке 0 непрерывны и удовлетворяют условию $u(0) = 0$.

На функциях из своей области определения оператор $L^{(a)}$ действует как оператор вычисления второй производной в точках, отличных от 0 [4].

Напомним, что пространство, состоящее из функций, определенных на открытом подмножестве Ω на прямой, первые производные которых абсолютно непрерывны, а вторые – из $L_2(\Omega)$, называется пространством Соболева и обозначается $H^2(\Omega)$. Заметим, что пространство $H(\mathbf{R}) \subset H^2(\mathbf{R}^-) \oplus H^2(\mathbf{R}^+)$, но не совпадает с этой суммой. Пространство Соболева $H^2(\mathbf{R})$ является естественной областью определения оператора вычисления второй производной. Описанная выше область определения оператора принадлежит пространству $H^2(\mathbf{R}^-) \oplus H^2(\mathbf{R}^+)$, но не принадлежит пространству $H^2(\mathbf{R})$. Поскольку вторые производные функций из пространства $H^2(\mathbf{R}^-) \oplus H^2(\mathbf{R}^+)$ интегрируемы в квадрате, первые

производные этих функций и сами функции будут иметь конечные пределы при $x \rightarrow +0$ и $x \rightarrow -0$. У операторов, которые соответствуют формальным выражениям $u'' + a\delta u$ и $u'' + a\delta' u$, область определения обычно задается как подпространство в $H^2(\mathbf{R}^-) \oplus H^2(\mathbf{R}^+)$, состоящее из функций, удовлетворяющих условиям сопряжения, которые связывают левосторонние и правосторонние пределы функции и ее первой производной. На такой области определения эти операторы действуют как оператор вычисления второй производной в точках, отличных от нуля. Таким образом, рассматриваемые задачи заключаются в нахождении условий сопряжения, соответствующих данному формальному выражению и (или) его аппроксимации.

Аппроксимация выражения $u'' + a\delta' u$

В настоящей работе рассматривается уравнение в пространстве $L_2(\mathbf{R})$, которое символически записывается в виде $u'' + a\delta' u = f$, где δ' – производная дельта-функции Дирака. При интерпретации формального выражения возникают сложности по сравнению со случаем, когда коэффициентом является дельта-функция [5].

Рассмотрим семейство операторов в пространстве $L_2(\mathbf{R})$ вида

$$(L(\varepsilon, a, \varphi))u(x) = u''(x) + a(\varepsilon) \cdot \left(\int \Psi_\varepsilon(y)u(y)dy \cdot \varphi_\varepsilon(x) + \int \Phi_\varepsilon(y)u(y)dy \cdot \Psi_\varepsilon(x) \right), \quad (2)$$

где $\varphi \in D(\mathbf{R})$; $\varphi(x) \in \mathbf{R}$; $\int \varphi(x)dx = 1$; $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$; $\Psi_\varepsilon(x) = (\varphi(x))' = \frac{1}{\varepsilon^2} \varphi'\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$; коэффициент $a(\varepsilon)$ принимает вещественные ненулевые значения.

На гладких функциях u предел $L(\varepsilon, a, \varphi)u$ в пространстве обобщенных функций при $\varepsilon \rightarrow 0$ есть $u'' + a\delta' u$. С этой точки зрения семейство является аппроксимацией $u'' + a\delta' u$.

Фундаментальным решением для оператора $\Delta u - \lambda u$ называется решение уравнения $(\Delta - \lambda)E_\lambda = \delta$. Спектром оператора $\Delta u = u''$ является отрицательная полупрямая \mathbf{R}_- . Если $\lambda \notin \mathbf{R}_-$, то существует фундаментальное решение, принадлежащее пространству $L_2(\mathbf{R})$, и это решение задается формулой $E_\lambda(x) = -\frac{1}{2\mu} e^{-\mu|x|}$, где $\mu^2 = \lambda$, $\text{Re}\mu > 0$.

Для оператора $\Delta u = u''$ резольвента $R(\lambda, \Delta) = (u'' - \lambda)^{-1}$ определена при $\lambda \notin \mathbf{R}_-$ и задается как свертка с фундаментальным решением формулой $R(\lambda, \Delta)f(x) = -\frac{1}{2\mu} \int e^{-\mu|y-x|} f(y)dy$.

С помощью этой резольвенты строится резольвента семейства аппроксимирующих операторов $L(\varepsilon, a, \varphi)$, которая имеет вид

$$R(\lambda, L(\varepsilon, a, \varphi))f = R(\lambda, \Delta)f - \left((A_\varepsilon^{-1} + B_{\varepsilon, \lambda})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_\varepsilon(R(\lambda, \Delta)f) \\ \Psi_\varepsilon(R(\lambda, \Delta)f) \end{pmatrix} \right)^T \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_\varepsilon \\ \tilde{\Psi}_\varepsilon \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $A_\varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a(\varepsilon)} \\ \frac{1}{a(\varepsilon)} & 0 \end{pmatrix}$; $B_{\varepsilon, \lambda} = \begin{pmatrix} \Phi_\varepsilon(\tilde{\varphi}_\varepsilon) & \Phi_\varepsilon(\tilde{\Psi}_\varepsilon) \\ \Psi_\varepsilon(\tilde{\varphi}_\varepsilon) & \Psi_\varepsilon(\tilde{\Psi}_\varepsilon) \end{pmatrix}$; $\tilde{\varphi}_\varepsilon = R(\lambda, \Delta)\varphi_\varepsilon(x)$; $\tilde{\Psi}_\varepsilon = R(\lambda, \Delta)\Psi_\varepsilon(x)$; $\Phi_\varepsilon(u) =$

$= \int \Psi_\varepsilon(y)u(y)dy \cdot \varphi_\varepsilon(x)$; $\Psi_\varepsilon(u) = \int \Phi_\varepsilon(y)u(y)dy \cdot \Psi_\varepsilon(x)$.

Эта резольвента определена при $\varepsilon > 0$, $\lambda \notin \mathbf{R}_-$ и $\det(A_\varepsilon^{-1} + B_{\varepsilon, \lambda}) \neq 0$.

Исследование выражений, входящих в формулу резольвенты

Известны пределы следующих выражений, входящих в резольвенту (3):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R(\lambda, \Delta)\varphi_\varepsilon(x) = E_\lambda(x); \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R(\lambda, \Delta)\Psi_\varepsilon(x) = E'_\lambda(x); \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(R(\lambda, \Delta)f) = u_0(0),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi_\varepsilon(R(\lambda, \Delta)f) = -u'_0(0); \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(R(\lambda, \Delta)\varphi_\varepsilon) = -\frac{1}{2\mu},$$

где функция u_0 , определенная по формуле $u_0(x) = R(\lambda, \Delta)f(x)$, $f \in L_2(\mathbf{R})$, принадлежит пространству $H^2(\mathbf{R})$ [4].

Опишем поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ других величин, входящих в выражение (3):

$$\Phi_\varepsilon(R(\lambda, \Delta)\psi_\varepsilon) = \iint E_\lambda(x-y)\psi_\varepsilon(y)dy \cdot \varphi_\varepsilon(x)dx,$$

$$\Psi_\varepsilon(R(\lambda, \Delta)\varphi_\varepsilon) = \iint E_\lambda(x-y)\varphi_\varepsilon(y)dy \cdot \psi_\varepsilon(x)dx,$$

$$\Psi_\varepsilon(R(\lambda, \Delta)\psi_\varepsilon) = \iint E_\lambda(x-y)\psi_\varepsilon(y)dy \cdot \psi_\varepsilon(x)dx.$$

Ниже показано, что выражения $\Phi_\varepsilon(R(\lambda, \Delta)\psi_\varepsilon)$ и $\Psi_\varepsilon(R(\lambda, \Delta)\varphi_\varepsilon)$ имеют конечные пределы при $\varepsilon \rightarrow 0$, которые зависят от выбора аппроксимирующей функции φ , а именно от числа $-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \varphi(t)dt + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$.

Далее, это число будем обозначать $\check{\varphi}$. Выражение $\Psi_\varepsilon(R(\lambda, \Delta)\psi_\varepsilon)$ не имеет конечного предела, поэтому рассматриваем его разложение по степеням ε , также зависящее от функции φ .

Лемма 1. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(R(\lambda, \Delta)\psi_\varepsilon) = \check{\varphi}$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi_\varepsilon(R(\lambda, \Delta)\varphi_\varepsilon) = -\check{\varphi}$.

Лемма 2. Разложение повторного интеграла

$$\Psi_\varepsilon(R(\lambda, \Delta)\psi_\varepsilon) = \iint E_\lambda(x-y)\psi_\varepsilon(y)dy \cdot \psi_\varepsilon(x)dx$$

по степеням ε имеет вид

$$\Psi_\varepsilon(R(\lambda, \Delta)\psi_\varepsilon) = \iint E_\lambda(x-y)\psi_\varepsilon(y)dy \cdot \psi_\varepsilon(x)dx = -\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \frac{\mu}{2} + O(\varepsilon).$$

Резольвентная сходимость аппроксимаций выражения $u'' + a\delta'u$

Теорема. Пусть коэффициент $a(\varepsilon)$ допускает разложение

$$a(\varepsilon) = a_{-1} \frac{1}{\varepsilon} + a_0 + a_{1/2} \sqrt{\varepsilon} + a_1 \varepsilon + o(\varepsilon).$$

У семейства (2) существует предел в смысле резольвентной сходимости, который мы обозначим $L(0, a, \varphi)$. Области определения этих операторов могут быть (в зависимости от a и φ) пяти различных видов:

1. Пусть $\varphi(0) \neq 0$. Если $a_{-1} \neq 0$ или $a_{-1} = 0$, $a_0 \neq 0$, то область определения $D(L(0))$ предельного оператора $L(0)$ состоит из функций, удовлетворяющих условиям $u(\pm 0) = 0$.

2. Пусть $\varphi(0) \neq 0$. Если $a_{-1} = 0$, $a_{1/2} \neq 0$, то область определения $D(L(0, a, \varphi))$ предельного оператора $L(0, a, \varphi)$ состоит из функций, удовлетворяющих условию сопряжения $u'(+0) - u'(-0) = a_{1/2}^2 \varphi(0)u(0)$.

3. Пусть $\varphi(0) = 0$ и $\check{\varphi}^2 - \frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{4} \neq 0$. Если $a_{-1} = 0$, $a_0 \neq 0$, то область определения $D(L(0, a, \varphi))$ предельного оператора $L(0, a, \varphi)$ состоит из функций, удовлетворяющих условиям сопряжения

$$(-2a_0\check{\varphi} - a_0 - 2)u(+0) + (2a_0\check{\varphi} - a_0 + 2)u(-0) = 0,$$

$$(-2a_0\check{\varphi} - a_0 + 2)u'(+0) + (2a_0\check{\varphi} - a_0 - 2)u'(-0) = 0.$$

4. Пусть $\varphi(0) = 0$ и $\check{\varphi}^2 - \frac{1}{4} \neq 0$. Если $a_{-1} \neq 0$, то область определения $D(L(0, a, \varphi))$ предельного оператора $L(0, a, \varphi)$ состоит из функций, удовлетворяющих условиям сопряжения

$$\begin{aligned} (-2\check{\varphi} - 1)u(+0) + (2\check{\varphi} - 1)u(-0) &= 0, \\ (-2\check{\varphi} - 1)u'(+0) + (2\check{\varphi} - 1)u'(-0) &= 0. \end{aligned}$$

5. Если $\varphi(0) \neq 0$ и $a_{-1} = 0, a_0 = 0, a_{1/2} = 0, a_1 \neq 0$ или $\varphi(0) = 0$ и $a_{-1} = 0, a_0 = 0, a_{1/2} \neq 0$, то область определения предельного оператора есть $H^2(\mathbf{R})$.

Во всех случаях в своей области определения эти операторы действуют как оператор вычисления второй производной в точках, отличных от нуля.

Доказательство. Рассмотрим поведение матрицы $(A_\varepsilon^{-1} + B_{\varepsilon, \lambda})^{-1}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, которую далее обозначим $G_{\varepsilon, \lambda}$.

Пусть $\varphi(0) \neq 0$. Поскольку $\Psi_\varepsilon(R(\lambda, \Delta)\Psi_\varepsilon) = -\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + O(1)$, получаем

$$\begin{aligned} G_{\varepsilon, \lambda} &= (A_\varepsilon^{-1} + B_{\varepsilon, \lambda})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2\mu} & \frac{1}{a(\varepsilon)} + \check{\varphi} \\ \frac{1}{a(\varepsilon)} - \check{\varphi} & -\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + O(1) \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \frac{1}{\frac{\varphi(0)}{2\mu\varepsilon} - \frac{1}{a^2(\varepsilon)} + \check{\varphi}^2 + O(1)} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + O(1) & -\frac{1}{a(\varepsilon)} - \check{\varphi} \\ -\frac{1}{a(\varepsilon)} + \check{\varphi} & \frac{-1}{2\mu} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Если $a_{-1} = 0, a_0 \neq 0$, то, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим $G_{\varepsilon, \lambda} \rightarrow \begin{pmatrix} -2\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, для предела резольвент (3) получаем выражение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [R(\lambda, L(\varepsilon, a, \varphi))f] = [R(\lambda, \Delta)f](x) - \left(\begin{pmatrix} -2\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [R(\lambda, \Delta)f](0) \\ -[R(\lambda, \Delta)f]'(0) \end{pmatrix} \right)^T \cdot \begin{pmatrix} E_\lambda(x) \\ E'_\lambda(x) \end{pmatrix}.$$

Если $a_{-1} \neq 0$, то $G_{\varepsilon, \lambda} \rightarrow \begin{pmatrix} -2\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и получаем тот же самый предел для резольвент.

Поскольку функция $E_\lambda(x) = -\frac{1}{2\mu} e^{-\mu|x|}$ непрерывна, а ее первая производная имеет разрыв в точке 0, то любая функция из области определения

$$D(L(0, a, \varphi)) = \{u(x) = u_0(x) + 2\mu \cdot u_0(0) \cdot E_\lambda(x) : u_0 = R(\lambda, \Delta)f, f \in L_2(\mathbf{R})\}$$

непрерывна, ее первая производная может быть разрывной в точке 0, но у нее существуют односторонние пределы в этой точке. Заметим, что в этом случае область определения не зависит от коэффициента a и функции φ , поэтому обозначим этот оператор $L(0)$.

В данной области определения $D(L(0))$ оператора $L(0)$ участвует параметр λ , но из свойств резольвентной сходимости следует, что область определения не зависит от λ . Необходимо получить описание области определения, не зависящей от λ .

При данном условии достаточно рассмотреть величину $u(0)$:

$$u(0) = u_0(0) - u_0(0) = 0.$$

Пусть $\varphi(0) \neq 0$. Если $a_{-1} = 0$, $a_0 = 0$ и $a_{1/2} \neq 0$, то $G_{\varepsilon, \lambda} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{2a_{1/2}^2 \varphi(0) \mu}{2\mu - a_{1/2}^2 \varphi(0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, для

предела резольвент получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [R(\lambda, L(\varepsilon, a, \varphi))f] = [R(\lambda, \Delta)f](x) - \left(\begin{pmatrix} \frac{2a_{1/2}^2 \varphi(0) \mu}{2\mu - a_{1/2}^2 \varphi(0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [R(\lambda, \Delta)f](0) \\ -[R(\lambda, \Delta)f]'(0) \end{pmatrix} \right)^T \cdot \begin{pmatrix} E_\lambda(x) \\ E'_\lambda(x) \end{pmatrix}.$$

Область определения предельного оператора будет иметь вид

$$D(L(0, a, \varphi)) = \left\{ u(x) = u_0(x) - \frac{2a_{1/2}^2 \varphi(0) \mu}{2\mu - a_{1/2}^2 \varphi(0)} \cdot u_0(0) \cdot E_\lambda(x) : u_0 = R(\lambda, \Delta)f, f \in L_2(\mathbf{R}) \right\}.$$

Рассмотрев величины $u(0)$, $u'(0)$, $u'(-0)$, получим условие сопряжения

$$u'(0) - u'(-0) = a_{1/2}^2 \varphi(0) u(0).$$

Пусть $\varphi(0) = 0$. Тогда $\Psi_\varepsilon(R(\lambda, \Delta)\Psi_\varepsilon) = \frac{\mu}{2} + O(\varepsilon)$. При таком условии матрица $G_{\varepsilon, \lambda}$ будет иметь вид

$$G_{\varepsilon, \lambda} = (A_\varepsilon^{-1} + B_{\varepsilon, \lambda})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2\mu} & \frac{1}{a(\varepsilon)} + \check{\varphi} \\ \frac{1}{a(\varepsilon)} - \check{\varphi} & \frac{\mu}{2} + O(\varepsilon) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-\frac{1}{4} - \frac{1}{a^2(\varepsilon)} + \check{\varphi}^2 + O(\varepsilon)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\mu}{2} + O(\varepsilon) & -\frac{1}{a(\varepsilon)} - \check{\varphi} \\ -\frac{1}{a(\varepsilon)} + \check{\varphi} & \frac{-1}{2\mu} \end{pmatrix}.$$

Если $a(\varepsilon)$ имеет конечный предел при $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. $a_{-1} = 0$, $a_0 \neq 0$, то

$$G_{\varepsilon, \lambda} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{-\frac{1}{4} - \frac{1}{a_0^2} + \check{\varphi}^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\mu}{2} & -\frac{1}{a_0} - \check{\varphi} \\ -\frac{1}{a_0} + \check{\varphi} & \frac{-1}{2\mu} \end{pmatrix}.$$

А для предела резольвент получим

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [R(\lambda, L(\varepsilon, a, \varphi))f] &= [R(\lambda, \Delta)f](x) - \\ &- \left(\frac{1}{-\frac{1}{4} - \frac{1}{a_0^2} + \check{\varphi}^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\mu}{2} & -\frac{1}{a_0} - \check{\varphi} \\ -\frac{1}{a_0} + \check{\varphi} & \frac{-1}{2\mu} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [R(\lambda, \Delta)f](0) \\ -[R(\lambda, \Delta)f]'(0) \end{pmatrix} \right)^T \cdot \begin{pmatrix} E_\lambda(x) \\ E'_\lambda(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку функции $E'_\lambda(x)$ и $E''_\lambda(x)$ разрывны в точке 0, функции из области определения предельного оператора и их первые производные могут быть разрывны в точке 0. Для получения описания области определения, не зависящей от спектрального параметра, рассмотрим величины $u(+0)$, $u(-0)$, $u'(0)$, $u'(-0)$. Из (4) следует, что выполнено равенство

$$\begin{pmatrix} u(+0) \\ u(-0) \\ u'(+0) \\ u'(-0) \end{pmatrix} = A(\mu) \begin{pmatrix} u_0(0) \\ u'_0(0) \end{pmatrix},$$

где матрица $A(\mu)$ размерностью 2×4 имеет вид

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{4\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{a_0^2} + \check{\varphi}^2\right)} - \frac{-\frac{1}{a_0} + \check{\varphi}}{2\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{a_0^2} + \check{\varphi}^2\right)} & -\frac{1}{4\mu\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{a_0^2} + \check{\varphi}^2\right)} - \frac{-\frac{1}{a_0} - \check{\varphi}}{2\mu\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{a_0^2} + \check{\varphi}^2\right)} \\ 1 + \frac{1}{4\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{a_0^2} + \check{\varphi}^2\right)} + \frac{-\frac{1}{a_0} + \check{\varphi}}{2\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{a_0^2} + \check{\varphi}^2\right)} & \frac{1}{4\mu\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{a_0^2} + \check{\varphi}^2\right)} + \frac{-\frac{1}{a_0} - \check{\varphi}}{2\mu\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{a_0^2} + \check{\varphi}^2\right)} \\ -\frac{\mu}{4\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{a_0^2} + \check{\varphi}^2\right)} + \frac{\mu\left(-\frac{1}{a_0} + \check{\varphi}\right)}{2\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{a_0^2} + \check{\varphi}^2\right)} & 1 + \frac{1}{4\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{a_0^2} + \check{\varphi}^2\right)} + \frac{-\frac{1}{a_0} - \check{\varphi}}{2\mu\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{a_0^2} + \check{\varphi}^2\right)} \\ \frac{\mu}{4\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{a_0^2} + \check{\varphi}^2\right)} + \frac{\mu\left(-\frac{1}{a_0} + \check{\varphi}\right)}{2\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{a_0^2} + \check{\varphi}^2\right)} & 1 + \frac{1}{4\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{a_0^2} + \check{\varphi}^2\right)} - \frac{-\frac{1}{a_0} - \check{\varphi}}{2\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{a_0^2} + \check{\varphi}^2\right)} \end{pmatrix}.$$

Эта система уравнений имеет решение для вектора $(u(+0), u(-0), u'(+0), u'(-0))$ тогда и только тогда, когда этот вектор ортогонален к решениям однородной сопряженной системы уравнений $(A(\mu))^T \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Векторы

$$(-2a_0\check{\varphi} - a_0 - 2, 2a_0\check{\varphi} - a_0 + 2, 0, 0) \text{ и } (0, 0, -2a_0\check{\varphi} - a_0 + 2, 2a_0\check{\varphi} - a_0 - 2)$$

являются базисом решений этой системы, причем этот базис не зависит от параметра λ . В связи с этим условия ортогональности к элементам базиса также не зависят от λ и являются условиями сопряжения:

$$(-2a_0\check{\varphi} - a_0 - 2)u(+0) + (2a_0\check{\varphi} - a_0 + 2)u(-0) = 0,$$

$$(-2a_0\check{\varphi} - a_0 + 2)u'(+0) + (2a_0\check{\varphi} - a_0 - 2)u'(-0) = 0.$$

Пусть $\varphi(0) = 0$. Если $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a(\varepsilon) = \infty$, т. е. $a_{-1} \neq 0$, то, записав условия сопряжения из теоремы (п. 3) в виде

$$\left(-2\check{\varphi} - 1 - \frac{2}{a_0}\right)u(+0) + \left(2\check{\varphi} - 1 + \frac{2}{a_0}\right)u(-0) = 0,$$

$$\left(-2\check{\varphi} - 1 + \frac{2}{a_0}\right)u'(+0) + \left(2\check{\varphi} - 1 - \frac{2}{a_0}\right)u'(-0) = 0$$

и применив к этим условиям предельный переход при $a_0 \rightarrow \infty$, получим следующие условия сопряжения:

$$(-2\check{\varphi} - 1)u(+0) + (2\check{\varphi} - 1)u(-0) = 0,$$

$$(-2\check{\varphi} - 1)u'(+0) + (2\check{\varphi} - 1)u'(-0) = 0.$$

Если $\varphi(0) \neq 0$ и $a_{-1} = 0, a_0 = 0, a_{1/2} = 0, a_1 \neq 0$ или $\varphi(0) = 0$ и $a_{-1} = 0, a_0 = 0, a_{1/2} \neq 0$, то $G_{\varepsilon, \lambda} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Для предела резольвент получаем $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [R(\lambda, L(\varepsilon, a, \varphi))f] = [R(\lambda, \Delta)f](x)$.

Библиографические ссылки

1. Антоневиц А. Б., Радыно Я. В. Об общем методе построения алгебр обобщенных функций // Докл. АН СССР. 1991. Т. 43, № 3. С. 680–684.
2. Colombeau J. F. New generalized functions and multiplication of distributions. Amsterdam : North-Holland, 1984.
3. Gesztesy F., Simon B. Rank-one perturbations at infinite coupling // J. Funct. Anal. 1995. Vol. 128, issue 1. P. 245–252.
4. Antonevich A. B., Romanchuk T. A. On equations with delta-shaped coefficients: the finite-dimensional perturbations approach // Integral transforms Special Funct. 2009. Vol. 3/4. P. 239–246.
5. Нижник Л. П. Оператор Шредингера с δ' -взаимодействием // Функц. анализ и его прил. 2003. Т. 37, № 1. С. 85–88.

References

1. Antonevich A. B., Radyno Ya. V. [A general method for constructing algebras of generalized functions]. *Dokl. AN SSSR*. 1991. Vol. 43, No. 3. P. 680–684 (in Russ.).
2. Colombeau J. F. New generalized functions and multiplication of distributions. Amsterdam : North-Holland, 1984.
3. Gesztesy F., Simon B. Rank-one perturbations at infinite coupling. *J. Funct. Anal.* 1995. Vol. 128, issue 1. P. 245–252. DOI: 10.1006/jfan.1995.1030.
4. Antonevich A. B., Romanchuk T. A. On equations with delta-shaped coefficients: the finite-dimensional perturbations approach. *Integral transforms Special Funct.* 2009. Vol. 3/4. P. 239–246.
5. Nizhnik L. P. [A Schrödinger Operator with δ' -Interaction. *Funkts. anal. ego prilozh. [Funct. Anal. Its Appl.]*. 2003. Vol. 37, No. 1. P. 85–88 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.4213/faa140>.

Статья поступила в редколлегию 12.04.2017.
Received by editorial board 12.04.2017.

УДК 517.9

О СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА В ТРУБОПРОВОДЕ

М. П. ДЫМКОВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный экономический университет,
пр. Партизанский, 26, 220070, г. Минск, Беларусь

Для линейных уравнений в частных производных, описывающих движение газа в трубопроводе, построена каноническая система из собственных и присоединенных функций прямого и сопряженного с ним оператора, порождаемых задачей. На основе этой системы введены новые многопараметрические интегральные преобразования пространственных переменных, которые в совокупности с преобразованием Лапласа по временной переменной сводят краевую задачу к системе алгебраических уравнений в частотной области. Построены также обратные многопараметрические интегральные преобразования, с помощью которых можно получить решение задачи в исходных переменных.

Ключевые слова: линейные уравнения в частных производных; многопараметрические интегральные преобразования; частотная область.

Образец цитирования:

Дымков М. П. О структуре решения в линейной задаче движения газа в трубопроводе // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 27–37.

For citation:

Dymkov M. P. Solution representation for a linear gas flow model in pipeline. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 3. P. 27–37 (in Russ.).

Автор:

Михаил Пахомович Дымков – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой высшей математики учетно-экономического факультета.

Author:

Michael P. Dymkov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of higher mathematics, faculty of accounting and economics.
dymkov_m@bseu.by

SOLUTION REPRESENTATION FOR A LINEAR GAS FLOW MODEL IN PIPELINE

M. P. DYMKOV^a

^aBelarus State Economic University, 26 Partyzanski Avenue, Minsk 220070, Belarus

The canonical system formed the eigenfunctions and associated eigenfunctions for the underlying operator and the adjoint operator is obtained for the linear partial differential equations generating by transient gas flow in pipeline. The new multi-parametric integral transformations for the space variable based on the given canonical system are introduced which together Laplace transformation with respect to the time variable turn the initial boundary value problems into algebraic equations in the frequency domain. Also, the inverse multi-parametric integral transformations are given on the base of which the solution of the considered problem can be represented in the original variables.

Key words: linear partial differential equations; multi-parametric integral transformations; frequency domain.

В инженерной практике широко используются преобразования Лапласа для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, что позволяет свести их к алгебраическим уравнениям. Для этого при решении уравнений в частных производных требуются иные интегральные преобразования, учитывающие сложный характер поведения решений на границе области пространственных переменных. В связи с этим предлагается использовать специальные интегральные преобразования для пространственных переменных [1; 2]. Применение этих преобразований совместно с преобразованием Лапласа по временной переменной сводит краевую задачу к системе алгебраических уравнений, которая после применения обратных интегральных преобразований может быть представлена в виде системы взаимосвязанных отдельных блоков, непосредственно сопряженных с начальными данными. Этот факт может быть использован для привлечения эффективных методов параллельного программирования. В частности, данный подход был успешно применен для решения некоторых актуальных задач магнитогидродинамики [3].

В настоящей работе для представления решения линейных уравнений в частных производных, описывающих движение газа в трубопроводе, используются так называемые канонические системы базисных функций. Данные системы функций состоят из совокупности собственных и присоединенных функций прямого и сопряженного с ним оператора, порождаемых рассматриваемой задачей. Построенные канонические системы функций являются ядром требуемых интегральных преобразований пространственных переменных уравнений, с помощью которых можно преобразовать дифференциальные уравнения к их алгебраическим аналогам в комплексной области.

Линейные модели потока газа в трубопроводе

Для описания основных параметров движения изотермического турбулентного газа часто используется следующая система нелинейных дифференциальных уравнений [4, с. 134–135]:

$$\frac{\partial Q(t, x)}{\partial t} = -h \frac{\partial p(t, x)}{\partial x} - \frac{\lambda c^2}{2dh} \frac{Q^2(t, x)}{p(x, t)},$$

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = -\frac{c^2}{h} \frac{\partial Q(t, x)}{\partial x}, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0,$$

где x – пространственная переменная; t – временная переменная; h – площадь поперечного сечения; d – диаметр трубы; c – изотермическая скорость звука; λ – коэффициент трения; функции $p(t, x)$, $Q(t, x)$ описывают давление и плотность вещества в точке (t, x) . Все другие используемые здесь физические параметры трубопровода и газа считаются известными константами. Наиболее важные динамические характеристики газа, такие как отклонение давления и количества вещества в окрестности устоявшегося режима $\bar{Q}(t, x)$, $\bar{p}(t, x)$, могут быть оценены с помощью линеаризованной модели рассматриваемого процесса вида [5, с. 13–14]

$$\frac{\partial Q(t, x)}{\partial t} = -h \frac{\partial p(t, x)}{\partial x} - \rho Q(t, x) - \beta p(t, x) + v_1(t, x),$$

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial Q(t, x)}{\partial x} + v_2(t, x), \quad x \in [0, 1], t > 0,$$

где $\alpha = -\frac{c^2}{h}$; $\gamma = \frac{vc^2}{2dh}$; ρ, β – некоторые константы ($\rho = 2\beta$); $v_1(t, x), v_2(t, x)$ – заданные функции. Представим данные уравнения в операторной форме как

$$\frac{\partial y(t, x)}{\partial t} = Ly(t, x) + v(t, x), \quad (1)$$

где $y(t, x) = \begin{bmatrix} y_1(t, x) \\ y_2(t, x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q(t, x) \\ p(t, x) \end{bmatrix}$; $v(t, x) = \begin{bmatrix} v_1(t, x) \\ v_2(t, x) \end{bmatrix}$; оператор $L: C^1([0, 1], R^2) \rightarrow L_2([0, 1], R^2)$

задается формулой

$$L = A + BD_x = \begin{bmatrix} -\rho & -hD_x - \beta \\ \alpha D_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{где } A = \begin{bmatrix} -\rho & -\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -h \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где D_x – оператор дифференцирования по переменной x . Начальные и граничные условия зададим следующим образом:

$$y_a(x) \triangleq y(0, x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0(x) \\ p_0(x) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$U(y) \triangleq \begin{bmatrix} U_1(y) \\ U_2(y) \end{bmatrix} = 0, \quad (4)$$

где $U_1(y) \triangleq y_1(t, 1) - y_1(t, 0)$; $U_2(y) \triangleq y_2(t, 0) - y_2(t, 1)$; $\forall t \geq 0$.

Заданные начальные условия отражают факт возникновения возмущений $q_0(x), p_0(x)$ в начальный момент $t = 0$ движения газа в трубопроводе, а граничные условия обеспечивают сохранение начального и конечного значений давления и значения количества газа в трубопроводе.

Применив к задаче (1)–(4) одностороннее преобразование Лапласа по переменной t , получим уравнение в частотной области комплексной переменной s :

$$sY(s, x) = LY(s, x) + V(s, x) + y_a(x), \quad x \in [0, 1], s \in C, \quad (5)$$

с граничными условиями

$$Y(s, 1) - Y(s, 0) = 0. \quad (6)$$

Здесь использовано свойство коммутативности преобразования Лапласа и дифференциального оператора L , задаваемого формулой (2).

Для дальнейшей трансформации граничной задачи (5), (6) к алгебраическим уравнениям относительно функций в комплексной плоскости требуется построить соответствующие преобразования. С этой целью будем использовать многопараметрические интегральные преобразования (прямые и обратные) [1, с. 193–194] по пространственной переменной x , ядром которых являются канонические системы, построенные из собственных и присоединенных функций $\left\{ e_m^{(p)}(x, \lambda_i), p = 1, \dots, P(\lambda_i), m = 0, 1, \dots, M_p \right\}$

оператора L и собственных и присоединенных функций $\left\{ \varepsilon_m^{(p)}(x, \lambda_i^*), p = 1, \dots, P(\lambda_i), m = 0, 1, \dots, M_p \right\}$

сопряженного с ним оператора L^* , где M_p и $P(\lambda_i)$ – кратность и порядок рассматриваемых собственных значений и собственных функций соответственно. Предполагается, что линейный оператор L является секториальным [6, с. 26] с компактной резольventой и непустым спектром $\sigma(L)$.

Напомним, что для заданного собственного значения $\lambda \in \sigma(L)$ оператора L и заданного его собственного вектора $e_0^{(p)}$, $1 \leq p \leq P_\lambda$, ненулевой вектор $e_m^{(p)} \neq 0$ называется присоединенным собственным вектором порядка m , если он удовлетворяет следующим соотношениям:

$$(\lambda E - L)e_0^{(p)} = 0, (\lambda E - L)e_1^{(p)} = e_0^{(p)}, \dots, (\lambda E - L)e_m^{(p)} = e_{m-1}^{(p)}.$$

Максимально возможный порядок M_p присоединенного вектора называется кратностью собственного вектора $e_0^{(p)}$. Отметим, что число P_λ означает размерность пространства собственных векторов $B = B(\lambda) = \{e_0^{(1)}, e_0^{(2)}, \dots, e_0^{(P_\lambda)}\}$, отвечающих собственному значению λ . Аналогичные понятия вводятся для сопряженного оператора L^* и его собственных значений λ^* и векторов.

Многопараметрические интегральные преобразования $T = \{T_m^p(\lambda_i), \lambda_i \in \sigma(L)\}$ по пространственной переменной x определяются с помощью канонической системы $\{\varepsilon_m^{(p)}(x, \lambda_i^*), p = 1, \dots, P(\lambda_i), m = 0, 1, \dots, M_p\}$ собственных и присоединенных векторов сопряженного оператора L^* и задаются следующим образом [1, с. 193]:

$$T_m^p(\lambda_i)Y(s, x) \triangleq \tilde{Y}_m^p(s, \lambda_i) = \left(Y(s, x), \varepsilon_m^p(x, \lambda_i^*) \right)_{L_2} = \int_0^1 Y(s, x) \varepsilon_m^p(x, \lambda_i^*) dx,$$

где $p = 1, \dots, P_{\lambda_i}$; $m = 0, 1, \dots, M_p$. Здесь $(\cdot, \cdot)_{L_2}$ означает скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_2([0, 1], R^2)$ (см. ниже), а кратность $P(\lambda_i)$ определяется для каждого $\lambda_i \in \sigma(L)$.

Из приведенного определения интегральных преобразований и свойств сопряженного оператора можно получить следующий аналог теоремы дифференцирования, известной из операционного исчисления, построенного с помощью преобразований Лапласа – Фурье. Действительно,

$$T_m^p(\lambda_i)\{LY(s, x)\} = \left(L\{Y(s, x)\}, \varepsilon_m^p(x, \lambda_i^*) \right)_{L_2} = \left(Y(s, x), L^*\{\varepsilon_m^p(x, \lambda_i^*)\} \right)_{L_2}.$$

Тогда при $m = 0$ имеем

$$T_0^p(\lambda_i)\{LY(s, x)\} = \left(Y(s, x), L^*\{\varepsilon_0^p(x, \lambda_i^*)\} \right)_{L_2} = \lambda_i \left(Y(s, x), \varepsilon_0^p(x, \lambda_i^*) \right)_{L_2} = \lambda_i \tilde{Y}_0^p(s, \lambda_i).$$

При $m = 1$ с учетом определения присоединенных векторов имеем

$$\begin{aligned} T_1^p(\lambda_i)\{LY(s, x)\} &= \left(Y(s, x), L^*\{\varepsilon_1^p(x, \lambda_i^*)\} \right)_{L_2} = \lambda_i \left(Y(s, x), \varepsilon_1^p(x, \lambda_i^*) \right)_{L_2} - \\ &- \left(Y(s, x), \varepsilon_0^p(x, \lambda_i^*) \right)_{L_2} = \lambda_i \tilde{Y}_1^p(s, \lambda_i) - \tilde{Y}_0^p(s, \lambda_i). \end{aligned}$$

Далее, для любого $m = 1, \dots, M_p$ по аналогии с предыдущим получим

$$T_m^p(\lambda_i)\{LY(s, x)\} = \lambda_i \tilde{Y}_m^p(s, \lambda_i) - \tilde{Y}_{m-1}^p(s, \lambda_i),$$

где для удобства считаем, что $\tilde{Y}_k^p \equiv 0$ для $k < 0$.

Обратное преобразование T^{-1} к многопараметрическому преобразованию $T = \{T_m^p(\lambda_i), \lambda_i \in \sigma(L)\}$ определяется с помощью канонической системы $\{e_m^{(p)}(x, \lambda_i), p = 1, \dots, P(\lambda_i), m = 0, 1, \dots, M_p\}$ оператора L и задается [1, с. 194] следующим образом:

$$T^{-1}\{\tilde{Y}_m^p(s, \lambda_i)\} = Y_m^p(s, x) = \sum_{\lambda_i \in \sigma(L)} \sum_{p=1}^{P(\lambda_i)} \sum_{m=0}^{M_p} \tilde{Y}_m^p(s, \lambda_i) e_{M_p-m}^{(p)}(x, \lambda_i).$$

Теорема. Решение задачи (5), (6) в частотной области имеет вид

$$Y(s, x) = Y_{\text{нач}}(s, x) + Y_{\text{внеш}}(s, x),$$

где

$$Y_{\text{нач}}(s, x) = \sum_{\lambda_i \in \sigma(L)} \sum_{p=1}^{P(\lambda_i)} \sum_{m=0}^{M_p} \left(\sum_{q=0}^m \frac{\tilde{y}_{a,p,m-q}}{(s-\lambda_i)^{q+1}} \right) e_{M_p-m}^{(p)}(x, \lambda_i);$$

$$Y_{\text{внеш}}(s, x) = \sum_{\lambda_i \in \sigma(L)} \sum_{p=1}^{P(\lambda_i)} \sum_{m=0}^{M_p} \left(\sum_{q=0}^m \frac{\tilde{V}_{m-q}^p}{(s-\lambda_i)^{q+1}} \right) e_{M_p-m}^{(p)}(x, \lambda_i).$$

Доказательство. Опишем детально поэтапное применение введенных выше преобразований. Применим к (5) преобразование по пространственной переменной $T_m^p(\lambda_i)$, $\lambda_i \in \sigma(L)$, сначала при $m=0$:

$$s\tilde{Y}_0^p(\lambda_i, s) = \lambda_i \tilde{Y}_0^p(\lambda_i, s) + \tilde{V}_0^p(\lambda_i, s) + \tilde{y}_{a,p,0}(\lambda_i),$$

где

$$\tilde{V}_0^p(\lambda_i, s) = \left(V(s, x), \varepsilon_0^p(x, \lambda_i^*) \right)_{L_2} = \int_0^1 V(s, x) \varepsilon_0^p(x, \lambda_i^*) dx;$$

$$y_{a,p,0}(\lambda_i) = \left(y_a(s, x), \varepsilon_0^p(x, \lambda_i^*) \right)_{L_2} = \int_0^1 y_a(s, x) \varepsilon_0^p(x, \lambda_i^*) dx.$$

Отсюда следует

$$\tilde{Y}_0^p(\lambda_i, s) = \frac{1}{s-\lambda_i} \tilde{V}_0^p(\lambda_i, s) + \frac{1}{s-\lambda_i} y_{a,p,0}(\lambda_i).$$

Теперь применим к (5) преобразование по пространственной переменной при $m=1$, учитывая свойство дифференцирования:

$$s\tilde{Y}_1^p(\lambda_i, s) = \lambda_i \tilde{Y}_1^p(\lambda_i, s) - \tilde{Y}_1^p(\lambda_i, s) + \tilde{V}_1^p(\lambda_i, s) + \tilde{y}_{a,p,1}(\lambda_i),$$

где

$$\tilde{V}_1^p(\lambda_i, s) = \left(V(s, x), \varepsilon_1^p(x, \lambda_i^*) \right)_{L_2} = \int_0^1 V(s, x) \varepsilon_1^p(x, \lambda_i^*) dx;$$

$$y_{a,p,1}(\lambda_i) = \left(y_a(s, x), \varepsilon_1^p(x, \lambda_i^*) \right)_{L_2} = \int_0^1 y_a(s, x) \varepsilon_1^p(x, \lambda_i^*) dx.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_1^p(\lambda_i, s) &= \frac{1}{s-\lambda_i} \tilde{V}_1^p(\lambda_i, s) + \frac{1}{s-\lambda_i} y_{a,p,1}(\lambda_i) + \frac{1}{s-\lambda_i} \tilde{Y}_0^p(\lambda_i, s) = \\ &= \frac{1}{s-\lambda_i} \tilde{V}_1^p(\lambda_i, s) + \frac{1}{s-\lambda_i} y_{a,p,1}(\lambda_i) + \frac{1}{(s-\lambda_i)^2} \tilde{V}_0^p(\lambda_i, s) + \frac{1}{(s-\lambda_i)^2} y_{a,p,0}(\lambda_i). \end{aligned}$$

Продолжая описанную выше процедуру для любого m , получим

$$s\tilde{Y}_m^p(\lambda_i, s) = \lambda_i \tilde{Y}_m^p(\lambda_i, s) - \tilde{Y}_m^p(\lambda_i, s) + \tilde{V}_m^p(\lambda_i, s) + \tilde{y}_{a,p,m}(\lambda_i)$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_m^p(\lambda_i, s) &= \frac{1}{s-\lambda_i} \tilde{V}_m^p(\lambda_i, s) + \frac{1}{s-\lambda_i} y_{a,p,m}(\lambda_i) + \frac{1}{s-\lambda_i} \tilde{Y}_{m-1}^p(\lambda_i, s) = \\ &= \sum_{q=0}^m \left(\frac{1}{(s-\lambda_i)^{q+1}} \tilde{V}_{m-q}^p(\lambda_i, s) + \frac{1}{(s-\lambda_i)^{q+1}} y_{a,p,m-q}(\lambda_i) \right). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно теперь лишь воспользоваться обратным преобразованием T^{-1} и выделить слагаемые, связанные с начальными данными $y_a(x)$ и функциями $v(t, x)$, оказывающими воздействие на динамику процесса.

Каноническая система собственных векторов

Как уже отмечалось, для построения интегральных преобразований по пространственной переменной и, как следует из теоремы, для представления решения задачи в частотной области комплексной переменной s требуется построить канонические системы функций для прямого оператора L и сопряженного с ним оператора L^* . Эти системы формируются из цепочек собственных и присоединенных (если таковы имеются) функций прямого и сопряженного операторов соответственно. Ниже дано описание процедуры построения канонических систем для операторов, порождаемых рассматриваемой задачей.

Сопряженный оператор

Введенный выше оператор L определен в пространстве $C^1([0, 1], R^2)$ непрерывных дифференцируемых функций, которое является плотным в гильбертовом пространстве $L_2([0, 1], R^2)$ суммируемых с квадратом функций на $[0, 1]$. Скалярное произведение в $L_2([0, 1], R^2)$ зададим стандартным образом формулой $(f, g) = \int_0^1 f^T(x)g(x)dx, \forall f, g \in L_2([0, 1], R^2)$ (здесь f^T означает транспонирование).

Для нахождения сопряженного оператора воспользуемся формулой Грина

$$(Ly, z)_{L_2} = \int_0^1 z^T Ly dx = \int_0^1 z^T (A + BD_x) y dx = (y, (A^T - B^T D_x) z) + z^T B y \Big|_{x=0}^{x=1},$$

где $z(t, x) = \begin{bmatrix} z_1(t, x) \\ z_2(t, x) \end{bmatrix}$. Оператор $L^* = A^T - B^T D_x$ будет сопряженным, если выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} z^T(t, x) B y(t, x) \Big|_{x=0}^{x=1} &= z^T(t, 1) B y(t, 1) - z^T(t, 0) B y(t, 0) = \\ &= \alpha [z_2(t, 1) y_1(t, 1) - z_2(t, 0) y_1(t, 0)] + h [z_1(t, 0) y_2(t, 0) - z_1(t, 1) y_1(t, 1)] = 0. \end{aligned}$$

С учетом граничных условий последние соотношения принимают вид

$$\alpha (z_2(t, 1) - z_2(t, 0)) y_1(t, 0) = h (z_1(t, 1) - z_1(t, 0)) y_2(t, 0).$$

Следовательно, значения функций $z_1(t, x)$ и $z_2(t, x)$ в граничных точках $x = 1$ и $x = 0$ должны удовлетворять условиям $z_2(t, 0) - z_2(t, 1) = 0$ и $z_1(t, 1) - z_1(t, 0) = 0$.

Таким образом, сопряженный оператор L^* определяется формулой

$$L^* = A^T - B^T D_x = \begin{bmatrix} -\rho & -\alpha D_x \\ -\beta + h D_x & 0 \end{bmatrix}$$

и граничными условиями вида

$$z_1(t, 1) - z_1(t, 0) = 0, \quad z_2(t, 1) - z_2(t, 0) = 0.$$

Собственные функции прямого оператора

Собственные функции оператора L удовлетворяют уравнению

$$[\lambda I - L] e_{p,0}(x, \lambda) = 0, \quad p = 1, \dots, P(\lambda),$$

где $e_{p,0}(x, \lambda) = [f_{p,0}^1(x, \lambda), f_{p,0}^2(x, \lambda)]^T$; $P(\lambda)$ обозначает количество всех линейно независимых собственных функций, соответствующих собственному значению λ . Перепишем последнее уравнение в координатной форме

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{p,0}^1 \\ f_{p,0}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho & hD_x + \beta \\ -\alpha D_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{p,0}^1 \\ f_{p,0}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

относительно искомым функций $f_{p,0}^1$ и $f_{p,0}^2$:

$$\begin{cases} \lambda f_{p,0}^1 + \rho f_{p,0}^1 + h f_{p,0}^{2'} + \beta f_{p,0}^2 = 0, \\ \lambda f_{p,0}^2 - \alpha f_{p,0}^{1'} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\lambda \neq 0} \begin{cases} h\alpha f_{p,0}^{1''} + \alpha\beta f_{p,0}^{1'} + \lambda(\lambda + \rho) f_{p,0}^1 = 0, \\ f_{p,0}^2 = \frac{\alpha}{\lambda} f_{p,0}^{1'} \end{cases} \quad (7)$$

где верхние индексы ' и '' – первая и вторая производные функции по пространственной переменной x соответственно. Отметим, что для случая $\lambda_0 = 0$ приведенные выше соотношения имеют вид

$$\begin{cases} \rho f_{p,0}^1 + h f_{p,0}^{2'} + \beta f_{p,0}^2 = 0, \\ \alpha f_{p,0}^{1'} = 0 \end{cases}$$

и, соответственно, в этом случае общим решением этих уравнений является

$$f_{p,0}^1(x, \lambda_0) = c_0, \quad f_{p,0}^2(x, \lambda_0) = c_1 e^{-\frac{\beta}{h}x} - 2c_0.$$

Граничные условия (4) для найденных функций будут удовлетворены, если $c_1 = 0$. Следовательно, функции

$$e_{1,0}(x, \lambda_0) = \begin{bmatrix} f_{p,0}^1(x, \lambda_0) \\ f_{p,0}^2(x, \lambda_0) \end{bmatrix} = c_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

являются собственными функциями оператора L , соответствующими значению $\lambda_0 = 0$.

Далее, для $\lambda \neq 0$ характеристический полином для первого дифференциального уравнения из (7) имеет вид

$$h\alpha K^2 + \alpha\beta K + \lambda(\lambda + \rho) = 0,$$

где $\alpha < 0$; $h > 0$; $\beta > 0$; $\rho > 0$. Его корни задаются формулой

$$K_{1,2} = \frac{-\alpha\beta \pm \sqrt{(\alpha\beta)^2 - 4h\alpha\lambda(\lambda + \rho)}}{2h\alpha} = \frac{-\beta}{2h} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4h^2} - \frac{\lambda(\lambda + \rho)}{h\alpha}} = a \pm jb, \quad (8)$$

если величина $R \triangleq \frac{\beta^2}{4h^2} - \frac{\lambda(\lambda + \rho)}{h\alpha} < 0$, где через j обозначена мнимая единица ($j^2 = -1$); $a = \frac{-\beta}{2h}$;

$$b = \sqrt{\left| \frac{\beta^2}{4h^2} - \frac{\lambda(\lambda + \rho)}{h\alpha} \right|}.$$

Если $R \triangleq \frac{\beta^2}{4h^2} - \frac{\lambda(\lambda + \rho)}{h\alpha} \geq 0$, то корни характеристического уравнения (8) есть $K_{1,2} = a \pm b$.

Рассмотрим случай $R < 0$. Тогда корням $K_{1,2}$ соответствуют следующие решения $f_{p,0}^1(x, \lambda)$ и $f_{p,0}^2(x, \lambda)$ дифференциальных уравнений (7):

$$\begin{cases} f_{p,0}^1(x, \lambda) = c_1 e^{(a+jb)x} + c_2 e^{(a-jb)x}, \\ f_{p,0}^2(x, \lambda) = \frac{\alpha}{\lambda} [c_1(a+jb)e^{(a+jb)x} + c_2(a-jb)e^{(a-jb)x}]. \end{cases}$$

Учитывая граничные условия (4), получим, что искомые функции должны удовлетворять следующей системе алгебраических уравнений:

$$c_1 + c_2 = c_1 e^{a+jb} + c_2 e^{a-jb}, \quad c_1(a+jb) + c_2(a-jb) = c_1(a+jb)e^{a+jb} + c_2(a-jb)e^{a-jb}.$$

Эта система имеет нетривиальное решение $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$, если

$$\det \begin{vmatrix} 1 - e^{a+jb} & 1 - e^{a-jb} \\ (a+jb)(1 - e^{a+jb}) & (a-jb)(1 - e^{a-jb}) \end{vmatrix} = 0$$

или $2(1 - e^{a+jb})(1 - e^{a-jb})jb = 0$, что эквивалентно условиям

$$1 - e^{a+jb} = 0, \quad 1 - e^{a-jb} = 0, \quad b = 0. \quad (9)$$

Условие $b = 0$ дает равенство $\frac{\beta^2}{4h^2} - \frac{\lambda(\lambda + \rho)}{h\alpha} = 0$. В этом случае собственные значения определяются формулой

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \beta \sqrt{1 + \frac{\alpha}{4h}}. \quad (10)$$

Отметим, что в (10) возможны и комплексные собственные значения.

Далее, из (9) имеем равенства $e^{a+jb} = e^0$ и $e^{a-jb} = e^0$. Поскольку комплекснозначная функция $e^z, z \in C$, имеет мнимый период, то из последних равенств получаем $a + jb = 2\pi nj, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и $a - jb = 2\pi kj, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Тогда из (8) следует, что собственные значения $\lambda^{(n)}$ удовлетворяют уравнению

$$\pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4h^2} - \frac{\lambda(\lambda + \rho)}{h\alpha}} = 2\pi nj + \frac{\beta}{2h}, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

Отсюда для $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ имеем

$$\lambda_{1,2}^{(n)} = -\beta + \sqrt{\beta^2 - 2\alpha\beta\pi nj + 4h\alpha\pi^2 n^2}. \quad (11)$$

Кроме того, кратность найденных собственных значений равна единице: $P(\lambda_i) = 1$. Теперь можно проверить, что собственные функции прямого оператора задаются следующими формулами:

а) для случая $K_{1,2} = a \pm jb$, где $b = 0$ и соответствующие собственные значения λ_1, λ_2 задаются формулой (10), собственными функциями являются

$$e_{1,0}(x, \lambda_1) = \begin{bmatrix} f_{p,0}^1(x, \lambda_1) \\ f_{p,0}^2(x, \lambda_1) \end{bmatrix} = c_1 e^{ax} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\alpha\alpha}{\lambda_1} \end{bmatrix}, \quad e_{1,0}(x, \lambda_2) = \begin{bmatrix} f_{p,0}^1(x, \lambda_2) \\ f_{p,0}^2(x, \lambda_2) \end{bmatrix} = c_2 e^{ax} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\alpha\alpha}{\lambda_2} \end{bmatrix};$$

б) для случая $K_{1,2} = a \pm jb, b \neq 0, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где соответствующие собственные значения $\lambda_{1,2}^{(n)}$ выражаются формулой (11), собственные функции имеют вид

$$e_{1,0}(x, \lambda_i^{(n)}) = \begin{bmatrix} f_{p,0}^1(x, \lambda_i^{(n)}) \\ f_{p,0}^2(x, \lambda_i^{(n)}) \end{bmatrix} = c_i^{(n)} e^{2\pi njx} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2\alpha\alpha\pi nj}{\lambda_i^{(n)}} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

Рассмотрим теперь случай $R > 0$. Тогда корням $K_{1,2} = a \pm b$ соответствуют следующие решения $f_{p,0}^1(x, \lambda)$ и $f_{p,0}^2(x, \lambda)$ дифференциальных уравнений (7):

$$\begin{cases} f_{p,0}^1(x, \lambda) = c_1 e^{(a+b)x} + c_2 e^{(a-b)x}, \\ f_{p,0}^2(x, \lambda) = \frac{\alpha}{\lambda} [c_1 (a+b) e^{(a+b)x} + c_2 (a-b) e^{(a-b)x}]. \end{cases}$$

Учитывая граничные условия (4), получим, что искомые функции должны удовлетворять следующей системе алгебраических уравнений:

$$c_1 + c_2 = c_1 e^{a+b} + c_2 e^{a-b}, \quad c_1(a+b) + c_2(a-b) = c_1(a+b)e^{a+b} + c_2(a-b)e^{a-b}.$$

Эта система имеет нетривиальное решение $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$, если

$$\det \begin{vmatrix} 1 - e^{a+b} & 1 - e^{a-b} \\ (a+b)(1 - e^{a+b}) & (a-b)(1 - e^{a-b}) \end{vmatrix} = 0$$

или $2(1 - e^{a+b})(1 - e^{a-b})b = 0$, что эквивалентно условиям

$$1 - e^{a+b} = 0, \quad 1 - e^{a-b} = 0, \quad b = 0.$$

Можно проверить, что в этом случае соответствующие собственные значения содержатся среди уже ранее найденных значений, представленных формулами (10) и (11). Следовательно, рассмотренный случай $R > 0$ не порождает новых собственных функций.

Собственные функции сопряженного оператора

Спектральная задача для сопряженного оператора L^* определяется уравнением

$$[\hat{\lambda}I - L^*] \varepsilon_{p,0}(x, \hat{\lambda}) = 0, \quad = 1, \dots, P(\hat{\lambda}),$$

где $\varepsilon_{p,0}(x, \hat{\lambda}) = [z_{p,0}^1(x, \hat{\lambda}), z_{p,0}^2(x, \hat{\lambda})]^T$; $P(\hat{\lambda})$ – количество линейно независимых собственных функций, соответствующих собственному значению $\hat{\lambda}$. Последнее уравнение перепишем в виде

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\lambda} & 0 \\ 0 & \hat{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{p,0}^1 \\ z_{p,0}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho & \alpha D_x \\ \beta - h D_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{p,0}^1 \\ z_{p,0}^2 \end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем следующую систему линейных уравнений относительно $z_{p,0}^1$ и $z_{p,0}^2$:

$$\begin{cases} \hat{\lambda} z_{p,0}^1 + \rho z_{p,0}^1 + \alpha z_{p,0}^{2'} = 0, \\ \hat{\lambda} z_{p,0}^2 + \beta z_{p,0}^1 - h z_{p,0}^{1'} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\hat{\lambda} \neq 0} \begin{cases} h \alpha z_{p,0}^{1''} - \alpha \beta z_{p,0}^{1'} + \hat{\lambda}(\hat{\lambda} + \rho) z_{p,0}^1 = 0, \\ z_{p,0}^2 = -\frac{\beta}{\hat{\lambda}} z_{p,0}^1 + \frac{h}{\hat{\lambda}} z_{p,0}^{1'}. \end{cases} \quad (12)$$

где верхний индекс ' – производная функция по пространственной переменной x .

Для случая $\hat{\lambda}_0 = 0$ соответствующие собственные функции имеют вид

$$\varepsilon_{1,0}(x, \hat{\lambda}_0) = \begin{bmatrix} f_{p,0}^1(x, \hat{\lambda}_0) \\ f_{p,0}^2(x, \hat{\lambda}_0) \end{bmatrix} = c_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Характеристический полином для первого дифференциального уравнения из (12) имеет вид

$$h \alpha K^2 - \alpha \beta K + \hat{\lambda}(\hat{\lambda} + \rho) = 0,$$

корни которого даются формулой

$$K_{1,2} = \frac{\alpha\beta \pm \sqrt{(\alpha\beta)^2 - 4h\alpha\hat{\lambda}(\hat{\lambda} + \rho)}}{2h\alpha} = \frac{\beta}{2h} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4h^2} - \frac{\hat{\lambda}(\hat{\lambda} + \rho)}{h\alpha}} = -a \pm jb,$$

где $a = \frac{-\beta}{2h}$; $b = \sqrt{-\left(\frac{\beta^2}{4h^2} - \frac{\hat{\lambda}(\hat{\lambda} + \rho)}{h\alpha}\right)}$.

Проводя рассуждения, аналогичные тем, что были приведены выше при решении спектральной задачи для прямого оператора, получим, что собственные значения и собственные функции сопряженного оператора имеют следующий вид:

а) для случая $K_{1,2} = -a$, $b = 0$ задаются формулами

$$\hat{\lambda}_{1,2} = -\beta \pm \beta\sqrt{1 + \frac{4\alpha}{h}}, \quad \hat{\varepsilon}_{1,0}(x, \hat{\lambda}_i) = \begin{bmatrix} z_{p,0}^1(x, \hat{\lambda}_i) \\ z_{p,0}^2(x, \hat{\lambda}_i) \end{bmatrix} = c_i e^{-\alpha x} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2(ah + \beta)\alpha}{\hat{\lambda}_i} \end{bmatrix};$$

б) для случая $K_{1,2} = -a \pm jb = 2\pi nj$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, задаются как

$$\hat{\lambda}_{1,2}^{(n)} = -\beta + \sqrt{\beta^2 - 2\alpha\beta\pi nj + 4h\alpha\pi^2 n^2}, \quad \hat{\varepsilon}_{1,0}(x, \hat{\lambda}_i^{(n)}) = c_i^{(n)} e^{2\pi njx} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2(ah + \beta)\alpha\pi nj}{\hat{\lambda}_i^{(n)}} \end{bmatrix}.$$

В целях завершения решения задачи остается осуществить построение присоединенных функций для найденных собственных функций. Для этого можно воспользоваться ортогональностью [1] канонических систем: $(e_m^p(x, \lambda_i), \varepsilon_n^l(x, \lambda_w^*))_{L_2} = \delta_{i,w} \delta_{p,l} \delta_{m, M_p - n}$, где $\delta_{i,j}$ есть символ Кронекера. Другими словами, это означает, что для построения присоединенных вектор-функций можно воспользоваться следующей процедурой. Если для одного и того же собственного значения λ_i и сопряженного с ним λ_i^* собственные векторы прямого и сопряженного операторов не ортогональны, то присоединенных векторов, соответствующих данному собственному значению, не существует. В противном случае находится первый присоединенный вектор прямого оператора L . Если он окажется ортогонален рассматриваемому собственному вектору сопряженного оператора L^* , то других присоединенных векторов не существует. В противном случае процедура продолжается до получения ортогональных векторов. Эта процедура повторяется для каждого собственного значения. Аналогичным образом находят присоединенные векторы для сопряженного оператора.

Таким образом, в соответствии с приведенной теоремой решение $Y(s, x)$ рассматриваемой задачи в частотной области можно представить через найденные выше канонические системы функций. Для нахождения решения задачи $y(t, x)$ в исходных переменных нужно к найденной функции $Y(s, x)$ применить обратное преобразование Лапласа.

Библиографические ссылки

1. Dymkou V., Rabenstein R., Stefen P. Discrete simulation of a class of distributed systems using functional analytic methods // Multidimens. Syst. Signal Process. 2006. Vol. 17. P. 177–209.
2. Dymkov M., Dymkou V. Multifunctional transformation method in gas pipelines modeling // Еругинские чтения – 2013 : XV Междунар. науч. конф. по дифф. уравнениям (Гродно, 13–16 мая 2013 г.) : в 2 т. Минск : Институт математики НАН Беларуси, 2013. Т. 2. С. 83.
3. Dymkou V., Poharat A. Spectral methods for wall bounded MHD // J. Theor. Comput. Fluid Dyn. 2009. Vol. 23, № 6. P. 535–555.
4. Osiadacz A. Simulation and analysis of gas network. London : Gulf Publishing Company, 1987.
5. Aalto H. Real-time receding horizon optimization of gas pipeline networks [Electronic resource]. 2005. URL: <http://lib.hut.fi/Diss/2005/isbn9512276593> (date of access: 23.05.2017).
6. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений : пер. с англ. М. : Мир, 1985.

References

1. Dymkou V., Rabenstein R., Stefen P. Discrete simulation of a class of distributed systems using functional analytic methods. *Multidimens. Syst. Signal Process.* 2006. Vol. 17. P. 177–209.
2. Dymkov M., Dymkou V. Multifunctional transformation method in gas pipelines modeling. *Eruginskie chteniya – 2013* : XV Int. sci. conf. differ. equ. (Grodno, 13–16 May, 2013) : in 2 vol. Minsk : Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus, 2013. Vol. 2. P. 83 (in Russ.).
3. Dymkou V., Poherat A. Spectral methods for wall bounded MHD. *J. Theor. Comput. Fluid Dyn.* 2009. Vol. 23, No. 6. P. 535–555.
4. Osiadacz A. Simulation and analysis of gas network. London : Gulf Publishing Company, 1987.
5. Aalto H. Real-time receding horizon optimization of gas pipeline networks. 2005. URL: <http://lib.hut.fi/Diss/2005/isbn9512276593> (date of access: 23.05.2017).
6. Henry D. [Geometric theory of semilinear parabolic equations]. Moscow : Mir, 1985 (in Russ.).

*Статья поступила в редколлегию 06.06.2017.
Received by editorial board 06.06.2017.*

УДК 517.956.3

МЕТОД КОРРЕКТИРОВКИ ПРОБНЫХ РЕШЕНИЙ ОБЩЕГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ МИНИМАЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ ЕГО ПРАВОЙ ЧАСТИ

Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Предложен метод корректировки пробных классических решений общего неоднородного факторизованного уравнения колебаний полуограниченной струны для наличия минимальных (необходимых) требований гладкости на его правую часть. Идея метода состоит в вычислении поправки к некоторым пробным (испытываемым) классическим решениям, которые могут требовать завышенную гладкость от правой части уравнения. С этой целью ставится и решается корректирующая задача Гурса для канонического вида этого уравнения колебаний струны. Потом в полученном решении анализируется гладкость пробного решения и в случае надобности оно корректируется соответствующим решением однородного уравнения колебаний струны. Найдены новые классические решения и неизвестная ранее необходимая гладкость правой части.

Ключевые слова: метод корректировки решений; необходимая гладкость; корректирующая задача Гурса; пробное решение; коррекция решения; корректирующее решение; скорректированное решение.

CORRECTION METHOD OF TEST SOLUTIONS OF THE GENERAL WAVE EQUATION IN THE FIRST QUARTER OF THE PLANE FOR MINIMAL SMOOTHNESS OF ITS RIGHT-HAND SIDE

F. E. LOMAUTSAU^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

A method is proposed for correcting of test classical solutions of the general inhomogeneous factorized oscillation equation for a semibounded string in order that they have minimal (necessary) smoothness requirements on its right-hand side. The idea of the method is to calculate the correction to some of its trial (test) classical solutions, which may require an overestimated smoothness from the right-hand side of the equation. To this end, the correcting Goursat problem for the canonical form of this oscillation equation of a string is formulated and solved. Then, in the resulting solution, the smoothness of the test solution is analyzed and, if necessary, it is corrected by the corresponding solution of the homogeneous oscillation equation of the string. We find new classical solutions and the previously unknown necessary smoothness of the right-hand side.

Key words: correction method of solutions; necessary smoothness; correcting Goursat problem; test solution; correction of the solution; corrective solution; corrected solution.

Образец цитирования:

Ломовцев Ф. Е. Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 38–52.

For citation:

Lomautsau F. E. Correction method of test solutions of the general wave equation in the first quarter of the plane for minimal smoothness of its right-hand side. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 3. P. 38–52 (in Russ.).

Автор:

Федор Егорович Ломовцев – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры математической кибернетики механико-математического факультета.

Author:

Fiodar E. Lomautsau, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics. lomovcev@bsu.by

Введение

Настоящая работа посвящена нахождению частного классического решения общего факторизованного уравнения колебаний полуограниченной струны с минимальными (необходимыми) требованиями гладкости на правую часть, т. е. в первой четверти плоскости. Проблема поиска такого решения возникает при выводе необходимых требований гладкости на правую часть этого уравнения и линейных уравнений в частных производных для смешанных (начально-краевых) задач. При наличии некоторого классического решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны нахождение его общего интеграла (множества всех классических решений) в силу линейности уравнения сводится к вычислению общего интеграла соответствующего однородного уравнения. Затем, после его подстановки в краевые условия, выводятся явные формулы классических решений, а также определяются критерии однозначной, устойчивой везде разрешимости смешанных задач в четверти плоскости. Это два этапа известного метода характеристик (распространяющихся волн) для явного решения и исследования корректности смешанных задач [1].

С помощью нового метода (*вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны*) из этих необходимых (обязательных) требований гладкости на правую часть уравнения, формулы единственного классического решения вспомогательных смешанных задач (а также достаточных и дополнительных необходимых требований гладкости на исходные данные и условий согласования) можно найти формулы классических решений и критерии однозначной, устойчивой везде разрешимости смешанных задач для уравнения колебаний ограниченной струны [2]. Данный метод включает три этапа: вспомогательный (решение и исследование корректности вспомогательных смешанных задач), промежуточный (физико-геометрическая интерпретация решений вспомогательных задач) и заключительный (решение и исследование корректности основных смешанных задач для ограниченной струны). Преимущество данного метода, который впервые был применен в [3], перед традиционными состоит в возможности явного решения и вывода критериев однозначной, устойчивой везде разрешимости смешанных задач для уравнения колебаний ограниченной струны без продолжения исходных данных этих задач вне множеств их задания [4].

Постановка задачи корректировки

В первой четверти плоскости для неоднородного одномерного волнового уравнения

$$(\partial_t - a_2 \partial_x + b_2)(\partial_t + a_1 \partial_x + b_1)u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in G_\infty, \quad (1)$$

где $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ – первые частные производные; $a_1 > 0$; $a_2 \geq 0$; b_1, b_2 – постоянные вещественные коэффициенты, требуется найти его классическое решение $F = F(x, t)$, которое имеет минимальные (необходимые) требования гладкости на правую часть $f = f(x, t)$.

Пусть $C^k(\Omega)$ – множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве Ω и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Определение 1. Функция $u = u(x, t)$ называется *классическим решением* уравнения (1), если $u \in C^2(G_\infty)$ и удовлетворяет этому уравнению для каждого $(x, t) \in G_\infty$.

Во-первых, если существует хотя бы одно классическое решение $u \in C^2(G_\infty)$ неоднородного уравнения второго порядка (1), то очевидно, что его правая часть должна быть непрерывной: $f \in C(G_\infty)$. Во-вторых, согласно определению 1 функция F должна быть, по крайней мере, дважды непрерывно дифференцируемой, т. е. $F \in C^2(G_\infty)$. В-третьих, если эта функция окажется не дважды непрерывно дифференцируемой, т. е. $F \notin C^2(G_\infty)$, то целесообразно провести ее коррекцию некоторой функцией $F_0 \notin C^2(G_\infty)$ (обобщенным частным решением однородного уравнения (1)) так, чтобы новая функция $F_1(x, t) = F(x, t) - F_0(x, t)$ стала дважды непрерывно дифференцируемой, т. е. $F_1 \in C^2(G_\infty)$. Дополнительные необходимые требования гладкости на f выводятся из функции F_1 .

Предварительно в качестве испытываемой функции F можно брать уже известные решения уравнений или находить их методом Дюамеля и специальными методами (подбора, вычисления в наперед заданном виде и т. д.). Ниже при необходимости мы вносим в функцию поправку посредством корректирующей задачи Гурса.

Замечание 1. В смешанных задачах дифференциальные уравнения задаются, прежде всего, во внутренних точках множеств. В случае надобности эти уравнения и частные производные их решений до второго порядка включительно продолжают по непрерывности в конечные граничные точки множеств.

Корректирующая задача Гурса

Гладкость решений уравнения (1) в первой четверти плоскости существенно зависит от *критической характеристики* $x = a_1 t$, которая при $a_1 > 0$ делит эту четверть на два множества: $G_- = \{(x, t) : x > a_1 t, t > 0\}$ и $G_+ = \{(x, t) : x < a_1 t, x > 0\}$.

Теорема 1. *Существует классическое решение неоднородного уравнения (1) в G_+ :*

$$F_1(x, t) = \frac{e^{Bx - At}}{a_1 + a_2} \left[\int_0^{t_1(x)} \int_{a_1 t - x - a_2 \tau}^{x + a_2(t - \tau)} e^{A\tau - Bs} f(s, \tau) ds d\tau + \int_{t_1(x)}^t \int_{x - a_1(t - \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} e^{A\tau - Bs} f(s, \tau) ds d\tau \right], \quad a_1 \geq a_2, \quad (2)$$

$$F_1(x, t) = \frac{e^{Bx - At}}{a_1 + a_2} \left[\int_0^{t_2(x)} \int_{a_2(t - \tau) - (a_2/a_1)x}^{x + a_2(t - \tau)} e^{A\tau - Bs} f(s, \tau) ds d\tau + \int_{t_2(x)}^t \int_{x - a_1(t - \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} e^{A\tau - Bs} f(s, \tau) ds d\tau \right], \quad 0 < a_1 \leq a_2, \quad (3)$$

где постоянные $A = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 + a_2}$, $B = \frac{b_2 - b_1}{a_1 + a_2}$, а пределы интегрирования $t_1(x) = \frac{2(a_1 t - x)}{a_1 + a_2}$ и $t_2(x) = t - \frac{x}{a_1}$.

Доказательство. Проверим, подойдет ли в качестве искомого классического решения неоднородного уравнения (1) известная функция [5; 6]

$$F(x, t) = \frac{e^{Bx - At}}{a_1 + a_2} \int_0^t \int_{x - a_1(t - \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} e^{A\tau - Bs} f(|s|, \tau) ds d\tau, \quad (x, t) \in G_\infty. \quad (4)$$

Нетрудно убедиться в том, что эта функция является классическим решением уравнения (1), например для любой $f \in C^1(G_\infty)$. Можно начать доказательство теоремы 1 с предположения о существовании некоторого классического решения $u \in C^2(G_\infty)$ уравнения (1) на G_∞ или G_+ (на G_- решение приведено ниже – в доказательстве теоремы 3). Тогда, как отмечалось выше, правая часть уравнения (1) должна быть как минимум непрерывной: $f \in C(G_\infty)$. Если в результате доказательства такое классическое решение этого уравнения будет предъявлено (и оно будет предъявлено), то сделанное предположение окажется оправданным.

В силу бесконечной дифференцируемости $e^{Bx - At} \neq 0$ решение уравнения (1) в G_∞ заменой

$$u(x, t) = e^{Bx - At} \hat{u}(x, t) \quad (5)$$

сводится к решению неоднородного уравнения

$$(\partial_t - a_2 \partial_x)(\partial_t + a_1 \partial_x) \hat{u}(x, t) = \hat{f}(x, t), \quad (x, t) \in G_\infty, \quad (6)$$

с правой частью $\hat{f}(x, t) = e^{At - Bx} f(x, t)$ [7].

Покажем, что в любой точке $(x^{(0)}, t^{(0)})$ из G_+ (из G_- в доказательстве теоремы 3) функция

$$\hat{F}(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^t \int_{x - a_1(t - \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} \hat{f}(|s|, \tau) ds d\tau, \quad \hat{f}(|s|, \tau) = e^{A\tau - Bs} f(|s|, \tau), \quad (7)$$

которой становится функция (4) после замены (5), или ее скорректированное выражение с минимальной гладкостью \hat{f} будет классическим решением уравнения (6). Ниже мы увидим, что при $a_1 \neq a_2$

минимальная гладкость правой части \hat{f} теряется функцией \hat{F} на G_+ из-за модуля $|s|$, так как нижний предел интегрирования $x - a_1(t - \tau)$ меняет знак при $\tau = t - \frac{x}{a_1}$.

Любая точка $(x^{(0)}, t^{(0)}) \in G_+$ находится строго внутри различных ограниченных параллелограммов G_0 , содержащихся в G_∞ , сторонами которых служат отрезки характеристик:

$$x - a_1 t = \hat{C}_1, \quad x + a_2 t = \hat{C}_2, \quad \hat{C}_1, \hat{C}_2 \in \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[. \quad (8)$$

Уравнение (6) в различных параллелограммах G_0 линейной невырожденной заменой

$$\xi = x + a_2 t, \quad \eta = x - a_1 t \quad (9)$$

с якобианом

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \eta_x & \eta_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ 1 & -a_1 \end{vmatrix} = -(a_1 + a_2) \neq 0$$

приводится к уравнению канонического вида

$$\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi, \eta) = -\frac{\tilde{f}(\xi, \eta)}{(a_1 + a_2)^2} = -\frac{\hat{f}((a_1\xi + a_2\eta)/(a_1 + a_2), (\xi - \eta)/(a_1 + a_2))}{(a_1 + a_2)^2}, \quad (\xi, \eta) \in \tilde{G}_0, \quad (10)$$

в различных прямоугольниках $\tilde{G}_0 = \{(\xi, \eta) : \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1, \eta_0 \leq \eta \leq \eta_1\}$.

Если непрерывна функция $f \in C(G_\infty)$, то в силу линейности и невырожденности замены (9) непрерывна функция $\tilde{f} \in C(\tilde{G}_\infty)$, где $\tilde{G}_\infty = \{(\xi, \eta) : \eta < \xi, -a_2\eta < a_1\xi, \xi > 0\}$ – образ первой четверти G_∞ для преобразования (9). Поскольку, по нашему предположению, существует классическое решение $\hat{u} \in C^2(G_\infty)$ уравнения (6), то ввиду этих же свойств замены (9) для уравнения (10) в \tilde{G}_∞ существует классическое решение

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \hat{u}\left(\frac{a_1\xi + a_2\eta}{a_1 + a_2}, \frac{\xi - \eta}{a_1 + a_2}\right) \in C^2(\tilde{G}_\infty). \quad (11)$$

Для любой $\tilde{f} \in C(\tilde{G}_\infty)$ существует последовательность непрерывно дифференцируемых функций $\tilde{f}_n \in C^1(\tilde{G}_\infty)$, которая равномерно сходится к \tilde{f} на каждом компакте \tilde{G}_0 при $n \rightarrow \infty$. Здесь \tilde{G}_0 – замыкание образов \tilde{G}_0 параллелограммов G_0 в результате замены (9).

В различных прямоугольниках \tilde{G}_0 рассматриваем дифференциальное уравнение

$$-(a_1 + a_2)^2 (\tilde{u}_n)_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \tilde{f}_n(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \tilde{G}_0, \quad (12)$$

с согласованными условиями Гурса:

$$\tilde{u}_n(\xi_0, \eta) = \tilde{u}(\xi_0, \eta), \quad \eta \in [\eta_0, \eta_1], \quad \tilde{u}_n(\xi, \eta_0) = \tilde{u}(\xi, \eta_0), \quad \xi \in [\xi_0, \xi_1], \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Задача Гурса (12), (13) в \tilde{G}_0 решается методом характеристик. Общий интеграл уравнения (12) в $C^1(\tilde{G}_0)$ состоит из непрерывно дифференцируемых функций:

$$\tilde{u}_n(\xi, \eta) = g(\xi) + h(\eta) + \tilde{F}_n(\xi, \eta), \quad (14)$$

где g, h – любые непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов и функции \tilde{F}_n получаются из функции \hat{F}_n вида (7) с подынтегральными функциями $\hat{f}_n(|s|, \tau)$ вместо $\hat{f}(|s|, \tau)$ в результате замены (9). Для $\tilde{f}_n \in C^1(\tilde{G}_\infty)$, очевидно, решения $\tilde{F}_n \in C^2(\tilde{G}_\infty)$. Функции (14) подставляются в условия Гурса (13), и ввиду $\hat{u} \in C^2(G_\infty)$, равенства (5) и невырожденности замены (9) находятся ее единственные классические решения из $C^2(\tilde{G}_0)$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(\xi, \eta) &= \tilde{u}(\xi, \eta_0) + \tilde{u}(\xi_0, \eta) - \tilde{u}(\xi_0, \eta_0) - \tilde{F}_n(\xi, \eta_0) + \\ &+ \tilde{F}_n(\xi_0, \eta_0) + \tilde{F}_n(\xi, \eta) - \tilde{F}_n(\xi_0, \eta), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Определение 2. Задача Гурса (12), (13) называется *корректирующей* краевой задачей частных решений неоднородного уравнения (1), а функция \hat{F} вида (7) (и F вида (4)) – *пробной*.

Пробные функции можно также называть пробными решениями, потому что они являются классическими решениями соответствующего уравнения при более высокой гладкости правой части. Более того, без завышения в них гладкости правой части пробные функции всегда являются если не классическими, то обобщенными решениями этих уравнений [8].

Как разность классических решений функции $\tilde{v}_n(\xi, \eta) = \tilde{u}(\xi, \eta) - \tilde{u}_n(\xi, \eta)$, очевидно, являются классическими решениями задачи Гурса:

$$-(a_1 + a_2)^2 (\tilde{v}_n)_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \tilde{f}(\xi, \eta) - \tilde{f}_n(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \tilde{G}_0, \quad (16)$$

$$\tilde{v}_n(\xi_0, \eta) = 0, \quad \eta \in [\eta_0, \eta_1], \quad \tilde{v}_n(\xi, \eta_0) = 0, \quad \xi \in [\xi_0, \xi_1], \quad n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Умножая уравнение (16) на сумму первых частных производных $(\tilde{v}_n)_{\xi} + (\tilde{v}_n)_{\eta}$, интегрируя результат умножения по области $]\xi_0, \tau_1[\times]\eta_0, \tau_2[$ с помощью однородных условий Гурса (17), применяя элементарные оценки и беря точную верхнюю грань по $(\tau_1, \tau_2) \in]\xi_0, \xi_1[\times]\eta_0, \eta_1[$ в полученном неравенстве, так же, как в [9], выводим априорную оценку

$$\begin{aligned} \sup_{\eta_0 < \eta < \eta_1} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left(|(\tilde{v}_n)_{\xi}(\xi, \eta)|^2 + |\tilde{v}_n(\xi, \eta)|^2 \right) d\xi + \sup_{\xi_0 < \xi < \xi_1} \int_{\eta_0}^{\eta_1} \left(|(\tilde{v}_n)_{\eta}(\xi, \eta)|^2 + |\tilde{v}_n(\xi, \eta)|^2 \right) d\eta \leq \\ \leq c_0 \iint_{\tilde{G}_0} |\tilde{f}_n(\xi, \eta) - \tilde{f}(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

где постоянная $c_0 > 0$ не зависит от \tilde{v}_n, ξ, η и n .

Поскольку в этой априорной оценке правая часть сходится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то из сходимости его левой части к нулю при $n \rightarrow \infty$ заключаем равномерную сходимость на прямоугольниках \tilde{G}_0 последовательности \tilde{v}_n к нулю при $n \rightarrow \infty$, потому что для пространств Соболева $W_2^1(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^2$, справедливы непрерывные вложения пространств $C[\xi_0, \xi_1] \supset W_2^1(\xi_0, \xi_1), C[\eta_0, \eta_1] \supset W_2^1(\eta_0, \eta_1)$ [10]. Это означает равномерную сходимость на прямоугольниках \tilde{G}_0 последовательности \tilde{u}_n к \tilde{u} при $n \rightarrow \infty$. Поэтому благодаря неравенствам (18) из решений (15) предельным переходом при $n \rightarrow \infty$ получаем тождество

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi, \eta) &= \tilde{u}(\xi, \eta_0) + \tilde{u}(\xi_0, \eta) - \tilde{u}(\xi_0, \eta_0) - \tilde{F}(\xi, \eta_0) + \\ &+ \tilde{F}(\xi_0, \eta_0) + \tilde{F}(\xi, \eta) - \tilde{F}(\xi_0, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \tilde{G}_0, \end{aligned} \quad (19)$$

где функция $\tilde{F}(\xi, \eta) = \hat{F}\left(\frac{a_1\xi + a_2\eta}{a_1 + a_2}, \frac{\xi - \eta}{a_1 + a_2}\right)$ получена из \hat{F} заменой (9).

Проанализируем гладкость слагаемых этого тождества. Слагаемые $\tilde{u}(\xi, \eta_0)$ и $\tilde{u}(\xi_0, \eta)$, очевидно, дважды непрерывно дифференцируемы по ξ и η соответственно, так как $\tilde{u} \in C^2(\tilde{G}_0)$ по совокупности переменных ξ и η . Для того чтобы выявить гладкость остальных слагаемых, воспользуемся геометрическим представлением пробной функции \hat{F} вида (7) через двойной интеграл по характеристическому треугольнику ΔMPQ с вершиной $M(x, t) \in G_+$ и вершинами его основания $P(x - a_1t, 0), Q(x + a_2t, 0)$:

$$(a_1 + a_2)\hat{F}(x, t) = \iint_{\Delta MPQ} \hat{f}(|x|, t) dx dt = \iint_{\Delta OP'Q'} \hat{f}(x, t) dx dt + \iint_{OQM'Q'} \hat{f}(x, t) dx dt, \quad (20)$$

где точка $Q' \left(0, t - \frac{x}{a_1} \right)$ и точка $P'(a_1 t - x, 0)$ симметрична точке $P(x - a_1 t, 0)$ относительно оси Ot .

В равенствах (20) переходим к новым переменным (9) и имеем интегральное представление \tilde{F} пробной функции:

$$\begin{aligned} -(a_1 + a_2)^2 \tilde{F}(\xi, \eta) &= -(a_1 + a_2)^2 \hat{F} \left(\frac{a_1 \xi + a_2 \eta}{a_1 + a_2}, \frac{\xi - \eta}{a_1 + a_2} \right) = \\ &= \iint_{\Delta \tilde{O} \tilde{P}' \tilde{Q}'} \tilde{f}(\xi, \eta) d\xi d\eta + \iint_{\tilde{O} \tilde{Q}' \tilde{M}'} \tilde{f}(\xi, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (21)$$

где точки $\tilde{O}(0, 0)$, $\tilde{M}(\xi, \eta)$, $\tilde{Q}(\xi, \xi)$, $\tilde{P}'(-\eta, -\eta)$ и $\tilde{Q}' \left(-\frac{a_2}{a_1} \eta, \eta \right)$, $\eta = x - a_1 t < 0$, на плоскости $\tilde{O}\xi\eta$

являются соответственно образами точек $O(0, 0)$, $M(x, t)$, $Q(x + a_2 t, 0)$, $P'(a_1 t - x, 0)$ и $Q' \left(0, t - \frac{x}{a_1} \right)$ плоскости Oxt для преобразования (9).

В равенстве (21) применяем уравнение (10), двойные интегралы выражаем через повторные интегралы и получаем

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\xi, \eta) &= \int_{\eta}^0 \int_{v_1(\rho)}^{v_2(\rho)} \tilde{u}_{vp}(v, \rho) dv d\rho + \int_0^{-\eta} \int_{\rho}^{v_2(\rho)} \tilde{u}_{vp}(v, \rho) dv d\rho + \\ &+ \int_{\eta}^0 \int_{v_1(\rho)}^{\xi} \tilde{u}_{vp}(v, \rho) dv d\rho + \int_0^{\xi} \int_{\rho}^{\xi} \tilde{u}_{vp}(v, \rho) dv d\rho, \end{aligned} \quad (22)$$

где уравнения прямых $l_1 : v_1(\rho) = -\frac{a_2}{a_1} \rho$, $l_2 : v_2(\rho) = \frac{a_1 - a_2}{2a_1} \rho - \frac{a_1 + a_2}{2a_1} \eta$ (рис. 1, а).

Вычисляем первые частные производные и исследуем их гладкость:

$$\frac{\partial \tilde{F}(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \tilde{u}_v(v, \xi) \Big|_{v=\xi} - \tilde{u}_v(v, \eta) \Big|_{v=\xi} \in C^1(\tilde{G}_0),$$

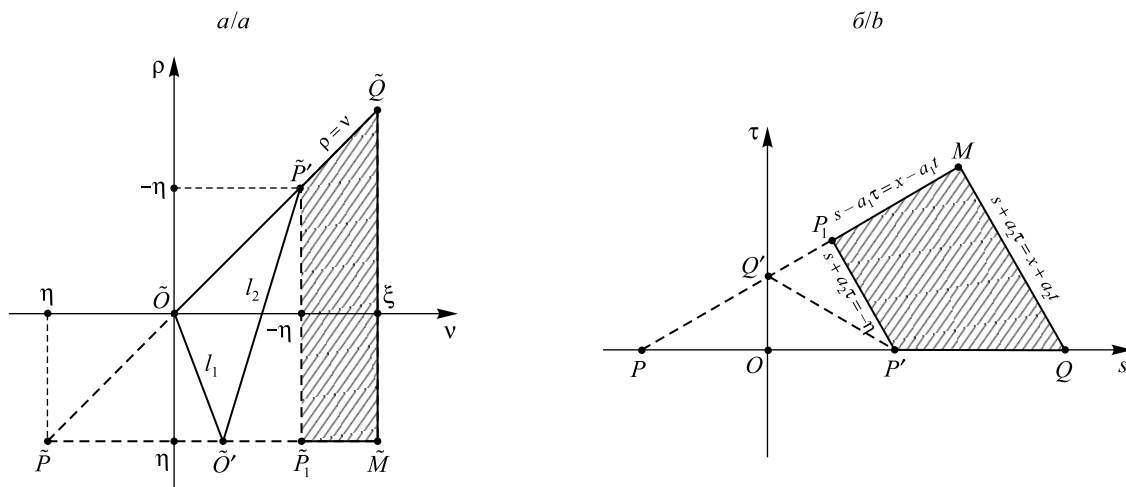


Рис. 1. Область интегрирования при $a_1 \geq a_2$ на множестве G_+ : а – для функции \tilde{F}_1 ; б – для функции \hat{F}_1

Fig. 1. The region of integration at $a_1 \geq a_2$ on the set G_+ : а – for the function \tilde{F}_1 ; б – for the function \hat{F}_1

$$\frac{\partial \tilde{F}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{a_1 + a_2}{2a_1} \int_{\eta}^{-\eta} \tilde{u}_{v\rho}(v, \rho) \Big|_{v=v_2(\rho)} d\rho - \tilde{u}_{\rho}(\xi, \rho) \Big|_{\rho=\eta} + \tilde{u}_{\rho} \left(-\frac{a_2}{a_1} \eta, \rho \right) \Big|_{\rho=\eta} \in C(\tilde{G}_0),$$

так как $\tilde{u} \in C^2(\tilde{G}_0)$. Нетрудно видеть, что частная производная $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta}$ непрерывно дифференцируема на \tilde{G}_0 только тогда, когда $a_1 = a_2$ и уравнение второй прямой имеет вид $v_2(\rho) = -\frac{a_1 + a_2}{2a_1} \eta$. Таким образом, в случае $a_1 \neq a_2$ не все вторые частные производные от функции \tilde{F} на \tilde{G}_0 и, следовательно, от пробной функции F вида (4) на G_0 являются непрерывными, потому что функции F на G_0 и \tilde{F} на \tilde{G}_0 дважды непрерывно дифференцируемы одновременно. Поэтому для точек $(x^{(0)}, t^{(0)}) \in G_+$, лежащих строго над критической характеристикой $x = a_1 t$, в общем случае $a_1 \neq a_2$ пробная функция F нуждается в корректировке за счет такого же негладкого вычитаемого $\tilde{F}(\xi_0, \eta)$ благодаря тому, что из тождества (19) следует дважды непрерывная дифференцируемость их разности $\tilde{F}(\xi, \eta) - \tilde{F}(\xi_0, \eta) \in C^2(\tilde{G}_0)$. Отсюда, в частности, вытекает дважды непрерывная дифференцируемость этой разности в точке $(\xi^{(0)}, \eta^{(0)}) \in \tilde{G}_0$, в которую отображение (9) взаимно и однозначно переводит точку $(x^{(0)}, t^{(0)}) \in G_+$.

1. Пусть точка $M(x, t) \in G_+$ и $a_1 \geq a_2$ в уравнении (1). Если в тождестве (19) положить $\xi_0 = -\eta > 0$, тогда согласно равенствам (21) и (22) находим функцию (см. рис. 1, а)

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\xi_0, \eta_0) = \tilde{F}(-\eta, \eta_0) = & \int_{\eta_0}^0 \int_{v_1(\rho)}^{v_2(\rho)|_{\eta=\eta_0}} \tilde{u}_{v\rho}(v, \rho) dv d\rho + \int_0^{-\eta_0} \int_{\rho}^{v_2(\rho)|_{\eta=\eta_0}} \tilde{u}_{v\rho}(v, \rho) dv d\rho + \\ & + \int_{\eta_0}^0 \int_{v_1(\rho)}^{-\eta} \tilde{u}_{v\rho}(v, \rho) dv d\rho + \int_0^{-\eta_0} \int_{\rho}^{-\eta} \tilde{u}_{v\rho}(v, \rho) dv d\rho. \end{aligned} \quad (23)$$

Непрерывно дифференцируема на \tilde{G}_0 первая частная производная этой функции:

$$\frac{\partial \tilde{F}(-\eta, \eta_0)}{\partial \eta} = \tilde{u}_v(v, -\eta_0) \Big|_{v=-\eta} - \tilde{u}_v(v, -\eta) \Big|_{v=-\eta} \in C^1(\tilde{G}_0)$$

и в (19), очевидно, дважды непрерывно дифференцируемы на \tilde{G}_0 все слагаемые, кроме двух последних. Вычисляем их разность, в двойном интеграле делаем обратную замену переменных к (9) и получаем скорректированную функцию через двойной интеграл:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(\xi, \eta) = \tilde{F}(\xi, \eta) - \tilde{F}(-\eta, \eta) = & \frac{-1}{(a_1 + a_2)^2} \iint_{\tilde{M}\tilde{P}'\tilde{R}\tilde{Q}} \tilde{f}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ = & \frac{1}{a_1 + a_2} \iint_{MP'RQ} \hat{f}(x, t) dx dt = \hat{F}_1(x, t), \end{aligned} \quad (24)$$

где трапеция $\tilde{M}\tilde{P}'\tilde{R}\tilde{Q}$ с новой вершиной $\tilde{P}'(-\eta, \eta)$, $\eta < 0$, в плоскости $\tilde{O}\tilde{\xi}\tilde{\eta}$ обратной заменой к (9) переходит в трапецию $MP'RQ$ с новой вершиной $P_1\left(\frac{a_2 - a_1}{a_1 + a_2}(x - a_1 t), \frac{2}{a_1 + a_2}(a_1 t - x)\right)$ плоскости Oxt (рис. 1, б). Отрезки $P_1P' \parallel MQ$ параллельны, так как параллельны отрезки $\tilde{P}_1\tilde{P}' \parallel \tilde{M}\tilde{Q}$. Разложив последний двойной интеграл через повторные интегралы и используя формулу (5), можно видеть, что выражение (24) для $a_1 \geq a_2$ равно выражению (2).

Тот факт, что функция \tilde{F}_1 дважды непрерывно дифференцируема в \tilde{G}_+ и удовлетворяет неоднородному уравнению (10), т. е. \tilde{F}_1 является классическим решением этого уравнения, вытекает из тождества (19),

и, следовательно, функция \hat{F}_1 есть классическое решение неоднородного уравнения (6) в G_+ на основании тождества (11). В связи с этим (2) является классическим решением неоднородного уравнения (1) на основании представления (5). Обычным способом подстановки эта проверка осуществляется ниже – в доказательстве теоремы 2.

2. Пусть точка $M(x, t) \in G_+$ и $a_1 \leq a_2$ в уравнении (1). В тождестве (19) можно положить $\xi_0 = -\frac{a_2}{a_1}\eta$ (рис. 2, а), тогда аналогично равенствам (23) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\xi_0, \eta_0) = \tilde{F}\left(-\frac{a_2}{a_1}\eta, \eta_0\right) &= \int_{\eta_0}^0 \int_{v_1(\rho)}^{v_2(\rho)|_{\eta=\eta_0}} \tilde{u}_{v\rho}(v, \rho) dv d\rho + \int_0^{-\eta_0} \int_{\rho}^{v_2(\rho)|_{\eta=\eta_0}} \tilde{u}_{v\rho}(v, \rho) dv d\rho + \\ &+ \int_{\eta_0}^0 \int_{v_1(\rho)}^{-\frac{a_2}{a_1}\eta} \tilde{u}_{v\rho}(v, \rho) dv d\rho + \int_0^{-\frac{a_2}{a_1}\eta} \int_{\rho}^{-\frac{a_2}{a_1}\eta} \tilde{u}_{v\rho}(v, \rho) dv d\rho. \end{aligned}$$

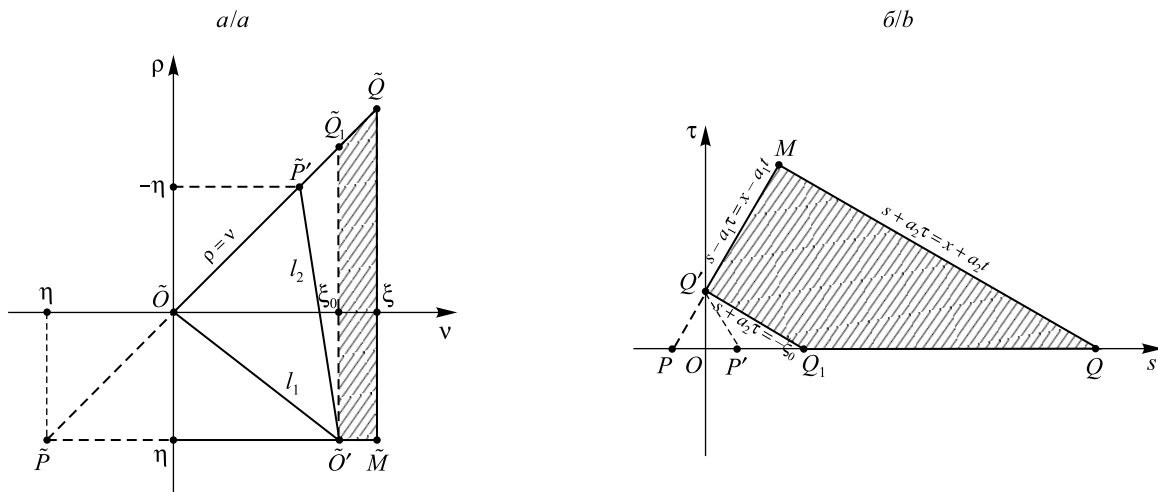


Рис. 2. Область интегрирования при $a_1 \leq a_2$ на множестве G_+ : а – для функции \tilde{F}_1 ; б – для функции \hat{F}_1

Fig. 2. The region of integration at $a_1 \leq a_2$ on the set G_+ : а – for the function \tilde{F}_1 ; б – for the function \hat{F}_1

Непрерывно дифференцируема на \tilde{G}_0 первая частная производная

$$\frac{\partial \tilde{F}\left(-\frac{a_2}{a_1}\eta, \eta_0\right)}{\partial \eta} = \frac{a_2}{a_1} \left[\tilde{u}_v(v, \eta_0) \Big|_{v=-\frac{a_2}{a_1}\eta} - \tilde{u}_v\left(v, -\frac{a_2}{a_1}\eta\right) \Big|_{v=-\frac{a_2}{a_1}\eta} \right] \in C^1(\tilde{G}_0)$$

и в (19), очевидно, дважды непрерывно дифференцируемы на \tilde{G}_0 все слагаемые, кроме двух последних, которые аналогично (24) дают корректировку пробной функции

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(\xi, \eta) &= \tilde{F}(\xi, \eta) - \tilde{F}\left(-\frac{a_2}{a_1}\eta, \eta\right) = \\ &= \frac{-1}{(a_1 + a_2)^2} \iint_{\tilde{M}\tilde{Q}'\tilde{Q}_1\tilde{Q}} \tilde{f}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{a_1 + a_2} \iint_{M\tilde{Q}'Q_1Q} \hat{f}(x, t) dx dt = \hat{F}_1(x, t). \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь трапеция $\tilde{M}\tilde{Q}'\tilde{Q}_1\tilde{Q}$ с новыми вершинами $\tilde{Q}'\left(-\frac{a_2}{a_1}\eta, \eta\right)$ и $\tilde{Q}_1\left(-\frac{a_2}{a_1}\eta, \frac{a_2}{a_1}\eta\right)$, $\eta < 0$, в плоскости $\tilde{O}\tilde{\xi}\eta$ получается из трапеции $M\tilde{Q}'Q_1Q$ с новыми вершинами $Q'\left(0, t - \frac{x}{a_1}\right)$ и $Q_1\left(a_2t - \frac{a_2}{a_1}x, 0\right)$

плоскости Oxt обратной заменой к (9) (рис. 2, б). Отрезки $Q'Q_1 \parallel MQ$ параллельны, так как параллельны отрезки $\tilde{Q}'\tilde{Q}_1 \parallel \tilde{M}\tilde{Q}$. Так же, как выше для функции \hat{F}_1 вида (24), устанавливается, что функция (25) для $a_1 \leq a_2$ совпадает с выражением (3), функция $F_1 \in C^2(G_0)$ и функция (3) являются классическим решением неоднородного уравнения (1). Теорема 1 доказана.

В процессе доказательства теоремы 1 нами подтверждена справедливость известного утверждения [11; 12].

Следствие 1. Если в уравнении (1) коэффициенты $a_1 = a_2 = a > 0$, то функция (4) является его классическим решением на G_+ при необходимой гладкости правой части

$$f \in C(G_\infty), \int_0^t f(|x \pm a(t-\tau)|, \tau) d\tau \in C^1(G_+).$$

Замечание 2. В начале доказательства теоремы 1 можно было сразу взять функции (2) и (3) вместо функции (4), но тогда было бы непонятно, почему классическое решение (4) предъясвляет, а классические решения (2) и (3) не предъясвляют завышенную гладкость к f . В решениях (2) и (3) нижние внутренние пределы интегрирования всегда положительны.

Необходимая гладкость правой части

Установленную выше необходимость непрерывности правой части $f \in C(G_\infty)$ дополним необходимыми требованиями гладкости, которые обеспечивают дважды непрерывную дифференцируемость в G_∞ если не пробной функции F , то скорректированной функции F_1 .

Теорема 2. Функция (2) при $a_1 \geq a_2$ и функция (3) при $0 < a_1 \leq a_2$ являются классическими решениями неоднородного уравнения (1) в G_+ при необходимой гладкости

$$f \in C(G_\infty), \int_0^t f(x + a_2(t-\tau), \tau) d\tau \in C^1(G_+), \quad (26)$$

и, соответственно,

$$\int_0^{t_1(x)} f(a_1 t - x - a_2 \tau, \tau) d\tau - \int_{t_1(x)}^t f(x - a_1(t-\tau), \tau) d\tau \in C^1(G_+), \quad a_1 \geq a_2, \quad (27)$$

$$a_2 \int_0^{t_2(x)} f\left(a_2(t-\tau) - \frac{a_2}{a_1}x, \tau\right) d\tau - a_1 \int_{t_2(x)}^t f(x - a_1(t-\tau), \tau) d\tau \in C^1(G_+), \quad 0 < a_1 \leq a_2. \quad (28)$$

Доказательство. Сначала покажем, что если правая часть f не зависит от x или t , то функции (2) и (3) являются классическими решениями неоднородного уравнения (1) в G_+ для всех непрерывных $f \in C]0, \infty[$ по t или x соответственно.

Пусть коэффициенты $a_1 \geq a_2 > 0$. Проще это проиллюстрировать на примере функции

$$\hat{F}_1(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left[\int_0^{t_1(x)} \int_{a_1 t - x - a_2 \tau}^{x + a_2(t-\tau)} \hat{f}(s, \tau) ds d\tau + \int_{t_1(x)}^t \int_{x - a_1(t-\tau)}^{x + a_2(t-\tau)} \hat{f}(s, \tau) ds d\tau \right], \quad (29)$$

аналогичной функции (7), и уравнения (6) с правой частью \hat{f} . Если \hat{f} не зависит от x , то эта функция принимает вид

$$\hat{F}_1(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ \left[2x + (a_2 - a_1)t \right] \int_0^{t_1(x)} \hat{f}(\tau) d\tau + (a_1 + a_2) \int_{t_1(x)}^t (t - \tau) \hat{f}(\tau) d\tau \right\}. \quad (30)$$

Двукратным дифференцированием и подстановкой функции (30) в уравнение (6) проверяется, что для любой правой части \hat{f} , непрерывной по t , она дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (6) на G_+ . Из-за равенства $f(x, t) = e^{Bx - At} \hat{f}(t)$ это утверждение не распространяется сразу на функцию (2) и уравнение (1), а для функции (2) и уравнения (1) оно легко устанавливается таким же образом.

Если в (29) правая часть \hat{f} не зависит от t , то ее первая частная производная по t равна

$$\frac{\partial \hat{F}_1(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ \int_0^{t_1(x)} [a_2 \hat{f}(x + a_2(t - \tau)) - a_1 \hat{f}(a_1 t - x - a_2 \tau)] d\tau + \int_{t_1(x)}^t [a_2 \hat{f}(x + a_2(t - \tau)) + a_1 \hat{f}(x - a_1(t - \tau))] d\tau \right\}.$$

Когда $a_2 > 0$, тогда в этих интегралах можно перейти к новым переменным: $y = x + a_2(t - \tau)$, $z = a_1 t - x - a_2 \tau$, $\omega = x - a_1(t - \tau)$ и получить ее представление

$$\frac{\partial \hat{F}_1(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ \int_{x - a_1(t - t_1(x))}^{x + a_2 t} \hat{f}(y) dy + \frac{a_1}{a_2} \int_{a_1 t - x}^{a_1 t - x - a_2 t_1(x)} \hat{f}(z) dz \right\} \in C^1(G_+),$$

которое, очевидно, непрерывно дифференцируемо на G_+ для любой правой части \hat{f} , непрерывной по x . С помощью этих же замен переменной интегрирования τ проверяется непрерывная дифференцируемость на G_+ первой частной производной $\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial x}$ по x от выражения (29) с правой частью \hat{f} , непрерывной по x и не зависящей от t . Нетрудно убедиться также в том, что для выражения (29) выполняется уравнение (6) на G_+ для любой прерывной по x и не зависящей от t правой части \hat{f} . Для правой части $f(x, t) = e^{Bx - At} \hat{f}(x)$ и уравнения (1) эти доказательства проводятся аналогично правой части \hat{f} и уравнению (6).

При $0 < a_1 \leq a_2$ в случае правой части $\hat{f} = \hat{f}(t)$, не зависящей от x , выражение

$$\hat{F}_1(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ \int_0^{t_2(x)} \int_{a_2(t - \tau) - (a_2/a_1)x}^{x + a_2(t - \tau)} \hat{f}(s, \tau) ds d\tau + \int_{t_2(x)}^t \int_{x - a_1(t - \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} \hat{f}(s, \tau) ds d\tau \right\}, \quad (31)$$

аналогичное выражению (29), становится функцией

$$\hat{F}_1(x, t) = \frac{x}{a_1} \int_0^{t_2(x)} \hat{f}(\tau) d\tau + \int_{t_2(x)}^t (t - \tau) \hat{f}(\tau) d\tau.$$

Для любой непрерывной по t правой части \hat{f} эта функция дважды непрерывно дифференцируема на G_+ и удовлетворяет уравнению (6). Таким же способом это свойство проверяется для функции (3) при $0 < a_1 \leq a_2$.

Когда в (31) правая часть $\hat{f} = \hat{f}(x)$ не зависит от t , тогда ее первая производная по t равна

$$\frac{\partial \hat{F}_1(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ \int_0^{t_2(x)} \left[a_2 \hat{f}(x + a_2(t - \tau)) - a_2 \hat{f} \left(a_2(t - \tau) - \frac{a_2}{a_1} x \right) \right] d\tau + \int_{t_2(x)}^t [a_2 \hat{f}(x + a_2(t - \tau)) + a_1 \hat{f}(x - a_1(t - \tau))] d\tau \right\}.$$

Для $a_2 > 0$ эта производная использованными выше заменами переменной интегрирования τ приводится к непрерывно дифференцируемому на G_+ выражению

$$\frac{\partial \hat{F}_1(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ \int_x^{x + a_2 t} \hat{f}(z) dz + \int_{a_2 t_2(x)}^x \hat{f}(y) dy \right\} \in C^1(G_+)$$

для любой непрерывной по x и не зависящей от t правой части \hat{f} . Точно так же проверяется непрерывная дифференцируемость на G_+ первой частной производной $\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial x}$ по x от выражения (31) в случае непрерывной и зависящей только от x правой части \hat{f} . Нетрудно убедиться в том, что выражение (31), где правая часть \hat{f} зависит только от t или x и непрерывна по t или x , удовлетворяет уравнению (6). Для более общей функции (3) при $0 < a_1 \leq a_2$ эти свойства обосновываются точно таким же путем.

Теперь пусть $a_1 \geq a_2$ и функция \hat{f} зависит от x и t . Найдем дополнительные необходимые требования гладкости на \hat{f} для классического решения (29) уравнения (6) на G_+ . Известно [7], что первые частные производные классических решений уравнения (6) могут терпеть разрыв только на кусках характеристик (8). Дважды непрерывно дифференцируемая на G_0 функция (29) при $a_1 \geq a_2$ должна иметь на G_0 непрерывно дифференцируемые производные вдоль этих характеристик:

$$\frac{\partial \hat{F}_1(x, t)}{\partial t} + a_1 \frac{\partial \hat{F}_1(x, t)}{\partial x} = \int_0^t \hat{f}(x + a_2(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(G_+), \quad (32)$$

$$\frac{\partial \hat{F}_1(x, t)}{\partial t} - a_2 \frac{\partial \hat{F}_1(x, t)}{\partial x} = - \int_0^{t_1(x)} \hat{f}(a_1 t - x + a_2 \tau, \tau) d\tau + \int_{t_1(x)}^t \hat{f}(x - a_1(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(G_+). \quad (33)$$

Поскольку в силу равенства (5) решения \hat{F}_1 из (29) и F из (4) дважды непрерывно дифференцируемы на G_∞ одновременно и в силу равенства $\hat{f}(x, t) = e^{At - Bx} f(x, t)$ правые части \hat{f} и f имеют на каждом ограниченном множестве первой четверти G_∞ одну и ту же гладкость, в равенствах (32) и (33) заменяем функцию \hat{f} на f и получаем необходимые условия гладкости (26) и (27). Нетрудно проверить, что уравнение (1) выполняется для функции (2) в предположениях гладкости (26) и (27).

В случае решения F_1 вида (3) при $0 < a_1 \leq a_2$ вычисляем производные по двум направлениям характеристик (8) уравнения (6) от выражения (31) и имеем значения:

$$\frac{\partial \hat{F}_1(x, t)}{\partial t} + a_1 \frac{\partial \hat{F}_1(x, t)}{\partial x} = \int_0^t \hat{f}(x + a_2(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(G_+),$$

$$\frac{\partial \hat{F}_1(x, t)}{\partial t} - a_2 \frac{\partial \hat{F}_1(x, t)}{\partial x} = - \frac{a_2}{a_1} \int_0^{t_2(x)} \hat{f} \left(a_2(t - \tau) - \frac{a_2}{a_1} x, \tau \right) d\tau + \int_{t_2(x)}^t \hat{f}(x - a_1(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(G_+).$$

В этих требованиях гладкости меняем \hat{f} на f и приходим к необходимым условиям из (26) и (28) в дополнение к $f \in C(G_\infty)$. Подстановка функции (3) в уравнение (1) позволяет убедиться в том, что она удовлетворяет ему на G_+ при гладкости (26) и (28). Теорема 2 доказана.

Выше установлена следующая минимальная гладкость правой части.

Следствие 2. Если правая часть f не зависит от x или t , то функции (2) при $a_1 \geq a_2 > 0$ и (3) при $0 < a_1 \leq a_2$ являются классическими решениями неоднородного уравнения (1) в G_+ и f только непрерывна по t или x соответственно.

Замечание 3. Из доказательств теорем 1 и 2 уже можно сделать вывод о том, что функция (4) является классическим решением уравнения (1) в G_- при $a_1 \neq a_2$ и f имеет минимальную гладкость, указанную ниже в (35), если это уравнение рассматривается в первой четверти G_∞ . В случае задачи Коши, т. е. когда уравнение (1) задается в верхней полуплоскости $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, \infty[$, функция (4) сохраняет эти свойства во всех точках верхней полуплоскости.

Теорема 3. Существуют классические решения уравнения (1) при всех $a_1 > 0, a_2 \geq 0$ в G_- :

$$F_1(x, t) = \frac{e^{Bx - At}}{a_1 + a_2} \left[\int_0^{t_0(x)} \int_{k(x - a_1 t) - a_2 \tau}^{x + a_2(t - \tau)} e^{A\tau - Bs} f(s, \tau) ds d\tau + \int_{t_0(x)}^t \int_{x - a_1(t - \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} e^{A\tau - Bs} f(s, \tau) ds d\tau \right], \quad k \geq 1, \quad (34)$$

где предел интегрирования $t_0(x) = \frac{(k-1)(x-a_1t)}{a_1+a_2}$, с необходимой гладкостью

$$f \in C(G_-), \int_0^t f(x + (-1)^i a_i(t-\tau), \tau) d\tau \in C^1(G_-), \quad i=1, 2. \quad (35)$$

Доказательство. Для точек $(x^{(0)}, t^{(0)}) \in G_-$, лежащих под критической характеристикой $x = a_1 t$, ввиду (10) пробной функцией является выражение

$$\hat{F}(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \iint_{\Delta MPQ} \hat{f}(x, t) dx dt = \frac{-1}{(a_1 + a_2)^2} \iint_{\Delta \tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}} \tilde{f}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{\eta}^{\xi} \int_{\rho}^{\xi} \tilde{u}_{vp}(v, \rho) dv d\rho = \tilde{F}(\xi, \eta).$$

Его первые частные производные непрерывно дифференцируемы в \tilde{G}_0 :

$$\frac{\partial \tilde{F}(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \tilde{u}_v(v, \xi)|_{v=\xi} - \tilde{u}_v(v, \eta)|_{v=\xi} \in C^1(\tilde{G}_0),$$

$$\frac{\partial \tilde{F}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \tilde{u}_\rho(\eta, \rho)|_{\rho=\eta} - \tilde{u}_\rho(\xi, \rho)|_{\rho=\eta} \in C^1(\tilde{G}_0).$$

В связи с этим пробную функцию \hat{F} вида (7) без модуля $\hat{f}(s, \tau)$ для точек $M(x, t) \in G_-$ при всех $a_1 > 0$, $a_2 \geq 0$ можно не корректировать в случае первой четверти плоскости G_∞ . Обращаем внимание на то, что для точек $(x, t) \in G_-$ в замене (9) переменная $\eta = x - a_1 t > 0$.

Если же корректировать решение (7), то для любых $a_1 \neq a_2$ это можно сделать, например, в (19), положив $\xi_0 = k\eta$, где $k \geq 1$, и получив для всевозможных значений $k \geq 1$ сначала несчетную совокупность частных решений уравнения (10):

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(\xi, \eta) &= \tilde{F}(\xi, \eta) - \tilde{F}(k\eta, \eta) = \frac{-1}{(a_1 + a_2)^2} \left[\iint_{\Delta \tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}} \tilde{f}(\xi, \eta) d\xi d\eta - \iint_{\Delta \tilde{M}_0\tilde{P}\tilde{Q}_0} \tilde{f}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] = \\ &= \frac{-1}{(a_1 + a_2)^2} \iint_{\tilde{M}\tilde{M}_0\tilde{Q}_0\tilde{Q}} \tilde{f}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \iint_{\tilde{M}\tilde{M}_0\tilde{Q}_0\tilde{Q}} \tilde{u}_{\xi\eta}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{k\eta}^{\xi} \int_{\eta}^v \tilde{u}_{vp} dv d\rho, \end{aligned} \quad (36)$$

где точки $\tilde{M}(\xi, \eta)$, $\tilde{P}(\eta, \eta)$, $\tilde{Q}(\xi, \xi)$, $\tilde{M}_0(k\eta, \eta)$, $\tilde{Q}_0(k\eta, k\eta)$ находятся на плоскости $\tilde{O}\xi\eta$ (рис. 3, а).

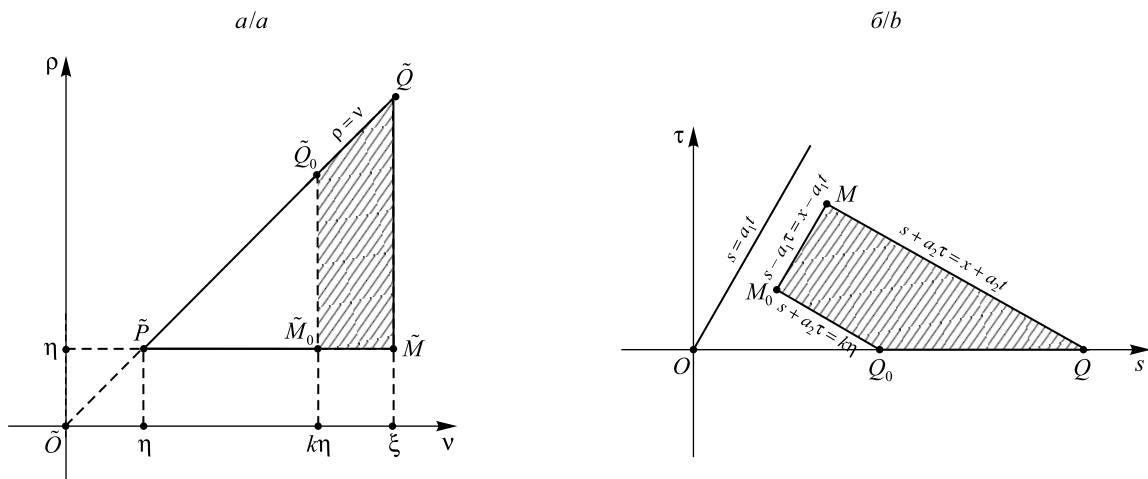


Рис. 3. Область интегрирования при $a_1 \neq a_2$ на множестве G_- : а – для функции \tilde{F}_1 ; б – для функции \hat{F}_1
Fig. 3. The region of integration at $a_1 \neq a_2$ on the set G_- : а – for the function \tilde{F}_1 ; б – for the function \hat{F}_1

Непрерывно дифференцируемы первые частные производные от выражения (36):

$$\frac{\partial \tilde{F}_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \tilde{u}_v(v, \xi)|_{v=\xi} - \tilde{u}_v(v, \eta)|_{v=\xi} \in C^1(\tilde{G}_0),$$

$$\frac{\partial \tilde{F}_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} = k\tilde{u}_v(v, \eta)|_{v=k\eta} - k\tilde{u}_v(v, k\eta)|_{v=k\eta} + \tilde{u}_\rho(k\eta, \rho)|_{\rho=\eta} - \tilde{u}_\rho(\xi, \rho)|_{\rho=\eta} \in C^1(\tilde{G}_0).$$

Обратной невырожденной заменой к (9) указанные чуть выше точки \tilde{M} , \tilde{M}_0 , \tilde{Q}_0 , \tilde{Q} переходят соответственно в точки $M(x, t)$, $M_0(x_0(t), t_0(x))$, $Q_0(k(x - a_1t), 0)$, $Q(x + a_2t, 0)$ плоскости Oxt , где

$$x_0(t) = \frac{ka_1 + a_2}{a_1 + a_2}(x - a_1t), \quad t_0(x) = \frac{k-1}{a_1 + a_2}(x - a_1t).$$

Потом обратная замена к (9) в выражении (36) дает несчетную совокупность частных классических решений неоднородного уравнения (6)

$$\hat{F}_1(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left[\int_0^{t_0(x)} \int_{k(x-a_1t)-a_2\tau}^{x+a_2(t-\tau)} \hat{f}(s, \tau) ds d\tau + \int_{t_0(x)}^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} \hat{f}(s, \tau) ds d\tau \right], \quad k \geq 1, \quad (37)$$

равных двойному интегралу от \hat{f} по трапеции MM_0Q_0Q плоскости Oxt с коэффициентом $\frac{1}{a_1 + a_2}$ (см. рис. 3, б).

Поскольку решения (7) уравнения (6) для точек $M(x, t) \in G_-$ можно было не корректировать, то классические решения (37) отличаются от классического решения (7) на некоторую функцию $\hat{F}_2 \in C^2(G_-)$. Поэтому мы берем от функции (7) без модуля в \hat{f} производные вдоль характеристик (8) и так же, как в [5; 6; 13], получаем требования (35) с \hat{f} вместо f . Согласно равенствам (5) и $\hat{f}(x, t) = e^{At - Bx} f(x, t)$ решения (37) равны решениям (34) и требования (35) с \hat{f} вместо f эквивалентны требованиям (35). Теорема 3 доказана.

Следствие 3. Если правая часть f не зависит от x или t , то функции (34) являются классическими решениями неоднородного уравнения (1) на G_- для любых $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ только при необходимом требовании непрерывности f по t или x соответственно.

Замечание 4. На критической характеристике $x = a_1t$ дважды непрерывная дифференцируемость решений уравнения (1) обеспечивается условиями согласования правой части f с соответствующими данными краевых условий благодаря гладкости приведенных выше решений в окрестности этой критической характеристики, так же как, например, в случае смешанных задач для уравнения (1) при первых косых производных в граничных условиях [13], при факторизованной второй косою производной в граничном условии [6] и при факторизованных вторых косых производных в граничных условиях [14].

Заключение

В работе предложен метод корректировки пробных решений общего уравнения колебаний струны в первой четверти плоскости для того, чтобы они имели минимальную (необходимую) гладкость его правой части. Корректировка данных решений проводится посредством корректирующей задачи Гурса и включает три этапа:

- 1) постановку и решение корректирующей задачи Гурса для канонического вида неоднородного уравнения колебаний струны в первой четверти плоскости;
- 2) анализ гладкости слагаемых ее решений и обоснование дважды непрерывной дифференцируемости пробных решений \tilde{F} или их корректировку до классических решений \tilde{F}_1 этого неоднородного уравнения канонического вида;
- 3) вычисление классических решений F_1 неоднородного уравнения колебаний струны в первой четверти плоскости путем обратной невырожденной замены переменных в решениях \tilde{F}_1 .

Нами фактически доказано важное новое утверждение: неоднородное уравнение (1) при $a_1 \neq a_2$ имеет в первой четверти плоскости явное классическое решение $F_1(x, t) = F(x, t) - F_0(x, t) \in C^2(G_\infty)$, где $F \in C^1(G_\infty)$ и $F_0 \in C^1(G_\infty)$ – пробное и корректирующее решения неоднородного и однородного

уравнений колебаний струны соответственно. Скорректированные классические решения неоднородного уравнения (1) указаны в теореме 1 для G_+ и теореме 3 для G_- , а минимальная (необходимая) гладкость на правую часть f – в теореме 2 для G_+ и теореме 3 для G_- . Существуют и другие классические решения этого неоднородного уравнения с минимальной гладкостью правой части f . Ясно, что они могут отличаться от последних зависящими от f частными решениями однородного уравнения (1).

В работе [11] без корректировки с помощью энергетического неравенства (априорной оценки) для второй смешанной задачи доказано утверждение: если u – некоторое классическое решение простейшего уравнения колебаний струны (уравнения (1) при $a_1 = a_2 = a > 0$ и $b_1 = b_2 = 0$) в G_∞ , то функция \hat{F} вида (7), где $a_1 = a_2 = a > 0$, $b_1 = b_2 = 0$ и, следовательно, $A = B = 0$, тоже его классическое решение в G_∞ .

В учебной и научной литературе [1; 8; 15–22] не встречаются классические решения (2), (3), (34) общего факторизованного одномерного волнового уравнения (1) при $a_1 \neq a_2$ в первой четверти плоскости.

Библиографические ссылки

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., 2004.
2. Ломовцев Ф. Е. Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : материалы Междунар. мат. конф. (Минск, 7–10 дек. 2015 г.) : в 2 ч. Минск, 2015. Ч. 2. С. 74–75.
3. Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н. Необходимые и достаточные условия колебаний ограниченной струны при косых производных в граничных условиях // Дифф. уравнения. 2014. Т. 50, № 1. С. 126–129.
4. Ломовцев Ф. Е. Решение без продолжения данных смешанной задачи для неоднородного уравнения колебаний струны при граничных косых производных // Дифф. уравнения. 2016. Т. 52, № 8. С. 1128–1132.
5. Моисеев Е. И., Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н. Неоднородное факторизованное гиперболическое уравнение второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной второй косой производной в граничном условии // Докл. Акад. наук. 2014. Т. 459, № 5. С. 544–549.
6. Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н. Классические решения неоднородного факторизованного гиперболического уравнения второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной второй косой производной в граничном условии // Вестн. Віцеб. дзярж. ун-та імя П. М. Машэрава. 2015. № 4 (88). С. 5–11.
7. Ломовцев Ф. Е. О разрывах первых и вторых частных производных решений общего одномерного факторизованного волнового уравнения в четверти плоскости // Вестн. Полоц. гос. ун-та. 2016. № 12. С. 117–124.
8. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М. : Наука, 2003.
9. Бриш Н. И., Юрчук Н. И. Задача Гурса для абстрактных линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифф. уравнения. 1971. Т. 7, № 6. С. 1020.
10. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., 1988.
11. Юрчук Н. И., Новиков Е. Н. Необходимые условия для существования классических решений колебаний полуограниченной струны // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2016. № 4. С. 116–120.
12. Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н. Метод Дюамеля решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с косой производной в нестационарном граничном условии // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2012. № 1. С. 83–86.
13. Ломовцев Ф. Е., Новик Ю. Ф. Начально-краевая задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны общего вида с первыми нехарактеристическими косыми производными в нестационарных граничных условиях // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2016. № 1. С. 129–135.
14. Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н. Решение смешанной задачи для факторизованного уравнения колебаний ограниченной струны при полунестационарных факторизованных вторых косых производных в граничных условиях // Вестн. Віцеб. дзярж. ун-та імя П. М. Машэрава. 2015. № 2/3 (86/87). С. 15–21.
15. Корзюк В. И. Уравнения математической физики. Минск, 2011.
16. Кожанов А. И. Задачи с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений // Докл. Акад. наук. 2014. Т. 457, № 2. С. 152–156.
17. Корзюк В. И., Козловская И. С., Наумовец С. Н. Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 7–21.
18. Корнев В. В., Хромов А. П. Резольвентный подход к методу Фурье в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения // Изв. Сарат. ун-та. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 403–413.
19. Корзюк В. И., Мандрик А. А. Граничные задачи для нестрого гиперболического уравнения третьего порядка // Дифф. уравнения. 2016. Т. 52, № 2. С. 209–219.
20. Корзюк В. И., Мандрик А. А. Первая смешанная задача для нестрого гиперболического уравнения третьего порядка в ограниченной области // Дифф. уравнения. 2016. Т. 52, № 6. С. 788–802.
21. Гаврилов В. С. Существование и единственность решений гиперболических уравнений дивергентного вида с разными краевыми условиями на разных частях границы // Дифф. уравнения. 2016. Т. 52, № 8. С. 1050–1061.
22. Корзюк В. И., Столярчук И. И. Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами // Дифф. уравнения. 2017. Т. 53, № 1. С. 77–88.

References

1. Tikhonov A. N., Samarskiy A. A. [The equations of mathematical physics]. Moscow, 2004 (in Russ.).
2. Lomautsau F. E. [The method of supporting mixed problems for a semi-infinite string]. *Shesty Bogdanovskie chteniya po obyknovennym differentsial'nyim uravneniyam* [The Sixth Bogdanov Readings on Ordinary Differential Equations] : mater. Int. math. conf. (Minsk, 7–10 Dec., 2015) : in 2 part. Minsk, 2015. Part 2. P. 74–75 (in Russ.).

3. Lomautsau F. E., Novikov E. N. [Necessary and sufficient conditions for vibrations of a bounded string under oblique derivatives in boundary conditions]. *Differentsial'nye uravn.* [Differ. Equ.]. 2014. Vol. 50, No. 1. P. 126–129 (in Russ.).
4. Lomautsau F. E. [Solution without continuation of the data of the mixed problem for the inhomogeneous oscillation equation of a string with boundary oblique derivatives]. *Differentsial'nye uravn.* [Differ. Equ.]. 2016. Vol. 52, No. 8. P. 1128–1132 (in Russ.).
5. Moiseev E. I., Lomautsau F. E., Novikov E. N. [Non-homogeneous factorized second-order hyperbolic equation in a quarter plane under a semi-nonstationary second oblique derivative in the boundary condition]. *Dokl. Akad. nauk.* 2014. Vol. 459, No. 5. P. 544–549 (in Russ.).
6. Lomautsau F. E., Novikov E. N. [Classic solutions of factorized inhomogeneous second order hyperbolic equation in a quadrant at floor unsteady second directional derivative in the boundary condition]. *Vestnik Vitsebskaga dzyarz. universiteta imya P. M. Mashe-rava.* 2015. No. 4 (88). P. 5–11 (in Russ.).
7. Lomautsau F. E. [Discontinuities of the first and second partial derivatives of the total solution for factorized one-dimensional wave equation in the quarter of the plane]. *Vestnik Polockogo gos. univ.* 2016. No. 12. P. 117–124 (in Russ.).
8. Vladimirov V. S. [The equations of mathematical physics]. Moscow : Nauka, 2003 (in Russ.).
9. Brish N. I., Yurchuk N. I. [The Goursat problem for abstract linear second-order differential equations]. *Differentsial'nye uravn.* [Differ. Equ.]. 1971. Vol. 7, No. 6. P. 1020 (in Russ.).
10. Sobolev S. L. [Application functional analysis in mathematical physics]. Moscow, 1988 (in Russ.).
11. Yurchuk N. I., Novikov E. N. [Necessary conditions for the existence of classical solutions of a semi-infinite string vibration]. *Vesti Nacyjanal'aj Akadjemii navuk Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk.* 2016. No. 4. P. 116–120 (in Russ.).
12. Lomautsau F. E., Novikov E. N. Duhamel's method for solving the inhomogeneous oscillation equation for a semibounded string with oblique derivative in an unsteady boundary condition. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2012. No. 1. P. 83–86 (in Russ.).
13. Lomautsau F. E., Novik Y. F. An initial boundary-value problem for the inhomogeneous oscillation equation for a bounded string of general form with the first non-characteristic oblique derivatives in non-stationary boundary conditions. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2016. No. 1. P. 129–135 (in Russ.).
14. Lomautsau F. E., Novikov E. N. [Resolution of the mixed problem for the factorized oscillation equation of a bounded string under semi-nonstationary factorized second oblique derivatives in the boundary conditions]. *Vestnik Vitsebskaga dzyarz. universiteta imya P. M. Masherava.* 2015. No. 2/3 (86/87). P. 15–21 (in Russ.).
15. Korzyuk V. I. [Equations of mathematical physics]. Minsk, 2011 (in Russ.).
16. Kozhanov A. I. [Problems with integral type conditions for certain classes of non-stationary equations]. *Dokl. Akad. nauk.* 2014. Vol. 457, No. 2. P. 152–156 (in Russ.).
17. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Naumovets S. N. [Classical solution of the first mixed problem of the one-dimensional wave equation with the Cauchy type conditions]. *Vesti Nacyjanal'aj Akadjemii navuk Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk.* 2015. No. 1. P. 7–21 (in Russ.).
18. Kornev V. V., Khromov A. P. [Resolvent approach to the Fourier method in the mixed problem for the inhomogeneous wave equation]. *Izv. Sarat. univ. Ser.: Mat. Meh. Inform.* 2016. Vol. 16, issue 4. P. 403–413 (in Russ.).
19. Korzyuk V. I., Mandrik A. A. [Boundary problem for non-strictly hyperbolic third-order equation]. *Differentsial'nye uravn.* [Differ. Equ.]. 2016. Vol. 52, No. 2. P. 209–219 (in Russ.).
20. Korzyuk V. I., Mandrik A. A. [First mixed problem for non-strictly hyperbolic third-order equation in the limited area]. *Differentsial'nye uravn.* [Differ. Equ.]. 2016. Vol. 52, No. 6. P. 788–802 (in Russ.).
21. Gavrilov V. S. [Existence and uniqueness of solutions of hyperbolic equations of divergence form with different boundary conditions on different parts of the border]. *Differentsial'nye uravn.* [Differ. Equ.]. 2016. Vol. 52, No. 8. P. 1050–1061 (in Russ.).
22. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. [Classical solution of the first mixed problem for a hyperbolic second-order equation in a curvilinear half-strip with variable coefficients]. *Differentsial'nye uravn.* [Differ. Equ.]. 2017. Vol. 53, No. 1. P. 77–88 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 13.06.2017.
Received by editorial board 13.06.2017.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

THEORY OF PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

УДК 519.4

ТОЧНЫЕ D -ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ С НЕРАВНОТОЧНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

В. П. КИРЛИЦА¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Исследована проблема построения точных D -оптимальных планов экспериментов для линейной множественной регрессии в случае, когда дисперсия ошибок наблюдений зависит от точки наблюдения. Выделен класс функций, описывающих изменение дисперсии неравноточных наблюдений, для которых точные D -оптимальные планы экспериментов совпадают с точными D -оптимальными планами для равноточных наблюдений. Построены насыщенные D -оптимальные планы экспериментов для линейной множественной регрессии с тремя факторами для неравноточных наблюдений. Показано, что таких насыщенных оптимальных планов можно строить бесконечное несчетное множество.

Ключевые слова: точные D -оптимальные планы экспериментов; линейная множественная регрессия; равноточные наблюдения; неравноточные наблюдения; насыщенные оптимальные планы.

Образец цитирования:

Кирлица В. П. Точные D -оптимальные планы экспериментов для линейной множественной регрессии с неравноточными наблюдениями // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 53–59.

For citation:

Kirlitsa V. P. Exact D -optimal designs of experiments for linear multiple regression with heteroscedastic observations. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 3. P. 53–59 (in Russ.).

Автор:

Валерий Петрович Кирлица – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики.

Author:

Valery P. Kirlitsa, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of mathematical analysis and data analysis, faculty of applied mathematics and computer science.
kirlitsa@bsu.by

EXACT D -OPTIMAL DESIGNS OF EXPERIMENTS FOR LINEAR MULTIPLE REGRESSION WITH HETEROSCEDASTIC OBSERVATIONS

V. P. KIRLITSA^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

In article the problem of construction of exact D -optimal designs of experiments for linear multiple regression in a case when variance of errors of observations depend on a point in which is made is investigated. The class functions describing change of variance of heteroscedastic observations is constructed for which exact D -optimal designs coincides with exact D -optimal designs for homoscedastic observations. The saturated D -optimal designs of experiments for linear multiple regression with three factors for heteroscedastic observations are constructed. It is demonstrated that is possible to construct infinite incalculable set of such saturated optimal designs.

Key words: exact D -optimal designs of experiments; linear multiple regression; homoscedastic; heteroscedastic observations; saturated optimal designs.

Рассмотрим линейную модель множественной регрессии

$$y_j = \theta_1 x_{j1} + \dots + \theta_m x_{jm} + \varepsilon(x^{(j)}), \quad j = \overline{1, n}, \quad n \geq m, \quad (1)$$

где y_j – наблюдаемые переменные; $x^{(j)} = (x_{j1}, \dots, x_{jm})$ – m -векторы контролируемых переменных, компоненты которых принадлежат единичному m -мерному кубу: $|x_i| \leq 1, i = \overline{1, m}$; $\theta_1, \dots, \theta_m$ – неизвестные параметры; $\varepsilon(x^{(j)})$ – некоррелированные случайные ошибки наблюдений с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями, зависящими от точки наблюдения $x^{(j)}$, удовлетворяющие неравенствам

$$D\{\varepsilon(x^{(j)})\} = d(x^{(j)}) \geq a_0 + a_1 x_{j1} + \dots + a_m x_{jm} > 0, \quad (2)$$

для каждой реализации $x^{(j)}, j = \overline{1, n}$. Функция $d(x^{(j)})$ в (2) должна быть такой, что в вершинах единичного m -мерного куба неравенство (2) обращается в равенство. Константы a_0, a_1, \dots, a_m в (2) такие, что $a_0 > 0, |a_1| + \dots + |a_m| < a_0$.

Класс функций $d(x)$, описываемых неравенством (2), довольно обширен. Этому классу принадлежат постоянные функции $d(x) = a_0, a_0 > 0$ (равноточные наблюдения); функции с линейным изменением – $d(x) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_m x_m$; вогнутые функции, удовлетворяющие (2).

Для равноточных наблюдений проблема построения точных D -оптимальных планов экспериментов довольно полно исследована [1]. Для линейной модели парной регрессии с неравноточными наблюдениями в [2] построены точные D -оптимальные планы экспериментов. В [3] исследовалась проблема построения таких планов при линейном изменении дисперсии наблюдений

$$D\{\varepsilon(x^{(j)})\} = a_0 + a_1 x_{j1} + \dots + a_m x_{jm}.$$

В настоящей работе результаты, полученные в [3], распространены на более широкий класс изменения дисперсии наблюдений.

Теорема 1. Существует точный D -оптимальный план ε^0 экспериментов для модели наблюдений (1), (2), все точки спектра этого плана ε^0 лежат в вершинах единичного m -мерного куба, $|x_i| \leq 1, i = \overline{1, m}$.

Доказательство. Пусть ε – произвольный, невырожденный план экспериментов. Покажем, что от плана ε можно перейти к плану ε_1 , у которого все контролируемые переменные $x_{ij} = \pm 1, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, и для которого $|M(\varepsilon)| \leq |M(\varepsilon_1)|$, т. е. определитель информационной матрицы $M(\varepsilon_1)$ больше

определителя информационной матрицы $M(\varepsilon)$ или равен ему. Информационная матрица плана экспериментов ε может быть представлена следующим образом:

$$M(\varepsilon) = \sum_{j=1}^n \frac{x^{(j)}(x^{(j)})'}{d(x^{(j)})} = \frac{x^{(1)}(x^{(1)})'}{d(x^{(1)})} + \sum_{j=2}^n \frac{x^{(j)}(x^{(j)})'}{d(x^{(j)})} = AA' + B,$$

где

$$A = \frac{x^{(1)}}{\sqrt{d(x^{(1)})}}; \quad B = \sum_{j=2}^n \frac{x^{(j)}(x^{(j)})'}{d(x^{(j)})}.$$

Тогда в силу известной формулы [4, с. 302]

$$|M(\varepsilon)| = |AA' + B| = |B| \left| 1 + \frac{(x^{(1)})' B^{-1} x^{(1)}}{d(x^{(1)})} \right| = |B| + \frac{(x^{(1)})' B_1 x^{(1)}}{d(x^{(1)})},$$

где B_1 – матрица, элементы которой являются алгебраическими дополнениями элементов матрицы B . Поскольку $d(x^{(1)}) \geq a_0 + a_1 x_{11} + \dots + a_m x_{1m}$, то верна оценка сверху для определителя информационной матрицы:

$$|M(\varepsilon)| = |B| + \frac{(x^{(1)})' B_1 x^{(1)}}{d(x^{(1)})} \leq |B| + \frac{(x^{(1)})' B_1 x^{(1)}}{a_0 + a_1 x_{11} + \dots + a_m x_{1m}}. \quad (3)$$

Покажем, что максимальное значение определителя информационной матрицы плана ε при выборе точки спектра $x^{(1)}$ в единичном m -мерном кубе достигается тогда, когда эта точка лежит в одной из вершин этого куба, т. е. когда все $x_{1j} = \pm 1, j = \overline{1, m}$. Для того чтобы убедиться в этом, покажем, что максимальное значение правой части неравенства (3) по $x_{1j} \in [-1, 1], j = \overline{1, m}$, также достигается, когда $x^{(1)}$ – одна из вершин единичного m -мерного куба. А поскольку $d(x^{(1)}) = a_0 + a_1 x_{11} + \dots + a_m x_{1m}$ в вершинах единичного m -мерного куба, то неравенство (3) в этих вершинах обращается в равенство.

Будем увеличивать значение правой части неравенства (3), последовательно варьируя значения x_{11}, \dots, x_{1m} в интервале $[-1, 1]$. Сначала определим верхнее значение правой части (3) при изменении $x_{11} = x$ от -1 до 1 . Поскольку $|B|$ не зависит от $x^{(1)}$, то для этого достаточно вычислить максимум по $x \in [-1, 1]$ функции

$$f_{11}(x) = \frac{(x^{(1)})' B_1 x^{(1)}}{a_0 + a_1 x + a_2 x_{12} + \dots + a_m x_{1m}} = \frac{\alpha_{11} x^2 + \beta_{11} x + \gamma_{11}}{a_1 x + c_1},$$

где $\alpha_{11} = \left| \sum_{j=2}^n \frac{z^{(j)}(z^{(j)})'}{d(x^{(j)})} \right| \geq 0, z^{(j)} = (x_{j2}, \dots, x_{jm})'$; $c_1 = a_0 + a_2 x_{12} + \dots + a_m x_{1m}$; β_{11}, γ_{11} – некоторые константы, не зависящие от x . Покажем, что максимум $f_{11}(x)$ достигается при $x = -1$ либо $x = 1$.

Если $\alpha_{11} = 0$, то

$$\frac{df_{11}(x)}{dx} = \frac{c_1 \beta_{11} - a_1 \gamma_{11}}{(a_1 x + c_1)^2}. \quad (4)$$

В случае когда числитель в (4) равен нулю, функция $f_{11}(x)$ остается постоянной на интервале $[-1, 1]$. Можно считать, что ее максимальное значение достигается при $x = \pm 1$. Если числитель в (4) отличен от нуля, то производная положительна либо отрицательна на всем интервале $[-1, 1]$. В этом случае максимум $f_{11}(x)$ будет достигаться при $x = -1$ либо $x = 1$.

Когда $\alpha_{11} \neq 0$, то это означает, что $\alpha_{11} > 0$. Производная функции $f_{11}(x)$ равна следующему выражению:

$$\frac{df_{11}(x)}{dx} = \frac{\alpha_{11}a_1x^2 + 2\alpha_{11}c_1x + c_1\beta_{11} - a_1\gamma_{11}}{(a_1x + c_1)^2}. \quad (5)$$

Пусть $D = 4\alpha_{11}(\alpha_{11}c_1^2 - a_1(c_1\beta_{11} - a_1\gamma_{11}))$ – дискриминант числителя в (5). Если $D \leq 0$, то производная в (5) не меняет своего знака на интервале $[-1, 1]$, т. е. $f_{11}(x)$ либо строго возрастает, либо убывает на $[-1, 1]$. Если $D > 0$, то функция $f_{11}(x)$ является выпуклой. Действительно,

$$\frac{d^2f_{11}(x)}{dx^2} = \frac{D}{2\alpha_{11}(a_1x + c_1)^2} > 0.$$

Итак, в любом случае функция $f_{11}(x)$ достигает своего максимального значения при $x_{11}^0 = -1$ либо $x_{11}^0 = 1$.

Далее, будем максимизировать правую часть неравенства (3) по $x_{12} = x$ при условии, что $x_{11} = x_{11}^0$. Аналогичным образом проведем процесс максимизации функции $f_{12}(x)$:

$$f_{12}(x) = \frac{\alpha_{12}x^2 + \beta_{12}x + \gamma_{12}}{a_2x + c_2},$$

где

$$\alpha_{12} = \left| \sum_{j=2}^n \frac{z^{(j)}(z^{(j)})}{d(x^{(j)})} \right| \geq 0, \quad z^{(j)} = (x_{j1}, x_{j3}, \dots, x_{jm})', \quad c_2 = a_0 + a_1x_{11}^0 + a_3x_{13} + \dots + a_mx_{1m}.$$

Рассуждая аналогично, получаем, что максимальное значение функции $f_{12}(x)$ достигается при $x_{12}^0 = -1$ либо $x_{12}^0 = 1$. Очевидно, что $f_{11}(x_{11}^0) \leq f_{12}(x_{12}^0)$. Продолжим вычислять максимум правой части (3) по x_{13} при условии, что $x_{11} = x_{11}^0$, $x_{12} = x_{12}^0$. На финальной стадии будем максимизировать правую часть (3) по x_{1m} при условии, что $x_{1j} = x_{1j}^0$, $j = \overline{1, m-1}$. В итоге получим цепочку неравенств: $f_{11}(x_{11}^0) \leq \dots \leq f_{1m}(x_{1m}^0)$. В функции $f_{1m}(x_{1m}^0)$ все значения $x_{1j}^0 = \pm 1$, $j = \overline{1, m}$, и эти значения определяют некоторую вершину $x_0^{(1)}$ единичного m -мерного куба. Следовательно, согласно (2) в этой вершине неравенство (3) обратится в равенство. Это означает, что определитель информационной матрицы плана экспериментов достигнет в этой вершине максимального значения $f_{1m}(x_{1m}^0)$ при вариации точки $x^{(1)}$ в m -мерном кубе.

Продолжим, как и ранее, максимизировать $|M(\epsilon)|$ по точке $x^{(2)}$ спектра плана ϵ при условии, что $x^{(1)} = x_0^{(1)}$. В результате получим, что максимум $|M(\epsilon)|$ будет достигаться в некоторой вершине $x_0^{(2)}$ единичного куба. При таком процессе максимизации определителя информационной матрицы плана экспериментов его значение увеличится, возможно, не в строгом смысле. Завершим этот процесс максимизацией определителя по точке спектра плана $x^{(n)}$ при условии, что вычисленные ранее точки $x_0^{(j)}$, $j = \overline{1, n-1}$, находятся в некоторых вершинах единичного куба. В итоге приходим к заключению, что максимальное значение определителя информационной матрицы плана экспериментов достигается в случае, когда все точки спектра плана находятся в вершинах единичного куба. Для построения точного D -оптимального плана экспериментов остается определить, в каких именно вершинах единичного куба надо провести n наблюдений. Процесс доказательства теоремы завершен.

Теорема 1 позволяет строить точные D -оптимальные планы экспериментов для модели наблюдений (1), (2). Например, рассмотрим модель наблюдений

$$y_j = \theta_0 + \theta_1 x_{1j} + \theta_2 x_{2j} + \varepsilon(x^{(j)}), \quad j = \overline{1, k}, \quad k \geq 3, \quad (6)$$

для которой дисперсии ошибок наблюдений определяются функцией $d(x_1, x_2)$, удовлетворяющей неравенству

$$d(x_1, x_2) \geq 10 - x_1 + 4x_2, \quad (7)$$

которое обращается в равенство в вершинах единичного квадрата: $|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1$.

Неравенство (7) определяет некоторый класс функций $d(x_1, x_2)$. В данном случае такими функциями могут быть:

$$d_1(x_1, x_2) = 10 - x_1 + 4x_2, \quad d_2(x_1, x_2) = -(x_1 + 0,5)^2 - (x_2 - 2)^2 + 16,25,$$

$$d_3(x_1, x_2) = -2\left(x_1 + \frac{1}{4}\right)^2 - 3\left(x_2 - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{395}{24}$$

и ряд других. Функция $d_2(x_1, x_2)$ – круговой параболоид с вершиной в точке $x_1 = -0,5, x_2 = 2$, функция $d_3(x_1, x_2)$ – эллиптический параболоид с вершиной в точке $x_1 = \frac{-1}{4}, x_2 = \frac{2}{3}$. Эти параболоиды лежат выше плоскости $d_1(x_1, x_2) = 10 - x_1 + 4x_2$ на единичном квадрате, за исключением вершин этого квадрата.

Для модели (6) с тремя равноточными наблюдениями ($k = 3$) можно построить четыре точных D -оптимальных плана экспериментов [5; 6]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \begin{Bmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} & x^{(3)} \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{Bmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} & x^{(4)} \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix}, \\ \varepsilon_3 &= \begin{Bmatrix} x^{(1)} & x^{(3)} & x^{(4)} \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_4 = \begin{Bmatrix} x^{(2)} & x^{(3)} & x^{(4)} \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $x^{(1)} = (1, 1); x^{(2)} = (-1, 1); x^{(3)} = (-1, -1); x^{(4)} = (1, -1)$ – вершины единичного квадрата. Планы (8) – это так называемые насыщенные оптимальные планы экспериментов, у которых число наблюдений совпадает с числом неизвестных параметров. Определители информационных матриц этих планов равны 16 при условии, что дисперсия каждого наблюдения равна 1.

Для модели наблюдений (6) с тремя неравноточными наблюдениями (7) точки спектра насыщенного D -оптимального плана в силу теоремы 1 должны располагаться в вершинах единичного квадрата. Всего имеется 20 различных способов провести три наблюдения в четырех вершинах квадрата. Вычисления показывают, что для неравноточных наблюдений (7) четыре наиболее высоких значения определителя информационной матрицы планов экспериментов достигаются для планов (8). Эти значения следующие:

$$|M(\varepsilon_1)| = 0,011722, \quad |M(\varepsilon_2)| = 0,01641, \quad |M(\varepsilon_3)| = 0,035165, \quad |M(\varepsilon_4)| = 0,030476.$$

Наибольшее значение определителя информационной матрицы соответствует плану ε_3 . Это и есть D -оптимальный насыщенный план экспериментов для модели наблюдений (6), (7). Важно отметить, что план ε_3 находится среди планов (8) для равноточных наблюдений.

Проведем аналогичные расчеты для модели (6) с четырьмя наблюдениями ($k = 4$). Для модели равноточных наблюдений точный D -оптимальный план экспериментов единствен [1]:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} & x^{(3)} & x^{(4)} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

определитель информационной матрицы этого плана равен 64 при условии, что дисперсии всех наблюдений равны 1. Для неравноточных наблюдений (7) при $k = 4$ в силу теоремы 1 четыре наблюдения

нужно провести в вершинах единичного квадрата. Всего есть 35 способов проведения этих наблюдений. Вычисления показывают, что из этих способов только для плана (9) определитель информационной матрицы достигает максимального значения, равного 0,093 773. Таким образом, план (9) – D -оптимальный план для неравноточных наблюдений вида (7).

Для модели наблюдений (6) с пятью равноточными наблюдениями D -оптимальные планы экспериментов, согласно [1], имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \begin{Bmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} & x^{(3)} & x^{(4)} \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{Bmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} & x^{(3)} & x^{(4)} \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{Bmatrix}, \\ \varepsilon_3 = \begin{Bmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} & x^{(3)} & x^{(4)} \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_4 = \begin{Bmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} & x^{(3)} & x^{(4)} \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Определители информационных матриц планов (10) равны 0,896 для случая, когда дисперсии всех наблюдений равны 5. Для неравноточных наблюдений (7) при $k = 5$, согласно теореме 1, пять наблюдений нужно провести в четырех вершинах единичного квадрата для построения D -оптимального плана экспериментов. Всего имеется 56 таких реализаций. Вычисления показывают, что четыре наибольших определителя информационных матриц из этих случаев достигаются на четырех планах (10). Эти значения таковы:

$$|M(\varepsilon_1)| = 0,157\ 07, \quad |M(\varepsilon_2)| = 0,152\ 381, \quad |M(\varepsilon_3)| = 0,171\ 136, \quad |M(\varepsilon_4)| = 0,175\ 824.$$

Отсюда заключаем, что план ε_4 – D -оптимальный для неравноточных наблюдений. Опять замечаем, что D -оптимальный план ε_3 находится среди оптимальных планов для равноточных наблюдений.

Процесс построения оптимальных планов для неравноточных наблюдений для трех – пяти наблюдений приводит к следующей гипотезе: оптимальные планы для неравноточных наблюдений вида (2) – это некоторое подмножество оптимальных планов для равноточных наблюдений. Пока это только гипотеза. Если она подтвердится, то это значительно упростит процесс построения D -оптимальных планов для неравноточных наблюдений вида (2).

Следствием из теоремы 1 является следующая теорема.

Теорема 2. Для модели наблюдений (1) с некоррелированными ошибками наблюдений, имеющими средние значения 0 и дисперсии

$$D\{\varepsilon(x^{(j)})\} = d(x^{(j)}) \geq a_0, \quad a_0 > 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (11)$$

для функций $d(x)$ таких, что неравенство (11) обращается в равенство в вершинах единичного m -мерного куба: $|x_i| \leq 1, i = \overline{1, m}$, точные D -оптимальные планы ε^0 остаются такими же, как и для равноточных наблюдений.

Доказательство. В силу теоремы 1 точки спектра D -оптимального плана ε^0 лежат в вершинах единичного m -мерного куба и в этих вершинах дисперсии наблюдений одинаковы и равны a_0 . Таким образом, условия построения D -оптимальных планов для неравноточных наблюдений (11) совпадают с условиями построения таких же планов с равноточными наблюдениями. Это завершает доказательство теоремы.

Например, для модели наблюдений (1) с четырьмя факторами и функцией $d(x_1, \dots, x_4) = 20 - 2|x_1| - |x_2| - 4|x_3| - 6|x_4|$, определяющей изменение дисперсии наблюдений, точные D -оптимальные планы совпадают с оптимальными планами для равноточных наблюдений с дисперсиями $a_0 = 7$ [1].

Используя теорему 2, построим насыщенные D -оптимальные планы экспериментов для модели наблюдений (6) с неравноточными наблюдениями на единичном квадрате. План экспериментов называется насыщенным, если в своем спектре он содержит число точек, равное числу неизвестных параметров. Покажем, что таких планов можно построить бесконечное, несчетное множество.

В [6] был предложен алгоритм построения насыщенных D -оптимальных планов для линейной множественной регрессии с тремя факторами для равноточных наблюдений. Согласно [6] можно построить 24 таких плана. В [5] удалось обобщить процесс построения подобных планов для равноточных наблюдений. В частности, в [5] было показано, что можно строить бесконечное, несчетное множество D -оптимальных планов для модели (1) с тремя факторами и равными дисперсиями наблюдений. Оказывается, что для модели неравноточных наблюдений (1), (2) существует, при определенном подборе

функции $d(x_1, \dots, x_m)$, бесконечное несчетное множество D -оптимальных планов. Проиллюстрируем это на примере модели наблюдений (6) с функцией $d(x_1, x_2)$, описывающей изменение дисперсии наблюдений на единичном квадрате:

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= 2 - x_1, \quad 0 \leq x_1 \leq 1, |x_2| \leq x_1; \quad d(x_1, x_2) = 2 - x_2, \quad 0 \leq x_2 \leq 1, |x_1| \leq x_2, \\ d(x_1, x_2) &= 2 + x_1, \quad -1 \leq x_1 \leq 0, |x_2| \leq |x_1|; \quad d(x_1, x_2) = 2 + x_2, \quad -1 \leq x_2 \leq 0, |x_1| \leq |x_2|. \end{aligned} \quad (12)$$

Функция (12) описывает боковую поверхность правильной прямоугольной пирамиды с высотой, равной 1, основание которой квадрат: $x_3 = 1, |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1$. Ясно, что на единичном квадрате $|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1$ функция $d(x_1, x_2) \geq a_0 = 1$. Следовательно, в силу теоремы 2 насыщенные D -оптимальные планы для модели наблюдений (6) с дисперсиями наблюдений (12) совпадают с насыщенными планами для равноточных наблюдений, которые согласно [5] имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \left\{ \begin{matrix} x^{(1)}, & x^{(2)}, & \lambda x^{(3)} + (1-\lambda)x^{(4)} \\ 1, & 1, & 1 \end{matrix} \right\}, \quad \varepsilon_2 = \left\{ \begin{matrix} x^{(2)}, & x^{(3)}, & \lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(4)} \\ 1, & 1, & 1 \end{matrix} \right\}, \\ \varepsilon_3 &= \left\{ \begin{matrix} x^{(3)}, & x^{(4)}, & \lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} \\ 1, & 1, & 1 \end{matrix} \right\}, \quad \varepsilon_4 = \left\{ \begin{matrix} x^{(1)}, & x^{(4)}, & \lambda x^{(2)} + (1-\lambda)x^{(3)} \\ 1, & 1, & 1 \end{matrix} \right\}, \quad \lambda \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (13)$$

Планы (13) образуют бесконечное, несчетное множество.

Теорему 1, очевидно, можно обобщить на случай, когда функция, определяющая поведение дисперсии наблюдений, изменяется от одного наблюдения к другому, т. е. зависит от номера, или порядка, наблюдений:

$$D\{\varepsilon(x^{(j)})\} = d(x^{(j)}) \geq a_{0,j} + a_{1j}x_{1j} + \dots + a_{mj}x_{mj} > 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Например, для модели с четырьмя наблюдениями (6) и функциями

$$d_j(x_1, x_2) = 10 - x_1 + 4x_2, \quad j = 1, 2, 3, \quad d_4(x_1, x_2) = 10 - x_1 + 8x_2$$

D -оптимальный план, как показывают вычисления, имеет следующую структуру. Первые три наблюдения должны проводиться в точках $x^{(1)} = (1, 1), x^{(2)} = (-1, 1), x^{(3)} = (-1, 1)$ в произвольном порядке, однако четвертое наблюдение надо провести в точке $x^{(4)} = (1, -1)$. Определитель информационной матрицы такого плана равен 0,421 978.

Библиографические ссылки

1. Moysiadias C., Kounias S. Exact D -optimal observations 2^k designs of resolution 3, when $N \equiv 1$ or $2 \pmod{4}$ // *Math. Operationsforsch. U. Statist. Ser.: Statist.* 1968. Vol. 14, № 3. P. 367–379.
2. Курлиця В. П. Точные D -оптимальные планы экспериментов для линейной модели парной регрессии // *Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика.* 2016. № 2. С. 116–122.
3. Kirlitsa V. P. Exact D -optimal designs of experiments for linear multiple model with linear variance of observations // *Comput. data anal. model. Robust. comput. intensive methods.* Minsk, 2004. Vol. 1. P. 165–167.
4. Ермаков С. М., Жиглявский А. А. Математическая теория оптимального эксперимента. М., 1987.
5. Курлиця В. П. О структуре насыщенных D -оптимальных планов экспериментов // *Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика.* 2013. № 3. С. 86–90.
6. Williamson J. Determinants whose elements are 0 and 1 // *Am. Math. Monthly.* 1946. Vol. 53. P. 427–434.

References

1. Moysiadias C., Kounias S. Exact D -optimal observations 2^k designs of resolution 3, when $N \equiv 1$ or $2 \pmod{4}$. *Math. Operationsforsch. U. Statist. Ser.: Statist.* 1968. Vol. 14, No. 3. P. 367–379.
2. Kirlitsa V. P. Exact D -optimal designs of experiments for linear pair regression. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2016. No. 2. P. 116–122 (in Russ.).
3. Kirlitsa V. P. Exact D -optimal designs of experiments for linear multiple model with linear variance of observations. *Comput. data anal. model. Robust. comput. intensive methods.* Minsk, 2004. Vol. 1. P. 165–167.
4. Ermakov S. M., Zhiglavski A. A. [The mathematical theory of optimal design]. Moscow, 1987 (in Russ.).
5. Kirlitsa V. P. [About structure of D -optimal saturated designs of experiment]. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2013. No. 3. P. 86–90 (in Russ.).
6. Williamson J. Determinants whose elements are 0 and 1. *Am. Math. Monthly.* 1946. Vol. 53. P. 427–434.

Статья поступила в редколлегию 03.05.2017.
Received by editorial board 03.05.2017.

УДК 517.9

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ АССОЦИИРОВАННЫХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С МЕРАМИ

А. Ю. РУСЕЦКИЙ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассмотрена задача Коши для стохастической дифференциальной системы уравнений с мерами. Исследована конечно-разностная с осреднением система стохастических дифференциальных уравнений с мерами, соответствующая исходной задаче Коши. Изучены стохастические интегральные системы уравнений, к решениям которых сходятся решения конечно-разностных с осреднением систем стохастических дифференциальных уравнений с мерами; описано пространство решений данной интегральной системы уравнений. Введено понятие ассоциированных решений задачи Коши стохастической дифференциальной системы уравнений с мерами. Доказана теорема существования и единственности ассоциированных решений. Кроме того, рассмотрена задача Коши для линейного стохастического дифференциального уравнения высших порядков, а также исследованы ассоциированные решения задачи Коши для линейного стохастического дифференциального уравнения высших порядков. Доказана теорема о представлении ассоциированных решений линейного стохастического дифференциального уравнения высших порядков через ассоциированные фундаментальные матрицы соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные системы с мерами; конечно-разностные с осреднением стохастические дифференциальные системы уравнений; теорема существования и единственности решения; ассоциированные решения; линейные стохастические дифференциальные уравнения высших порядков.

EXISTENCE AND UNIQUENESS THEOREM OF ASSOCIATED SOLUTIONS OF THE STOCHASTIC DIFFERENTIAL SYSTEM WITH MEASURES

A. Y. RUSSETSKI^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

The Cauchy problem for stochastic differential system with measures is considered in the paper. Finite-difference with averaging system of stochastic differential equations with correspondence to Cauchy problem is investigated. Stochastic integral equation system with the solution as a limit of the finite-difference with averaging system of stochastic differential equations is studied and also the space of the solutions is described. Moreover, the Cauchy problem associated solutions of the stochastic differential system with measures are defined. Existence and uniqueness theorem of the associated solutions is proved. Besides that, Cauchy problem for higher-order linear stochastic differential equation is considered. Associated solutions of the Cauchy problem are investigated. Also the theorem of the representation of the associated solutions of the higher-order linear stochastic differential equation with help of associated fundamental matrices of the correspondent homogeneous equation system is proved.

Key words: stochastic differential systems with measures; finite-difference with averaging stochastic differential systems; existence and uniqueness theorem; associated solutions; higher-order linear stochastic differential equations.

Образец цитирования:

Русецкий А. Ю. Теорема существования и единственности ассоциированных решений стохастической дифференциальной системы уравнений с мерами // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 60–72.

For citation:

Rusetski A. Y. Existence and uniqueness theorem of associated solutions of the stochastic differential system with measures. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 3. P. 60–72 (in Russ.).

Автор:

Артем Юрьевич Русецкий – аспирант кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Н. В. Лазакович.

Author:

Artsiom Y. Rusetski, postgraduate student at the department of functional analysis and analytical economics, faculty of mechanics and mathematics.
artyom.ruseckiy@gmail.com

Рассмотрим задачу Коши для системы стохастических дифференциальных уравнений с мерами:

$$\begin{cases} X'(t, \omega) = L'(t)F(t, X(t, \omega)) + G(t)W'(t, \omega), \\ X(0, \omega) = X_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $t \in T = [0, b]$, $\omega \in \Omega$,

$$X(t, \omega) = (X_i(t, \omega))^T, \quad X_0 = (X_0^i)^T \in \mathbb{R}^p, \quad i = \overline{1, p};$$

$$L'(t) = (l'_{ij}(t)), \quad F(x, y) = (f_j(x, y))^T \in \mathbb{R}^q, \quad i = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, q},$$

где $l'_{ij} : T \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$, – непрерывные справа функции ограниченной вариации; $f_j : T \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $j = \overline{1, q}$, – липшицевы функции по второй переменной;

$$G(t) = (g_{ij}(t)), \quad W'(t, \omega) = (w'_j(t, \omega))^T \in \mathbb{R}^q, \quad i = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, q},$$

где $g_{ij}(t) \in L_2(T)$, $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$; $w_j(t, \omega)$, $j = \overline{1, q}$, – винеровские процессы.

Производные функций понимаются в обобщенном смысле.

Данная задача является некорректной в рамках классической теории дифференциальных уравнений, поскольку в уравнениях могут присутствовать произведения обобщенных функций.

Стохастические дифференциальные уравнения вида (1) могут быть использованы в качестве моделей в различных областях физики и техники. Например, в механике, если рассмотреть уравнение движения маятника под действием силы тяжести и силы молекулярного воздействия окружающего его газа [1]. Уравнения такого вида могут применяться также в качестве моделей пространственного движения летательного аппарата с учетом управляющего и возмущающего воздействий [2].

Кроме того, системы дифференциальных уравнений вида (1) находят широкое применение в качестве моделей, описывающих динамику финансовых данных [3].

Будем трактовать систему (1) в смысле конечно-разностной с осреднением. Обоснование данной трактовки связано с работами Гаусса об ошибках измерений [4]. В данном подходе находит отражение тот факт, что реально нельзя измерить значение физической величины в точке, а можно измерять лишь ее средние значения в достаточно малых окрестностях этой точки и объявить предел последовательности этих средних значений значением рассматриваемой физической величины в данной точке [5, с. 15]. Таким образом, задача Коши примет следующий вид:

$$\begin{cases} X_n(t + h_n, \omega) - X_n(t, \omega) = (L_n(t + h_n) - L_n(t))F_n(t, X_n(t, \omega)) + \\ + G_n(t)(W_n(t + h_n, \omega) - W_n(t, \omega)), \\ X_n(t, \omega)|_{[0, h_n]} = X_n^0(t, \omega), \end{cases} \quad (2)$$

где

$$X_n(t, \omega) = (X_n^i(t, \omega))^T, \quad X_n^0(t, \omega) = (X_n^0(t, \omega))^T, \quad i = \overline{1, p};$$

$$L_n(t) = (l_n^{ij}(t)), \quad F_n(x, y) = (f_n^j(x, y))^T, \quad i = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, q},$$

где $l_n^{ij}(t) = (l_{ij} * \rho_n^{ij})(t)$, $\rho_n^{ij}(t) = \gamma_{ij}(n)\rho(\gamma_{ij}(n)t)$, где $\gamma_{ij}(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$;

$$\rho \geq 0, \quad \rho \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \text{supp}(\rho) \subseteq [0, 1], \quad \int_0^1 \rho(s) ds = 1;$$

$$G_n(t) = (g_n^{ij}(t)), \quad W_n(t, \omega) = (w_n^j(t, \omega))^T, \quad i = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, q}.$$

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка T . Тогда t можно представить в виде $t = \tau_t + m_t h_n$, где $\tau_t \in [0, h_n]$; $m_t \in \mathbb{N}$. Обозначим $t_k = \tau_t + k h_n$, $k = 1, \dots, m_t - 1$.

Решение системы (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 X_n(t, \omega) = & X_n(\tau_t, \omega) + \sum_{k=0}^{m_t-1} (L_n(t_{k+1}) - L_n(t_k)) F_n(t_k, X_n(t_k, \omega)) + \\
 & + \sum_{k=0}^{m_t-1} G_n(t_k) (W_n(t_{k+1}, \omega) - W_n(t_k, \omega)).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
 X(t, \omega) = & X_0 + \int_0^t dL^c(s) F(s, X(s, \omega)) + \sum_{\mu_l \leq t} \Psi(\mu_l, X(\mu_l-, \omega), \Delta L(\mu_l)) + \\
 & + \int_0^t G(s) dW(s, \omega), \quad t \in T, \quad \omega \in \Omega,
 \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}
 X(t, \omega) = & (X_i(t, \omega))^T, \quad X_0 = (X_0^i)^T \in \mathbb{R}^p, \quad i = \overline{1, p}; \\
 L(t) = & (l_{ij}(t)), \quad F(x, y) = (f_j(x, y))^T \in \mathbb{R}^q, \quad i = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, q},
 \end{aligned}$$

где $l_{ij} : T \rightarrow \mathbb{R}, i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}$, – непрерывные справа функции ограниченной вариации; $f_j : T \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, j = \overline{1, q}$.

$$\Psi(x, y, z) = (\Psi_i(x, y, z))^T, \quad i = \overline{1, p},$$

где $\Psi_i : T \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{p \times q} \rightarrow \mathbb{R}$;

$$G(t) = (g_{ij}(t)), \quad W(t, \omega) = (w_j(t, \omega))^T \in \mathbb{R}^q, \quad i = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, q},$$

где $g_{ij}(t) \in L_2(T), i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}$; $w_j(t, \omega), j = \overline{1, q}$, – винеровские процессы; $L^c(t)$ – непрерывная часть функции $L(t)$, а $\Delta L(\mu_l) = L(\mu_l) - L(\mu_l-)$, где $\mu_l, l \in \mathbb{N}$, – точки разрыва $L(t)$.

Пространство непрерывных справа, имеющих предел слева случайных процессов

Пусть (Ω, \mathcal{A}, P) – полное вероятностное пространство.

Рассмотрим гильбертово пространство \mathbb{H} случайных величин ξ , $E\|\xi\| < \infty$, где $\|\cdot\|$ – произвольная норма в \mathbb{R}^n , со скалярным произведением $(\xi_1, \xi_2) = E\xi_1 \overline{\xi_2}$ и среднеквадратичной нормой $\|\xi\|_{\mathbb{H}} = (E\|\xi\|^2)^{\frac{1}{2}}$, которое является полным, а именно всякая фундаментальная последовательность величин сходится.

В данном пространстве \mathbb{H} две случайные величины являются тождественными, если они равны с вероятностью 1.

Случайный процесс описывается функцией $\xi(t), t \in T$, действительного переменного t (времени), пробегающего некоторое множество $T \subseteq \mathbb{R}$ на действительной прямой, а значения этой функции – случайные величины $\xi(t)$, описывающие состояние процесса в соответствующий момент времени t . При условии, что $E\|\xi\| < \infty$, можно рассматривать $\xi(t), t \in T$, как функцию в гильбертовом пространстве \mathbb{H} , т. е. функцию со значениями $\xi(t) \in \mathbb{H}$.

Случайный процесс $\xi(t), t \in T$, непрерывен в среднеквадратичном в точке s , когда

$$\lim_{t \rightarrow s} \|\xi(t) - \xi(s)\|_{\mathbb{H}} = 0.$$

Рассмотрим функции в гильбертовом пространстве \mathbb{H} , заданные на отрезке $T = [0, b]$, которые непрерывны справа в среднеквадратичном и имеют предел слева. Зададим норму на пространстве случайных процессов \mathbb{X} .

$$\|X(t, \omega)\| = \sup_T \left(E \|X(t, \omega)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Символом $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$ будем обозначать норму в пространстве \mathbb{X} , т. е. $\sup_T \left(E \|\cdot\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Покажем, что данное нормированное пространство случайных процессов \mathbb{X} является полным.

Утверждение. Пространство \mathbb{X} непрерывных справа в среднеквадратичном и имеющих предел слева случайных процессов с нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$ является полным.

Доказательство. Пусть $x_n(t, \omega)$ – последовательность Коши в пространстве \mathbb{X} . Это эквивалентно тому, что $\forall \varepsilon > 0$ существует $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n, m \geq n(\varepsilon)$, выполняется

$$\sup_T \left(E \|x_n(t, \omega) - x_m(t, \omega)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon. \quad (5)$$

Зафиксируем точку $t \in T$. Для $n, m \geq n(\varepsilon)$, имеем $\left(E \|x_n(t, \omega) - x_m(t, \omega)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, т. е. последовательность случайных величин $x_n(t)$ является последовательностью Коши и в силу полноты пространства \mathbb{H} сходится. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t, \omega) = x_0(t, \omega)$. Таким образом, последовательность $x_n(t, \omega)$ точно сходится к $x_0(t, \omega)$.

В неравенстве (5) перейдем к пределу при $m \rightarrow \infty$. Получаем, что для $n \geq n(\varepsilon)$ выполняется $\sup_T \left(E \|x_n(t, \omega) - x_0(t, \omega)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$, т. е. последовательность x_n сходится в смысле нормы $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$. Существование предела слева следует из поточечной сходимости x_n . Покажем, что x_0 есть непрерывный справа случайный процесс. Пусть $t_0 \in T$. По $\varepsilon > 0$ выберем n_1 так, что выполнено $\sup_T \left(E \|x_{n_1}(t, \omega) - x_0(t, \omega)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{3}$, также выберем $\delta > 0$ так, что из $|t - t_0| \leq \delta$ и $t < t_0$ следует $\left(E \|x_{n_1}(t, \omega) - x_{n_1}(t_0, \omega)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда для t таких, что $|t - t_0| \leq \delta$ и $t < t_0$, выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \left(E \|x_0(t, \omega) - x_0(t_0, \omega)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(E \|x_0(t, \omega) - x_{n_1}(t, \omega)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \left(E \|x_{n_1}(t, \omega) - x_{n_1}(t_0, \omega)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(E \|x_{n_1}(t_0, \omega) - x_0(t_0, \omega)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

из которого следует среднеквадратичная непрерывность справа случайного процесса x_0 в точке t_0 .

Теорема существования и единственности решения стохастической интегральной системы уравнений

Теорема 1. Пусть функции $F(t, x)$ и $\Psi(t, x, u)$ – борелевские по (t, x) и для любых $x, y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $t \in T$ эти функции удовлетворяют условиям Липшица и линейного роста:

$$\|F(t, x) - F(t, y)\| \leq h_1(t) \|x - y\|,$$

$$\|F(t, x)\| \leq h_2(t)(1 + \|x\|),$$

$$\sup_T \|F(t, 0)\| < \infty,$$

$$\|\Psi(t, x, u) - \Psi(t, y, u)\| \leq h_3(t) \|x - y\|,$$

$$\|\Psi(t, x, u)\| \leq h_2(t)\|u\|(1 + \|x\|),$$

где для $i = \overline{1, 4}$

$$\int_0^b h_i^2(s) dVarL(s) < \infty.$$

Тогда \forall начального условия $X(t_0-, \omega) = X_0$, для почти всех $\omega \in \Omega$ решение уравнения (4) существует и единственно в пространстве непрерывных справа и имеющих предел слева случайных процессов с нормой

$$\|X(t, \omega)\|_{\mathbb{X}} = \sup_T \left(E \|X(t, \omega)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\Phi(X(t, \omega)) = X_0 + \int_0^t F(s, X(s, \omega)) dL^c(s) + \sum_{\mu_l \leq t} \Psi(\mu_l, X(\mu_l-, \omega), \Delta L(\mu_l)) + \int_0^t G(s) dW(s, \omega),$$

действующее на определенном нами пространстве случайных процессов \mathbb{X} . Покажем, что образ отображения $\Phi(\cdot)$ лежит в \mathbb{X} . Для этого докажем, что $\forall X(t, \omega) \in \mathbb{X}$, $\Phi(X(t, \omega)) \in \mathbb{X}$.

Очевидно, что образ отображения – непрерывная справа, имеющая предел слева функция, так как интегралы и сумма являются такими функциями.

Покажем, что $\|\Phi(X(t, \omega))\|_{\mathbb{X}} < \infty$, $\forall X(t, \omega) \in \mathbb{X}$.

$$\begin{aligned} & \|\Phi(X(t, \omega))\|_{\mathbb{X}} = \\ & = \sup_T \left(E \left\| X_0 + \int_0^t dL^c(s) F(s, X(s, \omega)) + \sum_{\mu_l \leq t} \Psi(\mu_l, X(\mu_l-, \omega), \Delta L(\mu_l)) + \int_0^t G(s) dW(s, \omega) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \sup_T \left(E \|X_0\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sup_T \left(E \left\| \int_0^t dL^c(s) f(s, X(s, \omega)) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + \sup_T \left(E \left\| \sum_{\mu_l \leq t} \Psi(\mu_l, X(\mu_l-, \omega), \Delta L(\mu_l)) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sup_T \left(E \left\| \int_0^t g(s) dB(s, \omega) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

$$1. \sup_{[0, T]} \left(E \|X_0\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|X_0\| < \infty.$$

$$2. \sup_T \left(E \left\| \int_0^t dL^c(s) F(s, X(s, \omega)) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sup_T \left(E \left| \int_0^t \|F(s, X(s, \omega))\| dVarL^c(s) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sup_T \left(E \int_0^t h_2(s) (1 + \|X(s, \omega)\|) dVarL^c(s) \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

(неравенство Гёльдера: $\forall x(\omega) \in \mathbb{H}$ и $y(\omega) \in \mathbb{H}$ справедливо неравенство

$$\left| \int_T x(s) y(s) d\mu(s) \right| \leq \left(\int_T x^2(s) d\mu(s) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_T y^2(s) d\mu(s) \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ где } \mu(s) \text{ – конечная мера на } T; x(t) \text{ и } y(t) \text{ – произвольные, квадратично интегрируемые функции по мере } \mu \leq$$

$$\leq \sup_T \left(E \int_0^t h_2^2(s) dVarL^c(s) \int_0^t (1 + \|X(s, \omega)\|)^2 dVarL^c(s) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \text{(теорема Фубини)} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\int_0^b h_2^2(s) dVarL^c(s) \right)^{\frac{1}{2}} \sup_T \left(\int_0^t E(1 + \|X(s, \omega)\|)^2 dVarL^c(s) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(\int_0^b h_2^2(s) dVarL^c(s) VarL^c(b) \right)^{\frac{1}{2}} \sup_T \left(E(1 + \|X(s, \omega)\|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \sup_T \left(E \left\| \sum_{\mu_l \leq t} \Psi(\mu_l, X(\mu_l-, \omega), \Delta L(\mu_l)) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \sup_T \left(E \left\| \sum_{\mu_l \leq t} \Psi(\mu_l, X(\mu_l-, \omega), \Delta L(\mu_l)) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sup_T \left(E \left\| \int_0^t h_4(s) (1 + \|X(s-, \omega)\|) dVarL(s) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \end{aligned}$$

$$4. \sup_T \left(E \left\| \int_0^t g(s) dB(s, \omega) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sup_T \int_0^t \|g(s)\|^2 ds < (\text{так как } (g_{ij}(t) \in L_2(T), i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q})) < \infty.$$

Из этого следует, что $\Phi(\cdot) : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$.

Покажем, что некоторая степень отображения $\Phi(\cdot)$ является сжимающей.

Пусть $X_1, X_2 \in \mathbb{X}$, тогда

$$\begin{aligned} \Phi^n(X_1) &= X_0 + \int_0^t dL^c(s_1) F(s, \Phi^{n-1}(X_1(s_1, \omega))) + \\ &+ \sum_{s_1 \leq t} \Psi(s_1, \Phi^{n-1}(X_1(s_1-, \omega)), \Delta L(s_1)) + \int_0^t G(s_1) dW(s_1, \omega). \\ \rho(\Phi^n(X_1), \Phi^n(X_2)) &= \sup_T \left(E \left\| \Phi^n(X_1) - \Phi^n(X_2) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sup_T \left(E \left\| \int_0^t dL^c(s_1) (F(s, \Phi^{n-1}(X_1(s_1, \omega))) - F(s, \Phi^{n-1}(X_2(s_1, \omega)))) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \sum_{s_1 \leq t} \left(\Psi(s_1, \Phi^{n-1}(X_1(s_1-, \omega)), \Delta L(s_1)) - \Psi(s_1, \Phi^{n-1}(X_2(s_1-, \omega)), \Delta L(s_1)) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sup_T \left(E \left\| \int_0^t F(s, \Phi^{n-1}(X_1(s_1, \omega))) - F(s, \Phi^{n-1}(X_2(s_1, \omega))) dVarL^c(s_1) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \sum_{s_1 \leq t} \left(\Psi(s_1, \Phi^{n-1}(X_1(s_1-, \omega)), \Delta L(s_1)) - \Psi(s_1, \Phi^{n-1}(X_2(s_1-, \omega)), \Delta L(s_1)) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sup_T \left(E \left\| \int_0^t h_1(s_1) \left\| \Phi^{n-1}(X_1(s_1, \omega)) - \Phi^{n-1}(X_2(s_1, \omega)) \right\| dVarL^c(s_1) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \sum_{s_1 \leq t} \left(h_3(s_1) \left\| \Delta L(s_1) \right\| \left\| \Phi^{n-1}(X_1(s_1-, \omega)) - \Phi^{n-1}(X_2(s_1-, \omega)) \right\| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \sup_T \left(E \left| \int_0^t \left\| \Phi^{n-1}(X_1(s_1, \omega)) - \Phi^{n-1}(X_2(s_1, \omega)) \right\| dM(s_1) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $M(t)$ – финитная неубывающая функция ограниченной вариации, допускающая разложение $M(t) = M^c(t) + M^d(t)$, $M(0) = 0$, с $dM^c(t) = h_1(t)dVarL^c(t)$, $dM^d(t) = h_3(t)\|\Delta L(s_1)\|$.

$$\begin{aligned} & \sup_T \left(E \left| \int_0^t \left\| \Phi^{n-1}(X_1(s_1, \omega)) - \Phi^{n-1}(X_2(s_1, \omega)) \right\| dM(s_1) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \sup_T \left(E \left| \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-1}} \left\| X_1(s_n, \omega) - X_2(s_n, \omega) \right\| dM(s_n), \dots, dM(s_2)dM(s_1) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq (\text{неравенство Гёльдера}) \leq \\ & \leq \sup_T \left(E \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-1}} \left\| X_1(s_n, \omega) - X_2(s_n, \omega) \right\|^2 dM(s_n), \dots, dM(s_2)dM(s_1) \right)^{\frac{1}{2}} (M(b))^{\frac{n}{2}} \leq \\ & \leq (\text{теорема Фубини}) \leq \\ & \leq \sup_T \left(\int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-1}} E \left\| X_1(s_n, \omega) - X_2(s_n, \omega) \right\|^2 dM(s_n), \dots, dM(s_2)dM(s_1) \right)^{\frac{1}{2}} (M(b))^{\frac{n}{2}} \leq \\ & \leq \sup_T \left(E \left\| X_1(s_n, \omega) - X_2(s_n, \omega) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} (M(b))^{\frac{n}{2}} \sup_T \left(\int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-1}} dM(s_n), \dots, dM(s_2)dM(s_1) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \rho(X_1, X_2) (M(b))^{\frac{n}{2}} \left(\frac{(M(b))^n}{n!} \right)^{\frac{1}{2}} = \rho(X_1, X_2) \left(\frac{(M(b))^{2n}}{n!} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Существует n_1 такое, что данное выражение будет меньше единицы, для любых $n \geq n_1$, поэтому некоторая степень отображения $\Phi(\cdot)$ является сжимающей.

По теореме о сжимающих отображениях существует единственная неподвижная точка отображения $\Phi(\cdot)$ в пространстве \mathbb{X} , следовательно, исходное уравнение имеет единственное решение в этом пространстве.

Данная теорема является естественным обобщением теоремы из работы [6, с. 392] для обыкновенных дифференциальных систем с мерами.

Следствие 1. При выполненных условиях из теоремы 1 решение уравнения (4) существует и единственно в пространстве непрерывных справа и имеющих предел слева случайных процессов с нормой

$$\|X(t, \omega)\|_{\mathbb{X}'} = \int_T \left(E \|X(t, \omega)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Существование и единственность решения в пространстве \mathbb{X}' следует из теоремы 1 и того, что $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$ сильнее, чем $\|\cdot\|_{\mathbb{X}'}$.

Теорема 2. Пусть функция $F(t, x)$ – борелевская по (t, x) и для любых $x, y \in \mathbb{R}^p$, $t \in T$ функция удовлетворяет условиям Липшица и линейного роста:

$$\begin{aligned} \|F(t, x) - F(t, y)\| &\leq h_1(t)\|x - y\|, \\ \|F(t, x)\| &\leq h_2(t)(1 + \|x\|), \\ \sup_T \|F(t, 0)\| &< \infty, \end{aligned}$$

где для $i = 1, 2$

$$\int_0^b h_i^2(s) dVarL(s) < \infty.$$

Пусть $X_n(t, \omega)$ – решение (3) конечно-разностной с осреднением задачи Коши (2) и

$$\sup_{t \in [0, h_n]} E \|X_n^0(t, \omega) - X_0\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0} 0.$$

Предположим, что $X(t, \omega)$ является решением интегральной системы уравнений (4), где

$$\Psi(\mu, x, L) = \varphi(1, \mu, x, L) - \varphi(0, \mu, x, L),$$

где $\varphi(u, \mu, x, L) : \{0, 1\} \times T \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{p \times q} \rightarrow \mathbb{R}^p$ находится из уравнения

$$\varphi(u, \mu, x, L) = X_0 + L \int_0^u d\eta(s) F(\mu, \varphi(s, \mu, x, L)), \quad (6)$$

где

$$\eta(s) = (\eta_{ij}(s)),$$

где $\eta_{ij} : D = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная справа функция ограниченной вариации.

Тогда при $n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0$ так, что $\frac{1}{\gamma_{ij}(n)} = o(h_n)$ или $h_n = o\left(\frac{1}{\gamma_{ij}(n)}\right)$ для всех $i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}$,

$$\int_T \left(E \|X_n(t, \omega) - X(t, \omega)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt \rightarrow 0,$$

где $\eta_{ij}(s) = s$, если $h_n = o\left(\frac{1}{\gamma_{ij}(n)}\right)$ и $\eta_{ij}(s) = H(s-1)$, если $\frac{1}{\gamma_{ij}(n)} = o(h_n)$, где $H(s)$ – функция Хевисайда.

Существование и единственность решения системы интегральных уравнений (6) вытекают из следствия 1.

Определение. Ассоциированными решениями задачи Коши (1) в пространстве \mathbb{X}' называются решения системы интегральных уравнений (4), где $\Psi(\mu, x, L) = \varphi(1, \mu, x, L) - \varphi(0, \mu, x, L)$,

а $\varphi(u, \mu, x, L) : \{0, 1\} \times T \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{p \times q} \rightarrow \mathbb{R}^p$ находится из уравнения (6), где $\eta_{ij}(s) = s$, если

$h_n = o\left(\frac{1}{\gamma_{ij}(n)}\right)$, и $\eta_{ij}(s) = H(s-1)$, если $\frac{1}{\gamma_{ij}(n)} = o(h_n)$.

Корректность определения 1 следует из теорем 1 и 2.

Линейные стохастические дифференциальные уравнения высших порядков

Рассмотрим задачу Коши для линейного стохастического дифференциального уравнения

$$\begin{cases} y^{(p)}(t, \omega) = a_p'(t)y^{(p-1)}(t, \omega) + \dots + a_2'(t)y'(t, \omega) + a_1'(t)y(t, \omega) + g(t)w'(t, \omega), \\ y^{(p-1)}(0, \omega) = y_0^p, \\ \dots \\ y(0, \omega) = y_0^1, \end{cases} \quad (7)$$

где $t \in T$, $\omega \in \Omega$, $y_i^0 \in \mathbb{R}$, $a_i : T \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, p}$, – непрерывные справа функции ограниченной вариации; $w(t, \omega)$ – винеровский процесс; $a_i'(t)$, $i = \overline{1, p}$, $w'(t, s)$ – их обобщенные производные, $g(t) \in L_2(T)$.

При моделировании процентных ставок в финансовой математике используются уравнения, решения которых есть марковские процессы, в то время как реальные финансовые данные часто не являются такими процессами. Это заключение было сделано в силу того, что корреляционные функции реальных финансовых данных могут принимать отрицательные значения [7]. Случайные процессы с такими свойствами могут быть смоделированы с помощью стохастических дифференциальных уравнений вида (7).

Используя формальные обозначения $X_i(t, \omega) = y^{(i)}(t, \omega)$, $i = \overline{1, p}$, получим следующую систему, эквивалентную (7):

$$\begin{cases} X'(t, \omega) = L'(t)X(t, \omega) + G(t)W'(t, \omega), \\ X(0, \omega) = X_0, \end{cases} \quad (8)$$

где $t \in T = [0, b]$, $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} X(t, \omega) &= (X_i(t, \omega))^T, \quad X_0 = (y_0^i)^T \in \mathbb{R}^p, \quad i = \overline{1, p}; \\ W'(t, \omega) &= (W_i'(t, \omega))^T \in \mathbb{R}^p, \end{aligned}$$

где $W_i'(t, \omega) = 0$, $i = \overline{1, p-1}$; $W_p'(t, \omega) = w'(t, \omega)$;

$$L'(t) = (L'_{ij}(t)),$$

где $L'_{ij}(t) = 1$ при $i = j - 1$; $L'_{ij}(t) = 0$ при $i \neq j - 1$, если $i = \overline{1, p-1}$, $j = \overline{1, p}$ и $L'_{pj}(t) = -a_j'(t)$;

$$G(t) = (G_{ij}(t)),$$

где $G_{ij}(t) = 0$, если $i = \overline{1, p-1}$, $j = \overline{1, p}$ или $i = p$, $j = \overline{1, p-1}$ и $G_{pp}(t) = g(t)$.

Задача Коши (8) является частным случаем системы (1).

Конечно-разностная с осреднением система уравнений, соответствующая задаче Коши (8), будет иметь вид

$$\begin{cases} X_n(t + h_n, \omega) - X_n(t, \omega) = (L_n(t + h_n) - L_n(t))X_n(t, \omega) + G_n(t)(W_n(t + h_n, \omega) - W_n(t, \omega)), \\ X_n(t, \omega)|_{[0, h_n)} = X_n^0(t, \omega), \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} X_n(t, \omega) &= (X_n^i(t, \omega))^T, \quad X_n^0(t, \omega) = (X_{n0}^i(t, \omega))^T, \quad i = \overline{1, p}, \\ W_n(t, \omega) &= (W_n^i(t, \omega))^T, \end{aligned}$$

где $W_n^i(t, \omega) = 0$, $i = \overline{1, p-1}$ и $W_n^p(t, \omega) = w_n(t, \omega)$;

$$G_n(t) = (G_n^{ij}(t)),$$

где $G_n^{ij}(t) = 0$, если $i = \overline{1, p-1}$, $j = \overline{1, p}$ или $i = p$, $j = \overline{1, p-1}$, и $G_n^{pp}(t) = g_n(t)$;

$$L_n(t) = (L_n^{ij}(t)),$$

где $L_n^{ij}(t) = 1$ при $i = j - 1$ и $L_n^{ij}(t) = 0$ при $i \neq j - 1$, если $i = \overline{1, p-1}$, $j = \overline{1, p}$ и $L_n^{pj}(t) = -a_n^j(t)$;

$$a_n^j(t) = (a_j * \rho_n^j)(t), \quad \rho_n^j(t) = \gamma_j(n)\rho(\gamma_j(n)t),$$

где $\gamma_j(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, $j = \overline{1, p}$,

$$\rho \geq 0, \rho \in C^\infty(\mathbb{R}), \text{supp}(\rho) \subseteq [0, 1], \int_0^1 \rho(s) ds = 1.$$

Таким образом, справедливо следующее следствие из теоремы 2.

Следствие 2. Пусть $X_n(t, \omega)$ – решение конечно-разностной с усреднением задачи Коши (9) и

$$\sup_{t \in [0, h_n]} E \|X_n^0(t, \omega) - X_0\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0} 0.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0$ так, что $\frac{1}{\gamma_j(n)} = o(h_n)$ или $h_n = o\left(\frac{1}{\gamma_j(n)}\right)$ для всех $j = \overline{1, p}$,

$$\int_T \left(E \|X_n(t, \omega) - X(t, \omega)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt \rightarrow 0,$$

где $X(t, \omega)$ – решение следующей интегральной системы уравнений:

$$X(t, \omega) = X_0 + \int_0^t dL^c(s)X(s, \omega) + \sum_{\mu_l \leq t} \Delta L^k(\mu_l)X(\mu_l-, \omega) + \int_0^t G(s)dW(s, \omega), \quad t \in T, \quad \omega \in \Omega, \quad (10)$$

где $L^c(t)$ – непрерывная часть функции $L(t)$; $\mu_l, l \in \mathbb{N}$, – точки разрыва $L(t)$.

$$\Delta L^k(t) = (\Delta L_{ij}^k(t)), \quad k = \overline{1, 2^p},$$

где $\Delta L_{ij}^k(t) = 0$ при $i = \overline{1, p-1}, j = \overline{1, p}$.

Если $\frac{1}{\gamma_p(n)} = o(h_n)$, то

$$\Delta L_{pj}^k(t) = \begin{cases} -\Delta a_p(\mu_l), & j = p, \\ -\Delta a_j(\mu_l), & \text{если } \frac{1}{\gamma_j(n)} = o(h_n), \quad j = \overline{1, p-1}, \\ -\Delta a_j(\mu_l)(1 - \Delta a_p(\mu_l)), & \text{если } h_n = o\left(\frac{1}{\gamma_j(n)}\right), \quad j = \overline{1, p-1}. \end{cases}$$

Если $h_n = o\left(\frac{1}{\gamma_p(n)}\right)$, то

$$\Delta L_{pj}^k(t) = \begin{cases} e^{-\Delta a_p(\mu_l)} - 1, & j = p, \\ -\Delta a_j(\mu_l), & \text{если } \frac{1}{\gamma_j(n)} = o(h_n), \quad j = \overline{1, p-1}, \\ \frac{\Delta a_j(\mu_l)}{\Delta a_p(\mu_l)} (e^{-\Delta a_p(\mu_l)} - 1), & \text{если } h_n = o\left(\frac{1}{\gamma_j(n)}\right), \quad j = \overline{1, p-1} \end{cases}$$

при условии, что $\Delta a_p(\mu_l) \neq 0$. Если же $\Delta a_p(\mu_l) = 0$, то

$$\Delta L_{ij}^k(t) = \begin{cases} 0, & i = \overline{1, p-1}, j = \overline{1, p}, \\ -\Delta a_j(\mu_l), & i = p, j = \overline{1, p}, \end{cases} \quad k = \overline{1, 2^p}.$$

Рассмотрим задачу Коши для однородного дифференциального уравнения, соответствующего задаче (8), т. е. при $g(t) = 0$:

$$\begin{cases} X'(t) = L'(t)X(t), \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (11)$$

где $t \in T = [0, b]$.

Уравнения вида (11) исследовались в работах [8; 9].

Пусть $B^k(t, s)$ – ассоциированные фундаментальные матрицы системы (11), $k = \overline{1, 2^p}$ [10].

Теорема 3. Ассоциированные решения системы (7) представимы в виде

$$X^k(t, \omega) = B^k(t, 0)X_0 + \int_0^t B^k(t, s)G(s)dW(s, \omega), \quad t \in T, \quad k = \overline{1, 2^p},$$

для почти всех $\omega \in \Omega$, где $B^k(t, s)$, $k = \overline{1, 2^p}$, – ассоциированные фундаментальные матрицы соответствующей однородной системы (11).

Доказательство. Из следствия 2 получаем, что ассоциированными решениями задачи Коши (7) являются решения соответствующих интегральных уравнений (10).

Введем обозначение $L^k(t) = L^c(t) + \Delta L^k(t)$. Перепишем уравнение (10) следующим образом:

$$X(t, \omega) = X_0 + \int_0^t dL^k(s)X(s, \omega) + \int_0^t G(s)dW(s, \omega), \quad t \in T, \quad \omega \in \Omega, \quad (12)$$

где интеграл по $L^k(t)$ понимается как неклассический интеграл Римана – Стильтьеса [11, с. 48].

Подставим предполагаемое решение в соответствующее интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} & B^k(t, 0)X^k(0, \omega) + \int_0^t B^k(t, s)G(s)dW(s, \omega) = \\ & = X^k(0, \omega) + \int_0^t dL^k(s) \left(B^k(s, 0)X^k(0, \omega) + \int_0^s B^k(s, r)G(r)dW(r, \omega) \right) + \int_0^t G(s)dW(s, \omega). \end{aligned}$$

Поскольку $B^k(t, 0)X_0$ является ассоциированным решением однородного дифференциального уравнения (11) [10, теорема 4],

$$B^k(t, 0)X^k(0, \omega) = X^k(0, \omega) + \int_0^t dL^k(s)B^k(s, 0)X^k(0, \omega).$$

Отсюда получим

$$\int_0^t B^k(t, s)G(s)dW(s, \omega) = \int_0^t dL^k(s) \int_0^s B^k(s, r)G(r)dW(r, \omega) + \int_0^t G(s)dW(s, \omega).$$

Распишем фундаментальную матрицу по определению

$$B^k(t, r) = E + \int_r^t dL^k(s)B^k(s, r).$$

Подставляя определение в правую часть, получим

$$\int_0^t \left(E + \int_s^t dL^k(r)B^k(r, s) \right) G(s)dW(s, \omega) = \int_0^t dL^k(s) \int_0^s B^k(s, r)G(r)dW(r, \omega) + \int_0^t G(s)dW(s, \omega).$$

В итоге приходим к следующему равенству:

$$\int_0^t \int_s^t dL^k(r)B^k(r, s)G(s)dW(s, \omega) = \int_0^t dL^k(s) \int_0^s B^k(s, r)G(r)dW(r, \omega).$$

Положим, что

$$B^k(t, s) = \begin{cases} B^k(t, s), & t > s, \\ 0, & t \leq s. \end{cases}$$

$$W_1 = \int_0^t dL^k(s) \int_0^s B^k(s, r) G(r) dW(r, \omega),$$

$$W_2 = \int_0^t \int_0^t dL^k(r) B^k(r, s) G(s) dW(s, \omega).$$

Оба интеграла представляют собой случайные величины из пространства, получающегося замыканием в среднеквадратичном всевозможных линейных комбинаций:

$$\sum_k c_k \Delta_k W(s_k).$$

Таким образом, если мы покажем, что разность $W_1 - W_2$ ортогональна всем величинам вида $\Delta W(t_1)$, $\Delta = (t_1, t_2)$, $0 \leq t_1 < t_2 \leq b$, т. е.

$$E[W_1 \Delta W(t_1)] = E[W_2 \Delta W(t_1)],$$

то тем самым будет доказано, что $W_1 = W_2$ [12, с. 58].

В итоге имеем

$$\begin{aligned} E[W_1 \Delta W(t_1)] &= \int_0^t dL^k(s) E \left[\int_0^s B^k(s, r) G(r) dW(r, \omega) \Delta W(t_1) \right] = \\ &= \int_0^t dL^k(s) \left(\int_{t_1}^{t_2} B^k(s, r) G(r) dr \right), \end{aligned}$$

$$E[W_2 \Delta W(t_1)] = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^t dL^k(r) B^k(r, s) G(s) ds.$$

Для интеграла Римана – Стильеса

$$\int_0^t dL^k(s) \left(\int_{t_1}^{t_2} B^k(s, r) G(r) dr \right) = \int_0^t dL^k(s) E \left[\int_0^s B^k(s, r) G(r) dW(r, \omega) \Delta W(t_1) \right].$$

Отсюда следует, что исходная формула представления решения справедлива.

Библиографические ссылки

1. Арато М. Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами. Статистический подход. М. : Наука, 1989.
2. Гриднев Ю. В., Русецкий А. Ю., Рак С. А. Стохастическое моделирование систем автоматического управления беспилотного летательного аппарата с применением оптимального фильтра Калмана // Докл. БГУИР. 2013. № 8 (78). С. 53–59.
3. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики : в 2 т. М. : Фазис, 1998. Т. 1 : Факты. Модели.
4. Гаусс К. Ф. Избранные геодезические сочинения. М. : Издательство геодезической литературы, 1957.
5. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М. : Наука, 1979.
6. Миллер Б. М., Рубинович Е. Я. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М. : Наука, 2005.
7. Медведев Г. А. Математические модели финансовых рисков : в 2 ч. Минск : БГУ, 2001. Ч. 1.
8. Автушко Т. С., Лазакович Н. В., Русецкий А. Ю. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2013. № 2. С. 74–79.
9. Автушко Т. С. Задача Коши для линейных дифференциальных уравнений высших порядков с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций // Весці БДПУ. Сер. 3, Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. 2014. № 2. С. 24–28.

10. Автушко Т. С., Лазакovich Н. В., Русецкий А. Ю. Задача Коши для линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2013. № 3. С. 83–92.
11. Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Мазуренко В. В. та ін. Узагальнені квазидиференціальні рівняння. Дрогобич : Коло, 2011.
12. Розанов Ю. А. Случайные процессы. Краткий курс. М. : Наука, 1979.

References

1. Arato M. [Linear stochastic systems with constant coefficients. Statistical approach]. Moscow : Nauka, 1989 (in Russ.).
2. Gridnev Y. V., Rusetski A. Y., Rak S. A. [Stochastic simulation of the automatic control systems of unmanned aircraft using optimal Kalman filter]. *Dokl. Beloruss. gos. univ. inform. i radioelektron.* 2013. No. 8 (78). P. 53–59 (in Russ.).
3. Shiryaev A. N. [Essentials of stochastic finance] : in 2 vol. Moscow : Fazis, 1998. Vol. 1 : Facts. Models (in Russ.).
4. Gauss C. F. Selected geodetic works. Moscow : Publishing house of geodetic literature, 1957 (in Russ.).
5. Vladimirov V. S. [Generalized equations in mathematical physics]. Moscow : Nauka, 1979 (in Russ.).
6. Miller B. M., Rubinovitch E. J. [Optimization of dynamic systems with a generalized control]. Moscow : Nauka, 2005 (in Russ.).
7. Medvedev G. A. [Mathematical models of financial markets] : in 2 parts. Minsk : BSU, 2001. Part 1 (in Russ.).
8. Autushka T. S., Lazakovich N. V., Rusetski A. U. The homogeneous linear differential equation of second order in the mne-mofunctions algebra. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2013. No. 2. P. 74–79 (in Russ.).
9. Autushka T. S. The Cauchy problem for non-homogeneous linear differential equations of higher order with generalized coefficients in algebra of mne-mofunctions. *Vesti Belarus. dzyarz. pedagogichnaga universiteta. Ser. 3, Fiz. Mat. Inform. Biol. Geogr.* 2014. No. 2. P. 24–28 (in Russ.).
10. Autushka T. S., Lazakovich N. V., Rusetski A. U. [The Cauchy problem for non-homogeneous linear differential equations of second order with generalized coefficients in algebra of mne-mofunctions]. *Vesti Nacyjanal'aj akademii navuk Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk.* 2013. No. 3. P. 83–92 (in Russ.).
11. Tacij R. M., Stasjuk M. F., Mazurenko V. V., et al. [Generalized quasidifferential equation]. Drogobich : Kolo, 2011 (in Ukrainian).
12. Rozanov Y. A. [Random processes. Short course]. Moscow : Nauka, 1979 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 20.06.2017.
Received by editorial board 20.06.2017.

УДК 519.615,519.63

БЕЗМАТРИЧНЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ СО СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫМ ПОДАВЛЕНИЕМ ОШИБКИ ДЛЯ БОЛЬШИХ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. В. БОНДАРЬ¹⁾, Б. В. ФАЛЕЙЧИК¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассмотрены итерационные процессы решения больших систем нелинейных уравнений, не требующие хранения и факторизации матрицы Якоби. Для ускорения сходимости в случае большого спектрального числа обусловленности этой матрицы предлагается специальная техника среднеквадратичного подавления ошибки, реализация которой требует решения линейной задачи наименьших квадратов небольшой размерности. В линейном случае полученный метод схож с предобусловленным обобщенным методом минимальных невязок. В нелинейном же случае в отличие от популярного безматричного метода Ньютона – Крылова разработанный подход не содержит операции разностной аппроксимации производной. Проведены вычислительные эксперименты на трех системах нелинейных уравнений, возникающих в результате конечно-разностной аппроксимации двумерных уравнений в частных производных эллиптического типа. Показано преимущество разработанного подхода по сравнению с методом Ньютона – Крылова на рассмотренных тестовых задачах.

Ключевые слова: системы нелинейных уравнений; безматричные методы; ускорение сходимости; метод наименьших квадратов; метод Ньютона – Крылова; разностные схемы.

Образец цитирования:

Бондарь И. В., Фалейчик Б. В. Безматричные итерационные процессы со среднеквадратичным подавлением ошибки для больших систем нелинейных уравнений // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 73–84.

For citation:

Bondar I. V., Faleichyk B. V. Matrix-free iterative processes with least-squares error damping for nonlinear systems of equations. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 3. P. 73–84 (in Russ.).

Авторы:

Иван Васильевич Бондарь – ассистент кафедры вычислительной математики факультета прикладной математики и информатики.

Борис Викторович Фалейчик – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры вычислительной математики факультета прикладной математики и информатики.

Authors:

Ivan V. Bondar, assistant at the department of computational mathematics, faculty of applied mathematics and computer science.

bondarivanv@gmail.com

Barys V. Faleichyk, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of computational mathematics, faculty of applied mathematics and computer science.

faleichik@gmail.com

MATRIX-FREE ITERATIVE PROCESSES WITH LEAST-SQUARES ERROR DAMPING FOR NONLINEAR SYSTEMS OF EQUATIONS

I. V. BONDAR^a, B. V. FALEICHYK^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus
Corresponding author: I. V. Bondar (bondarivanv@gmail.com)

New iterative processes for numerical solution of big nonlinear systems of equations are considered. The processes do not require factorization and storing of Jacobi matrix and employ a special technique of convergence acceleration which is called least-squares error damping and requires solution of auxiliary linear least-squares problems of low dimension. In linear case the resulting method is similar to the general minimal residual method (GMRES) with preconditioning. In nonlinear case, in contrast to popular Newton – Krylov method, the computational scheme do not involve operation of difference approximation of derivative operator. Numerical experiments include three nonlinear problems originating from two-dimensional elliptic partial differential equations and exhibit advantage of the proposed method compared to Newton – Krylov method.

Key words: nonlinear systems of equations; matrix-free methods; acceleration of convergence; least-squares; Newton – Krylov method; difference schemes.

Задача решения больших систем нелинейных уравнений часто возникает при дискретизации дифференциальных уравнений. Решение таких систем ньютоновскими методами затруднено необходимостью строить и обращать матрицу Якоби (или некоторую аппроксимацию к ней). В работе [1] для случая жесткой системы обыкновенных дифференциальных уравнений предложен метод решения систем нелинейных уравнений, не требующий хранения и обращения матриц и обладающий улучшенными свойствами сходимости по сравнению с обычным методом простой итерации. При этом сходимость существенно замедляется в случае, когда матрица Якоби системы имеет сильно различающиеся по модулю собственные значения (содержит большое спектральное число обусловленности $\kappa(A) = \rho(A)\rho(A^{-1})$). В настоящей работе рассматриваются схожие по структуре итерационные процессы, сходимость которых в случае большого $\kappa(A)$ ускоряется за счет специальной процедуры среднеквадратичного подавления ошибки. Итоговый метод в линейном случае схож с итерационными методами, основанными на подпространствах Крылова [2], и легко обобщается на нелинейный случай. При этом в отличие от популярного безматричного метода Ньютона – Крылова (НК) [3] алгоритм не содержит чувствительной к вычислительным погрешностям операции разностной аппроксимации производной и, как показали вычислительные эксперименты, является более эффективным на рассмотренных тестовых задачах.

Базовый итерационный процесс

Описание метода начнем с линейного случая. Рассмотрим систему

$$Ax = b, \quad (1)$$

где A – вещественная матрица $n \times n$ со спектром $\Sigma(A) \subset [-M, -\mu] \subset \mathbb{R}^-$, $0 < \mu < M$, $b \in \mathbb{R}^n$. Стандартным образом приведем систему (1) к виду

$$x = Bx + g, \quad (2)$$

где $B = I + \omega A$, $g = -\omega b$, $\omega > 0$, – некоторый масштабирующий множитель. В дальнейшем будем предполагать $\omega \in (0, 2M^{-1})$, что дает $\Sigma(B) \subset (-1, 1)$. В [4, § 86.8] описаны так называемые универсальные алгоритмы, представляющие собой двухшаговые итерационные процессы для решения систем вида (2):

$$x^{j+1} = \alpha_{j+1}(Bx^j + g) + \beta_{j+1}x^j + \gamma_{j+1}x^{j-1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

По построению процесса невязка

$$r(x) = Bx + g - x = \omega(Ax - b) \quad (4)$$

на приближениях x^j представима в виде

$$r(x^j) = e_j(B)r(x^0),$$

где $\{e_j\}$ – система многочленов, удовлетворяющая аналогичному (3) рекуррентному соотношению

$$e_{j+1}(t) = (\alpha_{j+1}t + \beta_{j+1})e_j(t) + \gamma_{j+1}e_{j-1}(t), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad e_0(t) = 1.$$

Если коэффициенты процесса определены как

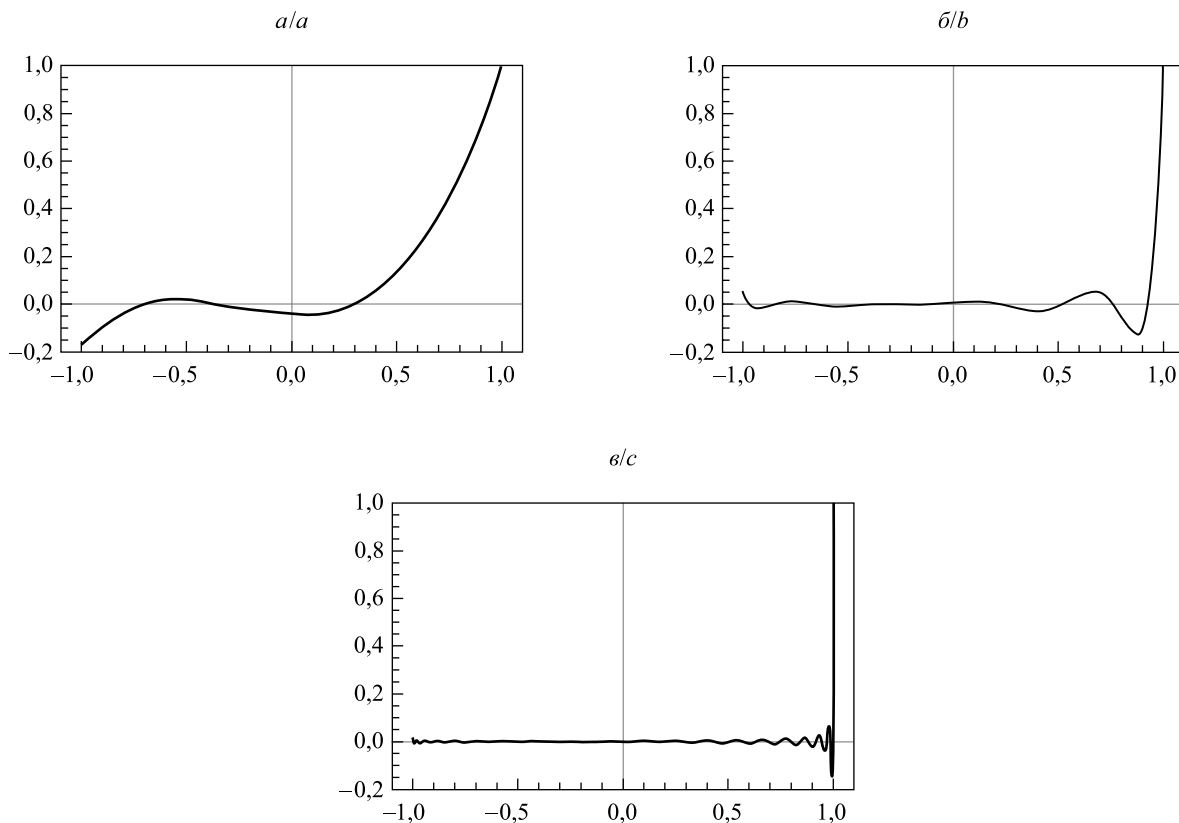
$$\alpha_1 = \frac{3}{4}, \quad \beta_1 = \frac{1}{4}, \quad \gamma_1 = 0, \quad (5)$$

$$\alpha_j = \frac{j(2j+1)}{(j+1)^2}, \quad \beta_j = \frac{j}{(2j-1)(j+1)^2}, \quad \gamma_j = -\frac{(2j+1)(j-1)^2}{(2j-1)(j+1)^2}, \quad j = 2, 3, \dots,$$

то соответствующее множество $\{e_j\}_{j=0}^n$ образует систему ортогональных многочленов на отрезке $[-1, 1]$ по весу $\rho(t) = 1 - t$ [4, § 93]. Основным же их свойством является следующее:

$$e_j = \operatorname{argmin}_{p \in \mathbb{P}_1^j} \int_{-1}^1 |p(t)|^2 dt,$$

где \mathbb{P}_1^j – множество многочленов p степени не выше j таких, что $p(1) = 1$. В связи с этим в [4] двухшаговые процессы с таким выбором коэффициентов называются наилучшими в среднем. Графики e_3, e_{10}, e_{40} приведены на рис. 1.



Графики многочленов: $a - e_3$; $б - e_{10}$; $в - e_{40}$
Graphs of polynomials: $a - e_3$; $b - e_{10}$; $c - e_{40}$

На практике рассматриваемый процесс (3), как правило, перезапускается через каждые s итераций. Отображение $x^0 \mapsto x^{j+1}$, задаваемое формулой (3), обозначим Φ_{j+1} :

$$\begin{aligned} \Phi_0(x) &= x, \\ \Phi_{j+1}(x) &= \alpha_{j+1}\varphi(\Phi_j(x)) + \beta_{j+1}\Phi_j(x) + \gamma_{j+1}\Phi_{j-1}(x), \quad j = 0, 1, \dots, s-1, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\varphi(x) = Bx + g$. В общем случае (см. далее) φ будет некоторой нелинейной вектор-функцией. Используя (6), полученный в результате «зацикливания» после s итераций процесс (3) можно записать в виде

$$x^{k+1} = \Phi_s(x^k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Для невязки (4) процесса (7) по построению имеем $r(x^k) = e_s(B)^k r(x^0)$. Согласно известному критерию сходимости итерационных процессов решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) процесс (7) сходится, начиная с произвольного начального приближения, тогда и только тогда, когда

$$\rho(e_s(B)) = \max_{v \in \Sigma(B)} |e_s(v)| < 1.$$

При этом для всех достаточно больших k имеет место оценка погрешности

$$\|x^k - x^*\| \leq \rho(e_s(B))^k \|x^0 - x^*\|. \quad (8)$$

Поскольку $|e_j(t)| < 1$ при всех $t \in [-1, 1)$, $j > 0$, процесс (7), (6) с коэффициентами (5) будет сходящимся при любых s , если $\Sigma(B) \subset [-1, 1)$. Однако при больших значениях $\rho(A)\rho(A^{-1})$ максимальное по модулю собственное значение v_1 матрицы B будет очень близко к единице. Тогда в силу равенства $e_j(1) = 1$ будем иметь $\rho(e_s(B)) = |e_s(v_1)| \approx 1$, т. е. сходимость процесса будет очень медленной.

Нелинейный случай

Рассмотренные выше итерационные процессы естественным образом обобщаются на случай системы нелинейных уравнений вида

$$f(x) = 0, \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (9)$$

Для этого в формулах (7), (6) положим

$$\varphi(x) = x + \omega f(x), \quad (10)$$

где $\omega \in \mathbb{R}$. В результате получим итерационный процесс для решения уравнения $x = \varphi(x)$, которое имеет те же корни, что и (9). В дальнейшем будем предполагать, что функция f дифференцируема по Фреше.

Лемма 1. Пусть функция φ дифференцируема по Фреше в некоторой окрестности своей неподвижной точки x^* . Если коэффициенты рекуррентной формулы (6) удовлетворяют условию

$$\alpha_j + \beta_j + \gamma_j = 1 \quad (11)$$

для $j = 1, \dots, s-1$, то

$$\Phi'_j(x^*) = e_j(J^*), \quad j = 0, \dots, s,$$

где $J^* = \varphi'(x^*)$.

Доказательство. Условие (11) эквивалентно $\Phi_j(x^*) = x^*$, $j = 1, \dots, s$. По определению легко проверить утверждение леммы для $j = 0$ и $j = 1$. Для остальных j по индукции будем иметь $\Phi'_{j+1}(x^*) = \alpha_{j+1}J^*e_j(J^*) + \beta_{j+1}e_j(J^*) + \gamma_{j+1}e_{j-1}(J^*) = e_{j+1}(J^*)$.

Лемма доказана.

Пусть матрица $f'(x^*)$ обладает теми же спектральными свойствами, что и матрица A из СЛАУ (1): $\Sigma(f'(x^*)) \subset [-M, -\mu]$. Тогда при достаточно малых значениях параметра ω для $\varphi(x) = x + \omega f(x)$

будем иметь $\Sigma(J^*) = \Sigma(I + \omega f'(x^*)) \subset (-1, 1)$ и, как следствие, $\rho(\Phi'_s(x^*)) = \rho(e_s(J^*)) < 1$ по лемме 1. В результате по теореме Островского [5, теорема 10.1.3] получим, что при указанных выше ограничениях итерационный процесс (7), (6), (10), с коэффициентами (5) будет порождать сходящуюся к x^* последовательность $\{x^k\}$ при всех x^0 из некоторой окрестности $\Omega(x^*)$. При этом согласно теореме о линейной сходимости [5, теорема 10.1.4] множитель сходимости такой последовательности, определяемый как $R_1\{x^k\} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^*\|^{1/k}$, по аналогии с (8) будет равен

$$R_1\{x^k\} = \rho(\Phi'_s(x^*)) = \rho(e_s(\varphi(x^*))) = \max_{v \in \Sigma(\varphi'(x^*))} |e_s(v)|.$$

Таким образом, как и в линейном случае, при больших значениях спектрального числа обусловленности матрицы $f'(x^*)$ сходимость рассматриваемых итерационных процессов будет медленной.

Среднеквадратичное подавление ошибки

Для ускорения сходимости процессов (7), (6) обратимся снова к линейному случаю: $\varphi(x) = Bx + g$. Пусть B в (2) – диагонализируемая матрица с собственными значениями $\{v_i\}$, $-1 \leq v_n \leq v_{n-1} \leq \dots \leq v_2 \leq v_1 < 1$, и линейно независимыми собственными векторами $\{\xi_i\}$. Невязку на k -й итерации обозначим

$$r^k = r(x^k) = (B - I)x^k + g.$$

Разложим r^0 по базису $\{\xi_i\}$: $r^0 = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i$, $a_i \in \mathbb{R}$. Тогда по построению $r^k = \sum_{i=1}^n a_i (e_s(v_i))^k \xi_i$. В силу свойств многочлена e_s после достаточно большого числа итераций K (или при достаточно большом значении s) в разложении невязки r^K будут доминировать слагаемые, соответствующие близким к 1 собственным значениям:

$$r^K \approx \sum_{i=1}^m d_i \xi_i, \quad m < n, \quad d_i = a_i (e_s(v_i))^K. \quad (12)$$

Все последующие итерации будут лишь незначительно уменьшать невязку, так как i -я компонента этого разложения при $i \leq m$ будет умножаться на $e_s(v_i) \approx 1$. Для того чтобы исправить ситуацию, положим $x^0 = x^K$, выполним m итераций (7) и построим уточненное приближение по формуле

$$\hat{x} = \sum_{k=0}^m c_k x^k,$$

исходя из условий $\|r(\hat{x})\|_2 \rightarrow \min$ и $\sum_{k=0}^m c_k = 1$. Последнее условие при $x^0 = x^*$ гарантирует выполнение тождества $\hat{x} = x^*$, а также дает $r(\hat{x}) = \hat{r} = \sum_{k=0}^m c_k r^k$. Тогда задача нахождения коэффициентов $\{c_k\}$ принимает вид

$$\left\| \sum_{k=0}^m c_k r^k \right\|_2 \rightarrow \min, \quad \sum_{k=0}^m c_k = 1. \quad (13)$$

Решив эту задачу, полагаем $x^0 = \hat{x}$ и в случае необходимости повторяем описанную процедуру. Этот прием в дальнейшем будем называть *среднеквадратичным подавлением ошибки*.

Обсудим некоторые свойства уточненного приближения \hat{x} . Во-первых, по построению имеем $\|\hat{r}\|_2 \leq \|r^k\|_2$, $0 \leq k \leq m$. Во-вторых, покажем, что если в (12) имеет место точное равенство, то процедура среднеквадратичного подавления даст точное решение системы.

Лемма 2. Пусть $r^0 = \sum_{i=1}^m a_i \xi_i$. Тогда существует такой набор коэффициентов $\{c_k\}_{k=0}^m$, что $\sum_{k=0}^m c_k = 1$ и $\hat{r} = \sum_{k=0}^m c_k r^k = 0$.

Доказательство. По построению итерационного процесса имеем $r^k = e_s(B)^k r^0$. Тогда

$$\hat{r} = \sum_{k=0}^m c_k r^k = \sum_{k=0}^m c_k e_s(B)^k r^0 = C_m(e_s(B))r^0 = \sum_{i=1}^m a_i C_m(\lambda_i) \xi_i,$$

где $\lambda_i = e_s(v_i)$; $C_m(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_m t^m$. Если выбрать коэффициенты $\{c_k\}$ так, что $C_m(t) = K(t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_m)$, то будем иметь $\hat{r} = \sum_{i=1}^m a_i C_m(\lambda_i) \xi_i = 0$. Условие нормировки $\sum_{k=0}^m c_k = 1$ можно выполнить, положив $K = \prod_{i=1}^m (1 - \lambda_i)^{-1}$.

Лемма доказана.

В общем случае, конечно, $\hat{r} \neq 0$, однако, если в разложении r^0 по собственным векторам $\{\xi_i\}$ доминируют m слагаемых, мы вправе ожидать, что $\hat{x} \approx x^*$.

Для решения задачи (13) на практике выразим $c_m = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} c_k$ и получим обычную линейную задачу наименьших квадратов

$$\left\| \sum_{k=0}^{m-1} c_k (r^k - r^m) + r^m \right\|_2 \rightarrow \min. \quad (14)$$

Отметим, что схожая процедура ускорения сходимости в случае линеаризованной задачи использована в работе [6]. Далее, будем применять ее напрямую для нелинейных задач.

Исследуем корректность задачи (14) в линейном случае. Рассмотрим матрицу

$$\Delta_m^L = \begin{bmatrix} 1 - \lambda_1^m & \lambda_1 - \lambda_1^m & \dots & \lambda_1^{m-1} - \lambda_1^m \\ 1 - \lambda_2^m & \lambda_2 - \lambda_2^m & \dots & \lambda_2^{m-1} - \lambda_2^m \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 - \lambda_L^m & \lambda_L - \lambda_L^m & \dots & \lambda_L^{m-1} - \lambda_L^m \end{bmatrix}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Лемма 3.

$$\det \Delta_m^L = (-1)^m \prod_{i=1}^m (\lambda_i - 1) \prod_{1 \leq j < i \leq m} (\lambda_i - \lambda_j). \quad (16)$$

Доказательство. Если $\lambda_i = 1$ хотя бы для одного i , то матрица Δ_m^L вырождена и $\det \Delta_m^L = 0$. В дальнейшем предполагаем, что $\lambda_i \neq 1$, $i = 1, \dots, m$. Вычтем из i -го столбца матрицы Δ_m^L предыдущий столбец для $i = m, \dots, 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \det \Delta_m^L &= \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda_1^m & \lambda_1 - 1 & \dots & \lambda_1^{m-2} - \lambda_1^{m-3} & \lambda_1^{m-1} - \lambda_1^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 - \lambda_m^m & \lambda_m - 1 & \dots & \lambda_m^{m-2} - \lambda_m^{m-3} & \lambda_m^{m-1} - \lambda_m^{m-2} \end{bmatrix} = \\ &= \prod_{i=1}^m (\lambda_i - 1) \det \tilde{W}, \quad \tilde{W} = \begin{bmatrix} (1 - \lambda_1^m)/(\lambda_1 - 1) & 1 & \dots & \lambda_1^{m-3} & \lambda_1^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ (1 - \lambda_m^m)/(\lambda_m - 1) & 1 & \dots & \lambda_m^{m-3} & \lambda_m^{m-2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\frac{1-\lambda_i^m}{\lambda_i-1} = -\sum_{k=0}^{m-1} \lambda_i^k$, и последовательно добавляя к первому столбцу матрицы \tilde{W} все остальные столбцы, получим следующую матрицу:

$$W = \begin{bmatrix} -\lambda_1^{m-1} & 1 & \dots & \lambda_1^{m-3} & \lambda_1^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ -\lambda_m^{m-1} & 1 & \dots & \lambda_m^{m-3} & \lambda_m^{m-2} \end{bmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что матрица W при помощи элементарных преобразований может быть приведена к матрице Вандермонда и $\det W = (-1)^m \prod_{1 \leq j < i \leq m} (\lambda_i - \lambda_j)$ [7, с. 40], откуда и получаем (16).

Лемма доказана.

В дальнейшем запись $[u_1 | \dots | u_m]$ будет обозначать матрицу, составленную из вектор-столбцов u_i .

Теорема. Пусть $r^0 = \sum_{i=1}^L a_i \xi_i$, $L \leq n$, $a_i \neq 0$. Тогда, если существуют $m \leq L$ различных значений $e_s(v_i) = \lambda_i \neq 1$, то ранг матрицы $V_m = [r^0 - r^m | \dots | r^{m-1} - r^m]$ равен m , т. е. задача (14) имеет единственное решение.

Доказательство. Обозначим $Z = [a_1 \xi_1 | \dots | a_L \xi_L]$. Тогда $r^k = \sum_{i=1}^L a_i \lambda_i^k \xi_i = Z(\lambda_1^k, \dots, \lambda_L^k)^T$ и $V_m = Z \Delta_m^L$, где Δ_m^L – матрица вида (15). Покажем, что $\text{rank } \Delta_m^L = m$.

Если $L = m$, то утверждение следует из леммы 3. Пусть $m < L$. Не нарушая общности, предположим, что различны первые m чисел λ_i , и рассмотрим матрицу, образованную первыми m строками и столбцами матрицы Δ_m^L . Нетрудно заметить, что эта матрица совпадает с матрицей Δ_m^m (15) и для нее верна лемма 3, откуда по условию имеем $\det \Delta_m^m \neq 0$. Поскольку $\text{rank } Z = L > m$, окончательно получаем $\text{rank } V_m = \text{rank } \Delta_m^L = m$.

Теорема доказана.

В случае нелинейного уравнения (9) теорема, вообще говоря, не будет справедлива, однако задача (14) и техника ее решения ничем не отличаются от линейного случая.

Вычислительные алгоритмы

Процедуру среднеквадратичного подавления ошибки удобно оформить в виде подпрограммы *lsdamp*, которая принимает на вход $m + 1$ вектор x^k и возвращает уточненное приближение \hat{x} (алгоритм 1).

```
lsdamp( $x^0, \dots, x^m$ ):
· for  $k = 0$  to  $m$ :
·   ·  $r^k \leftarrow r(x^k)$ 
·   ·  $V = [r^0 - r^m | \dots | r^{m-1} - r^m]$ 
·   ·  $c = \text{argmin} \|Vc + r^m\|_2$ 
·   · return  $\sum_{j=0}^{m-1} c_j x^j + \left(1 - \sum_{j=0}^{m-1} c_j\right) x^m$ 
```

Алгоритм 1. Среднеквадратичное подавление ошибки
Algorithm 1. Least squares damping of the error

Задачу наименьших квадратов можно решать разными способами [8]. В наших экспериментах использована соответствующая функция библиотеки *NumPy* языка *Python*.

Алгоритм 2 описывает простейший итерационный процесс с использованием среднеквадратичного подавления. На вход здесь передаются начальное приближение x^0 и требуемая точность ε . Отображение Φ_s определяется формулами (6), параметр N_{damp} задает количество последовательных приближений, используемое при расчете уточненного приближения.

```

while  $\|r(x^0)\| > \varepsilon$ 
· for  $k = 1$  to  $N_{\text{damp}}$ 
· ·  $x^k \leftarrow \Phi_s(x^{k-1})$ 
·  $x^0 \leftarrow \text{lsdamp}(x^0, \dots, x^{N_{\text{damp}}})$ 
    
```

Алгоритм 2. Простейший процесс с подавлением ошибки (TSLС + D)

Algorithm 2. Basic two-step process with least squares damping of the error (TSLС + D)

Заметим, что функцию `lsdamp` можно применять для произвольного количества векторов, начиная с двух. Это дает возможность для модификации алгоритма 1: можно проводить подавление ошибки после вычисления каждого нового приближения. Хранение всех последовательных приближений затруднительно, поэтому ограничим их количество параметром N_{damp} . Если в процессе решения придется сделать больше, чем N_{damp} итераций, то векторы приближений, полученные на ранних итерациях, будут замещаться более поздними приближениями. Полученная в результате вычислительная схема приведена в алгоритме 3.

```

 $q = 0$ 
while  $\|r(x^0)\| > \varepsilon$ 
· for  $i = 1$  to  $N_0$ 
· ·  $x^0 \leftarrow \Phi_s(x^0)$ 
·  $x \leftarrow x^0$ 
· for  $k = 0$  to  $N_1$ 
· · if  $q < N_{\text{damp}}$ 
· · ·  $q++$ 
· ·  $x^q \leftarrow \Phi_s(x)$ 
· ·  $x \leftarrow \text{lsdamp}(x^0, \dots, x^q)$ 
· · if  $q == N_{\text{damp}}$ 
· · · for  $p = 1$  to  $N_{\text{damp}}$ 
· · · ·  $x^{p-1} \leftarrow x^p$ 
·  $x^0 \leftarrow x$ 
    
```

Алгоритм 3. Итерационный процесс с модифицированным подавлением ошибки (TSLС + WD)

Algorithm 3. Modified two-step process with «window» damping of the error (TSLС + WD)

Здесь параметры N_0 и N_1 определяют количество обычных итераций базового алгоритма и количество итераций с последующим подавлением соответственно, а N_{damp} – максимальное количество векторов, используемое для подавления.

Метод Ньютона – Крылова

Классический итерационный процесс метода Ньютона для решения системы нелинейных уравнений вида (9) можно записать следующим образом:

$$x^{k+1} = x^k + \delta^k, \quad (17)$$

$$f'(x^k)\delta^k = -f(x^k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (18)$$

где $f'(x^k)$ – матрица Якоби решаемой нелинейной системы. Каждая итерация процесса (17), (18) требует решения СЛАУ той же размерности, что и у нелинейной системы. Применение точных методов

для решения этой задачи сопряжено с известными затруднениями: трудоемкость растет в общем случае пропорционально кубу размерности, вычисление и хранение матрицы Якоби для большой системы может представлять проблему, СЛАНУ (18) может быть плохо обусловленной.

В работе [3] описан подход, позволяющий избавиться от подобных недостатков и получивший название метода Ньютона – Крылова. Суть метода в том, чтобы для решения системы (18) использовать итерационные методы, основанные на подпространствах Крылова. В этом случае основная вычислительная операция – это умножение матрицы Якоби на некоторый вектор v :

$$w = f'(x^k)v. \quad (19)$$

Можно показать, что

$$f'(x)v \approx \frac{f(x + \varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon}, \quad (20)$$

где ε – некоторое малое возмущение. Таким образом, для выполнения операции (19) не нужно вычислять и хранить матрицу $f'(x)$, можно воспользоваться (20), что в результате порождает достаточно эффективную вычислительную схему.

Вычислительный эксперимент

Рассмотрим результаты некоторых вычислительных экспериментов. Тестовые системы нелинейных уравнений получены путем дискретизации уравнений в частных производных методом конечных разностей на равномерной сетке по пятиточечному шаблону. Критерий остановки итераций $\|r(x^k)\|_{\infty} \leq 10^{-9}$.

Приведенные ниже задачи 1 и 2 являются задачами с разреженной матрицей Якоби, задача 3 имеет полную матрицу Якоби. В целях оценки спектра матрицы Якоби задач 1 и 3 можно воспользоваться известными выражениями для дискретного лапласиана [9, гл. IV, § 4]. В частности, спектральный радиус этой матрицы, необходимый для нахождения параметра ω , может быть аппроксимирован числом $8h^{-2}$, где h – шаг сетки. Для задачи 2 такие оценки неочевидны, поэтому значение параметра ω подбиралось экспериментально.

Проведено сравнение базового метода (7), (6) (в результатах он обозначается как TSLS – two-step least squares) и описанных алгоритмов с подавлением ошибки (простое подавление ошибки по алгоритму 1 обозначено TSLS + D, по алгоритму 3 – TSLS + WD). В сравнении участвует также метод Ньютона – Крылова.

Для реализации алгоритмов был использован язык *Python* (версия интерпретатора 3.4.3), библиотек *Scipy* (версия 0.13.3) и *Numpy* (версия 1.8.2). Метод Ньютона – Крылова реализован с помощью библиотечной функции *scipy.optimize.newton_krylov*, в качестве «решателя» линейных систем, возникающих в этом методе, был использован алгоритм *lgmres* (*scipy.sparse.linalg.lgmres*) [10]. Задачи наименьших квадратов решались методом на основе сингулярного разложения, реализованным в функции *numpy.linalg.lstsq*.

Для всех алгоритмов на основе процесса (7), (6) было взято значение $s = 100$. Для алгоритмов с подавлением ошибки использованы параметры $N_{\text{damp}} = 14$, $N_0 = 2$, $N_1 = 12$.

В задачах 1 и 2 в качестве точного решения используются функция

$$u_{\text{ex}}(x, y) = \cos(\pi x)\sin(\pi y) + 2 \quad (21)$$

и соответствующие граничные условия.

Задача 1. Рассматривается задача Дирихле для уравнения Пуассона в квадрате $D = [0, 1] \times [0, 1]$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, u), \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \quad (22)$$

$$u(x, y) = 2, \quad (x, y) \in \partial D.$$

В качестве правой части уравнения (22), соответствующей точному решению (21), взята функция

$$f(x, y, u) = -2\pi^2 \cos(\pi x)\sin(\pi y) + e^{-u^2-10} - e^{-u_{\text{ex}}^2-10}.$$

Расчеты проводились с $\omega = 2^{-3}N^{-2}$.

Задача 2. Рассматривается задача Дирихле для нелинейного стационарного дифференциального уравнения с частными производными:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(u^\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u^\alpha \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y), \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1),$$

$$u(x, y) = 2, \quad (x, y) \in \partial D, \quad (23)$$

где $\alpha > 1$ – некоторый параметр.

Подставив в уравнение (23) точное решение (21), получим вид правой части:

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \pi^2 (\cos(\pi x) \sin(\pi y) + 2)^{\alpha-1} \times$$

$$\times (\alpha + \cos(2\pi x) ((\alpha + 1) \cos(2\pi y) - 1) - 8 \cos(\pi x) \sin(\pi y) + \cos(2\pi y) - 1).$$

Для дискретизации воспользуемся интегро-интерполяционным методом [9]. На области D введем сетку $\bar{\omega}_h = \left\{ (x_i, y_j), x_i = ih, y_j = jh, h = \frac{1}{N}, i = 0, N \right\}$ и после стандартных выкладок в итоге получим следующую разностную схему:

$$(u_{i+1,j} - u_{i,j})a_{i+1,j} - (u_{i,j} - u_{i-1,j})a_{i,j} + (u_{i,j+1} - u_{i,j})b_{i,j+1} - (u_{i,j} - u_{i,j-1})b_{i,j} = h^2 f_{i,j},$$

где $a_{i,j} = 2(u_{i,j}^{-\alpha} + u_{i-1,j}^{-\alpha})^{-1}$; $b_{i,j} = 2(u_{i,j}^{-\alpha} + u_{i,j-1}^{-\alpha})^{-1}$. Расчеты проводились с $\alpha = 2,00$, $\omega = 0,04$.

Задача 3. Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 10 \left(\int_0^1 \int_0^1 \cosh(u) dx dy \right)^2, \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$$

с граничными условиями

$$u(x, 0) = 1 - x, \quad u(0, y) = 1 - y, \quad u(1, y) = 0, \quad u(x, 1) = 0.$$

Для дискретизации воспользуемся конечными разностями: на области введем сетку $\bar{\omega}_h = \left\{ (x_i, y_j), x_i = ih_x, y_j = jh_y, h_x = h_y = \frac{1}{N}, i = 0, N \right\}$. Применив простейшую кубатурную формулу для приближения интеграла на сетке, получим следующую систему нелинейных уравнений:

$$N^2 (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) - 10 \left(\frac{1}{N^2} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \cosh(u_{p,q}) \right)^2 = 0,$$

где $i = 1, N - 1, j = 1, N - 1$. Матрица Якоби такой системы, в отличие от предыдущих двух задач, не является разреженной. Расчеты проводились с $\omega = 2^{-3} N^{-2}$.

Результаты вычислительных экспериментов

В таблице результаты представлены в формате *время работы в секундах – количество вычислений правой части уравнения*. При вычислениях по некоторому методу требовалось слишком много времени для сходимости, в ячейке представлен прочерк. На каждой из задач благодаря использованию алгоритмов TSLS + D и TSLS + WD было получено значительное ускорение итерационного процесса по сравнению с базовым методом TSLS, причем с увеличением размерности задачи (n) положительные эффекты от применения среднеквадратичного подавления ошибки усиливались. Для сравнения приведены результаты работы метода Ньютона – Крылова на идентичных задачах. Видно, что алгоритм TSLS + WD на больших размерностях превосходит по скорости метод Ньютона – Крылова, причем в некоторых случаях более чем в два раза.

Результаты вычислительных экспериментов
Results of the numerical experiments

n	Алгоритм			
	TSLs	TSLs + D	TSLs + WD	NK
Задача 1				
10 000	2,13/3636	0,84/1416	0,62/1016	0,84/680
22 500	10,59/8888	3,43/2832	1,54/1220	2,61/1050
40 000	34,22/16 968	8,71/4248	4,02/1829	6,57/1598
62 500	–	13,56/4248	7,89/2237	14,66/2341
90 000	–	26,86/5664	15,97/2951	25,25/2803
Задача 2				
10 000	14,25/4444	4,50/1416	3,23/1016	3,95/1031
22 500	67,17/9696	19,57/2832	9,91/1424	12,90/1564
40 000	208,17/16 463	36,40/2832	26,90/2033	39,85/2671
62 500	–	81,50/4248	47,90/2441	87,37/3901
90 000	–	157,31/5664	83,65/2951	148,77/4614
Задача 3				
10 000	2,43/4343	0,81/1416	0,69/1118	0,70/602
22 500	11,83/10 302	3,29/2832	1,62/1322	2,81/1176
40 000	36,61/18 685	5,64/2832	3,91/1829	7,94/1955
62 500	–	17,55/5664	7,21/2135	17,38/2816
90 000	–	25,69/5664	14,20/2747	33,20/3800

Дополнение. После принятия статьи к публикации авторами были обнаружены ранее опубликованные работы по сходной тематике [11; 12]. В англоязычной литературе описанный нами способ средне-квадратичного подавления ошибки называется ускорением Андерсона (Anderson acceleration), причем применяется это ускорение к обычному методу простой итерации. Новизна предложенного в настоящей работе подхода заключается в использовании в качестве базовой итерации двухшаговых процессов (6).

Библиографические ссылки

1. Faleichik B., Bondar I., Byl V. Generalized Picard iterations: A class of iterated Runge – Kutta methods for stiff problems // J. Comput. Appl. Math. 2014. Vol. 262. P. 37–50.
2. Saad Y. Iterative methods for Sparse Linear Systems. 2nd ed. Philadelphia : Siam, 2003.
3. Knoll D. A., Keyes D. E. Jacobian-free Newton – Krylov methods: a survey of approaches and applications // J. Comput. Phys. 2004. Vol. 193, issue 2. P. 357–397.
4. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М. : Физматгиз, 1960.
5. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных уравнений со многими неизвестными. М. : Мир, 1975.
6. Шанеев В. П., Ворожцов Е. В., Исаев В. И. и др. Метод коллокаций и наименьших невязок для трехмерных уравнений Навье – Стокса // Вычисл. методы и программирование. 2013. № 14. С. 306–322.
7. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. 9-е изд. М. : Главная редакция физико-математической литературы, 1968.
8. Trefethen L. N., Bau D. III. Numerical Linear Algebra. Philadelphia : Siam, 1997.
9. Самарский А. А. Теория разностных схем. М. : Наука, 1977.
10. Baker A. H., Jessup E. R., Manteuffel T. A Technique for Accelerating the Convergence of Restarted GMRES // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2005. Vol. 26, issue 4. P. 962–984.
11. Walker H., Peng N. Anderson acceleration for fixed-point iterations // SIAM J. Numer. Anal. 2011. Vol. 49, issue 4. P. 1715–1735.
12. Toth A., Kelley C. T. Convergence Analysis for Anderson Acceleration // SIAM J. Numer. Anal. 2015. Vol. 53, issue 2. P. 805–819.

References

1. Faleichik B., Bondar I., Byl V. Generalized Picard iterations: A class of iterated Runge – Kutta methods for stiff problems. J. Comput. Appl. Math. 2014. Vol. 262. P. 37–50. DOI: 10.1016/j.cam.2013.10.036.
2. Saad Y. Iterative methods for Sparse Linear Systems. 2nd ed. Philadelphia : Siam, 2003.

3. Knoll D. A., Keyes D. E. Jacobian-free Newton – Krylov methods: a survey of approaches and applications. *J. Comput. Phys.* 2004. Vol. 193, issue 2. P. 357–397. DOI: 10.1016/j.jcp.2003.08.010.
4. Faddeev D. K., Faddeeva V. N. [Computational methods of linear algebra]. Moscow : Fizmatgiz, 1960 (in Russ.).
5. Ortega J., Rheinboldt V. [Iterative methods for solving nonlinear equations with many unknowns]. Moscow : Mir, 1975 (in Russ.).
6. Shapeev V. P., Vorozhtsov E. V., Isaev V. I., et al. [The method of collocations and least residuals for three-dimensional Navier – Stokes equations]. *Vychisl. metody program.* [Numer. Methods Program.]. 2013. No. 14. P. 306–322 (in Russ.).
7. Kurosh A. G. [The course of higher algebra]. 9th ed. Moscow : Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury, 1968 (in Russ.).
8. Trefethen L. N., Bau D. III. Numerical Linear Algebra. Philadelphia : Siam, 1997.
9. Samarsky A. A. [The theory of difference schemes]. Moscow : Nauka, 1977 (in Russ.).
10. Baker A. H., Jessup E. R., Manteuffel T. A Technique for Accelerating the Convergence of Restarted GMRES. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2005. Vol. 26, issue 4. P. 962–984. DOI: 10.1137/S0895479803422014.
11. Walker H., Peng N. Anderson acceleration for fixed-point iterations. *SIAM J. Numer. Anal.* 2011. Vol. 49, issue 4. P. 1715–1735. DOI: 10.1137/10078356X.
12. Toth A., Kelley C. T. Convergence Analysis for Anderson Acceleration. *SIAM J. Numer. Anal.* 2015. Vol. 53, issue 2. P. 805–819. DOI: 10.1137/130919398.

Статья поступила в редколлегию 21.03.2017.
Received by editorial board 21.03.2017.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

УДК 519.71

РАСШИРЕННЫЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ И АЛГЕБРАИЗАЦИЯ КОНТАКТНЫХ СХЕМ

Ю. Г. ТАРАЗЕВИЧ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Над кольцами полиномов с идемпотентными переменными (над произвольными полями) найдены классы расширенных матриц (с одним выделенным столбцом), реализующих булевы функции. В последних классах расширенных матриц (над любыми полями) определена система эквивалентных преобразований (сохраняющих реализуемые матрицами булевы функции), обобщающая известную систему элементарных преобразований (строк и столбцов) обычных многочленных матриц. Доказана полнота этой системы для простейшего (двухзначного) случая – в классе расширенных матриц над кольцом полиномов Жегалкина. В частности, дан метод приведения произвольной расширенной матрицы над кольцом полиномов Жегалкина с помощью этой системы преобразований к однозначно определяемому одноэлементному виду. Для того же (двухзначного) случая показано, что класс двоичных матриц инцидентий контактных схем является, по существу, подклассом класса расширенных матриц над кольцом полиномов Жегалкина. Таким образом, получено простейшее «вполне алгебраическое» расширение класса контактных схем – одного из базовых модельных классов математической теории управляющих систем.

Ключевые слова: полином с идемпотентными переменными; расширенная полиномиальная матрица; полный обратный метаморфоз; алгебраизация контактных схем; контактный гиперграф.

Благодарность. Автор выражает благодарность профессору Ф. Е. Ломовцеву за помощь в подготовке статьи.

Образец цитирования:

Таразевич Ю. Г. Расширенные полиномиальные матрицы и алгебраизация контактных схем // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 85–93.

For citation:

Tarazevich Y. G. Augmented polynomial matrices and algebraization of switching circuits. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 3. P. 85–93 (in Russ.).

Автор:

Юрий Георгиевич Таразевич – кандидат физико-математических наук; старший преподаватель кафедры математической кибернетики механико-математического факультета.

Author:

Yury G. Tarazevich, PhD (physics and mathematics); senior lecturer at the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics.
tarazevichyg@mail.ru

AUGMENTED POLYNOMIAL MATRICES AND ALGEBRAIZATION OF SWITCHING CIRCUITS

Y. G. TARAZEVICH^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Over rings of polynomials with idempotent variables (over arbitrary fields) there are defined classes of augmented matrices (with one distinguished column) that realize Boolean functions. In the latter classes of augmented matrices (over any fields) there is defined a system of equivalent transformations (preserving realized Boolean functions) that generalizes the known system of elementary transformations (of rows and columns) of usual polynomial matrices. It is proved the completeness of this system for the simplest (binary) case – in the class of augmented matrices over the ring of Zhegalkin polynomials. In particular, there is given a method for reducing of an arbitrary augmented matrix over the ring of Zhegalkin polynomials by means of this system to a uniquely determined one-element form. For the same (binary) case, it is shown that the class of binary incidence matrixes of switching circuits is, in essence, a subclass of the class of augmented matrices over the ring of Zhegalkin polynomials. This reveals the simplest «completely algebraic» extension of the class of switching circuits – one of the basic model classes of mathematical theory of control systems.

Key words: polynomial with idempotent variables; augmented polynomial matrix; full reverse metamorphosis; algebraization of switching circuits; contact hypergraph.

Acknowledgements. The author expresses his gratitude to full professor F. Y. Lomovtsev for his assistance in the preparation of the article.

В рамках математической теории управляющих систем (УС) [1–3] предлагается алгебраизация класса контактных схем (КС) [2; 3] (одного из базовых модельных классов теории УС), представляющая матрицы инцидентности [4; 5] контактных схем как подкласс специального класса расширенных матриц над кольцом полиномов Жегалкина (РМ_{ПЖ}) [6] и позволяющая в пределах класса РМ_{ПЖ} естественным образом расширить класс КС до нового нетривиального класса контактных гиперграфов (КГ) [6] с новыми оценками сложности реализации булевых функций.

Интересно отметить, что в классической теории УС [1] эквивалентные преобразования УС рассматриваются обычно отдельно и после изучения вопросов синтеза, а синтез УС в большинстве случаев напоминает процесс «механической сборки» схем из отдельных компонентов. При алгебраическом же подходе к синтезу (в классе КС и его расширениях) эквивалентные преобразования становятся основным «инструментом» синтеза и позволяют «выращивать» схему как единое целое, а не «собрать» ее из «кусков» (подсхем и элементов).

Следует сказать, что класс КС алгебраизируется и нетривиально расширяется не только над кольцом полиномов Жегалкина (КС \subset КГ \subset РМ_{ПЖ} [6]), но и над кольцами полиномов с идемпотентными переменными над любыми полями (см. замечания 4 и 5). Однако в настоящей работе рассматривается только алгебраизация контактных схем (КС \subset РМ_{ПЖ}) без «промежуточных» расширений класса КС, причем для самого простого случая – над кольцом полиномов Жегалкина (ПЖ) [3; 7].

Попытки алгебраизации КС предпринимались и ранее. В [8] предложен интересный подход к задачам анализа и синтеза контактных и контактно-вентильных многополюсников на языке алгебраических матриц смежности (над булевой алгеброй), позволяющий, в частности, вычислять все функции проводимостей произвольного многополюсника путем возведения его матрицы смежности в степень, не превышающую размера матрицы. Однако предложенный подход не получил существенного развития в применении к задачам синтеза КС. Кроме того, такой подход не дает никаких обобщений контактных или контактно-вентильных схем.

Расширенные полиномиальные матрицы

Над произвольным полем F рассмотрим обычное (целостное) кольцо полиномов (многочленов) [9; 10], зависящих от произвольного конечного (возможно, пустого) множества переменных $X \subset \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. В этом кольце обычные правила сложения и умножения полиномов дополним условием идемпотентности [10] переменных ($x_i \cdot x_i = x_i$) и выделим подкласс полиномов, степени переменных в которых не превышают единицы. Очевидно, что такой подкласс полиномов образует (нецелостное при $X \neq \emptyset$) ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей [9; 10] с обычной операцией сложения полиномов и операцией умножения, учитывающей идемпотентность переменных. Определенное таким образом кольцо будем называть *кольцом полиномов с идемпотентными переменными над полем F* и обозначать $F[X]$.

Далее, везде под *кольцом* понимается только кольцо полиномов с идемпотентными переменными над некоторым произвольным полем, зависящих от некоторого конечного (возможно, пустого) множества переменных.

Определение 1. *Расширенной матрицей над кольцом $F[X]$ ($\text{PM}_{F[X]}$ -матрицей)* называется пара $\langle A, F[X] \rangle$, где A – произвольная непустая прямоугольная матрица с одним выделенным столбцом, элементами которой являются произвольные полиномы из кольца $F[X]$. Множество всех $\text{PM}_{F[X]}$ -матриц любых размеров будем называть *классом расширенных матриц над кольцом $F[X]$* и обозначать $\text{PM}_{F[X]}$. Кольцо $F[X]$ будем называть *кольцом скаляров*, а поле F – *полем скаляров* $\text{PM}_{F[X]}$ -матрицы (класса $\text{PM}_{F[X]}$). Любой элемент универсального класса $\text{PM} = \text{UPM}_{F[X]}$, где объединение берется по всем полям F и всем конечным X (включая пустое X), будем называть *PM-матрицей*. Матрицу A будем называть *расширенной матрицей* PM-матрицы $\langle A, F[X] \rangle$, ее выделенный столбец – *источниковым столбцом* (ИС), а подматрицу (возможно, пустую), состоящую из неисточниковых столбцов матрицы A , – *основной матрицей* PM-матрицы $\langle A, F[X] \rangle$.

Определим функционирование PM-матриц. Обозначим $X^{(n)} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Для любого поля F и любого упорядоченного набора $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, состоящего из нулей и единиц (т. е. идемпотентов [10]) поля F , естественным образом определяется гомоморфизм [9; 10] $\text{H}_F^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}: F[X^{(n)}] \rightarrow F$, ставящий в соответствие любому полиному $p \in F[X^{(n)}]$ его значение на этом наборе (идемпотентных) значений (идемпотентных) переменных, т. е. полином-константу $p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in F$. Соответственно, любой $\text{PM}_{F[X^{(n)}]}$ -матрице $\langle A, F[X^{(n)}] \rangle$ гомоморфизм $\text{H}_F^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}$ ставит в соответствие (константную) PM_F -матрицу $\langle A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), F \rangle$, расширенную матрицу $A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ которой можно рассматривать как расширенную матрицу (над полем F) системы линейных уравнений [9; 11] со столбцом свободных членов – источниковым столбцом. Разница рангов $\Delta_A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ расширенной и основной матриц этой системы (0 или 1) определяется «булевым» набором $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ (в случае пустой основной матрицы ее ранг считается равным нулю). Таким образом, любая $\text{PM}_{F[X^{(n)}]}$ -матрица $\langle A, F[X^{(n)}] \rangle$ (при любом F) представляет (реализует) некоторую булеву функцию [3; 7] $f_A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, значение которой на произвольном наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \{0, 1\}^n$ определим следующим образом:

$$f_A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \neg \Delta_A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1 - \Delta_A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

иначе говоря, $f_A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1$, если система линейных уравнений с расширенной матрицей $A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ совместна. В этом случае будем говорить, что $\text{PM}_{F[X^{(n)}]}$ -матрица $\langle A, F[X^{(n)}] \rangle$ *реализует булеву функцию $f_A(x_1, x_2, \dots, x_n)$* .

Замечание 1. Таким образом, любую расширенную матрицу над любым кольцом $F[X]$ можно рассматривать как УС, реализующую булеву функцию, зависящую от переменных X (константу при $X = \emptyset$). В общем случае можно определять многоисточниковые расширенные матрицы (реализующие системы булевых функций). Однако в настоящей работе рассматриваются только одноисточниковые расширенные матрицы (с единственным источниковым столбцом).

Элементарные преобразования PM-матриц

Определим систему *элементарных преобразований* PM-матриц (из универсального класса $\text{PM} = \text{UPM}_{F[X]}$) (см. определение 1). Ниже всякое выражение вида $\langle A, F[X] \rangle \rightarrow \langle A', F'[X'] \rangle$ означает,

что РМ-матрица $\langle A, F[X] \rangle$ может быть преобразована в РМ-матрицу $\langle A', F'[X'] \rangle$. Кроме того, приведенные ниже элементарные преобразования 1–3 не изменяют кольца скаляров РМ-матрицы. Далее (для удобства), во всякой расширенной матрице A^f (реализующей некоторую булеву функцию f), полученной из обычной полиномиальной матрицы A выделением в ней источникового столбца (ИС), в качестве ИС будем всегда выбирать последний (крайний правый) столбец матрицы A и помечать его (сверху) символом f (см. ниже п. 3).

1. Преобразования строк

1.1. Удаление (1.1–) или добавление (1.1+) нулевой строки в расширенной матрице, при этом единственную строку однострочной матрицы удалять нельзя.

1.2. Перестановка строк расширенной матрицы.

1.3. Прибавление к любой строке расширенной матрицы любой другой ее строки, умноженной на любой элемент кольца скаляров.

2. Преобразования столбцов

2.1. Удаление (2.1–) или добавление (2.1+) нулевого столбца в основной матрице (ИС удалять нельзя).

2.2. Перестановка столбцов в основной матрице (ИС переставлять нельзя).

2.3. Прибавление любого столбца основной матрицы, умноженного на любой элемент кольца скаляров, к любому другому столбцу расширенной матрицы.

3. Удаление (3–) или добавление (3+) «компонент связности», не содержащих «источника». Для любых непустых прямоугольных матриц A и B над одним и тем же кольцом $F[X]$ рассмотрим расширенную матрицу A^f и клеточно-диагональную расширенную матрицу $B \dot{+} A^f$, являющуюся прямой суммой [11] матриц B и A^f :

$$A^f = \begin{array}{c} f \\ \boxed{A} \end{array}, \quad B \dot{+} A^f = \begin{array}{cc} & f \\ \begin{array}{|c|c|} \hline B & 0 \\ \hline 0 & A \\ \hline \end{array} \end{array}.$$

Тогда (3–) $\langle B \dot{+} A^f, F[X] \rangle \rightarrow \langle A^f, F[X] \rangle$, (3+) $\langle A^f, F[X] \rangle \rightarrow \langle B \dot{+} A^f, F[X] \rangle$.

4. Замена кольца скаляров

4.1. Замена поля скаляров. Пусть коэффициенты всех полиномов расширенной матрицы A РМ-матрицы $\langle A, F[X] \rangle$ принадлежат некоторому полю F' . Тогда

$$\langle A, F[X] \rangle \rightarrow \langle A, F'[X] \rangle.$$

4.2. Замена фиктивных переменных. Пусть переменные всех полиномов расширенной матрицы A РМ-матрицы $\langle A, F[X] \rangle$ принадлежат некоторому конечному (возможно, пустому) множеству X' . Тогда

$$\langle A, F[X] \rangle \rightarrow \langle A, F[X'] \rangle.$$

Замечание 2. В отличие от «бесполезного функтора» 4.2 («забывающего» и «выдумывающего» фиктивные переменные) «функтор» 4.1 позволяет сводить задачу синтеза расширенной матрицы A над кольцом $F[X]$ к (зачастую существенно более простой) задаче синтеза той же матрицы над кольцом $F'[X]$ с более «мощным» полем F' . При этом задача синтеза последовательности РМ $_{F[X^{(n)}}]$ -матриц ($n = 0, 1, 2, \dots$) может сводиться к «неэффективной» задаче построения последовательности надполей поля F .

Легко видеть, что преобразования 1, по сути, эквивалентны известной системе элементарных преобразований строк обычных многочленных матриц [11], а преобразования 2 отличаются от обычных преобразований столбцов лишь учетом наличия выделенного (источникового) столбца. При этом очевидно, что любое из преобразований 1–2 не изменяет рангов расширенной и основной матриц для любой (константной) РМ $_F$ -матрицы над любым полем F . Очевидно также, что преобразование 3 изменяет ранги расширенной и основной матриц на одну и ту же величину (для любой РМ $_F$ -матрицы над любым полем F). Ясно также, что «функтор» 4.1 сохраняет ранг любых (константных) матриц над любыми полями.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. Элементарные преобразования 1–3 и 4.1 не изменяют разницы рангов расширенной и основной матриц для любой PM_F -матрицы над любым полем F .

Определение 2. Две PM -матрицы будем называть *эквивалентными* (элементарно эквивалентными соответственно), если одну из них можно преобразовать в другую с помощью конечного числа (не более одного соответственно) применения элементарных преобразований 1–4.

Очевидно следующее утверждение (свойство «обратимости» преобразований 1–4).

Утверждение 2. Для любой пары элементарно эквивалентных PM -матриц $\langle A, F[X] \rangle$ и $\langle A', F'[X'] \rangle$ существуют два элементарных преобразования одного и того же типа (из девяти типов 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2, 2.3, 3, 4.1, 4.2), одно из которых преобразует $\langle A, F[X] \rangle$ в $\langle A', F'[X'] \rangle$, а другое – $\langle A', F'[X'] \rangle$ в $\langle A, F[X] \rangle$.

Очевидно также, что любой гомоморфизм $H_F^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}$ (см. определение функционирования PM -матриц) любой паре элементарно эквивалентных $PM_{F[X^{(n)}]}$ -матриц ставит в соответствие пару элементарно эквивалентных PM_F -матриц.

Из предыдущего очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Утверждение 3. Любые две эквивалентные PM -матрицы реализуют одну и ту же (с точностью до фиктивных переменных [3; 7]) булеву функцию.

Эквивалентные преобразования в классе $PM_{ПЖ}$

Простейшим примером полиномов с идемпотентными переменными (над двухэлементным полем Z_2) являются полиномы Жегалкина. Пусть $P_2^{(n)}$ и $ПЖ^{(n)} = Z_2[X^{(n)}]$ – изоморфные кольца [9; 10] булевых функций и полиномов Жегалкина [3; 7], зависящих от множества переменных $X^{(n)} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Класс PM -матриц над кольцом $ПЖ^{(n)}$ обозначим $PM_{ПЖ^{(n)}}$.

Покажем, что любые две $PM_{ПЖ^{(n)}}$ -матрицы, реализующие одну и ту же булеву функцию, эквивалентны (в смысле определения 2). Тем самым мы покажем, что элементарные преобразования 1–4 образуют полную систему эквивалентных преобразований [1, с. 87] в классе $PM_{ПЖ^{(n)}}$, как в классе УС (см. замечание 1).

Ниже предлагается один из методов «полного обратного метаморфоза» (ПОМ) в классе $PM_{ПЖ^{(n)}}$ – процедура приведения произвольной $PM_{ПЖ^{(n)}}$ -матрицы с помощью элементарных преобразований 1–3 к однозначно определяемому одноэлементному каноническому виду с одновременным вычислением (в виде полинома Жегалкина) реализуемой $PM_{ПЖ^{(n)}}$ -матрицей функции. Таким образом, изложенную ниже процедуру (являющуюся, по сути, одной из модификаций метода Гаусса [9; 11]) можно рассматривать как универсальный метод анализа [8] в классе $PM_{ПЖ^{(n)}}$.

Для любой формулы (или выражения) Φ , представляющей некоторую булеву функцию, через $[\Phi]$ обозначим полином Жегалкина, реализующий эту булеву функцию. Через \oplus и \cdot обозначим операции сложения и умножения в кольце $ПЖ^{(n)}$.

Рассмотрим произвольную $PM_{ПЖ^{(n)}}$ -матрицу $\langle A^f, ПЖ^{(n)} \rangle$, реализующую некоторую функцию $f \in P_2^{(n)}$. Выделим крайний левый столбец расширенной матрицы A^f :

$$A^f = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline p_1 \\ \hline \vdots \\ \hline p_{l-1} \\ \hline p_l \\ \hline \end{array} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \phantom{p_{l-1}} \\ \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} f \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{|c|} \hline A_1 \\ \hline \end{array}$$

С учетом элементарных преобразований 1.3 к предпоследней строке матрицы A^f прибавим (по модулю два) последнюю строку, умноженную на полином $[\bar{p}_{l-1}] = p_{l-1} \oplus 1$. После очевидных преобразований $(p_{l-1} \oplus p_l \cdot (p_{l-1} \oplus 1) = p_{l-1} \cdot p_l \oplus p_{l-1} \oplus p_l = [p_{l-1} \vee p_l])$ получим эквивалентную расширенную матрицу (над тем же кольцом):

$$\begin{array}{c} f \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline p_1 & \vdots \\ \hline [p_{l-1} \vee p_l] & A_2 \\ \hline p_l & \vdots \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Далее, к последней строке полученной матрицы прибавим предпоследнюю строку, умноженную на p_i :

$$\begin{array}{c} f \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline p_1 & \vdots \\ \hline [p_{l-1} \vee p_l] & A_3 \\ \hline 0 & \vdots \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Таким же образом «обнулим» предпоследний элемент первого столбца и все остальные его элементы, кроме самого верхнего:

$$\begin{array}{c} f \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline [p_1 \vee \dots \vee p_l] & \vdots \\ \hline 0 & A' \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \vdots \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$$

В полученной матрице обозначим $q_1 = [p_1 \vee \dots \vee p_l]$ и с учетом (1.1+) добавим сверху нулевую строку. Теперь наша расширенная матрица имеет следующий вид:

$$\begin{array}{c} f \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline q_1 & q_2 & \dots & q_{m-1} & q_m \\ \hline 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$$

К первой (добавленной) строке прибавим вторую, умноженную на $[\bar{q}_1] = q_1 \oplus 1$:

$$\begin{array}{c} f \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & [\bar{q}_1] \cdot q_2 & \dots & [\bar{q}_1] \cdot q_{m-1} & [\bar{q}_1] \cdot q_m \\ \hline q_1 & q_2 & \dots & q_{m-1} & q_m \\ \hline 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Далее, с учетом 2.3 к каждому i -му столбцу ($2 \leq i \leq m$) прибавим первый столбец, умноженный на q_i , и получим $(q_1 \cdot q_i \oplus q_i = (q_1 \oplus 1) \cdot q_i = [\bar{q}_1] \cdot q_i)$:

$$\begin{array}{c} f \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & [\bar{q}_1] \cdot q_2 & \dots & [\bar{q}_1] \cdot q_{m-1} & [\bar{q}_1] \cdot q_m \\ \hline q_1 & [\bar{q}_1] \cdot q_2 & \dots & [\bar{q}_1] \cdot q_{m-1} & [\bar{q}_1] \cdot q_m \\ \hline 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$$

С учетом 1.3 ко второй строке прибавим первую:

	f			
0	$[\bar{q}_1] \cdot q_2$...	$[\bar{q}_1] \cdot q_{m-1}$	$[\bar{q}_1] \cdot q_m$
q_1	0	...	0	0
0	B			
\vdots				
0				

С учетом 1.2 и (3–) удалим одноэлементную «компоненту связности» q_1 (вместе с первым столбцом и второй строкой):

	f		
$[\bar{q}_1] \cdot q_2$...	$[\bar{q}_1] \cdot q_{m-1}$	$[\bar{q}_1] \cdot q_m$
B			

Таким образом, с помощью преобразований 1–3 произвольная расширенная матрица A^f над кольцом ПЖ⁽ⁿ⁾ преобразована в эквивалентную расширенную матрицу над тем же кольцом, имеющую столько же строк и на один столбец меньше.

Повторяя предыдущую процедуру, можно последовательно «избавиться» от всех столбцов, кроме источникового, и в оставшемся источниковом столбце «обнулить» все элементы, кроме самого верхнего, после чего, удалив (с учетом (1.1–)) из полученной одностолбцовой матрицы лишние нулевые строки, получить одноэлементную расширенную матрицу

$$A_0^f = \begin{bmatrix} f \\ [-f] \end{bmatrix}$$

(с пустой основной матрицей), где $[-f]$ – полином из кольца ПЖ⁽ⁿ⁾, реализующий отрицание функции f . Очевидно, что такая каноническая РМ_{ПЖ⁽ⁿ⁾}-матрица $\langle A_0^f, \text{ПЖ}^{(n)} \rangle$ для любой функции $f \in P_2^{(n)}$ определяется однозначно.

Тогда с учетом утверждений 2 и 3 и замечания 1 имеет место следующее утверждение.

Утверждение 4. Две РМ_{ПЖ⁽ⁿ⁾}-матрицы эквивалентны тогда и только тогда, когда они реализуют одну и ту же функцию из $P_2^{(n)}$. При этом система 1–3 является полной системой эквивалентных преобразований в классе РМ_{ПЖ⁽ⁿ⁾} (как в классе УС).

Замечание 3. Метод ПОМ показывает, что семь элементарных преобразований 1–3 выводятся из четырех – 1.1, 1.3, 2.3 и 3, – при этом подматрицу B в преобразовании 3 можно считать одноэлементной.

Замечание 4. Метод ПОМ легко обобщается на классы РМ-матриц над кольцами полиномов с идемпотентными переменными над любыми полями. При этом для любого нулевого или простого p система 1–4 оказывается полной системой эквивалентных преобразований в классе $\text{РМ}_p = \text{УРМ}_{F[X]}$, где объединение берется по всем полям F характеристики p и всем конечным X (включая пустое X).

Алгебраизация класса КС в классе РМ_{ПЖ} [6]

Покажем, что класс КС⁽ⁿ⁾ всех двухполюсных контактных схем [2; 3], построенных из контактов переменных из множества $X^{(n)} = \{x_1, \dots, x_n\}$, является, по существу, подклассом класса РМ_{ПЖ⁽ⁿ⁾}.

Рассмотрим произвольную двухполюсную контактную схему $S \in \text{КС}^{(n)}$, дополненную («расширенную») *источниковым ребром*, соединяющим полюсы.

Любой такой «расширенной» схеме (т. е. неориентированному (мульти)графу без петель [4; 5; 7] с одним ребром – «источником» и остальными ребрами – контактами) естественным образом ставится в соответствие двоичная расширенная матрица инциденций [4; 5] A (по две единицы в каждом столбце), каждый столбец которой, кроме одного (источникового), помечен символом замыкающего (x_i) или размыкающего (\bar{x}_j) контакта некоторой переменной из множества $X^{(n)} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Неисточниковые столбцы матриц инциденций контактных схем будем называть *контактными столбцами*.

Поскольку размыкание контакта в схеме S , по сути, эквивалентно умножению на ноль соответствующего контактного столбца матрицы инцидентий A схемы S , а замыкание контакта – умножению соответствующего столбца на единицу, то метки x_i и $\bar{x}_j = x_j \oplus 1$ контактных столбцов матрицы инцидентий A естественным образом рассматриваются как полиномиальные множители соответствующих двоичных столбцов. Тогда, умножив контактные столбцы двоичной расширенной матрицы A на свои метки (полиномы Жегалкина x_i или $x_j \oplus 1$), получим собственно полиномиальную расширенную матрицу A' (над кольцом ПЖ⁽ⁿ⁾), содержащую по два одинаковых полинома (вида $x_m \oplus \alpha$) в каждом контактном столбце и две единицы в источниковом столбце. Полиномиальную матрицу A' будем называть *расширенной матрицей инцидентий схемы S в полиномиальном виде*.

Очевидно следующее утверждение.

Утверждение 5. Имеет место взаимно однозначное соответствие между цепями контактов, соединяющими полюсы в произвольной двухполюсной контактной схеме, дополненной источниковым ребром, и одномерными циклами [4; 5; 7], содержащими источниковое ребро этой контактной схемы, такое, что соответствующий цикл объединяет соответствующую цепь и источниковое ребро.

На каждом двоичном наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ «расширенная» схема S превращается в свой подграф $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, состоящий из источникового ребра и замкнутых на наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ контактов схемы S . А расширенная полиномиальная матрица инцидентий A' схемы S на том же наборе превращается в расширенную двоичную матрицу инцидентий $A'(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ подграфа $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, т. е. в расширенную матрицу над полем Z_2 (нулевые столбцы матрицы инцидентий $A'(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ соответствуют «пустым» ребрам подграфа $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, т. е. разомкнутым на наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ контактам схемы S).

И если в подграфе $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ существует цикл, состоящий из источникового ребра и какого-то множества замкнутых на наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ контактов, то этот цикл образует эйлеров подграф графа $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ [4; 5] (с четными степенями всех вершин). И следовательно, сумма (по модулю два) соответствующих столбцов двоичной матрицы инцидентий $A'(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ графа $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ равна нулевому столбцу, т. е. источниковый столбец линейно выражается (по модулю два) через ненулевые на наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ контактные столбцы.

И наоборот, если в матрице инцидентий $A'(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ графа $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ источниковый столбец выражается суммой (по модулю два) каких-то ненулевых контактных столбцов, то соответствующие замкнутые контакты и источниковое ребро в графе $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ образуют подграф с четными степенями всех вершин. Следовательно, источниковое ребро содержится в некотором цикле графа $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Отсюда следует (с учетом утверждения 5), что булева функция, реализуемая контактной схемой S , совпадает с функцией, реализуемой РМ_{ПЖ⁽ⁿ⁾}-матрицей $\langle A', \text{ПЖ}^{(n)} \rangle$, где A' – расширенная матрица инцидентий схемы S в полиномиальном виде.

Таким образом, имеем алгебраизацию класса КС⁽ⁿ⁾ как подкласса класса РМ_{ПЖ⁽ⁿ⁾}.

Замечание 5. Аналогично можно показать, что для любого поля F класс КС⁽ⁿ⁾ является, по существу, подклассом класса РМ _{$F[X^{(n)}]$} . При этом если характеристика поля F не равна двум, то алгебраизация

КС⁽ⁿ⁾ в классе РМ _{$F[X^{(n)}]$} осуществляется на основе «троичных» матриц инцидентий (в каждом столбце которых ровно два ненулевых элемента: единица и минус единица поля F).

Замечание 6. Метод ПОМ показывает (с учетом утверждения 2 и замечаний 4 и 5), что любая РМ-матрица с заданными свойствами («бабочка»), в том числе любая классическая контактная схема, может быть получена «прямым метаморфозом», т. е. эквивалентными преобразованиями 1–4, из одноэлементной канонической матрицы («эмбрион») или какой-нибудь другой РМ-матрицы с «простой морфологией» («гусеница»). Таким образом, алгебраический подход позволяет синтезировать схему целиком, а не «собирать» ее из «кусков» (подсхем и элементов). Это избавляет от решения многих (в том числе «топологических») вопросов в задачах эквивалентных преобразований, анализа и синтеза контактных и «гиперконтактных» схем.

Библиографические ссылки

1. Яблонский С. В. Элементы математической кибернетики. М. : Высшая школа, 2007.
2. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М. : Издательство МГУ, 1984.
3. Нигматуллин Р. Г. Сложность булевых функций. М. : Наука, 1991.
4. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. М. : Наука, 1974.
5. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И. и др. Лекции по теории графов. М. : Наука, 1990.
6. Таразевич Ю. Г. Алгебраизация и обобщение контактных схем // Дискретная математика и ее приложения : материалы XII Междунар. семинара им. акад. О. Б. Лупанова (Москва, 20–25 июня 2016 г.). М. : Издательство механико-математического факультета МГУ, 2016. С. 170–172.
7. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М. : Высшая школа, 2003.
8. Лунц А. Г. Алгебраические методы анализа и синтеза контактных схем // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1952. Т. 16, вып. 5. С. 405–426.
9. Винберг Э. Б. Курс алгебры. М. : Факториал пресс, 2001.
10. Зариский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра : в 2 т. М. : Иностранная литература, 1963. Т. 1.
11. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М. : Наука, 1970.

References

1. Yablonsky S. V. [Elements of mathematical cybernetics]. Moscow : Vysshaya shkola, 2007 (in Russ.).
2. Lupanov O. B. [Asymptotic bounds for the complexity of control systems]. Moscow : Moscow State University, Publ. house, 1984 (in Russ.).
3. Nigmatullin R. G. [Complexity of Boolean functions]. Moscow : Nauka, 1991 (in Russ.).
4. Basaker R., Saaty T. [Finite graphs and networks]. Moscow : Nauka, 1974 (in Russ.).
5. Emelichev V. A., Melnikov O. I., Sarvanov V. I., et al. [Lectures in graph theory]. Moscow : Nauka, 1990 (in Russ.).
6. Tarazevich Y. G. [Algebraization and generalization of switching circuits]. *Diskretnaya matematika i ee prilozheniya* [Discrete mathematics and its applications] : materialy XII Mezhdunar. semin. im. akad. O. B. Lupanova (Moscow, 20–25 June, 2016). Moscow : Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, Publ. house, 2016. P. 170–172 (in Russ.).
7. Jablonski S. V. [Introduction to discrete mathematics]. Moscow : Vysshaya shkola, 2003 (in Russ.).
8. Luntz A. G. [Algebraic methods of analysis and synthesis of switching circuits]. *Izv. Akad. nauk SSSR. Ser. mat.* 1952. Vol. 16, issue 5. P. 405–426 (in Russ.).
9. Vinberg E. B. [Algebra course]. Moscow : Faktorial press, 2001 (in Russ.).
10. Zariski O., Samuel P. [Commutative algebra] : in 2 vol. Moscow : Inostrannaya literatura, 1963. Vol. 1 (in Russ.).
11. Maltsev A. I. [Fundamentals of linear algebra]. Moscow : Nauka, 1970 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 12.06.2017.
Received by editorial board 12.06.2017.

УДК 519.1

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ И РАСПОЗНАВАНИЕ ГРАФОВ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ РЕБЕР 3-ХРОМАТИЧЕСКИХ ГИПЕРГРАФОВ КРАТНОСТИ НЕ ВЫШЕ ДВУХ В КЛАССЕ РАСЩЕПЛЯЕМЫХ ГРАФОВ

Т. В. ЛУБАШЕВА¹⁾, Ю. М. МЕТЕЛЬСКИЙ²⁾

¹⁾Белорусский государственный экономический университет,
пр. Партизанский, 26, 220070, г. Минск, Беларусь

²⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Пусть $L^m(k)$ обозначает класс графов пересечений ребер k -хроматических гиперграфов кратности не выше m . Известно, что задача распознавания графов из $L^1(k)$ полиномиально разрешима при $k = 2$ и является NP-полной при $k = 3$. Также известно, что для любого $k \geq 2$ графы из $L^1(k)$ характеризуются конечным списком запрещенных порожденных подграфов в классе расщепляемых графов. Вопрос о сложности распознавания графов из $L^m(k)$ при фиксированных $k \geq 2$ и $m \geq 2$ в настоящее время остается открытым. Здесь доказано, что для графов из $L^2(3)$ существует конечная характеристика в терминах запрещенных порожденных подграфов в классе расщепляемых графов. Отсюда, в частности, вытекает полиномиальная разрешимость задачи распознавания $G \in L^2(3)$ в классе расщепляемых графов. Результаты получены на основе доказанной в работе характеристики графов из $L^2(3)$ в терминах степеней вершин в одном из подклассов расщепляемых графов. В свою очередь, указанная характеристика получена с помощью известного описания графов из $L^m(k)$ в терминах покрытий кликами, а также доказанной в работе леммы о большой клике, уточняющей взаимное расположение клик в графе из $L^m(k)$.

Ключевые слова: граф пересечений ребер гиперграфа; запрещенный порожденный подграф; характеристика; расщепляемый граф.

CHARACTERIZATION AND RECOGNITION OF EDGE INTERSECTION GRAPHS OF 3-CHROMATIC HYPERGRAPHS WITH MULTIPLICITY AT MOST THAN TWO IN THE CLASS OF SPLIT GRAPHS

T. V. LUBASHEVA^a, Y. M. METELSKY^b

^aBelarus State Economic University, 26 Partyzanski Avenue, Minsk 220070, Belarus

^bBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: Y. M. Metelsky (metelsky@bsu.by)

Let $L^m(k)$ denote the class of edge intersection graphs of k -chromatic hypergraphs with multiplicity at most m . It is known that the problem of recognizing graphs from $L^1(k)$ is polynomially solvable if $k = 2$ and is NP-complete if $k = 3$. It is also known that for any $k \geq 2$ the graphs from $L^1(k)$ can be characterized by a finite list of forbidden induced

Образец цитирования:

Лубашева Т. В., Метельский Ю. М. Характеризация и распознавание графов пересечений ребер 3-хроматических гиперграфов кратности не выше двух в классе расщепляемых графов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 94–99.

For citation:

Lubasheva T. V., Metelsky Y. M. Characterization and recognition of edge intersection graphs of 3-chromatic hypergraphs with multiplicity at most than two in the class of split graphs. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 3. P. 94–99 (in Russ.).

Авторы:

Татьяна Владимировна Лубашева – ассистент кафедры экономической информатики факультета менеджмента.

Юрий Михайлович Метельский – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры математической кибернетики механико-математического факультета.

Authors:

Tatiana V. Lubasheva, assistant at the department of economic informatics, faculty of management.

lubasheva_t@mail.ru

Yury M. Metelsky, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics.

metelsky@bsu.by

subgraphs in the class of split graphs. The question of the complexity of recognizing graphs from $L^m(k)$ for fixed $k \geq 2$ and $m \geq 2$ remains open. Here it is proved that there exists a finite characterization in terms of forbidden induced subgraphs for the graphs from $L^2(3)$ in the class of split graphs. In particular, it follows that the problem of recognizing graphs from $L^2(3)$ is polynomially solvable in the class of split graphs. The results are obtained on the basis of proven here characterization of the graphs from $L^2(3)$ in terms of vertex degrees in one of the subclasses of split graphs. In turn, this characterization is obtained using the well-known description of graphs from $L^m(k)$ by means of clique coverings and proven here Lemma on large clique, specifying the mutual location of cliques in the graph from $L^m(k)$.

Key words: edge intersection graph of hypergraph; forbidden induced subgraph; characterization; split graph.

Рассматриваем конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Обозначим множество вершин и множество (семейство) ребер графа (гиперграфа) G через $V(G)$ и $E(G)$ соответственно. Если $N(v) = N_G(v)$ – окружение вершины v в графе G , то $\deg(v) = \deg_G(v) = |N(v)|$ – степень вершины v . Будем считать, что $E_G(v)$ – множество ребер графа G , инцидентных v . Если $X \subseteq V(G)$, то $G(X)$ – подграф, порожденный множеством X , $\deg_X(v) = |N(v) \cap X|$ – степень вершины v относительно X .

Пусть t – натуральное число. Тогда произвольные функции $\varphi : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, t\}$ и $\psi : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, t\}$ называются соответственно *вершинной* и *реберной t -раскрасками* графа G . Если любые две смежные вершины графа имеют в вершинной t -раскраске различные образы, то такая раскраска называется *правильной*. Далее, $\chi(G)$ обозначает хроматическое число графа G , т. е. минимальное t , при котором существует правильная вершинная t -раскраска этого графа.

Граф $\Omega(F)$ пересечений семейства $F = (S_1, S_2, \dots, S_n)$ непустых множеств определяется условиями:

- 1) $V(\Omega(F)) = F$;
- 2) вершины S_i и S_j , $i \neq j$, смежны в $\Omega(F)$, если и только если $S_i \cap S_j \neq \emptyset$.

Граф $L(H)$ пересечений ребер гиперграфа H определяется как граф пересечений $\Omega(E(H))$. Другими словами, вершины графа $L(H)$ биективно соответствуют ребрам гиперграфа H и две вершины в графе $L(H)$ смежны тогда и только тогда, когда соответствующие ребра гиперграфа H пересекаются. Известно, что каждый граф является графом пересечений ребер некоторого гиперграфа [1].

Гиперграф H называется *k -хроматическим*, если существует разбиение $V(H) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_l$ множества его вершин на $l \leq k$ цветных классов V_i такое, что каждое ребро гиперграфа содержит не более одной вершины из каждого цветного класса. В [2] класс графов пересечений ребер 2-хроматических гиперграфов охарактеризован посредством бесконечного списка запрещенных порожденных подграфов. Существование полиномиального алгоритма распознавания графов из этого класса доказано в [3]. Там же доказано, что задача распознавания графов пересечений ребер 3-хроматических гиперграфов является NP-полной.

Кратность пары вершин гиперграфа определяется как число его ребер, содержащих обе вершины пары. *Кратность* гиперграфа – это максимальная кратность пар его вершин. Класс графов пересечений ребер k -хроматических гиперграфов кратности не выше m обозначим через $L^m(k)$. В [4] класс $L^1(2)$ охарактеризован посредством бесконечного списка запрещенных порожденных подграфов. Известно, что задача распознавания графов из $L^1(k)$ полиномиально разрешима при $k = 2$ и является NP-полной при $k = 3$ [3]. Вопрос о сложности распознавания графов из класса $L^m(k)$ при фиксированных $k \geq 2$ и $m \geq 2$ на данный момент остается открытым.

Множество попарно смежных вершин графа называется *кликой*; *максимальная клика* максимальна относительно включения. Граф G называется *расщепляемым*, если существует разбиение множества его вершин $V(G) = C \cup S$ на клику C и независимое множество S (*полярное разбиение* (C, S)). Расщепляемый граф G с фиксированным полярным разбиением (C, S) назовем *расщепленным графом* и обозначим $G(C, S)$. В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что в полярном разбиении (C, S) расщепляемого графа клика C является максимальной. Удалив из расщепленного графа $G(C, S)$ все ребра, содержащиеся в клике C , получим двудольный граф H с разбиением на доли (C, S) , который назовем *графом, ассоциированным с $G(C, S)$* , и обозначим как $H(C, S)$.

Известно, что для любого k класс $L^1(k)$ может быть охарактеризован посредством конечного списка запрещенных порожденных подграфов в классе расщепляемых графов [5].

В настоящей работе доказано, что для класса $L^2(3)$ существует конечная характеристика в терминах запрещенных порожденных подграфов в классе расщепляемых графов. Отсюда, в частности, вытекает полиномиальная разрешимость задачи распознавания графов из $L^2(3)$ в классе расщепляемых графов.

Характеризация и распознавание графов из $L^2(3)$ в классе расщепляемых графов

Конечное семейство $Q = (C_i : i \in I)$ – клик графа G – называется *покрытием* этого графа, если каждая вершина и каждое ребро (как пара вершин) графа G содержатся в некоторой C_i ; клики C_i – *кластеры* покрытия Q . Покрытие Q графа G называется *k -хроматическим*, если $\chi(\Omega(Q)) \leq k$, и *m -ограниченным*, если никакие два его кластера не имеют более чем m общих вершин. Далее, считаем, не ограничивая общности, что в k -хроматическом m -ограниченном покрытии Q никакой кластер не является подмножеством другого. В частности, одновершинный кластер в Q можно образовать лишь изолированной вершиной графа.

Лемма 1 [1]. *Граф G принадлежит классу $L^m(k)$ тогда и только тогда, когда существует k -хроматическое m -ограниченное покрытие этого графа.*

Клику K графа назовем (k, m) -кликкой, если $|K| \geq m(k-1)^2 + 1$.

Лемма 2 (о большой клике). *Любая максимальная (k, m) -кликка графа G является кластером каждого его k -хроматического m -ограниченного покрытия.*

Доказательство. Пусть $G \in L^m(k)$, а K – некоторая максимальная клика графа G , не являющаяся кластером некоторого k -хроматического m -ограниченного покрытия Q этого графа. Пусть далее Q_1, Q_2, \dots, Q_t – кластеры покрытия Q , которые имеют непустое пересечение с кликой K . Тогда семейство $A = (A_1, A_2, \dots, A_t)$, где $A_i = Q_i \cap K$, $i = 1, 2, \dots, t$, является k -хроматическим m -ограниченным покрытием полного графа $G(K)$. Согласно высказанному выше предположению считаем, что покрытие A не содержит двух кластеров, один из которых является подмножеством другого, т. е. $A_i \setminus A_j \neq \emptyset$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, t\}$ таких, что $i \neq j$. Поскольку K – максимальная клика, то $K \neq A_i$ для любого $i = 1, 2, \dots, t$.

Рассмотрим произвольный кластер A_j , $j \in \{1, 2, \dots, t\}$, и вершину $v \in K \setminus A_j$. Поскольку K – клика, то вершина v смежна со всеми вершинами x кластера A_j в $G(K)$. В связи с тем что A – k -хроматическое m -ограниченное покрытие графа $G(K)$, ребра вида vx , где $x \in A_j$, покрываются не более чем $k-1$ кластерами, отличными от A_j , каждый из которых имеет с A_j не более чем m общих вершин. Таким образом, $|A_j| \leq m(k-1)$ для любого $j = 1, 2, \dots, t$.

Далее, рассмотрим пару кластеров A_i и A_j покрытия A таких, что $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Для любой вершины $u \in A_i \setminus A_j$ ребра ux , где $x \in A_j \setminus A_i$, если таковые существуют, не принадлежат кластерам A_i и A_j . Поскольку A – k -хроматическое m -ограниченное покрытие графа $G(K)$, то ребра вида ux , где $x \in A_j \setminus A_i$, покрываются не более чем $k-2$ кластерами из A . Каждый из этих кластеров пересекается с A_j не более чем по m вершинам. Отсюда получаем следующую оценку: $|A_j \setminus A_i| \leq m(k-2)$.

И наконец, рассмотрим произвольную вершину $w \in K$. Считаем, не ограничивая общности, что она принадлежит $s \leq k$ кластерам A_1, A_2, \dots, A_s покрытия A . Из вышесказанного вытекает следующая цепочка соотношений: $|K| = |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_s| = |A_1| + |A_2 \setminus A_1| + |A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)| + \dots + |A_s \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{s-1})| \leq m(k-1) + (s-1)m(k-2) \leq m(k-1) + (k-1)m(k-2) = m(k-1)(1 + (k-2)) = m(k-1)^2$.

Таким образом, $|K| \leq m(k-1)^2$. Следовательно, K не является (k, m) -кликкой, что и доказывает лемму.

Далее, рассмотрим класс $L^2(3)$, а 3-хроматическое 2-ограниченное покрытие для краткости будем называть $(3, 2)$ -покрытием.

Теорема 1. *Пусть G – расщепляемый граф с полярным разбиением (C, S) , $|C| \geq 9$. Тогда $G \in L^2(3)$, если и только если выполнены условия:*

- 1) $\deg_S(v) \leq 2$ для любой вершины $v \in C$;
- 2) $\deg(v) \leq 4$ для любой вершины $v \in S$.

Доказательство. Пусть G – расщепляемый граф с полярным разбиением (C, S) , $|C| \geq 9$. Не ограничивая общности, можно считать граф G связным.

Пусть $G \in L^2(3)$. Тогда в силу леммы 1 существует $(3, 2)$ -покрытие Q графа G . Поскольку C есть $(3, 2)$ -клика, то по лемме 2 имеем $C \in Q$. Из определения $(3, 2)$ -покрытия вытекает, что кластерами покрытия Q , отличными от C , являются либо ребра, соединяющие вершины из C с вершинами из S , либо треугольники, в которых одна вершина принадлежит S , а две других – C . Кроме того, каждая вершина графа G входит не более чем в два кластера из Q , отличных от C . Отсюда вытекает выполнение условий 1) и 2) теоремы 1.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть G удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 1. Согласно лемме 1 достаточно доказать, что существует $(3, 2)$ -покрытие этого графа.

По графу G построим граф G' : для каждой вершины v графа G , принадлежащей S и удовлетворяющей неравенству $\deg(v) < 4$, добавим в клику C ровно $4 - \deg(v)$ новых вершин и соединим их с v . Полученный в результате расщепляемый граф G' с полярным разбиением (C', S) удовлетворяет следующим условиям:

- 1') $\deg_S(v) \leq 2$ для любой вершины $v \in C'$;
- 2') $\deg(v) = 4$ для любой вершины $v \in S$.

Легко показать, что G и G' одновременно либо принадлежат, либо не принадлежат к классу $L^2(3)$. Поэтому далее, не ограничивая общности, считаем, что G удовлетворяет условиям 1') и 2').

Очевидно следующее утверждение.

Утверждение 1. Для расщепленного графа $G(C, S)$, где $|C| \geq 9$, удовлетворяющего условиям 1') и 2'), существует $(3, 2)$ -покрытие, если и только если для ассоциированного с ним двудольного графа $H(C, S)$ существует реберная 2-раскраска, удовлетворяющая условиям:

- а) каждая вершина из S инцидентна двум ребрам одного цвета и двум – другого;
- б) каждая вершина степени 2 из C инцидентна ребрам разного цвета.

Реберную 2-раскраску двудольного графа H с фиксированным разбиением на доли (C, S) назовем *сбалансированной*, если она удовлетворяет условиям а) и б) утверждения 1. Осталось доказать следующее утверждение.

Утверждение 2. Если двудольный граф H с разбиением на доли (C, S) удовлетворяет условиям:

- 1) $\deg(v) \leq 2$ для любой вершины $v \in C$;
- 2) $\deg(v) = 4$ для любой вершины $v \in S$,

то для него существует сбалансированная реберная 2-раскраска.

Доказательство проведем методом математической индукции относительно числа вершин в доле S . Существование сбалансированной реберной 2-раскраски для графа H очевидно, если $|S| = 1$. Далее, считаем, что $|S| \geq 2$. Зафиксируем произвольную вершину $v \in S$ и возьмем некоторую сбалансированную реберную 2-раскраску $\varphi: E(H - v) \rightarrow \{1, 2\}$ графа $H - v$. Заметим, что если среди ребер графа $H - v$, смежных с ребрами из $E_H(v)$, есть не более двух ребер каждого цвета относительно φ , то раскраска φ может быть распространена на ребра из $E_H(v)$ до сбалансированной реберной 2-раскраски графа H .

Пусть среди ребер, смежных с ребрами из $E_H(v)$, есть три ребра одного цвета (считаем для определенности, что это цвет 2) и одно ребро другого (цвет 1). Распространим раскраску φ на ребра из $E_H(v)$ так, чтобы каждая вершина из $N_H(v)$ была инцидентна ребрам разного цвета. Тогда из четырех ребер множества $E_H(v)$ три получают цвет 1 и одно – цвет 2.

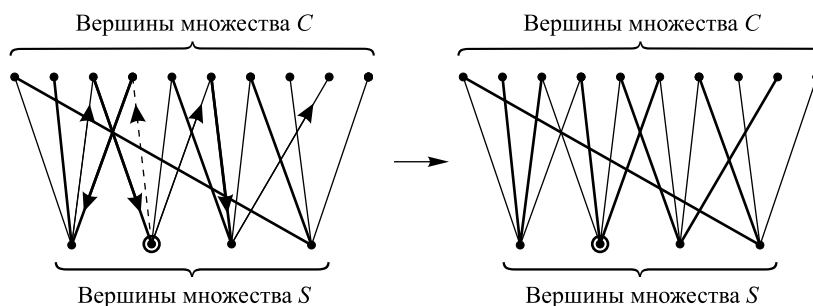
Построим в графе H цепь P , начинающуюся в вершине v , руководствуясь следующими правилами: в качестве первого ребра цепи выберем ребро цвета 1; каждое последующее ребро цепи будем выбирать цвета, отличного от предыдущего ребра; процесс построения цепи продолжается, пока возможно выбрать следующее ребро.

Процесс построения цепи P обязательно завершится, поскольку на каждом его шаге к текущей цепи добавляется новое ребро, а число ребер графа H конечно. Пронумеруем ребра цепи в порядке их добавления. Тогда каждое ребро цепи с нечетным номером имеет цвет 1, а с четным – цвет 2. По этой причине цепь P не может завершиться в вершине из $S \setminus \{v\}$, так как каждая такая вершина имеет степень 4 и ей инцидентно по два ребра каждого цвета. Эта цепь не может завершиться и в вершине v , поскольку в множестве $E_H(v)$ имеется единственное ребро цвета 2, и, следовательно, в случае (единственного) возврата в вершину v остается возможность продолжить цепь за счет одного из двух оставшихся ребер цвета 1 из $E_H(v)$.

Итак, построенная цепь P имеет нечетную длину, поскольку завершится в вершине из S . При этом последняя вершина цепи является висячей в графе H . (Висячая вершина в графе H обязательно существует, так как ребер, имеющих цвет 1, в этом графе больше, чем ребер, имеющих цвет 2.)

На ребрах построенной цепи P поменяем местами цвета 1 и 2. Цвета остальных ребер оставим без изменения. Обозначим полученную реберную 2-раскраску графа H через ψ . Ясно, что сужение раскраски ψ на ребра графа $H - v$ остается сбалансированной реберной 2-раскраской этого графа, при этом первое ребро цепи P , принадлежащее $E_H(v)$, уже получит цвет 2 относительно ψ . Следовательно, ψ является сбалансированной реберной 2-раскраской графа H .

Пример, иллюстрирующий процесс построения описанной цепи и изменения раскраски вдоль нее, приведен на рисунке. Снизу располагаются вершины из S , сверху – из C . Выделенная вершина – вершина v . Ребра цвета 1 изображены обычными линиями, цвета 2 – жирными. Последовательность построения ребер цепи показана с помощью ориентированных ребер, пунктиром обозначено первое ребро цепи.



Построение сбалансированной раскраски
 Construction of a balanced coloring of bipartite graph

Остается случай, когда имеются ровно четыре ребра, смежных с ребрами из $E_H(v)$, одинакового цвета (например, цвет 2) относительно ϕ . В этом случае после распространения раскраски ϕ на ребра из $E_H(v)$ так, чтобы каждая вершина из $N_H(v)$ была инцидентна ребрам разного цвета, каждое из четырех ребер множества $E_H(v)$ получит цвет 1. Аналогично предыдущему случаю с помощью построения начинающейся в вершине v цепи с чередующимися цветами ребер можно последовательно дважды трансформировать реберную 2-раскраску ϕ графа H . После этого два ребра из $E_H(v)$ получают цвет 2 и будет построена сбалансированная реберная 2-раскраска графа H .

Утверждение 2 и, следовательно, теорема 1 доказаны.

Теорема 2. В классе расщепляемых графов существует конечная характеристика графов из $L^2(3)$ в терминах запрещенных порожденных подграфов.

Доказательство. Обозначим через F_i , $i = 1, 2, 3, 4$, граф, состоящий из полного графа K_9 и вершины, смежной с $i + 4$ вершины из K_9 . Используя леммы 1 и 2, легко убедиться в том, что расщепляемые графы $K_{1,4}$, F_1 , F_2 , F_3 и F_4 не принадлежат классу $L^2(3)$, а значит, являются запрещенными порожденными подграфами для графов из этого класса.

Пусть G – связный расщепляемый граф с полярным разбиением (C, S) , где $|C| \leq 10$. Поскольку звезда $K_{1,4}$ является для G запрещенным порожденным подграфом, то для любой вершины $v \in C$ выполняется неравенство $|N_S(v)| \leq 3$. Отсюда следует, что $|S| \leq 3|C|$ и $|G| = |C| + |S| \leq |C| + 3|C| = 4|C| \leq 40$. Обозначим через Γ множество связных расщепляемых графов не выше 40, не принадлежащих классу $L^2(3)$.

Если $|C| \geq 11$, то запрещение порожденных подграфов $K_{1,4}$, F_1 , F_2 , F_3 и F_4 обеспечивает выполнение условий теоремы 1. Таким образом, список запрещенных порожденных подграфов, определяющих принадлежность расщепляемого графа G классу $L^2(3)$, полностью исчерпывается графами из множества $\Gamma \cup \{K_{1,4}, F_1, F_2, F_3, F_4\}$ и, следовательно, является конечным. Что и требовалось доказать.

Следствие. *Задача распознавания графов из класса $L^2(3)$ полиномиально разрешима в классе расщепляемых графов.*

Библиографические ссылки

1. Berge C. Hypergraphs. Combinatorics of finite sets. Amsterdam : North-Holland, 1989.
2. Тышкевич Р. И., Урбанович О. П. Графы с матроидным числом 2 // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1989. № 3. С. 13–17.
3. Метельский Ю. М., Тышкевич Р. И. Пересечения матроидов и реберные гиперграфы // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2005. Т. 13, № 2. С. 44–54.
4. Harary F., Holzmann C. Line graphs of bipartite graphs // Rev. Soc. Mat. Chile. 1974. Vol. 1. P. 19–20.
5. Бабайцев А. Ю., Тышкевич Р. И. Линейная размерность расщепляемых графов // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1999. № 1. С. 112–115.

References

1. Berge C. Hypergraphs. Combinatorics of finite sets. Amsterdam : North-Holland, 1989.
2. Tyshkevich R. I., Urbanovich O. P. [Graphs with matroidal number 2]. *Vesti Akademiï navuk BSSR. Ser. fiz.-mat. navuk.* 1989. No. 3. P. 13–17 (in Russ.).
3. Metelsky Yu. M., Tyshkevich R. I. [Matroid intersections and line hypergraphs]. *Tr. Inst. mat. Natsional'noi Akad. nauk Belarusi.* 2005. Vol. 13, No. 2. P. 44–54 (in Russ.).
4. Harary F., Holzmann C. Line graphs of bipartite graphs. *Rev. Soc. Mat. Chile.* 1974. Vol. 1. P. 19–20.
5. Babaitsev A. Yu., Tyshkevich R. I. [Linear dimension of split graphs]. *Vesti Nacyjanal'aj Akademiï navuk Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk.* 1999. No. 1. P. 112–115 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 18.05.2017.
Received by editorial board 18.05.2017.

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

INFORMATICS, COMPUTER SCIENCE AND MANAGEMENT

УДК 681.327.12.001.362

СИСТЕМА МОНИТОРИНГА АНТРОПОГЕННОЙ НАГРУЗКИ НА ПРИРОДНО-ТЕРРИТОРИАЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ

В. В. КРАСНОПРОШИН¹⁾, А. Г. ЖИДКОВ¹⁾, А. Н. ВАЛЬВАЧЕВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассматривается актуальная проблема оценки уровня антропогенной нагрузки на природно-территориальные комплексы. Выделены и классифицированы основные факторы, которые могут использоваться для описания характера и уровня антропогенной нагрузки, проведена унификация представления значений гетерогенных параметров. Разработан алгоритм количественной оценки уровня антропогенной нагрузки и синтеза соответствующих управляющих решений. На базе алгоритма реализована многоагентная компьютерная система мониторинга природно-территориальных комплексов. Система позволяет оценивать текущий уровень антропогенной нагрузки, прогнозировать ее изменение при строительстве новых объектов и принимать соответствующие управляющие решения. Приводится пример решения задачи, который демонстрирует эффективность разработанной системы мониторинга.

Ключевые слова: экоинформатика; экология; антропогенная нагрузка; принятие решений; региональное управление; системы мониторинга.

Образец цитирования:

Краснопрошин В. В., Жидков А. Г., Вальвачев А. Н. Система мониторинга антропогенной нагрузки на природно-территориальные комплексы // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 100–105.

For citation:

Krasnoproshin V. V., Zhidkov A. G., Valvachev A. N. System for monitoring the anthropogenic load on natural and territorial complexes. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 3. P. 100–105 (in Russ.).

Авторы:

Виктор Владимирович Краснопрошин – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных систем управления факультета прикладной математики и информатики.

Александр Геннадьевич Жидков – студент факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – В. В. Краснопрошин.

Александр Николаевич Вальвачев – кандидат технических наук, доцент; доцент кафедры информационных систем управления факультета прикладной математики и информатики.

Authors:

Victor V. Krasnoproshin, doctor of science (technics), full professor; head of the department of management information systems, faculty of applied mathematics and computer science. krasnoproshin@bsu.by

Alexander G. Zhidkov, student at the faculty of applied mathematics and computer science. zagecosoft@mail.ru

Alexander N. Valvachev, PhD (technics), docent; associate professor at the department of management information systems, faculty of applied mathematics and computer science. van_955@mail.ru

SYSTEM FOR MONITORING THE ANTHROPOGENIC LOAD ON NATURAL AND TERRITORIAL COMPLEXES

V. V. KRASNOPROSHIN^a, A. G. ZHIDKOV^a, A. N. VALVACHEV^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: A. N. Valvachev (van_955@mail.ru)

The paper considers the actual problem related to the assessment of the level of anthropogenic load on natural and territorial complexes. Main factors that can be used to describe the nature and level of the anthropogenic load are identified. Their classification is carried out and the representation unification of heterogeneous parameter values is performed. An algorithm for quantitative estimation of the anthropogenic load level and synthesis of the corresponding management decisions is developed. On the basis of the algorithm, a multi-agent computer system for monitoring natural and territorial complexes is implemented. The system allows region leaders to assess the current level of the anthropogenic load, predict its change while constructing new facilities and making appropriate management decisions. An example of a solution to the problem that demonstrates the operability of a monitoring system is presented.

Key words: ecoinformatics; ecology; anthropogenic pressure; decision making; regional management; monitoring systems.

В результате деятельности промышленных, аграрных, энергетических и транспортных организационно-технических систем постоянно увеличивается уровень антропогенной нагрузки (АН) на природно-территориальные комплексы (ПТК) Республики Беларусь. АН – это результирующая оценка влияния различных факторов загрязнения на объект наблюдения. Загрязнение воздуха, воды, почвы приводит к исчезновению биологических видов, сокращению площади природных ландшафтов, росту заболеваемости населения [1]. Уровень CO₂ в атмосфере впервые за три миллиона лет превысил 400 частей на миллион и не изменился в течение 2016 г., что свидетельствует о серьезных глобальных изменениях в природе. Ситуацию усугубляет рост населения городов, увеличение количества автомобилей, строительство новых дорог, промышленных предприятий и крупных сельскохозяйственных комплексов. В этих условиях органы регионального управления должны решать крайне сложную задачу – развивать экономику и при этом сохранить природу и здоровье населения [2]. В связи с этим возникает необходимость в разработке алгоритмов и программных систем для оценки влияния новых объектов на ПТК в целях минимизации их отрицательного воздействия на экосистемы. Решением этой проблемы занимается экоиформатика – новый перспективный раздел информатики [3].

Одной из важных задач экоиформатики является разработка методов и систем для оценки уровня АН на ПТК и синтеза соответствующих управляющих решений для администрации регионов [4; 5]. В этом направлении ведутся интенсивные исследования, получен ряд интересных результатов [6]. Однако комплексный унифицированный подход к решению задачи, который в достаточной мере учитывал бы факторы нагрузки и специфику региона, пока не разработан. Поэтому администрации регионов достаточно сложно определить реальную АН на ПТК, оценить ее негативные составляющие и обосновать принятие или отмену решений по строительству новых хозяйственных или жилых объектов [4; 5; 7]. В работе предложен один из возможных вариантов комплексного решения задачи оценки АН на ПТК и представлена система мониторинга, ориентированная на совместную работу администрации и экспертов.

Постановка и решение задачи

Пусть имеется некоторый регион R , который подвергается воздействию антропогенных факторов $X = X_1, X_2, \dots, X_n$, значения которых носят гетерогенный характер (string, int, real, double). Требуется разработать компьютерную систему мониторинга (sys) для администрации региона, которая фиксирует значения параметров X , на их основе вычисляет количественную оценку (V) АН и формирует управляющее решение (U).

Анализируя данную задачу, можно выделить следующие подзадачи: определение значимых факторов АН, их классификацию по степени выраженности негатива, приведение гетерогенных значений параметров АН X к одному цифровому типу, построение информационно-структурной модели ПТК и модели сцены мониторинга, разработку алгоритма синтеза U , V и программной системы мониторинга, включающей функциональную часть и базу данных.

Факторы АН. В настоящее время наиболее значительное воздействие на ПТК оказывают четыре группы факторов: промышленная, сельскохозяйственная, транспортная и демографическая. В рамках этих групп выделяются основные факторы, по которым можно судить об уровне АН на ПТК: стоимость основных производственных фондов и валовой продукции; объем выбросов вредных веществ

в атмосферу; объем сбрасываемых сточных вод; нарушение земельных угодий промышленными работками; плотность населения, автодорожной сети и сельскохозяйственных угодий; площадь пашни; количество вносимых минеральных и органических удобрений; численность крупного рогатого скота, свиней и птицы [4; 5].

Градация факторов АН. Градация факторов по степени выраженности негативных последствий и единицы измерения в разных странах и административных регионах могут отличаться, что затрудняет применение математических методов и однозначное понимание результатов. Для снятия этой проблемы необходимо свести значение негатива к универсальной шкале интуитивно понятных строковых переменных (меток). Например, в [4] объем выбросов вредных веществ в атмосферу измеряется в единицах (кг/сут) на 1 км² и сопровождается текстовой меткой. При фиксации более 2000 единиц ситуация считается опасной, в диапазоне от 1000 до 2000 – вредной, менее 1000 единиц – допустимой.

Унификация представления значений параметров. Значения входных параметров (факторов АН) X носят гетерогенный характер, т. е. задаются в вербальной и численной форме, в различных единицах изменения и разных шкалах, что затрудняет их математическую обработку и понимание лицами, принимающими решения. Для устранения этого недостатка необходимо привести различные типы параметров к одному типу. Для этого используем теорию нечетких множеств [8]: для каждого строкового (string) или численного (int, real) значения эксперты строят функцию принадлежности, отображающую его в диапазоне от 0.00 до 1.00. В результате вербальные и численные оценки преобразуются в нечеткий вектор $\langle X \rangle$, описывающий АН на ПТК и состоящий из переменных типа double.

Модели. Решение задачи базируется на модели, объединяющей параметры ПТК, АН и экспертные знания, отображенные в параметрах X , состояниях V , управляющих решениях U и алгоритме f . Предлагается использовать следующий вариант информационно-структурной модели:

$$mR = (X, \langle X \rangle, f, E, V, U), \quad (1)$$

где E – эталонные образы возможных состояний R ; f – функция распознавания номера j эталона E , наиболее похожего на вектор $\langle X \rangle$.

Уточненный вариант модели (1) представлен конечным множеством векторов и переменных, где значения n, m, X, V, U формируются экспертом:

V	X_1	X_2	X_3	...	X_n	U
V_1	0.00	0.00	0.00	...	0.00	U_1
...
V_k	0.50	0.50	0.50	...	0.50	U_k
...
V_m	1.00	1.00	1.00	...	1.00	U_m

$$V_j, U_j = f(X, E, V, U)$$

При больших значениях n и m на ввод экспертом матрицы эталонов E уходит достаточно много времени. Для ускорения этого процесса предлагается следующий алгоритм:

```
int n = 14; int m = 5; // 14 и 5 – типичные значения для практических задач
double[,] E = new double[m, n]; object[] a = new object[m + 2];
a[0] = n; a[1] = m;
for (int k = 0; k <= m - 1; k++)
{ for (int t = 0; t < n; t++) { E[k, t] = 1.0 * k / (m - 1); } }
```

Решение задачи мониторинга, как и любой другой, происходит в рамках некоторой сцены, участники которой играют определенные роли. Предлагается унифицированный вариант сцены, соответствующий составу типичной группы наблюдения за состоянием заповедников:

$$\text{scene} = (R, A, Ex, S, iX, \text{sys}, \text{com}), \quad (2)$$

где R – идентификатор ПТК; A – администрация; Ex – эксперты; S – источники АН; iX – источники получения значений X ; sys – система оценки уровня АН; com – коммуникации для обмена данными между участниками.

Для построения архитектуры системы мониторинга sys целесообразно использовать многоагентный подход, так как он изначально предназначен для создания распределенных систем [9]. В данном случае достаточно пяти агентов: первый агент (agPrO) в диалоге с экспертами (E) формирует предметную

область (PrO) n, m, X, V, U, E ; второй (agX) – в диалоге с источниками iX получает текущие значения параметров и формирует вектор X ; третий (agV) – оценивает нагрузку V ; четвертый (agU) – формирует соответствующие рекомендации U ; пятый (agVis) – визуализирует результат на экране компьютера или смартфона:

$$\text{sys} = (\text{agPrO}, \text{agX}, \text{agV}, \text{agU}, \text{agVis}, \text{com}). \quad (3)$$

На основе (2) и (3) разработана программная система мониторинга ПТК. Процесс ее применения включает следующие шаги [10; 11]:

- 1) A, E : изучение экспертами ПТК, определение S, X, iX, E, V, U ;
- 2) A, E, agPrO : формализация S, X, iX, V, U и построение базы данных;
- 3) agX : $t = t_0$, начало процесса мониторинга;
- 4) agX : получение текущих значений $\langle X \rangle$ параметров X от X_i ;
- 5) agV : оценка АН V_j , вычисление минимальной, максимальной и средней АН;
- 6) agU : синтез рекомендаций U_j ;
- 7) agVis : визуализация результата $\langle X \rangle, V_j, U_j$ для администрации региона;
- 8) agX : $t = t + \Delta t$, переход на шаг 4.

Для определения состояния ПТК (на шаге 5) разработаны и реализованы алгоритмы распознавания по максимальному значению в векторе $\langle X \rangle$, по минимальному расстоянию до одного из эталонов E по евклидовой или другой метрике.

Рассмотрим пример решения прикладной задачи с распознаванием состояния по принципу максимума (т. е. максимальному значению переменной в векторе параметров).

Экспериментальная часть

Пусть имеется ПТК, на площади которого находятся различные источники АН. Инвестор планирует построить в регионе крупный цементный завод. Требуется определить уровень существующей АН на ПТК и принять обоснованное решение об утверждении или отклонении проекта строительства нового завода.

В результате диалога с источниками iX агент agX получил следующие значения:

$$X_1 = 100-300, X_2 = >600, X_3 = 1000-2000, X_4 = >3000, X_5 = 5-10, X_6 = >250, X_7 = 0,025-0,050, \\ X_8 = 60-75, X_9 = 60-75, X_{10} = 70-100, X_{11} = 2-3, X_{12} = 50-55, X_{13} = 30-35, X_{14} = 50-100$$

и сформировал соответствующий нечеткий вектор АН $\langle X \rangle$ (рис. 1).

ПАРАМЕТРЫ АНТРОПОГЕННОЙ НАГРУЗКИ

Промышленная нагрузка		Сельскохозяйственная нагрузка	
Стоимость основных производственных фондов (тыс. руб. на 1 км ²)	300-600	Площадь сельскохозяйственных угодий (% от площади района)	75-90
Стоимость валовой продукции (тыс. руб. на 1 км ²)	>600	Площадь пашни (% от площади района)	75-90
Выбросы вредных веществ в атмосферу (кг/сут на 1 км ²)	>2000	Количество вносимых минеральных удобрений (кг/га)	70-100
Объем сбрасываемых сточных вод (м ³ /сут на 1 км ²)	>3000	Количество вносимых органических удобрений (кг/га)	2-3
Нарушенные промышленными разработками земли (% от площади района)	5-10	Поголовье крупного рогатого скота (на 100 га сельскохозяйственных угодий)	55-60
Демографическая нагрузка		Численность свиней (на 100 га сельскохозяйственных угодий)	35-40
Плотность населения (человек на 1 км ²)	>250	Численность птицы (на 100 га сельскохозяйственных угодий)	50-100
Транспортная нагрузка		Численность птицы (на 100 га сельскохозяйственных угодий)	<50
Плотность автодорожной сети (км/км ²)	0,025-0,050		

Сформирован нечеткий вектор:
 $X = (0,5; 1; 0,75; 1; 0,25; 1; 0,25; 0,5; 0,75; 0,25; 0,25; 0,5; 0,75; 0,25)$

OK

Рис. 1. Интерфейс для ввода значений параметров АН

Fig. 1. Input data interface

Вектор $\langle X \rangle$ передается агенту agV , который оценивает нагрузку V_j , затем агент agU формирует соответствующие рекомендации U_j и передает их агенту $agVis$ для визуализации результата (рис. 2).

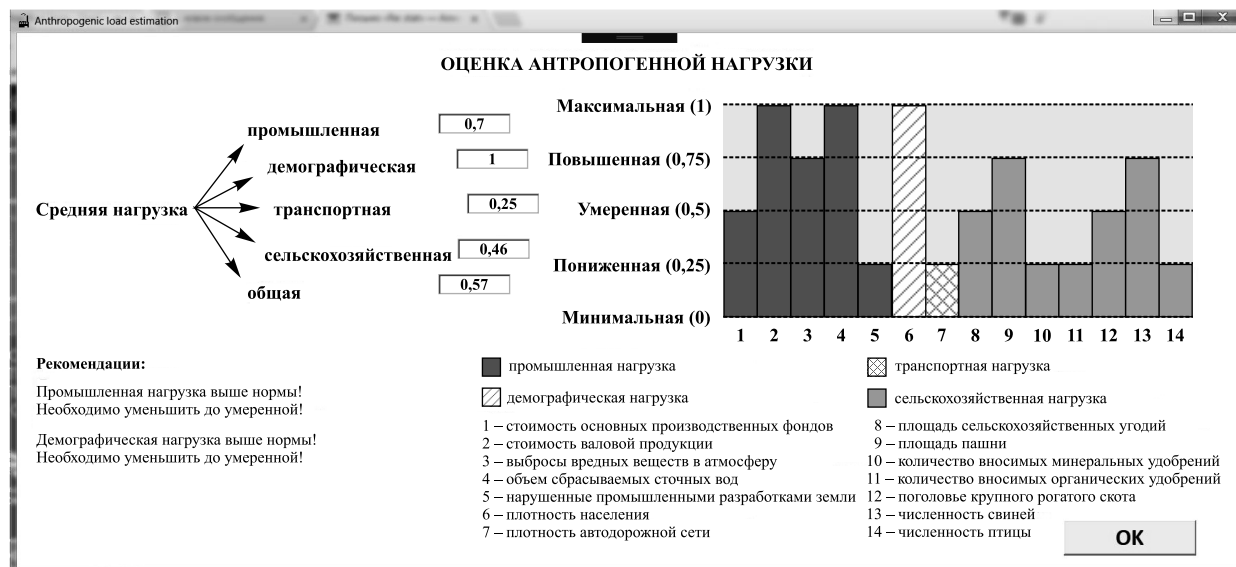


Рис. 2. Визуализация результата мониторинга

Fig. 2. Visualization of monitoring results

На основе анализа результатов мониторинга можно сделать вывод о том, что уровни промышленной и демографической нагрузки столь высоки, что строительство в данном регионе нового промышленного объекта нецелесообразно. Аналогичные вычисления были проведены на 100 векторах, содержащих случайные значения 14 параметров. Полученные результаты были сопоставлены с оценками экспертов и совпали с ними в 85–90 % случаев.

Разработанная система может использоваться органами регионального управления для оценки текущей АН и поддержки принятия решений при строительстве новых промышленных и сельскохозяйственных объектов.

Библиографические ссылки

1. Monitoring Nature: Research developments. Bristol : European Commission, 2015.
2. Freedman B. Global environmental change. Uitgever : Springer, 2014.
3. Krapivin V. F., Varotsos C. A., Soldatov V. Y. Ecoinformatics tools in environmental science: applications and decision. Cham : Springer, 2016.
4. Региональный экологический мониторинг. М. : Наука, 1983.
5. Якунин П. Н. Эколого-экономическая оценка антропогенной нагрузки в регионе // Вестн. ЛГУ им. А. С. Пушкина. 2013. № 2. С. 38–50.
6. Information technologies in environmental engineering // ITEE-2013 : Sel. Contributions to the Sixth Int. Conf. on Inf. Technol. in Environ. Eng. Berlin : Springer, 2014.
7. Marakas D. Decision support systems in the 21st century. Upper Saddle River : Prentice Hall, 2002.
8. Mohan C. An introduction to fuzzy set theory and fuzzy logic. Delhi : Eurospan, 2015.
9. Weiss G. Multiagent systems. Cambridge : MIT press, 2013.
10. Shakah G., Krasnoproshin V. V., Valvachev A. N. Decision making system for operative tasks // PRIP'2009 : proc. of 10th Int. conf. (Minsk, 19–21 May, 2009). Minsk, 2009. P. 272–275.
11. Krasnoproshin V. V., Vissia H., Valvachev A. N. Decision making in active systems // AM-SE'2008 : Models and simulation in engineering, economics and management and general applications (Palma de Majorca, 18–20 June, 2008). Palma de Majorca, 2008. P. 300–307.

References

1. Monitoring Nature: Research developments. Bristol : European Commission, 2015.
2. Freedman B. Global environmental change. Uitgever : Springer, 2014.
3. Krapivin V. F., Varotsos C. A., Soldatov V. Y. Ecoinformatics tools in environmental science: applications and decision. Cham : Springer, 2016.
4. [Regional'nyi ekologicheskii monitoring]. Moscow : Nauka, 1983 (in Russ.).

5. Yakunin P. N. [Ekologo-ekonomicheskaya otsenka antropogennoi nagruzki v regione]. *Vestnik Leningr. gos. univ. im. A. S. Pushkina*. 2013. No. 2. P. 38–50 (in Russ.).
6. Information technologies in environmental engineering. *ITEE-2013* : Sel. Contributions to the Sixth Int. Conf. on Inf. Technol. in Environ. Eng. Berlin : Springer, 2014.
7. Marakas D. Decision support systems in the 21st century. Upper Saddle River : Prentice Hall, 2002.
8. Mohan C. An introduction to fuzzy set theory and fuzzy logic. Delhi : Eurospan, 2015.
9. Weiss G. Multiagent systems. Cambridge : MIT press, 2013.
10. Shakah G., Krasnoproshin V. V., Valvachev A. N. Decision making system for operative tasks. *PRIP'2009* : proc. of 10th Int. conf. (Minsk, 19–21 May, 2009). Minsk, 2009. P. 272–275.
11. Krasnoproshin V. V., Vissia H., Valvachev A. N. Decision making in active systems. *AM-SE'2008* : Models and simulation in engineering, economics and management and general applications (Palma de Majorca, 18–20 June, 2008). Palma de Majorca, 2008. P. 300–307.

*Статья поступила в редколлегию 16.06.2017.
Received by editorial board 16.06.2017.*

СОДЕРЖАНИЕ

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

<i>Кашевский В. В.</i> Аналогии формул Сохоцкого для интегральных операторов с дополнительной логарифмической особенностью	4
<i>Воробей П. Н.</i> Вычисление хаусдорфовых размерностей бассейнов эргодических мер в кодирующих пространствах.....	11
<i>Шкадинская Е. В.</i> Об уравнениях, содержащих производную дельта-функции	19

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

<i>Дымков М. П.</i> О структуре решения в линейной задаче движения газа в трубопроводе	27
<i>Ломовцев Ф. Е.</i> Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части.....	38

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

<i>Кирилица В. П.</i> Точные D -оптимальные планы экспериментов для линейной множественной регрессии с неравноточными наблюдениями	53
<i>Русецкий А. Ю.</i> Теорема существования и единственности ассоциированных решений стохастической дифференциальной системы уравнений с мерами	60

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

<i>Бондарь И. В., Фалейчик Б. В.</i> Безматричные итерационные процессы со среднеквадратичным подавлением ошибки для больших систем нелинейных уравнений	73
--	----

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

<i>Таразевич Ю. Г.</i> Расширенные полиномиальные матрицы и алгебраизация контактных схем.....	85
<i>Лубашева Т. В., Метельский Ю. М.</i> Характеризация и распознавание графов пересечений ребер 3-хроматических гиперграфов кратности не выше двух в классе расщепляемых графов	94

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

<i>Краснопрошин В. В., Жидков А. Г., Вальвачев А. Н.</i> Система мониторинга антропогенной нагрузки на природно-территориальные комплексы.....	100
--	-----

CONTENTS

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

<i>Kashevski V. V.</i> Analogue Sochocky formulae for integral operators with additional logarithmic singularity	4
<i>Varabei P. N.</i> Calculation of Hausdorff dimensions of basins of ergodic measures in encoding spaces	11
<i>Shkadzinskaya A. V.</i> On equations containing derivative of the delta-function.....	19

MATHEMATICAL PHYSICS

<i>Dymkov M. P.</i> Solution representation for a linear gas flow model in pipeline.....	27
<i>Lomautsau F. E.</i> Correction method of test solutions of the general wave equation in the first quarter of the plane for minimal smoothness of its right-hand side	38

THEORY OF PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

<i>Kirlitsa V. P.</i> Exact D -optimal designs of experiments for linear multiple regression with heteroscedastic observations.....	53
<i>Rusetski A. Y.</i> Existence and uniqueness theorem of associated solutions of the stochastic differential system with measures	60

COMPUTATIONAL MATHEMATICS

<i>Bondar I. V., Faleichyk B. V.</i> Matrix-free iterative processes with least-squares error damping for nonlinear systems of equations	73
--	----

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

<i>Tarazevich Y. G.</i> Augmented polynomial matrices and algebraization of switching circuits	85
<i>Lubasheva T. V., Metelsky Y. M.</i> Characterization and recognition of edge intersection graphs of 3-chromatic hypergraphs with multiplicity at most than two in the class of split graphs.....	94

INFORMATICS, COMPUTER SCIENCE AND MANAGEMENT

<i>Krasnoproshin V. V., Zhidkov A. G., Valvachev A. N.</i> System for monitoring the anthropogenic load on natural and territorial complexes.....	100
---	-----

Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области математики и информатики).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ).

**Журнал Белорусского
государственного университета.
Математика. Информатика.
№ 3. 2017**

Учредитель:
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск.

Почтовый адрес: ул. Кальварийская, 9, каб. 636, 637,
220004, г. Минск.

Тел. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: vestnikbsu@mail.ru
vestnikbsu@bsu.by

«Журнал Белорусского государственного
университета. Математика. Информатика»
издается с января 1969 г.
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»
(ISSN 1561-834X).

Редактор *Е. В. Павлова*
Технический редактор *В. В. Кильдишева*
Корректор *Л. А. Меркуль*

Подписано в печать 10.11.2017.
Тираж 120 экз. Заказ 672.

Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского
государственного университета».
ЛП № 02330/117 от 14.04.2014.
Ул. Красноармейская, 6, 220030, г. Минск.

© БГУ, 2017

**Journal
of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics.
No. 3. 2017**

Founder:
Belarusian State University

Registered address: Niezaliežnasci Ave., 4,
220030, Minsk.

Correspondence address: Kal'varijskaja Str., 9, office 636, 637,
220004, Minsk.

Tel. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: vestnikbsu@mail.ru
vestnikbsu@bsu.by

«Journal of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics»
published since January, 1969.
Until 2017 named «Vestnik BGU.
Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika»
(ISSN 1561-834X).

Editor *E. V. Pavlova*
Technical editor *V. V. Kil'disheva*
Proofreader *L. A. Merkul'*

Signed print 10.11.2017.
Edition 120 copies. Order number 672.

Publishing Center of BSU.
License for publishing No. 02330/117, 14 April, 2014.
Čyrvonaarmejskaja Str., 6, 220030, Minsk.

© BSU, 2017