



БЕЛОРУССКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

ЖУРНАЛ  
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

# МАТЕМАТИКА ИНФОРМАТИКА

---

JOURNAL  
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

# MATHEMATICS and INFORMATICS

Издается с января 1969 г.  
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.  
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)

Выходит три раза в год

---

**2**

**2018**

---

МИНСК  
БГУ

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Главный редактор**      **ХАРИН Ю. С.** – доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси; директор Научно-исследовательского института прикладных проблем математики и информатики БГУ, заведующий кафедрой математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.  
E-mail: kharin@bsu.by

**Ответственный секретарь**      **МАТЕЙКО О. М.** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.  
E-mail: matseika@bsu.by

- Абламейко С. В.*      Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Альтенбах Х.*      Магдебургский университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия.  
*Беняш-Кривец В. В.*      Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Гладков А. Л.*      Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Головко В. А.*      Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь.  
*Гороховик В. В.*      Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
*Громак В. И.*      Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Демидо Г.*      Институт математики и информатики Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва.  
*Дудкин А. А.*      Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
*Дымков М. П.*      Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь.  
*Егоров А. Д.*      Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
*Жоландек Х.*      Институт математики Варшавского университета, Варшава, Польша.  
*Журавков М. А.*      Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Зубков А. М.*      Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.  
*Кашин Б. С.*      Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.  
*Княжице Л. Б.*      Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
*Кожанов А. И.*      Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.  
*Котов В. М.*      Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Краснопрошин В. В.*      Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Кротов В. Г.*      Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Макаров Е. К.*      Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
*Мандрик П. А.*      Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Матус П. П.*      Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
*Медведев Д. Г.*      Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Михасев Г. И.*      Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Ровба Е. А.*      Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Гродно, Беларусь.  
*Сафонов В. Г.*      Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Скиба А. Н.*      Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель, Беларусь.  
*Тузигов А. В.*      Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
*Чижик С. А.*      Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
*Янчевский В. И.*      Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

## EDITORIAL BOARD

- Editor-in-chief**     **KHARIN Y. S.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor, corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus; director of the Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, head of the department of mathematical modelling and data analysis of the faculty of applied mathematics and computer science of the Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
E-mail: kharin@bsu.by
- Executive secretary**     **MATEIKO O. M.**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of general mathematics and computer science of the faculty of mechanics and mathematics of the Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
E-mail: matseika@bsu.by
- Ablameyko S. V.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Altenbach H.** Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany.  
**Beniash-Kryvets V. V.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Gladkov A. L.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Golovko V. A.** Brest State Technical University, Brest, Belarus.  
**Gorokhovich V. V.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
**Gromak V. I.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Dzemyda G.** Institute of Mathematics and Informatics of the Vilnius University, Vilnius, Lithuania.  
**Doudkin A. A.** United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
**Dymkov M. P.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Egorov A. D.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
**Zoladek H.** Mathematics Institute of the University of Warsaw, Warsaw, Poland.  
**Zhuravkov M. A.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Zubkov A. M.** Lomonosov Moscow State University, Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.  
**Kashin B. S.** Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.  
**Knyazhishche L. B.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
**Kozhanov A. I.** Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia.  
**Kotov V. M.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Krasnoproshin V. V.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Krotov V. G.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Makarov E. K.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
**Mandrik P. A.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Matus P. P.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
**Medvedev D. G.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Mikhasev G. I.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Rovba E. A.** Yanka Kupala Grodno State University, Grodno, Belarus.  
**Safonov V. G.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
**Skiba A. N.** Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus.  
**Tuzikov A. V.** Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
**Chizhik S. A.** National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
**Yanchevskii V. I.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.

УДК 519.719.2

## СОВЕРШЕННАЯ ВЕРИФИКАЦИЯ МОДУЛЯРНОЙ СХЕМЫ

Г. В. МАТВЕЕВ<sup>1)</sup>, В. В. МАТУЛИС<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Схемы разделения секрета используются для распределения секретного значения среди группы пользователей таким образом, что только разрешенные подмножества пользователей могут правильно восстановить секрет. Изучаемая нами модулярная схема разделения секрета основывается на китайской теореме об остатках. В этой схеме секреты  $s(x)$ ,  $S(x)$ ,  $s_1(x), \dots, s_k(x)$  определяются следующим образом:  $s(x) = S(x) \bmod m(x)$ ,  $s_i(x) = S(x) \bmod m_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Все секреты  $s(x)$ ,  $S(x)$ ,  $s_1(x), \dots, s_k(x)$  и модули  $m(x)$ ,  $m_1(x), \dots, m_k(x)$  являются элементами кольца полиномов  $F_p[x]$ , а восстановление секрета  $s(x)$  осуществляется путем применения упомянутой китайской теоремы об остатках. Под верификацией любой схемы разделения секрета понимают протокол проверки участниками их частичных секретов и (или) протокол проверки законности действий дилера. В работе предлагаются способы совершенной верификации модулярной схемы разделения секрета. Это означает, что в результате верификации никто из участников и неразрешенные подмножества участников не получают никакой информации о секрете  $s(x)$ , кроме априорной. Представлены два способа верификации. Первый способ – более простой, он основан на предположении о честности дилера. Если дилер нечестный, то верификация является более сложной. Оба способа основываются на одной работе Дж. Бенало и обобщают протокол, предложенный ранее М. Васьковским и Г. Матвеевым в двух направлениях. Во-первых, верифицируется общая, а не только пороговая структура доступа, а во-вторых, дилер не обязательно честный. Ранее Н. Шенец нашел условие совершенности модулярной схемы разделения секрета. Таким образом, при соблюдении этого условия совершенными являются и указанная схема, и протокол ее верификации.

**Ключевые слова:** полиномиальная модулярная схема; теория разделения секрета; верификация; секрет; частичный секрет; конечное поле.

---

### Образец цитирования:

Матвеев ГВ, Матулис ВВ. Совершенная верификация модулярной схемы. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2018;2:4–9.

### For citation:

Matveev GV, Matulis VV. Perfect verification of modular scheme. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2018;2:4–9. Russian.

---

### Авторы:

**Геннадий Васильевич Матвеев** – доцент кафедры высшей математики факультета прикладной математики и информатики.

**Владислав Вячеславович Матулис** – магистрант кафедры высшей математики факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – Г. В. Матвеев.

### Authors:

**Gennadii V. Matveev**, associate professor at the department of higher mathematics, faculty of applied mathematics and informatics.

*matveev@bsu.by*

**Vladislav V. Matulis**, master's degree student at the department of higher mathematics, faculty of applied mathematics and informatics.

*uladzislau.matulis@yandex.by*

## PERFECT VERIFICATION OF MODULAR SCHEME

G. V. MATVEEV<sup>a</sup>, V. V. MATULIS<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: V. V. Matulis (uladzislau.matulis@yandex.by)

Secret sharing schemes are used to distribute a secret value among a group of users so that only authorized set of them can reconstruct the original secret correctly. The modular secret sharing scheme (MSSS) we are studying is based on the Chinese Remainder Theorem. In this scheme the secrets  $s(x)$ ,  $S(x)$ ,  $s_1(x), \dots, s_k(x)$  are defined as follows  $s(x) = S(x) \bmod m(x)$ ,  $s_i(x) = S(x) \bmod m_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . All the secrets and moduli are chosen from polynomial ring  $F_p[x]$ , and the reconstruction of secret  $s(x)$  is carried out by applying the above-mentioned Chinese Remainder Theorem. The verification of any secret sharing scheme is understood as the protocol of verification by the participants of their partial secrets and (or) the protocol for verifying the legitimacy of the actions of the dealer. In this paper, we introduce a perfect verification protocol of MSSS. It means that none information leaks under distribution and verification. Two verification protocols are introduced in this paper. The first one is simpler and it depends on assumption about dealer honesty. If there is no such assumption verification is more complex. Both protocols are based on one work by J. Benalo and generalize the protocol proposed earlier by M. Vaskovsky and G. Matveev in two ways. First, the general, not only the threshold access structure is verified, and secondly, the dealer is not necessarily honest. Earlier, N. Shenets found the perfection condition of MSSS. Thus, if these conditions are met, both the MSSS and its verification protocol are perfect.

**Key words:** polynomial modular scheme; secret sharing; verification; secret; partial secret; finite field.

### Постановка общей задачи

Схемы разделения секрета относятся к числу важных криптографических протоколов, использующихся в системах электронного голосования [1], шифрования на основе атрибутов [2] и в распределенных конфиденциальных вычислениях [3].

Схема разделения секрета решает следующую задачу. Пусть имеется некоторая важная информация (секрет)  $s$  и множество  $I = \{1, 2, \dots, k\}$  пользователей. Требуется сообщить каждому пользователю  $i$  некоторую информацию  $s_i$  (частичный секрет) таким образом, чтобы только заранее определенные группы участников могли, объединяя свои частичные секреты, восстановить секрет  $s$ , а для остальных групп эта задача являлась бы трудноразрешимой. Как правило, под этим понимается, что задача восстановления секрета неразрешенной группой участников должна быть эквивалентна полному перебору.

Дадим точное определение разрешенных и запрещенных подмножеств.

**Определение.** Под структурой доступа  $\Gamma$  понимают монотонное семейство подмножеств, т. е. предполагается, что для его элементов выполняется условие

$$A \in \Gamma, A \subset B \subset I \Rightarrow B \in \Gamma.$$

Эти подмножества называют разрешенными, а остальные – запрещенными.

Структура доступа, когда разрешенными считаются подмножества  $A$  с условием  $|A| \geq t$ , называется пороговой, а число  $t$ ,  $1 \leq t \leq k$ , – ее порогом.

Алгоритмы распределения частичных секретов и восстановления исходного секрета называют схемой разделения секрета. Они, в частности, должны обеспечивать правильное восстановление секрета разрешенными группами участников.

Схему разделения секрета называют:

- совершенной, если запрещенное множество участников не получает никакой информации о секрете, кроме априорной;
- идеальной, если ключи всех участников и ключ  $s$  имеют один и тот же размер. Иногда условие идеальности включает и совершенность схемы.

Под верификацией схемы разделения секрета понимают протоколы проверки частичных секретов и (или) протокол проверки честности дилера и отдельных участников.

Протокол верификации будем называть совершенным, если его реализация не нарушает совершенность исходной схемы. Отметим, что предложенные ранее [4–6] протоколы верификации не являются таковыми.

Цель настоящего исследования – построение совершенного протокола верификации модулярного разделения секрета. Таким образом, оно является продолжением работы [5], в которой намечен подход к решению рассматриваемой задачи.

### Модулярные схемы разделения секрета

В основе модулярных схем разделения секрета лежит деление полиномов с остатком в кольце полиномов  $F_q[x]$  над конечным полем  $F_q$ .

Выбор параметров и генерация секретов осуществляются таким образом. Сначала выбирается вспомогательный секрет  $S(x) \in F_q[x]$  и модули (открытые ключи участников)  $m_1(x), m_2(x), \dots, m_k(x) \in F_q[x]$  и один дополнительный модуль (общий открытый ключ)  $m(x)$ . Хранимым секретом считается остаток от деления  $S(x)$  на  $m(x)$ :  $s(x) = S(x) \bmod m(x)$ . Аналогично определяются частичные секреты (закрытые ключи участников)  $s_i(x) = S(x) \bmod m_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Восстановление секрета  $S(x)$  группой участников  $1, 2, \dots, l$ ,  $l \leq k$ , осуществляется решением системы сравнений

$$\begin{cases} S(x) \equiv s_1(x) \pmod{m_1(x)}, \\ S(x) \equiv s_2(x) \pmod{m_2(x)}, \\ \dots \\ S(x) \equiv s_l(x) \pmod{m_l(x)}, \end{cases} \quad (1)$$

а затем находится хранимый секрет  $s(x) = S(x) \bmod m(x)$ .

В [7] указано, как с помощью специального подбора секрета  $S(x)$  и модулей  $m_1(x), m_2(x), \dots, m_k(x)$  можно реализовать любую структуру доступа, и показано, что пороговую структуру доступа можно реализовать и совершенно, и идеально. Эти построения опираются на тот факт, что в кольцах  $F_q[x]$  имеются большие семейства попарно взаимно простых многочленов одинаковой степени. Установлено, что такие многочлены  $m_1(x), m_2(x), \dots, m_k(x)$  пригодны для реализации любой  $(t, k)$ -пороговой схемы,  $1 \leq t \leq k$ , и дано описание максимального по числу элементов такого семейства. Существуют и более простые способы строить достаточно большие семейства попарно взаимно простых многочленов одной и той же степени.

Для разделения секрета в произвольной структуре доступа положим

$$M_2 = \min_{A \in \Gamma} \deg \text{НОК}(m_i(x), i \in A),$$

$$M_1 = \max_{A \notin \Gamma} \deg \text{НОК}(m_i(x), i \in A).$$

Реализация корректна лишь в случае  $M_2 > M_1$ .

В [8] получен следующий критерий совершенности модулярной реализации общей структуры доступа.

**Теорема 1.** *Модулярная реализация структуры доступа будет совершенной тогда и только тогда, когда:*

1)  $\text{НОД}(m(x), m_i(x)) = 1, i = 1, 2, \dots, k;$

2)  $\deg m_0(x) \leq M_2 - M_1.$

Далее исследуются модулярные схемы, удовлетворяющие условиям теоремы 1.

### Совершенная верификация модулярных схем разделения секрета

Сначала рассмотрим следующую задачу верификации для модулярных схем. Пусть после фазы разделения секрета участники хотят удостовериться в правильности полученных частичных секретов  $s_i(x)$  и тем самым в том, что они правильно восстанавливают значение секрета. Дополнительно накладывается требование, чтобы в результате такой проверки никто из участников не извлек никакой дополнительной информации о секрете.

Пусть  $A \subset I$  – некоторое подмножество участников. Обозначим через  $S_A(x)$  полученное ими решение системы (1), а через  $s_A(x)$  – остаток от деления многочлена  $S_A(x)$  на многочлен  $m(x)$ ,

$$s_A(x) = S_A(x) \bmod m(x).$$

При корректной реализации модулярной схемы выполнено условие

$$\forall A \in \Gamma, s_A(x) = s(x).$$

Проверить это участники не могут – ведь настоящий секрет  $s(x)$  им неизвестен. Следуя Дж. Бенало [3], будем проверять более слабые условия:

$$\forall A, B \in \Gamma, s_A(x) = s_B(x). \quad (2)$$



Это означает, что все допустимые подмножества участников, восстанавливая секрет, получают одно и то же значение.

Рассмотрим два произвольных подмножества допустимых участников  $A, B \in \Gamma$ . Нетрудно показать, что

$$P\{s_A(x) = s_B(x) | S_A(x) \neq S_B(x)\} = \frac{q^{-n} - q^{-M_2}}{1 - q^{-M_2}},$$

где  $n = \deg m(x)$ . Это значение не превосходит априорной вероятности угадывания секрета, поэтому можно считать его пренебрежимо малым. Тогда условие (2) можно заменить следующим:

$$\forall A, B \in \Gamma, S_A(x) = S_B(x). \quad (3)$$

Более того, верификация  $S(x)$  сильнее верификации  $s(x)$ . По этой причине далее рассматривается верификация  $S(x)$ .

**Теорема 2.** Условие (3) равносильно тому, что решение системы (1) множеством всех участников имеет степень, меньшую  $M_2$ , т. е.  $\deg S_1(x) < M_2$ .

*Доказательство.*

*Необходимость.* По условию (3) все значения  $S_A(x)$ ,  $\forall A \in \Gamma$ , равны. Обозначим это значение через  $S'(x)$ . Пусть  $B \in \Gamma$  – допустимое подмножество участников, таких что  $\text{НОК}(\{m_i(x), i \in B\}) = M_2$ . Тогда  $S_1(x) = S'(x) = S_B(x)$ , но  $\deg S_B(x) < M_2$ .

*Достаточность.* Пусть  $\deg S_1(x) < M_2$ . Тогда для любого  $A \in \Gamma$  верно

$$\deg \text{НОК}(\{m_i(x), i \in A\}) \geq M_2.$$

Поэтому и поскольку  $A \subset I$ , получаем, что для любого  $A \in \Gamma$  выполнено  $S_A(x) < S_1(x)$ .

*Замечание.* Ясно, что если реализация схемы корректна и все частичные секреты правильные, то  $S_1(x) = S(x)$ .

Задача свелась к проверке степени многочлена  $S_1(x)$ . В то же время публично восстанавливать  $S_1(x)$  для такой проверки нельзя, так как это приведет к разглашению секрета  $s(x)$ . Далее нам потребуется одно простое свойство степени многочлена.

**Утверждение.** Условие  $\deg(P(x) + Q(x)) < l$  равносильно одному из следующих: либо  $\deg P(x) < l$  и  $\deg Q(x) < l$ , либо  $\deg P(x) \geq l$  и  $\deg Q(x) \geq l$ .

Именно это утверждение лежит в основе двух предлагаемых ниже протоколов верификации, охватывающих случаи честного и нечестного дилера.

**Случай честного дилера.** Если дилер является доверенным лицом, то для верификации может быть использован следующий протокол.

**Протокол 1.**

1. Дилер генерирует случайный многочлен  $S'(x)$  степени меньше  $M_2$ ,  $S'(x) < M_2$ .
2. Дилер сообщает каждому участнику значение  $s'_i(x) = S'(x) \bmod m_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .
3. Каждый участник публикует значение  $p_i(x) = (s_i(x) + s'_i(x)) \bmod m_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .
4. Участники совместно находят решение  $P(x)$  системы сравнений относительно  $p_i(x)$ ,  $P(x) = S_1(x) + S'(x)$ .
5. Участники проверяют степень полученного решения  $P(x)$ :  $\deg P(x) < M_2$ .

Если все участники честные, алгоритм решает поставленную задачу полностью. Если же предположить, что есть злоумышленник, который выдает себя за участника  $i$ , то вероятность того, что он угадает многочлен  $p_i(x)$  и таким образом будет верифицирован, невелика, например, в пороговом случае она равна  $1/q^n$ , где  $n$  – степень многочлена  $m_i(x)$ .

Предложенный протокол верификации является совершенным: значения  $p_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , не несут никакой дополнительной информации о значениях частичных секретов  $s_i(x)$ , а восстанавливаемое по ним значение  $P(x)$  не содержит дополнительной информации о промежуточном секрете  $S(x)$ .

**Случай нечестного дилера.** Если дилер не является доверенным лицом, то протокол 1 не будет надежным. Опишем, каким образом он может быть нарушен.

Пусть

$$Q(x) = q_0 + q_1x + \dots + q_mx^m, P(x) = p_0 + p_1x + \dots + p_nx^n \in F_q[x].$$

Обозначим через  $R_l[P(x)]$  семейство многочленов:

$$R_l[P(x)] = \{Q(x) \in F_q[x] : \deg Q(x) = \deg P(x), q_i + p_i = 0, i = l, \dots, \deg P(x)\}.$$

Тогда для любого многочлена  $Q(x)$  из семейства  $R_l[P(x)]$  верно:  $\deg(Q(x) + P(x)) < l$ .

Предположим, что условие теоремы 2 не выполняется, т. е.  $\deg S_1(x) \geq M_2$ . В таком случае нечестный дилер в качестве контрольного многочлена  $S'(x)$  может взять не случайный многочлен степени меньше  $M_2$ , а любой многочлен из  $R_{M_2}[P(x)]$ . Тогда  $\deg(S_1(x) + S'(x)) < M_2$  при  $\deg S_1(x) \geq M_2$ , что приведет к нарушению протокола. В самом деле, участники не могут знать наверняка, что степень контрольного многочлена  $S'(x)$  действительно меньше  $M_2$ . Если же они захотят восстановить многочлен  $S'(x)$ , его больше не имеет смысла использовать для верификации, поскольку при известных  $S'(x)$  и  $S_1(x) + S'(x)$  можно однозначно восстановить  $S_1(x)$ .

Предлагается следующий способ предотвратить эти действия злоумышленника. Пусть согласно протоколу дилер генерирует не один многочлен, а достаточно много. Тогда участники могут случайным образом разбить их на два непересекающихся подмножества. Многочлены одного из них восстанавливаются непосредственно, чтобы участники могли точно проверить их степень. Для каждого многочлена из другого подмножества выполняется раунд протокола 1.

### Протокол 2.

1. Дилер генерирует большое количество  $N$  случайных многочленов  $S'_j(x), j = 1, 2, \dots, N, \deg S'_j(x) < M_2$ .
2. Каждый из этих многочленов распределяется среди участников, т. е. каждый участник получает  $s'_{ij}(x) = S'_j(x) \bmod m_i(x), i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, N$ .
3. Участники выбирают случайное подмножество  $M \subset \{1, 2, \dots, N\}$  индексов многочленов, которые будут восстанавливаться непосредственно.
4. Участники восстанавливают многочлены  $S'_j(x)$  путем публикации соответствующих значений частичных секретов  $s'_{ij}(x) = S'_j(x) \bmod m_i(x), i = 1, 2, \dots, k, j \in M$ .
5. Участники проверяют степени восстановленных многочленов, т. е. условие  $\deg S'_j(x) < M_2, j \in M$ . Если это не так, верификация завершается и считается не пройденной.
6. Участники восстанавливают многочлены  $s_1(x) + S'_j(x)$  путем публикации  $(s_i(x) + s'_{ij}(x)) \bmod m_i(x), i = 1, 2, \dots, k, j \notin M$ .
7. Участники проверяют условие  $\deg(S_1(x) + S'_j(x)) < M_2$  для восстановленных многочленов.

Теперь, если секрет  $S_1(x)$  неправильный, дилеру сложнее скрыть этот факт. Для этого ему нужно угадать, каким будет множество  $M$ . Тогда в качестве многочленов с номерами из  $M$  дилер должен предложить любые многочлены степени меньше  $M_2$ , а все остальные – любые многочлены из  $R_{M_2}[P(x)]$ . Если  $M$  выбирается случайным образом из всех подмножеств множества  $\{1, 2, \dots, N\}$ , вероятность успеха дилера равна  $1/2^N$ , т. е. за счет выбора  $N$  может быть сделана достаточно малой.

## Библиографические ссылки

1. Cramer R, Damgård I, Nielsen JB. Multiparty Computation from Threshold Homomorphic Encryption. In: Pfitzmann B, editor. *Advances in Cryptology – EUROCRYPT 2001*. Berlin, Heidelberg: Springer; 2001. p. 280–300. (Lecture Notes in Computer Science; volume 2045). DOI: 10.1007/3-540-44987-6\_18.
2. Bethencourt J, Sahai A, Waters B. Ciphertext-policy attribute-based encryption. *Proceedings of 2007 IEEE Symposium on Security and Privacy*. 2007 May 20–23; Berkeley, California, USA. Los Alamitos, California: IEEE Computer Society; 2007. p. 321–334.
3. Benaloh JC. Secret sharing homomorphisms: keeping shares of a secret secret (extended abstract). In: Odlyzko AM, editor. *Advances in Cryptology – CRYPTO '86*. Berlin, Heidelberg: Springer; 1987. p. 251–260. (Lecture Notes in Computer Science; volume 263). DOI: 10.1007/3-540-47721-7\_19.
4. Галибус ТВ, Матвеев ГВ. Верификация параметров модулярного разделения секрета. *Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика*. 2015;1:76–79.
5. Васьковский ММ, Матвеев ГВ. Верификация модулярного разделения секрета. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2017;2:17–22.
6. Галибус ТВ. Верификация полиномиального модулярного разделения секрета над двоичным полем. *Вестник Брестского государственного технического университета. Серия 1, Физика, математика, информатика*. 2014;5:26–27.
7. Galibus T, Matveev G. Generalized Mignotte's sequences over polynomial rings. *Electronic Notes Theoretical Computer Science*. 2007;186:43–48. DOI: 10.1016/j.entcs.2006.12.044.
8. Шенец НН. Об информационном уровне модулярных схем разделения секрета. *Доклады Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2010;54(6):9–12.

## References

1. Cramer R, Damgård I, Nielsen JB. Multiparty Computation from Threshold Homomorphic Encryption. In: Pfitzmann B, editor. *Advances in Cryptology – EUROCRYPT 2001*. Berlin, Heidelberg: Springer; 2001. p. 280–300. (Lecture Notes in Computer Science; volume 2045). DOI: 10.1007/3-540-44987-6\_18.



2. Bethencourt J, Sahai A, Waters B. Ciphertext-policy attribute-based encryption. *Proceedings of 2007 IEEE Symposium on Security and Privacy*. 2007 May 20–23; Berkeley, California, USA. Los Alamitos, California: IEEE Computer Society; 2007. p. 321–334.
3. Benaloh JC. Secret sharing homomorphisms: keeping shares of a secret secret (extended abstract). In: Odlyzko AM, editor. *Advances in Cryptology – CRYPTO’86*. Berlin, Heidelberg: Springer; 1987. p. 251–260. (Lecture Notes in Computer Science; volume 263). DOI: 10.1007/3-540-47721-7\_19.
4. Galibus TV, Matveev GV. Verification of the modular secret sharing parameters. *Vestnik BGU. Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika*. 2015;1:76–79. Russian.
5. Vaskouski MM, Matveev GV. Verification of modular secret sharing. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2017;2:17–22. Russian.
6. Galibus TV. Verification of modular secret sharing over a binary field. *Vestnik Brestskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya 1, Fizika, matematika, informatika*. 2014;5:26–27. Russian.
7. Galibus T, Matveev G. Generalized Mignotte’s sequences over polynomial rings. *Electronic Notes Theoretical Computer Science*. 2007;186:43–48. DOI: 10.1016/j.entcs.2006.12.044.
8. Shenets NN. On the information level of modular secret sharing schemes. *Doklady Natsional’noi akademii nauk Belarusi. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk*. 2010;54(6):9–12. Russian.

Статья поступила в редколлегию 15.12.2017.  
Received by editorial board 15.12.2017.

УДК 512.54

## О МНОГООБРАЗИЯХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НЕКОТОРЫХ HNN-РАСШИРЕНИЙ СВОБОДНЫХ ГРУПП

А. Н. АДМИРАЛОВА<sup>1)</sup>, В. В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Получено описание структуры и свойств многообразий представлений  $R_n(G(p, q))$  групп, имеющих копредставление вида  $G(p, q) = \langle x_1, \dots, x_2, t \mid t(x_1^2 \dots x_g^2) = (x_1^2 \dots x_g^2)^q \rangle$ , где  $g \geq 3$ ,  $|p| > q \geq 1$ . Найдены неприводимые компоненты  $R_n(G(p, q))$ , вычислены их размерности и доказано, что каждая неприводимая компонента  $R_n(G(p, q))$  является рациональным многообразием.

**Ключевые слова:** копредставление группы; многообразие представлений; размерность многообразия, рациональное многообразие.

## ON REPRESENTATION VARIETIES OF SOME HNN-EXTENSIONS OF FREE GROUPS

A. N. ADMIRALOVA<sup>a</sup>, V. V. BENIASH-KRYVETS<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: V. V. Beniash-Kryvets (benyash@bsu.by)

In the article we provide the description of the structure and the properties of representation varieties  $R_n(G(p, q))$  of the groups with the presentation  $G(p, q) = \langle x_1, \dots, x_2, t \mid t(x_1^2 \dots x_g^2) = (x_1^2 \dots x_g^2)^q \rangle$ , where  $g \geq 3$ ,  $|p| > q \geq 1$ . Irreducible components of  $R_n(G(p, q))$  are found, their dimensions are calculated and it is proved, that every irreducible component of  $R_n(G(p, q))$  is a rational variety.

**Key words:** a group presentation; a representation variety; a dimension of a variety; a rational variety.

Пусть  $G = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$  – конечно порожденная группа,  $K$  – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Тогда любое конечномерное линейное представление  $\rho: G \rightarrow GL_n(K)$  группы  $G$  однозначно определяется набором элементов  $(\rho(g_1), \dots, \rho(g_m)) \in GL_n(K)^m$ . Эти элементы удовлетворяют

### Образец цитирования:

Адмиралова АН, Беньаш-Кривец ВВ. О многообразиях представлений некоторых HNN-расширений свободных групп. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;2:10–16.

### For citation:

Admiralova AN, Beniash-Kryvets VV. On representation varieties of some HNN-extensions of free groups. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;2:10–16. Russian.

### Авторы:

**Александра Николаевна Адмиралова** – аспирантка кафедры высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета. Научный руководитель – В. В. Беньаш-Кривец.

**Валерий Вацлавович Беньаш-Кривец** – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета.

### Authors:

**Alexandra N. Admiralova**, postgraduate student at the department of higher algebra and information security, faculty of mathematics and mechanics.

*al.admiralova@gmail.com*

**Valery V. Beniash-Kryvets**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of higher algebra and information security, faculty of mathematics and mechanics.

*benyash@bsu.by*

всем определяющим соотношениям  $G$ , и, таким образом, имеет место вложение  $\rho \mapsto (\rho(g_1), \dots, \rho(g_m))$  множества  $\text{Hom}(G, GL_n(K))$  в  $GL_n(K)^m$ . Образ  $\text{Hom}(G, GL_n(K))$  относительно этого вложения является аффинным  $K$ -многообразием  $R_n(G) \subset GL_n(K)^m$ , и это многообразие называют многообразием  $n$ -мерных представлений группы  $G$  [1].

О структуре многообразий  $R_n(G)$  в общем случае известно немного. Однако для некоторых классов групп такие описания получены. В [2; 3] исследованы многообразия представлений фундаментальных групп компактных ориентируемых и неориентируемых поверхностей, в [4] – многообразия представлений и характеров групп Баумслэга – Солитера  $R_n(BS(p, q))$  для взаимно простых  $p$  и  $q$ . В [5] результаты работы [4] расширены на случай не взаимно простых показателей  $p$  и  $q$ . В [6] описаны структура и свойства многообразий представлений и характеров групп, имеющих копредставление

$$G = \langle x_1, y_1, \dots, x_g, y_g, t \mid t([x_1, y_1] \dots [x_g, y_g])^p t^{-1} = ([x_1, y_1] \dots [x_g, y_g])^q \rangle, \quad (1)$$

где  $p$  и  $q$  взаимно просты.

В данной статье рассматриваются многообразия представлений еще нескольких классов групп с одним соотношением, представляющих собой HNN-расширения свободных групп. Напомним определение HNN-расширения.

**Определение.** Пусть группа  $G$  имеет копредставление  $G = \langle S \mid R \rangle$ ,  $\alpha: H \rightarrow K$  – изоморфизм двух подгрупп  $G$ ,  $t$  – символ, не принадлежащий порождающему множеству  $S$ . Положим

$$G^*_\alpha = \langle S, t \mid R, tht^{-1} = \alpha(h), \forall h \in H \rangle.$$

Группа  $G^*_\alpha$  называется HNN-расширением  $G$  относительно  $\alpha$ . Исходную группу  $G$  называют базисной группой, группы  $H$  и  $K$  – связанными подгруппами в  $G$ .

Очевидно, что группы с копредставлением (1), рассмотренные в [6], также являются HNN-расширениями. Базисной группой является свободная группа с  $2g$  образующими  $x_1, y_1, \dots, x_g, y_g$ , а в качестве связанных подгрупп в этом случае выступают бесконечные циклические группы, порожденные степенями  $p$  и  $q$  слов вида  $[x_1, y_1] \dots [x_g, y_g]$ .

В этой статье исследуются многообразия представлений групп, имеющих копредставление

$$G(p, q) = \langle x_1, \dots, x_g, t \mid t(x_1^2 \dots x_g^2)^p t^{-1} = (x_1^2 \dots x_g^2)^q \rangle,$$

при этом  $g \geq 3$  и  $p > |q| \geq 1$ .

Введем некоторые необходимые обозначения. Через  $d$  обозначим наибольший общий делитель  $p$  и  $q$ , через  $\Omega(p, q)$  – множество матриц  $A \in GL_n(K)$  таких, что  $A^p$  и  $A^q$  сопряжены. Для матрицы  $A \in \Omega(p, q)$  зададим многообразие  $L(A)$  следующим образом:

$$L(A) = \langle (x_1, \dots, x_g) \in GL_n(K)^g \mid x_1^2 \dots x_g^2 = A \rangle,$$

и через  $n_A$  будем обозначать количество неприводимых компонент многообразия  $L(A)$ .

О структуре  $L(A)$  известно следующее [7].

**Предложение 1.** Пусть  $g \geq 3$ . Справедливы утверждения:

1. Если  $(n, g) \neq (2, 3)$  либо  $(n, g) = (2, 3)$  и  $A$  не является скалярной матрицей, то  $L(A)$  состоит из двух непересекающихся рациональных компонент  $L_1(A)$ ,  $L_2(A)$  размерности  $(g-1)n^2$ . При этом регулярная функция  $\det x_1 x_2 \dots x_g$  на компоненте  $L_1(A)$  принимает значение  $\alpha$ , на компоненте  $L_2(A)$  – значение  $-\alpha$ , где  $\alpha^2 = \det A$ .

2. Если  $n = 2$ ,  $g = 3$  и  $A = \alpha E_2$  – скалярная матрица, то  $L(A)$  состоит из трех рациональных компонент размерности 8. При этом на компонентах  $L_1(A)$ ,  $L_2(A)$  регулярные функции  $\text{tr } x_1$ ,  $\text{tr } x_2$ ,  $\text{tr } x_3$  являются ненулевыми, а регулярная функция  $\det x_1 x_2 \dots x_g$  на компоненте  $L_1(A)$  принимает значение  $\alpha$ , на компоненте  $L_2(A)$  – значение  $-\alpha$ . На компоненте  $L_3(A)$  регулярные функции  $\text{tr } x_1$ ,  $\text{tr } x_2$ ,  $\text{tr } x_3$  являются нулевыми.

Для матрицы  $A \in GL_n(K)$  обозначим через  $Z(A)$  ее централизатор. Пусть  $A \in \Omega(p, q)$ ,  $t_0$  – некоторая фиксированная матрица, для которой справедливо равенство

$$t_0 A^p t_0^{-1} = A^q. \quad (2)$$

Отметим, что в силу леммы 2.3 из [4] совпадают централизаторы:

$$Z(A^d) = Z(A^p) = Z(A^q). \quad (3)$$

Для каждой пары матриц  $A, t_0$  и числа  $i, 1 \leq i \leq n_A$ , рассмотрим морфизм

$$f_{A,i,t_0} : L_i(A) \times Z(A^d) \times GL_n(K) \rightarrow GL_n(K)^{g+1}, (x_1, \dots, x_g, z, T) \rightarrow T(x_1, \dots, x_g, t_0 z) T^{-1}.$$

Докажем следующие утверждения о свойствах морфизма  $f_{A,i,t_0}$ .

**Лемма 1.** *Образ морфизма  $\text{Im } f_{A,i,t_0}$  содержится в многообразии  $R_n(G(p, q))$ .*

*Доказательство.* Для произвольного набора  $T(x_1, \dots, x_g, t_0 z) T^{-1} \in \text{Im } f_{A,i,t_0}$  имеем

$$T(t_0 z) T^{-1} \left( (Tx_1 T^{-1})^2 \dots (Tx_g T^{-1})^2 \right)^p T(t_0 z)^{-1} T^{-1} = T t_0 z (x_1^2 \dots x_g^2)^p z^{-1} t_0^{-1} T^{-1} = T t_0 z A^p z^{-1} t_0^{-1} T^{-1}. \quad (4)$$

Так как  $z \in Z(A^d)$ , то в силу (3) правая часть (4) преобразуется к виду  $T t_0 A^p t_0^{-1} T^{-1} = T A^p T^{-1}$ . С другой стороны, имеем равенство  $\left( (Tx_1 T^{-1})^2 \dots (Tx_g T^{-1})^2 \right)^q = T (x_1^2 \dots x_g^2)^q T^{-1} = T A^q T^{-1}$ . Это означает, что точка  $T(x_1, \dots, x_g, t_0 z) T^{-1}$  принадлежит многообразию  $R_n(G(p, q))$ , что и завершает доказательство леммы 1.

**Лемма 2.** *Образ морфизма  $\text{Im } f_{A,i,t_0}$  не зависит от выбора матрицы  $t_0$ .*

*Доказательство.* Пусть  $t_1, t_1 \neq t_0$ , – другая матрица, для которой также справедливо равенство  $t_1 A^p t_1^{-1} = A^p$ , и  $f_{A,i,t_0}, f_{A,i,t_1}$  – соответствующие морфизмы. Тогда с учетом (2) имеем  $t_1^{-1} t_0 A^p t_0^{-1} t_1 = A^p$ , откуда следует, что  $t_1^{-1} t_0 \in Z(A^p)$ . Поэтому для любого элемента централизатора  $z_0 \in Z(A^d)$  в силу равенств (3) получим  $z_1 = t_1^{-1} t_0 z_0 \in Z(A^d)$  и  $t_0 z_0 = t_1 z_1$ . Следовательно, для любого упорядоченного набора  $(x_1, \dots, x_g, T) \in L_i(A) \times GL_n(K)$  выполняется равенство  $f_{A,i,t_0}(x_1, \dots, x_g, z_0, T) = f_{A,i,t_1}(x_1, \dots, x_g, z_1, T)$ , что и требовалось доказать.

Таким образом, ввиду независимости  $\text{Im } f_{A,i,t_0}$  от выбора матрицы  $t_0$  далее для образов морфизмов  $f_{A,i,t_0}$  будем использовать обозначение  $\text{Im } f_{A,i}$ . Замыкание образа  $\text{Im } f_{A,i}$  в топологии Зарисского обозначим  $W_i(A)$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** *1. Каждое многообразие  $W_i(A)$  является неприводимой компонентой  $R_n(G(p, q))$ , и этими компонентами исчерпываются все неприводимые компоненты  $R_n(G(p, q))$ .*

*2. Размерность компоненты  $W_i(A)$  равна  $(g+1)n^2 + \dim Z(A^d) - \dim Z(A)$ .*

*3. Число неприводимых компонент многообразия  $R_n(G(p, q))$  равно  $\sum_{A \in X} n_A$ , где  $X$  – множество представителей всех классов сопряженности в  $\Omega(p, q)$ .*

Для доказательства теоремы 1 необходим ряд лемм.

**Лемма 3.** *Многообразия  $R_n(G(p, q))$  является объединением всех своих замкнутых неприводимых подмножеств вида  $W_i(A)$ .*

*Доказательство.* Многообразия  $W_i(A)$  неприводимо как замыкание образа неприводимого многообразия относительно регулярного морфизма. Покажем, что многообразия  $W_i(A)$  покрывают  $R_n(G(p, q))$ . Рассмотрим произвольную точку  $(x_1, \dots, x_g, t) \in R_n(G(p, q))$ . Пусть  $\tilde{A} = x_1^2 \dots x_g^2$ . Тогда  $\tilde{A} \in \Omega(p, q)$  и найдется такая неприводимая компонента  $L_k(\tilde{A})$ , что  $(x_1, \dots, x_g) \in L_k(\tilde{A})$ . Легко проверить, что в таком случае точка  $(x_1, \dots, x_g, t)$  является образом упорядоченного набора  $(x_1, \dots, x_g, E, E) \in L_k(\tilde{A}) \times Z(\tilde{A}^d) \times GL_n(K)$  относительно морфизма  $f_{\tilde{A},k,t}$ . Лемма 3 доказана.

**Лемма 4.** *Если  $A, B \in \Omega(p, q)$  – подобные матрицы, то при подходящей нумерации  $W_i(A) = W_i(B)$ ,  $1 \leq i \leq n_A$ .*

*Доказательство.* Пусть  $B = SAS^{-1}$ . Тогда для всякой матрицы  $t_0$  такой, что  $t_0 A^p t_0^{-1} = A^p$ , справедливо равенство  $(St_0 S^{-1}) B^p (St_0 S^{-1})^{-1} = B^p$ . Отображение

$$f : L(A) \rightarrow L(B), (x_1, \dots, x_g) \mapsto S(x_1, \dots, x_g) S^{-1},$$

очевидно, является бирегулярным изоморфизмом. Положим  $L_i(B) = f(L_i(A))$ . Рассмотрим произвольную точку  $(x_1, \dots, x_g, z, T) \in L_i(A) \times Z(A^d) \times GL_n(K)$ . Тогда так как  $Z(A^d) = S^{-1} Z(B^d) S$ , то

$$(S^{-1} x_1 S, \dots, S^{-1} x_g S, S^{-1} z S, TS) \in L_i(B) \times Z(B^d) \times GL_n(K)$$

$$\text{и } f_{A,i,t_0}(x_1, \dots, x_g, z, T) = f_{B,i,S^{-1}t_0 S}(S^{-1} x_1 S, \dots, S^{-1} x_g S, S^{-1} z S, TS).$$

Значит,  $\text{Im } f_{A,i} \subset \text{Im } f_{B,i}$ . Аналогично доказывается противоположное включение. Таким образом,  $\text{Im } f_{A,i} = \text{Im } f_{B,i}$ , следовательно, переходя к замыканиям, получим, что  $W_i(A) = W_i(B)$ . Лемма 4 доказана.

**Лемма 5.** Если матрицы  $A, B \in \Omega(p, q)$  не подобны, то многообразия  $W_i(A)$  и  $W_j(B)$  не содержатся друг в друге.

Доказательство. Для доказательства понадобится описание многообразий представлений групп Баумслэга – Солитера  $R_n(BS(p, q))$  [5]. Пусть  $A \in \Omega(p, q)$  – фиксированная матрица,  $A_1 = A^d$ , где  $d = (p, q)$  – наибольший общий делитель  $p$  и  $q$ ,  $t_0 \in GL_n(K)$  – такая матрица, что  $t_0 A_1^{p_1} t_0^{-1} = A_1^{q_1}$ , где  $p_1 = \frac{p}{d}$ ,  $q_1 = \frac{q}{d}$ . Рассмотрим отображение

$$g_A : Z(A_1) \times GL_n(K) \rightarrow GL_n(K) \times GL_n(K), (Z, X) \mapsto (XAX^{-1}, X t_0 Z X^{-1}).$$

Обозначим через  $H(A)$  замыкание в топологии Зарисского образа  $\text{Im } g_A$ . В [5] доказано, что многообразия  $H(A)$  являются в точности неприводимыми компонентами  $R_n(BS(p, q))$ , и если матрицы  $A$  и  $B$  не подобны, то многообразия  $H(A)$  и  $H(B)$  не содержатся друг в друге.

Рассмотрим морфизм

$$\alpha : R_n(G) \rightarrow R_n(BS(p, q)), \alpha(x_1, \dots, x_g, t) = (x_1^2 \dots x_g^2, t).$$

Поскольку для произвольной точки  $z = (x_1, \dots, x_g, t) \in \text{Im } F_{A,i}$  справедливо  $\alpha(z) \in H(A)$  и  $\text{Im } f_{A,i}$  плотно в  $W_i(A)$ , то  $\alpha(W_i(A)) \subset H(A)$ ,  $1 \leq i \leq n_A$ . Покажем, что  $\alpha(W_i(A))$  плотно в  $H(A)$ . Рассмотрим произвольную точку  $y = g_A(Z, X) = X(A, t_0 Z)X^{-1} \in \text{Im } g_A$ . Тогда для любой точки  $(x_1, \dots, x_g) \in L_i(A)$  имеем

$$\alpha \circ f_{A,i,t_0}(x_1, \dots, x_g, Z, X) = X(x_1^2, \dots, x_g^2, t_0 Z)X^{-1} = X(A, t_0 Z)X^{-1} = y.$$

Значит,  $\alpha(W_i(A)) \supset \text{Im } g_A$ , следовательно,  $\alpha(W_i(A))$  является плотным подмножеством в  $H(A)$ .

Допустим теперь, что матрицы  $A, B \in \Omega(p, q)$  не подобны, но имеет место включение  $W_i(A) \supset W_j(B)$ . Тогда  $\alpha(W_i(A)) \supset \alpha(W_j(B))$  и  $H(A) = \overline{\alpha(W_i(A))} \supset \overline{\alpha(W_j(B))} = H(B)$ . Приходим к противоречию. Следовательно, многообразия  $W_i(A)$  и  $W_j(B)$  не содержатся друг в друге. Лемма 5 доказана.

**Лемма 6.** Размерность многообразия  $W_i(A)$  равна  $g^2 n + \dim Z(A^d) - \dim Z(A)$ .

Доказательство. Для вычисления размерности  $W_i(A)$  воспользуемся теоремой о размерности слоев морфизма. Пусть  $w_0 = f_{A,i,t_0}(x_1, \dots, x_g, z_0, T_0)$ . Найдем  $\dim f_{A,i,t_0}^{-1}(w_0)$ . Пусть  $u = (y_1, \dots, y_g, z, T)$  и  $f_{A,i,t_0}(u) = w_0$ . Тогда справедливо равенство

$$T_0(x_1, \dots, x_g, t_0 z_0)T_0^{-1} = T(y_1, \dots, y_g, t_0 z)T^{-1}. \quad (5)$$

В результате имеем систему уравнений

$$y_i = T^{-1}T_0 x_i T_0^{-1}T, \quad 1 \leq i \leq g. \quad (6)$$

Поскольку для точек  $(x_1, \dots, x_g), (y_1, \dots, y_g) \in L_i(A)$  справедливо

$$x_1^2 \dots x_g^2 = y_1^2 \dots y_g^2 = A, \quad (7)$$

то из (6), (7) вытекает равенство  $A = T_0^{-1}TAT^{-1}T_0$ . Следовательно,  $T_0^{-1}T \in Z(A)$ , откуда

$$T = T_0 Z_1, \quad (8)$$

где  $Z_1 \in Z(A)$ . Тогда

$$y_i = Z_1^{-1}x_i Z_1, \quad 1 \leq i \leq g, \quad (9)$$

и из равенств (5) и (8) получим  $t_0 z_0 = Z_1 t_0 z Z_1^{-1}$ , а значит,

$$z = t_0^{-1}Z_1^{-1}t_0 z_0 Z_1. \quad (10)$$

Проверим, что элемент  $z$ , определяемый формулой (10), принадлежит  $Z(A^d)$ . Поскольку  $Z(A^d) = Z(A^p) = Z(A^q)$  в силу (3), то следующее вычисление показывает, что  $z \in Z(A^d)$ :

$$z A^p z^{-1} = (t_0^{-1} Z_1^{-1} t_0 z_0 Z_1) A^p (Z_1^{-1} z_0^{-1} t_0^{-1} Z_1 t_0) = t_0^{-1} Z_1^{-1} t_0 A^p t_0^{-1} Z_1 t_0 = t_0^{-1} Z_1^{-1} A^q Z_1 t_0 = t_0^{-1} A^q t_0 = A^p.$$

Из (8)–(10) следует, что слой  $f_{A,i,t_0}^{-1}(w_0)$  изоморфен  $Z(A)$ . Следовательно, все слои морфизма  $f_{A,i,t_0}$  имеют одинаковую размерность, равную  $\dim Z(A)$ . Поэтому с учетом предложения 1 размерность многообразия  $W_i(A)$  равна

$$\dim W_i(A) = (\dim L_i(A) + \dim Z(A^d) + \dim GL_n(K)) - \dim Z(A) = gn^2 + \dim Z(A^d) - \dim Z(A).$$

Лемма 6 доказана.

**Лемма 7.**  $W_i(A) \neq W_j(A)$  при  $i \neq j$ .

Доказательство. Вначале исследуем случай  $(g, n) \neq (3, 2)$  либо  $(g, n) = (3, 2)$  и матрица  $A$  не скалярна. В этом случае многообразие  $L(A)$  содержит 2 неприводимые компоненты. Рассмотрим регулярную функцию

$$\varphi: R_n(G(p, q)) \rightarrow K, (x_1, x_2, \dots, x_g, t) \mapsto \det(x_1 x_2 \dots x_g). \quad (11)$$

По предложению 1 на множествах  $\text{Im } f_{A,1}$  и  $\text{Im } f_{A,2}$  функция  $\varphi$  принимает значение  $\beta$  и  $-\beta$  соответственно, где  $\beta^2 = \det A$ . Следовательно,  $\varphi$  принимает значение  $\beta$  и  $-\beta$  соответственно на многообразиях  $W_1(A)$  и  $W_2(A)$ , поэтому  $W_1(A) \cap W_2(A) = \emptyset$ .

Пусть теперь  $(g, n) = (3, 2)$  и матрица  $A$  скалярна. Тогда многообразие  $L(A)$  содержит 3 неприводимые компоненты и по лемме 6 размерности многообразий  $W_1(A), W_2(A), W_3(A)$  равны 12. В силу предложения 1 регулярная функция  $\varphi$ , определенная в (11), принимает значение  $\beta$  и  $-\beta$  соответственно на многообразиях  $W_1(A)$  и  $W_2(A)$ , поэтому  $W_1(A) \cap W_2(A) = \emptyset$ .

Остается доказать, что  $W_3(A)$  не совпадает ни с  $W_1(A)$ , ни с  $W_2(A)$ . Допустим, что  $W_1(A) = W_3(A)$ . Рассмотрим регулярную функцию

$$\psi: R_n(G(p, q)) \rightarrow K, (x_1, x_2, x_3, t) \mapsto \text{tr } x_1.$$

Из предложения 1 следует, что функция  $\psi$  на  $\text{Im } f_{A,3}$  тождественно равна нулю. Так как  $\text{Im } f_{A,3}$  – плотное подмножество в  $W_1(A) = W_3(A)$ , то функция  $\psi$  тождественно равна нулю на  $W_1(A)$ , а значит, и на  $\text{Im } f_{A,1}$ , что противоречит предложению 1. Поэтому  $W_1(A) \neq W_3(A)$ . Аналогично  $W_2(A) \neq W_3(A)$ . Лемма 7 доказана.

Доказательство теоремы 1 следует из лемм 3–7.

**Теорема 2.** Каждая неприводимая компонента  $W_i(A)$  многообразия  $R_n(G(p, q))$  является рациональным многообразием.

Доказательство. Введем необходимые обозначения.  $(m \times n)$ -Матрицу  $X$  будем называть правильной верхней треугольной, если она имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{при } m \leq n \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{при } m \geq n.$$

Без ограничения общности можно считать, что  $A$  имеет жорданову нормальную форму  $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_s)$ , где  $A_i = \text{diag}(J_{m_i,1}(\alpha_i), \dots, J_{m_i,s_i}(\alpha_i))$  –  $(n_i \times n_i)$ -матрица, являющаяся прямой суммой всех клеток Жордана  $J_{m_i,j}(\alpha_i)$  из  $A$  с собственным значением  $\alpha_i$ . Тогда централизатор  $Z(A)$  состоит из невырожденных матриц вида

$$C = \text{diag}(C_1, \dots, C_s), \quad \text{где } C_i = \begin{pmatrix} X_{11} & \dots & X_{1,s_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{s_i,1} & \dots & X_{s_i,s_i} \end{pmatrix} \quad (12)$$

и  $X_{rt}$  – произвольная правильная верхняя треугольная  $(m_{i,r} \times m_{i,t})$ -матрица (см. [8, гл. VIII]). Рассмотрим множество  $T(A)$  матриц вида  $Y = (Y_{ij}) \in GL_n(\mathbb{C})$ , где  $Y_{ij}$  при  $i \neq j$  – произвольная  $(n_i \times n_j)$ -матрица,  $Y_{ii}$  – блочная матрица вида

$$Y_{ii} = \begin{pmatrix} Z_{11}^{(i)} & \dots & Z_{1,s_i}^{(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{s_i,1}^{(i)} & \dots & Z_{s_i,s_i}^{(i)} \end{pmatrix},$$



блоки которой описываются следующим образом. Матрица  $Z_{rr}^{(i)}$  размером  $m_{ir} \times m_{ir}$  имеет вид

$$Z_{rr}^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2, m_{ir}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m_{ir}, 1} & u_{m_{ir}, 2} & \dots & u_{m_{ir}, m_{ir}} \end{pmatrix}.$$

Если же  $r \neq k$ , то  $Z_{rk}^{(i)}$  – матрица размером  $m_{ir} \times m_{ik}$  следующего вида: при  $m_{ir} \leq m_{ik}$

$$Z_{rk}^{(i)} = \begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1, m_{ik} - m_{ir}} & 0 & \dots & 0 \\ w_{21} & \dots & \dots & \dots & \dots & w_{2, m_{ik}} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ w_{m_{ir}, 1} & \dots & \dots & \dots & \dots & w_{m_{ir}, m_{ik}} \end{pmatrix},$$

при  $m_{ir} \geq m_{ik}$

$$Z_{rk}^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ w_{21} & \dots & w_{2, m_{ik}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m_{ir}, 1} & \dots & w_{m_{ir}, m_{ik}} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что  $\dim T(A) = n^2 - \dim Z(A)$ . Обозначим через  $h_{A, i, t_0}$  ограничение морфизма  $f_{A, i, t_0}$  на  $L_i(A) \times Z(A^d) \times T(A)$ . Несложное вычисление показывает, что  $h_{A, i, t_0}$  – инъективный морфизм. Действительно, если  $h_{A, i, t_0}(x_1, \dots, x_g, Z_1, T_1) = h_{A, i, t_0}(x'_1, \dots, x'_g, Z_2, T_2)$ , то

$$T_1(x_1, \dots, x_g, t_0 Z_1) T_1^{-1} = T_2(x'_1, \dots, x'_g, t_0 Z_2) T_2^{-1}. \quad (13)$$

Значит,  $T_1 x_i T_1^{-1} = T_2 x_i T_2^{-1}$ ,  $1 \leq i \leq g$ , откуда

$$T_1 x_1^2 \dots x_g^2 T_1^{-1} = T_2 x_1'^2 \dots x_g'^2 T_2^{-1}.$$

Следовательно,  $T_1 A T_1^{-1} = T_2 A T_2^{-1}$ , поэтому  $T_2 = T_1 B$  для некоторой матрицы  $B \in Z(A)$ . Учитывая вид (12) матриц из централизатора  $Z(A)$  и вид матриц из  $T(A)$ , получим  $B = E$  и, следовательно,  $T_1 = T_2$ . Тогда (13) влечет  $x'_i = x_i$ ,  $1 \leq i \leq g$ , и  $Z_1 = Z_2$ , что и доказывает инъективность  $h_{A, i, t_0}$ .

Так как  $\dim L_i(A) \times Z(A^d) \times T(A) = \dim W_i(A)$ , то морфизм  $h_{A, i, t_0}$  доминантен. Значит,  $h_{A, i, t_0}$  – бирациональный изоморфизм и  $W_i(A)$  бирационально изоморфно многообразию  $L_i(A) \times Z(A^d) \times T(A)$ . По предложению 1  $L_i(A)$  рационально и, очевидно,  $Z(A^d)$  и  $T(A)$  также рациональны. Следовательно,  $W_i(A)$  – рациональное многообразие. Теорема 2 доказана.

### Библиографические ссылки

1. Lubotzky A, Magid AR. Varieties of Representations of Finitely Generated Groups. [Providence, Rhode Island]: American Mathematical Society; 1985. (American Mathematical Society: Memoirs of the American Mathematical Society; volume 336). 117 p.
2. Rapinchuk AS, Benyash-Krivetz VV, Chernousov VI. Representation varieties of the fundamental groups of compact orientable surfaces. *Israel Journal of Mathematics*. 1996; 93(1):29–71. DOI: 10.1007/BF02761093.
3. Беньяш-Кривец ВВ, Черноусов ВИ. Многообразия представлений фундаментальных групп компактных неориентируемых поверхностей. *Математический сборник*. 1997; 188(7):47–92. DOI: 10.4213/sm242.
4. Беньяш-Кривец ВВ, Говорушко ИО. Многообразия представлений и характеров групп Баумслэга – Солитера. *Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН*. 2016; 292:26–42. DOI: 10.1134/S0371968516010039.
5. Беньяш-Кривец ВВ, Говорушко ИО. Многообразия представлений групп Баумслэга – Солитера в случае не взаимно простых показателей. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2016; 1:52–56.
6. Адмиралова АН, Беньяш-Кривец ВВ. О многообразиях представлений и характеров одного класса групп с одним соотношением. *Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика*. 2016; 3:166–172.
7. Беньяш-Кривец ВВ. Многообразия представлений неевклидовых кристаллографических групп. *Доклады НАН Беларуси*. 2000; 44(4):37–40.
8. Гантмахер ФР. *Теория матриц*. Москва: Наука; 1967.

## References

1. Lubotzky A, Magid AR. Varieties of Representations of Finitely Generated Groups. [Providence, Rhode Island]: American Mathematical Society; 1985. (American Mathematical Society: Memoirs of the American Mathematical Society; volume 336). 117 p.
2. Rapinchuk AS, Benyash-Krivetz VV, Chernousov VI. Representation varieties of the fundamental groups of compact orientable surfaces. *Israel Journal Mathematics*. 1996; 93(1):29–71. DOI: 10.1007/BF02761093.
3. Benyash-Krivets VV, Chernousov VI. Representation varieties of the fundamental groups of non-orientable surfaces. *Matematicheskii sbornik*. 1997;188(7):47–92. Russian. DOI: 10.4213/sm242.
4. Benyash-Krivets VV, Govorushko IO. Representation and character varieties of the Baumslag – Solitar groups. *Trudy Matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova RAN*. 2016;292:26–42. Russian. DOI: 10.1134/S0371968516010039.
5. Benyash-Krivets VV, Govorushko IO. Mnogoobraziya predstavlenii grupp Baumslaga – Solitera v sluchae ne vzaimno prostykh pokazatelei [On representation varieties of Baumslag – Solitar groups in the case of not-coprime powers]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2016;1:52–56. Russian.
6. Admiralova AN, Beniash-Krivets VV. On representations varieties and characters of one class groups with one relation. *Vestnik BGU. Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika*. 2016;3:166–172. Russian.
7. Benyash-Krivets VV. Representation varieties of non-Euclidean crystallographic groups. *Doklady NAN Belarusi*. 2000;44(4): 37–40. Russian.
8. Gantmacher FR. *The theory of matrices*. Moscow: Nauka; 1967. Russian.

Статья поступила в редакцию 15.03.2018.  
Received by editorial board 15.03.2018.

---

---

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

---

## DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

---

---

УДК 517.95

### О МНОЖЕСТВЕ РАЗРУШЕНИЯ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А. Л. ГЛАДКОВ<sup>1)</sup>, А. И. НИКИТИН<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

<sup>2)</sup>Витебский государственный университет им. П. М. Машерова,  
Московский проспект, 33, 210038, г. Витебск, Беларусь

Рассматривается система полулинейных параболических уравнений  $u_t = \Delta u + c_1(x, t)v^p$ ,  $v_t = \Delta v + c_2(x, t)u^q$ ,  $(x, t) \in \Omega \times (0, +\infty)$ , с нелинейными нелокальными граничными условиями  $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \int_{\Omega} k_1(x, y, t)u^m(y, t)dy$ ,  $\frac{\partial v}{\partial \eta} = \int_{\Omega} k_2(x, y, t)v^n(y, t)dy$ ,  $(x, t) \in \partial\Omega \times (0, +\infty)$ , и начальными данными  $u(x, 0) = u_0(x)$ ,  $v(x, 0) = v_0(x)$ ,  $x \in \Omega$ , где  $p, q, m, n$  – положительные постоянные,  $\Omega$  – ограниченная область в пространстве  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 1$ ) с гладкой границей  $\partial\Omega$ ,  $\eta$  – единичная внешняя нормаль к  $\partial\Omega$ . Неотрицательные функции  $c_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$ , определены при  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $t \geq 0$ , и локально непрерывны по Гёльдеру; неотрицательные непрерывные функции  $k_i(x, y, t)$ ,  $i = 1, 2$ ,

---

#### Образец цитирования:

Гладков АЛ, Никитин АИ. О множестве разрушения решений начально-краевой задачи для системы параболических уравнений с нелокальными граничными условиями. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2018;2:17–24.

#### For citation:

Gladkov AL, Nikitin AI. On blow-up set of solutions of initial boundary value problem for a system of parabolic equations with nonlocal boundary conditions. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2018;2:17–24. Russian.

---

#### Авторы:

**Александр Львович Гладков** – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой математической кибернетики механико-математического факультета.  
**Александр Игоревич Никитин** – преподаватель кафедры прикладного и системного программирования факультета математики и информационных технологий.

#### Authors:

**Alexander L. Gladkov**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics.  
*gladkoval@bsu.by*  
**Alexandr I. Nikitin**, lecturer at the department of applied and system programming, faculty of mathematics and IT.  
*ip.alexnikitin@gmail.com*

определены при  $x \in \partial\Omega$ ,  $y \in \bar{\Omega}$ ,  $t \geq 0$ ; неотрицательные непрерывные функции  $u_0(x), v_0(x)$  определены при  $x \in \bar{\Omega}$  и удовлетворяют условиям  $\frac{\partial u_0(x)}{\partial \eta} = \int_{\Omega} k_1(x, y, 0) u_0^m(y) dy$ ,  $\frac{\partial v_0(x)}{\partial \eta} = \int_{\Omega} k_2(x, y, 0) v_0^n(y) dy$  при  $x \in \partial\Omega$ . В работе исследуется множество разрушения классических решений. Для  $\max(p, q) \leq 1$ ,  $\max(m, n) > 1$  и при выполнении определенных условий для коэффициентов  $k_i(x, y, t)$ ,  $i = 1, 2$ , установлено, что решение задачи может разрушаться только на границе  $\partial\Omega$ .

**Ключевые слова:** система полулинейных параболических уравнений; нелокальные граничные условия; множество разрушения.

## ON BLOW-UP SET OF SOLUTIONS OF INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF PARABOLIC EQUATIONS WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

A. L. GLADKOV<sup>a</sup>, A. I. NIKITIN<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

<sup>b</sup>Vitebsk State University named after P. M. Masherov, 33 Maskoŭski Avenue, Vitebsk 210038, Belarus

Corresponding author: A. I. Nikitin (ip.alexnikitin@gmail.com)

We consider a system of semilinear parabolic equations  $u_t = \Delta u + c_1(x, t)v^p$ ,  $v_t = \Delta v + c_2(x, t)u^q$ ,  $(x, t) \in \Omega \times (0, +\infty)$  with nonlinear nonlocal boundary conditions  $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \int_{\Omega} k_1(x, y, t)u^m(y, t)dy$ ,  $\frac{\partial v}{\partial \eta} = \int_{\Omega} k_2(x, y, t)v^n(y, t)dy$ ,  $(x, t) \in \partial\Omega \times (0, +\infty)$ , and initial data  $u(x, 0) = u_0(x)$ ,  $v(x, 0) = v_0(x)$ ,  $x \in \Omega$ , where  $p, q, m, n$  are positive constants,  $\Omega$  is bounded domain in  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 1$ ) with a smooth boundary  $\partial\Omega$ ,  $\eta$  is unit outward normal on  $\partial\Omega$ . Nonnegative locally Hölder continuous functions  $c_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$  are defined for  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $t \geq 0$ ; nonnegative continuous functions  $k_i(x, y, t)$ ,  $i = 1, 2$  are defined for  $x \in \partial\Omega$ ,  $y \in \bar{\Omega}$ ,  $t \geq 0$ ; nonnegative continuous functions  $u_0(x), v_0(x)$  are defined for  $x \in \bar{\Omega}$  and satisfy the conditions  $\frac{\partial u_0(x)}{\partial \eta} = \int_{\Omega} k_1(x, y, 0)u_0^m(y)dy$ ,  $\frac{\partial v_0(x)}{\partial \eta} = \int_{\Omega} k_2(x, y, 0)v_0^n(y)dy$  for  $x \in \partial\Omega$ . In the paper blow-up set of classical solutions is investigated. It is established that blow-up of the solutions can occur only on the boundary  $\partial\Omega$  if  $\max(p, q) \leq 1$ ,  $\max(m, n) > 1$  and under certain conditions for the coefficients  $k_i(x, y, t)$ ,  $i = 1, 2$ .

**Key words:** system of semilinear parabolic equations; nonlocal boundary conditions; blow-up set.

### Введение

Рассматривается начально-краевая задача для системы полулинейных параболических уравнений с нелокальными граничными условиями

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c_1(x, t)v^p, v_t = \Delta v + c_2(x, t)u^q, x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \int_{\Omega} k_1(x, y, t)u^m(y, t)dy, x \in \partial\Omega, t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = \int_{\Omega} k_2(x, y, t)v^n(y, t)dy, x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), x \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

где  $p, q, m, n$  – положительные постоянные,  $\Omega$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 1$ ) с гладкой границей  $\partial\Omega$ ,  $\eta$  – единичная внешняя нормаль к  $\partial\Omega$ .

Будем предполагать, что для задачи (1) выполнено следующее:

$$\begin{aligned}
 c_i(x, t) &\in C_{\text{loc}}^\alpha(\bar{\Omega} \times [0, +\infty)), 0 < \alpha < 1, c_i(x, t) \geq 0, i = 1, 2, \\
 k_i(x, y, t) &\in C(\partial\Omega \times \bar{\Omega} \times [0, +\infty)), k_i(x, y, t) \geq 0, i = 1, 2, \\
 u_0(x), v_0(x) &\in C^1(\bar{\Omega}), u_0(x) \geq 0, v_0(x) \geq 0 \text{ в } \Omega, \\
 \frac{\partial u_0(x)}{\partial \eta} &= \int_{\Omega} k_1(x, y, 0) u_0^m(y) dy, \frac{\partial v_0(x)}{\partial \eta} = \int_{\Omega} k_2(x, y, 0) v_0^n(y) dy \text{ на } \partial\Omega.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ ,  $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$ .

**Определение.** Точку  $x_0 \in \bar{\Omega}$  будем называть точкой разрушения решения  $(u, v)$  задачи при  $t = T$ , если существует такая последовательность  $\{(x_n, t_n)\}$ , что  $x_n \in \Omega$ ,  $t_n < T$ ,  $(x_n, t_n) \rightarrow (x_0, T)$  при  $n \rightarrow \infty$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u(x_n, t_n) + v(x_n, t_n)) = \infty.$$

Множеством разрушения решения называется множество всех точек разрушения.

Начально-краевые задачи для нелинейных параболических уравнений и систем уравнений с нелокальными граничными условиями исследовались многими авторами [1–17]. В [14; 15] рассматривалась начально-краевая задача с нелокальными граничными условиями Неймана для полулинейного параболического уравнения с переменным коэффициентом

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c(x, t)u^p, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \int_{\Omega} k(x, y, t)u^l(y, t)dy, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

где  $p, l$  – положительные постоянные, функции  $c(x, t)$ ,  $k(x, y, t)$ ,  $u_0(x)$  удовлетворяют условиям, аналогичным условиям (2). Получен ряд утверждений о единственности решения, существовании и отсутствии глобальных решений, множестве разрушения решений. В [16; 17] для задачи (1) доказано существование локального классического решения, найдены достаточные условия существования и отсутствия глобальных решений.

В настоящей работе устанавливаются условия, при которых классические решения задачи (1) разрушаются на границе области.

### Разрушение решений на границе

При доказательстве разрушения решений задачи (1) на границе будем использовать некоторые рассуждения из [14; 20; 21]. Введем обозначения

$$J_1(t) = \iint_{0\Omega}^t u^m(x, \tau) dx d\tau, \tag{3}$$

$$J_2(t) = \iint_{0\Omega}^t v^n(x, \tau) dx d\tau. \tag{4}$$

Для  $m > 1$  положим  $\beta = 0$ , если  $m^2 - m - q \geq 0$ , и  $\beta = \frac{q + m - m^2}{m^2 - m}$ , если  $m^2 - m - q < 0$ . Далее через  $s_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) будут обозначаться положительные постоянные.

**Лемма 1.** Пусть решение  $(u, v)$  задачи разрушается при  $t = T$ ,  $m > 1$  и  $\inf_{\partial\Omega \times Q_T} k_1(x, y, t) > 0$ . Тогда для  $t \in [0, T)$

$$J_1(t) \leq s_1 (T - t)^{-\frac{1}{m-1}}. \tag{5}$$

Если дополнительно  $n \leq 1$  и  $q \leq m$ , то для  $t \in [0, T)$

$$J_2(t) \leq s_2 (T - t)^{-\beta}. \tag{6}$$

Доказательство. Докажем сначала неравенство (5). Пусть  $G(x, y; t)$  – функция Грина для уравнения теплопроводности с однородными граничными условиями Неймана. Будем использовать следующие свойства функции Грина [18; 19]:

$$G(x, y; t - \tau) \geq 0, \quad x, y \in \Omega, \quad 0 \leq \tau < t < T, \quad (7)$$

$$\int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) dy = 1, \quad x \in \Omega, \quad 0 \leq \tau < t < T, \quad (8)$$

$$\int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) dx = 1, \quad y \in \Omega, \quad 0 \leq \tau < t < T, \quad (9)$$

$$\int_{\partial\Omega} G(x, \xi; t - \tau) dS_{\xi} \geq s_3, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad 0 \leq \tau < t < T. \quad (10)$$

Как известно, пара функций  $(u, v)$  является решением (1) тогда и только тогда, когда выполнены равенства

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\Omega} G(x, y; t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x, \xi; t - \tau) \int_{\Omega} k_1(\xi, y, \tau) u^m(y, \tau) dy dS_{\xi} d\tau + \\ &\quad + \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) c_1(y, \tau) v^p(y, \tau) dy d\tau, \\ v(x, t) &= \int_{\Omega} G(x, y; t) v_0(y) dy + \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x, \xi; t - \tau) \int_{\Omega} k_2(\xi, y, \tau) v^n(y, \tau) dy dS_{\xi} d\tau + \\ &\quad + \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) c_2(y, \tau) u^q(y, \tau) dy d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя (3), (7), (10), (11) и неравенство Йенсена, имеем

$$\begin{aligned} J_1'(t) &= \int_{\Omega} u^m(x, t) dx \geq k^m \int_{\Omega} \left( \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x, \xi; t - \tau) \int_{\Omega} u^m(y, \tau) dy dS_{\xi} d\tau \right)^m dx \geq \\ &\geq k^m |\Omega|^{1-m} \left( \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x, \xi; t - \tau) \int_{\Omega} u^m(y, \tau) dy dS_{\xi} d\tau dx \right)^m \geq (s_3 k)^m |\Omega| J_1^m(t), \end{aligned}$$

где  $k = \inf_{\partial\Omega \times Q_T} k_1(x, y, t)$ . Отсюда следует, что

$$J_1'(t) \geq s_4 J_1^m(t). \quad (12)$$

Интегрируя неравенство (12) по интервалу  $(t, T)$ , получим (5).

Установим теперь справедливость неравенства (6). В силу непрерывности функций  $c_2(x, y)$ ,  $k_2(x, y, t)$  существует такая положительная постоянная  $M$ , что  $c_2(x, y) \leq M$ ,  $k_2(x, y, t) \leq M$  в  $Q_T$  и  $\partial\Omega \times Q_T$  соответственно. Используя (3), (4), (9), (11) и неравенство Йенсена, имеем

$$\begin{aligned} J_2' &= \int_{\Omega} v^n(x, t) dx \leq \int_{\Omega} (1 + v(x, t)) dx \leq |\Omega| + \int_{\Omega} v_0(y) dy + M |\partial\Omega| \int_0^t \int_{\Omega} v^n(y, \tau) dy d\tau + \\ &\quad + M \int_0^t \int_{\Omega} u^q(y, \tau) dy d\tau \leq s_5 + M |\partial\Omega| J_2(t) + M |\Omega|^{1-\frac{q}{m}} t^{1-\frac{q}{m}} J_1^{\frac{q}{m}}(t). \end{aligned}$$

Учитывая (5), получим

$$J_2'(t) \leq s_6 J_2(t) + s_7 (T - t)^{-\frac{q}{m(m-1)}} \quad (13)$$

для  $t \in [0, T)$ . Используя лемму Гронуолла для неравенства (13), имеем



$$J_2(t) \leq s_7 \exp(s_6 t) \int_0^t (T - \tau)^{-\frac{q}{m(m-1)}} d\tau.$$

Таким образом, для  $t \in [0, T)$

$$J_2(t) \leq s_2,$$

если  $m^2 - m - q \geq 0$ , и

$$J_2(t) \leq s_2 (T - t)^{-\frac{q+m-m^2}{m(m-1)}},$$

если  $m^2 - m - q < 0$ . Лемма доказана.

Для  $n > 1$  положим  $\alpha = 0$ , если  $n^2 - n - p \geq 0$ , и  $\alpha = \frac{p+n-n^2}{n^2-n}$ , если  $n^2 - n - p < 0$ . Аналогично

лемме 1 доказывается следующее утверждение.

**Лемма 2.** Пусть решение  $(u, v)$  задачи (1) разрушается при  $t = T$ ,  $n > 1$ , и  $\inf_{\partial\Omega \times Q_T} k_2(x, y, t) > 0$ . Тогда для  $t \in [0, T)$

$$J_2(t) \leq s_8 (T - t)^{-\frac{1}{n-1}}. \quad (14)$$

Если дополнительно  $m \leq 1$  и  $p \leq n$ , то для  $t \in [0, T)$

$$J_1(t) \leq s_9 (T - t)^{-\alpha}.$$

**Теорема.** Пусть  $\max(p, q) \leq 1$ ,  $\max(m, n) > 1$ . Предположим, что  $\inf_{\partial\Omega \times Q_T} k_1(x, y, t) > 0$ , если  $m > 1$ , и  $\inf_{\partial\Omega \times Q_T} k_2(x, y, t) > 0$ , если  $n > 1$ . Тогда решение задачи (1) может разрушаться только на границе  $\partial\Omega$ .

Доказательство. Допустим, что решение задачи (1) разрушается при  $t = T$ . Рассмотрим случай, когда  $\min(m, n) > 1$ . Пусть  $u(x, t) = \exp(ct) f(x, t)$ ,  $v(x, t) = \exp(ct) g(x, t)$ , где

$$c = \max \left( \sup_{Q_T} c_1(x, t), \sup_{Q_T} c_2(x, t) \right).$$

Нетрудно заметить, что  $(f, g)$  является решением задачи

$$\begin{cases} f_t = \Delta f + \exp(-(1-p)ct) c_1(x, t) g^p - cf, (x, t) \in Q_T, \\ g_t = \Delta g + \exp(-(1-q)ct) c_2(x, t) f^q - cg, (x, t) \in Q_T, \\ \frac{\partial f(x, t)}{\partial \eta} = \exp[(m-1)ct] \int_{\Omega} k_1(x, y, t) f^m(y, t) dy, (x, t) \in S_T, \\ \frac{\partial g(x, t)}{\partial \eta} = \exp[(n-1)ct] \int_{\Omega} k_2(x, y, t) g^n(y, t) dy, (x, t) \in S_T, \\ f(x, 0) = u_0(x), g(x, 0) = v_0(x), x \in \Omega. \end{cases}$$

Тогда  $(f, g)$  удовлетворяет следующим равенствам:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \int_{\Omega} G(x, y; t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x, \xi; t - \tau) \int_{\Omega} \exp[(m-1)c\tau] k_1(\xi, y, \tau) f^m(y, \tau) dy dS_{\xi} d\tau + \\ &\quad + \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) (\exp[-(1-p)c\tau] c_1(y, \tau) g^p(y, \tau) - cf(y, \tau)) dy d\tau, \\ g(x, t) &= \int_{\Omega} G(x, y; t) v_0(y) dy + \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x, \xi; t - \tau) \int_{\Omega} \exp[(n-1)c\tau] k_2(\xi, y, \tau) g^n(y, \tau) dy dS_{\xi} d\tau + \\ &\quad + \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) (\exp[-(1-q)c\tau] c_2(y, \tau) f^q(y, \tau) - cg(y, \tau)) dy d\tau - \end{aligned} \quad (15)$$

для  $(x, t) \in Q_T$ . Возьмем произвольную область  $\Omega' \subset\subset \Omega$  с границей  $\partial\Omega' \in C^2$  такую, что  $\text{dist}(\partial\Omega, \Omega') = \varepsilon > 0$ . Как известно (см., например, [19]),

$$0 < G(x, y; t - \tau) \leq c_\varepsilon, \quad x \in \Omega', \quad y \in \Omega, \quad 0 < \tau < t < T, \quad (16)$$

где  $c_\varepsilon$  – положительная постоянная, зависящая от  $\varepsilon$ . В силу непрерывности функций  $k_i(x, y, t)$ ,  $i = 1, 2$ , существует такая положительная постоянная  $M$ , что  $k_i(x, y, t) \leq M$ ,  $i = 1, 2$ , в  $\partial\Omega \times Q_T$ . Используя (5), (7), (8), (14)–(16), получим

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega'} (f(x, t) + g(x, t)) &\leq \sup_{\Omega} (u_0(x) + v_0(x)) + c_\varepsilon |\partial\Omega| M (J_1(t) + J_2(t)) + \\ &+ 2c \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) dy d\tau \leq s_{10} \left[ (T-t)^{-\frac{1}{m-1}} + (T-t)^{-\frac{1}{n-1}} \right] \leq s_{11} (T-t)^{-\frac{1}{l-1}}, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $l = \min(m, n)$ . Следовательно,

$$\sup_{\Omega'} u(x, t) \leq s_{12} (T-t)^{-\frac{1}{l-1}}, \quad \sup_{\Omega'} v(x, t) \leq s_{12} (T-t)^{-\frac{1}{l-1}}. \quad (18)$$

Как показано в [21], существует такая функция  $s(x) \in C^2(\bar{\Omega}')$ , что

$$\Delta s - \frac{l}{l-1} \frac{|\nabla s|^2}{s} \geq -s_{13} \quad \text{в } \Omega', \quad s(x) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega'. \quad (19)$$

Введем вспомогательные функции

$$w_1(x, t) = w_2(x, t) = s_{14} \exp(\mu t) (s(x) + s_{13}(T-t))^{-\frac{1}{l-1}}, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} s_{14} &> \max \left( s_{13}^{-\frac{1}{l-1}} s_{12}, \sup_{\Omega} u_0(x) \left[ \sup_{\Omega'} s(x) + s_{13} T \right]^{\frac{1}{l-1}}, \sup_{\Omega} v_0(x) \left[ \sup_{\Omega'} s(x) + s_{13} T \right]^{\frac{1}{l-1}} \right), \\ \mu &\geq c \max \left( \left[ \frac{\left( \sup_{\Omega'} s(x) + s_{13} T \right)^{\frac{1}{l-1}}}{s_{14}} \right]^{1-p}, \left[ \frac{\left( \sup_{\Omega'} s(x) + s_{13} T \right)^{\frac{1}{l-1}}}{s_{14}} \right]^{1-q} \right). \end{aligned}$$

Используя (19), (20), для  $x \in \Omega'$  и  $t \in [0, T)$  получим

$$\begin{aligned} w_{1t} - \Delta w_1 - c_1(x, t) w_2^p &= \mu w_1 - c_1(x, t) w_1^p + \\ &+ \frac{w_1}{(l-1)[s(x) + s_{13}(T-t)]} \left( s_{13} + \Delta s - \frac{l|\nabla s|^2}{(l-1)[s(x) + s_{13}(T-t)]} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что также  $w_{2t} - \Delta w_2 - c_2(x, t) w_1^q \geq 0$  для  $x \in \Omega'$  и  $t \in [0, T)$ . Тогда в силу (18), неравенств  $w_1(x, 0) \geq u(x, 0)$  и  $w_2(x, 0) \geq v(x, 0)$  по принципу сравнения имеем

$$u(x, t) \leq w_1(x, t), \quad v(x, t) \leq w_2(x, t) \quad \text{в } \bar{\Omega}' \times [0, T).$$

Следовательно,  $(u, v)$  не может иметь точек разрушения в области  $\Omega' \times [0, T]$ . Поскольку  $\Omega'$  – произвольное подмножество  $\Omega$ , то решение задачи (1) разрушается только на границе  $\partial\Omega$ .

Теперь предположим, что  $n \leq 1$ ,  $m > 1$ . Тогда, как и в предыдущем случае, введем функции  $f(x, t)$  и  $g(x, t)$ . Используя (5)–(8), (15), (16) и рассуждая таким же образом, как при выводе (17), получим

$$\sup_{\Omega'} (f(x, t) + g(x, t)) \leq s_{15} \left[ (T-t)^{-\frac{1}{m-1}} + (T-t)^{-\beta} \right] \leq s_{16} (T-t)^{-\frac{1}{l-1}},$$

так как  $\beta < \frac{1}{m-1}$ . Дальнейшее доказательство такое же, как и выше. Доказательство теоремы для  $m \leq 1$ ,  $n > 1$  проводится аналогично.

### Библиографические ссылки

1. Cui Z, Yang Z. Roles of weight functions to a nonlinear porous medium equation with nonlocal source and nonlocal boundary condition. *Journal of Mathematical Analysis Applications*. 2008;342(1):559–570. DOI: 10.1016/j.jmaa.2007.11.055.
2. Cui Z, Yang Z, Zhang R. Blow-up of solutions for nonlinear parabolic equation with nonlocal source and nonlocal boundary condition. *Applied of Mathematics and Computation*. 2013;224:1–8. DOI: 10.1016/j.amc.2013.08.044.
3. Deng K, Dong Z. Blow-up for the equation with a general memory boundary condition. *Communications on Pure and Applied Analysis*. 2012;11:2147–2156.
4. Fang ZB, Zhang J. Global existence and blow-up of solutions for p-Laplacian evolution equation with nonlinear memory term and nonlocal boundary condition. *Boundary Value Problem*. 2014;2014(1):8. DOI: 10.1186/1687-2770-2014-8.
5. Gao Y, Gao W. Existence and blow-up of solutions for a porous medium equation with nonlocal boundary condition. *Applicable Analysis*. 2011;90(5):799–809.
6. Gladkov A, Guedda M. Blow-up problem for semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition. *Nonlinear Analysis*. 2011;74(13):4573–4580. DOI: 10.1016/j.na.2011.04.027.
7. Gladkov A, Kim KI. Blow-up of solutions for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2008;338(1):264–273. DOI: 10.1016/j.jmaa.2007.05.028.
8. Pao CV. Asimptotic behavior of solutions of reaction-diffusion equations with nonlocal boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1998;88(1):225–238. DOI: 10.1016/S0377-0427(97)00215-X.
9. Wang Y, Mu C, Xiang Z. Blowup of solutions to a porous medium equation with nonlocal boundary condition. *Applied of Mathematics and Computation*. 2007;192(2):579–585. DOI: 10.1076/j.amc.2007.03.036.
10. Yang L, Fan C. Global existence and blow-up of solutions to a degenerate parabolic system with nonlocal sources and nonlocal boundaries. *Monatshefte für Mathematik*. 2014;174:493–510.
11. Ye Z, Xu X. Global existence and blow-up for a porous medium system with nonlocal boundary conditions and nonlocal sources. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. 2013;82:115–126. DOI: 10.1016/j.na.2013.01.004.
12. Yin HM. On a class of parabolic equations with nonlocal boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2004;294(2):712–728. DOI: 10.1016/j.jmaa.2004.03.021.
13. Zheng S, Kong I. Roles of weight functions in a nonlinear nonlocal parabolic system. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. 2008;68(8):2406–2416. DOI: 10.1016/j.na.2007.01.067.
14. Gladkov A, Kavitova T. Blow-up problem for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition. *Applicable Analysis*. 2016;95(9):1974–1988. DOI: 10.1080/00036811.2015.1080353.
15. Gladkov A, Kavitova T. Initial boundary value problem for a semilinear parabolic equation with nonlinear nonlocal boundary conditions. *Ukrainian Mathematics Journal*. 2016;68(2):179–192. DOI: 10.1007/s11253-016-1217-2.
16. Никитин АИ. Локальное существование решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями. *Вестник ВДУ*. 2015;5:14–19.
17. Gladkov AJ, Никитин АИ. О глобальном существовании решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями Неймана. *Дифференциальные уравнения*. 2018;54(1):88–107. DOI: 10.1134/S0374064118010089.
18. Kahane CS. On the asymptotic behavior of solutions of parabolic equations. *Czechoslovak Mathematics Journal*. 1983;33(2):262–285.
19. Hu B, Yin HM. Critical exponents for a system of heat equations coupled in a non-linear boundary condition. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 1996;19(14):1099–1120. DOI: 10.1002/(SICI)1099-1476(19960925)19:14<1099::AID-MMA780>3.0.CO;2-J.
20. Deng K, Zhao CL. Blow-up for a parabolic system coupled in an equation and a boundary condition. *Proceedings of the Royal Society of Edinburg Section A*. 2001;131(6):1345–1355. DOI: 10.1017/S0308210500001426.
21. Hu B, Yin HM. The profile near blowup time for solution of the heat equation with a nonlinear boundary condition. *Transactions American Mathematical Society*. 1994;346(1):117–135. DOI: 10.1090/S0002-9947-1994-1270664-3.

### References

1. Cui Z, Yang Z. Roles of weight functions to a nonlinear porous medium equation with nonlocal source and nonlocal boundary condition. *Journal of Mathematical Analysis Applications*. 2008;342(1):559–570. DOI: 10.1016/j.jmaa.2007.11.055.
2. Cui Z, Yang Z, Zhang R. Blow-up of solutions for nonlinear parabolic equation with nonlocal source and nonlocal boundary condition. *Applied of Mathematics and Computation*. 2013;224:1–8. DOI: 10.1016/j.amc.2013.08.044.
3. Deng K, Dong Z. Blow-up for the equation with a general memory boundary condition. *Communications on Pure and Applied Analysis*. 2012;11:2147–2156.
4. Fang ZB, Zhang J. Global existence and blow-up of solutions for p-Laplacian evolution equation with nonlinear memory term and nonlocal boundary condition. *Boundary Value Problem*. 2014;2014(1):8. DOI: 10.1186/1687-2770-2014-8.
5. Gao Y, Gao W. Existence and blow-up of solutions for a porous medium equation with nonlocal boundary condition. *Applicable Analysis*. 2011;90(5):799–809.
6. Gladkov A, Guedda M. Blow-up problem for semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition. *Nonlinear Analysis*. 2011;74(13):4573–4580. DOI: 10.1016/j.na.2011.04.027.

7. Gladkov A, Kim KI. Blow-up of solutions for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2008;338(1):264–273. DOI: 10.1016/j.jmaa.2007.05.028.
8. Pao CV. Asimptotic behavior of solutions of reaction-diffusion equations with nonlocal boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1998;88(1):225–238. DOI: 10.1016/S0377-0427(97)00215-X.
9. Wang Y, Mu C, Xiang Z. Blowup of solutions to a porous medium equation with nonlocal boundary condition. *Applied of Mathematics and Computation*. 2007;192(2):579–585. DOI: 10.1076/j.amc.2007.03.036.
10. Yang L, Fan C. Global existence and blow-up of solutions to a degenerate parabolic system with nonlocal sources and nonlocal boundaries. *Monatshefte für Mathematik*. 2014;174:493–510.
11. Ye Z, Xu X. Global existence and blow-up for a porous medium system with nonlocal boundary conditions and nonlocal sources. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. 2013;82:115–126. DOI: 10.1016/j.na.2013.01.004.
12. Yin HM. On a class of parabolic equations with nonlocal boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2004;294(2):712–728. DOI: 10.1016/j.jmaa.2004.03.021.
13. Zheng S, Kong I. Roles of weight functions in a nonlinear nonlocal parabolic system. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. 2008;68(8):2406–2416. DOI: 10.1016/j.na.2007.01.067.
14. Gladkov A, Kavitova T. Blow-up problem for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition. *Applicable Analysis*. 2016;95(9):1974–1988. DOI: 10.1080/00036811.2015.1080353.
15. Gladkov A, Kavitova T. Initial boundary value problem for a semilinear parabolic equation with nonlinear nonlocal boundary conditions. *Ukrainian Mathematics Journal*. 2016;68(2):179–192. DOI: 10.1007/s11253-016-1217-2.
16. Nikitin AI. Local existence of solutions of the initial-boundary value problem for the system of semilinear parabolic equations with nonlinear nonlocal boundary conditions. *Vesnik VDU*. 2015;5:14–19. Russian.
17. Gladkov AL, Nikitin AI. On global existence of solutions of initial boundary value problem for a system of semilinear parabolic equations with nonlinear nonlocal Neumann boundary conditions. *Differentsial'nye uravneniya*. 2018;54(1):88–107. DOI: 10.1134/S0374064118010089. Russian.
18. Kahane CS. On the asymptotic behavior of solutions of parabolic equations. *Czechoslovak Mathematics Journal*. 1983;33(2):262–285.
19. Hu B, Yin HM. Critical exponents for a system of heat equations coupled in a non-linear boundary condition. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 1996;19(14):1099–1120. DOI: 10.1002/(SICI)1099-1476(19960925)19:14<1099::AID-MMA780>3.0.CO;2-J.
20. Deng K, Zhao CL. Blow-up for a parabolic system coupled in an equation and a boundary condition. *Proceedings of the Royal Society of Edinburg Section A*. 2001;131(6):1345–1355. DOI: 10.1017/S0308210500001426.
21. Hu B, Yin HM. The profile near blowup time for solution of the heat equation with a nonlinear boundary condition. *Transactions American Mathematical Society*. 1994;346(1):117–135. DOI: 10.1090/S0002-9947-1994-1270664-3.

Статья поступила в редколлегию 20.03.2018.

Received by editorial board 20.03.2018.

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Б. С. КАЛИТИН<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет,  
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Исследуется задача устойчивости равновесия нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений методом знакопостоянных функций Ляпунова. Выделены типы нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка общего вида, для которых выбор знакопостоянной функции не представляет сложностей. Для таких уравнений получены достаточные условия свойств устойчивости и асимптотической устойчивости (локальной и глобальной). Результаты об асимптотической устойчивости равновесия совпадают с необходимыми и достаточными условиями в соответствующем линейном случае. Следовательно, они отвечают общепринятым требованиям. Проведенные исследования показывают, что использование знакоположительных функций может дать преимущества по сравнению с классическим методом применения определенно-положительных функций Ляпунова.

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение; равновесие; устойчивость; знакопостоянная функция Ляпунова.

## ON THE STABILITY OF THIRD ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

B. S. KALITINE<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

In this paper, we study the problem of stability of the equilibrium of nonlinear ordinary differential equations by the method of semi-definite Lyapunov's functions. We have identified nonlinear third order differential equations of general form for which the choice of a semi-definite function does not present difficulties. For such equations, sufficient conditions of stability and asymptotic stability (local and global) are obtained. The results of asymptotic stability of the equilibrium coincide with necessary and sufficient conditions in the corresponding linear case. Consequently, they meet generally accepted requirements. The conducted studies show that the use of semi-defined positive functions can give advantages in comparison with the classical method of application of Lyapunov's definite positive functions.

**Key words:** differential equation; equilibrium; stability; semi-definite Lyapunov's function.

---

### Образец цитирования:

Калитин БС. Об устойчивости дифференциальных уравнений третьего порядка. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;2:25–33.

### For citation:

Kalitine BS. On the stability of third order differential equations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;2:25–33. Russian.

---

### Автор:

**Борис Сергеевич Калитин** – кандидат физико-математических наук; профессор кафедры аналитической экономики и эконометрики экономического факультета.

### Author:

**Boris S. Kalitine**, PhD (physics and mathematics); professor at the department of analytical economics and econometrics, faculty of economy.  
kalitine@yandex.by

## Введение

Задача об устойчивости нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка вида  $\ddot{x} + F(x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0$  рассматривалась многими авторами [1–8]. Подробное изложение результатов дано в монографии Е. А. Барбашина [9]. В указанных работах решается задача об устойчивости в целом (глобальная асимптотическая устойчивость) равновесия  $x = \dot{x} = \ddot{x} = 0$  с использованием прямого метода А. М. Ляпунова [10], подразумевающего построение определенно-положительной функции  $V$  с неположительной производной по времени  $\dot{V}$ . Критерием качества полученных достаточных условий устойчивости в целом (а именно оценка близости достаточных условий к необходимым) служит тот факт, что в соответствующем линейном случае дифференциального уравнения  $\ddot{x} + a\dot{x} + b\ddot{x} + cx = 0$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , такие условия являются необходимыми и достаточными для асимптотической устойчивости.

Начиная с 1978 г. [11; 12] и по настоящее время [13–25] разрабатывается теория второго метода Ляпунова с привлечением знакопостоянных функций, которая расширяет область применения прямого метода Ляпунова в решении задач устойчивости движения. Возможность использования знакоположительных функций вместо определенно-положительных обосновывается специально разработанными методами качественной теории динамических процессов.

Цель настоящей статьи – проиллюстрировать применение знакопостоянных функций в решении проблем устойчивости равновесия на примере некоторых классов дифференциальных уравнений третьего порядка.

Для полноты изложения кратко описаны основные результаты обобщенного прямого метода Ляпунова для автономных дифференциальных уравнений.

## Метод знакопостоянных функций

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), x \in G \subset \mathbb{R}^n, f(0) = 0, \quad (1)$$

где  $G$  – открытая связная окрестность начала координат;  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  – непрерывная функция, удовлетворяющая условиям, обеспечивающим единственность решений в  $G$ .

Таким образом, можно считать, что в области  $G$  задана динамическая система, определяемая решениями  $x(x_0, t)$ ,  $x(x_0, 0) = x_0$ ,  $t \geq 0$ . Уравнение (1) имеет решение  $x = 0$  (состояние равновесия).

Пусть  $\mathbb{R}^n$  – вещественное  $n$ -мерное евклидово пространство с нормой  $\|\cdot\|$ ,  $Y$  – связное замкнутое подмножество  $\mathbb{R}^n$ , содержащее начало координат, и  $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| < \varepsilon\}$  для  $\varepsilon > 0$ . Напомним следующие понятия и определения теории устойчивости [9; 10; 26].

Решение  $x = 0$  системы (1) является:

- $Y$ -устойчивым, если  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x_0 \in B_\delta \cap Y) \Rightarrow \|x(x_0, t)\| < \varepsilon \forall t \geq 0$ ;
- $Y$ -притягивающим, если  $(\forall \sigma > 0)(\forall \alpha > 0)(\exists T > 0)(\forall x_0 \in B_\sigma \cap Y) \Rightarrow \|x(x_0, t)\| < \alpha \forall t \geq T$ ;
- $Y$ -асимптотически устойчивым, если оно  $Y$ -устойчиво и  $Y$ -притягивающее;
- $B$ -устойчивым относительно  $Y$  [18, с. 194], если оно  $Y$ -устойчиво и для любой окрестности  $U$  начала координат существует компактное, положительно инвариантное,  $Y$ -асимптотически устойчивое множество  $K$ , содержащее точку  $x = 0$ ;
- глобально  $Y$ -притягивающим, если  $\forall x_0 \in Y$  решение  $x(x_0, t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ ;
- глобально  $Y$ -асимптотически устойчивым, если оно  $Y$ -асимптотически устойчиво и глобально  $Y$ -притягивающее.

Отметим, что  $Y$ -асимптотическая устойчивость влечет  $B$ -устойчивость относительно  $Y$ . При  $Y = \mathbb{R}^n$  из приведенных определений получаем общепринятые свойства устойчивости, притяжения и асимптотической устойчивости [26, с. 18–20].

Пусть  $\mathbb{R}^+$  – множество неотрицательных действительных чисел,  $U$  – подмножество  $\mathbb{R}^n$ ,  $\bar{U}$  – замыкание  $U$ ,  $C^1(U, \mathbb{R}^+)$  – множество непрерывно дифференцируемых функций  $V: U \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

**Теорема 1** [14–16]. Пусть существуют окрестность  $U$  точки  $x = 0$  и функция  $V \in C^1(U, \mathbb{R}^+)$  такая, что:

- 1)  $V(x) \geq 0 \forall x \in U$ ,  $V(0) = 0$ ;
  - 2)  $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x \in U$ ;
  - 3) решение  $x = 0$  системы (1)  $B$ -устойчиво относительно  $Y_0 = \{x \in \bar{U}: V(x) = 0\}$ .
- Тогда нулевое решение системы (1) устойчиво.



**Теорема 2** [11; 19, с. 66; 20, с. 239]. Пусть существуют окрестность  $U$  точки  $x = 0$  и функция  $V \in C^1(U, \mathbb{R}^+)$  такая, что:

- 1)  $V(x) \geq 0 \quad \forall x \in U, \quad V(0) = 0;$
- 2)  $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in U;$
- 3) решение  $x = 0$  системы (1)  $Y$ -асимптотически устойчиво для  $Y = \{x \in \bar{U} : \dot{V}(x) = 0\}$ .

Тогда начало координат системы (1) асимптотически устойчиво.

**Теорема 3** [11; 19, с. 66; 20, с. 207]. Пусть  $G = \mathbb{R}^n$ . Предположим, что для системы (1) существует непрерывно дифференцируемая функция  $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$  такая, что:

- 1)  $V(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad V(0) = 0;$
- 2)  $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$
- 3)  $x = 0$  глобально  $Y_\infty$ -асимптотически устойчиво для  $Y_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\};$
- 4) все решения системы (1) ограничены при  $t \geq 0$ .

Тогда решение  $x = 0$  системы (1) глобально асимптотически устойчиво.

*Замечание 1.* Использование знакопостоянной функции Ляпунова со свойствами  $V(x) \geq 0, \quad V(0) = 0, \quad \dot{V}(x) \leq 0$  в теоремах 1–3 дает дополнительную информацию о наличии положительно инвариантного множества  $Y_0 = \{x \in \bar{U} : V(x) = 0\}$ , т. е.  $\forall x_0 \in Y_0 \quad x(x_0, t) \in Y_0$  для всех  $t > 0$ . Следовательно, в конкретном случае использования знакоположительной функции Ляпунова со знакоотрицательной производной по времени неустойчивость равновесия относительно множества  $Y_0$  влечет его неустойчивость относительно всего фазового пространства.

### Уравнения третьего порядка

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + a(x, \dot{x})\dot{x} + f(x, \dot{x}) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где функции  $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывны и обеспечивают единственность решений. Пусть  $f(0, 0) = 0$ , т. е. уравнение обладает нулевым решением  $x = \dot{x} = \ddot{x} = 0$ .

Предположим, что существуют непрерывно дифференцируемая функция  $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha(0, 0) = 0$ , и число  $h > 0$  такое, что выполнено тождество

$$f(x, y) = \alpha'_x y + \alpha(x, y)(a(x, y) - \alpha'_y) \quad \text{для всех } \|(x, y)\| < h. \quad (3)$$

Здесь положено  $\alpha'_x = \frac{\partial \alpha(x, y)}{\partial x}$ ,  $\alpha'_y = \frac{\partial \alpha(x, y)}{\partial y}$ .

От уравнения (2) перейдем к системе уравнений, используя замену переменных

$$y = \dot{x}, \quad z = \ddot{x} + \alpha(x, y).$$

Для координаты  $z$  последовательно получаем

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \ddot{y} + \alpha'_x \dot{x} + \alpha'_y \dot{y} = -a(x, y)\ddot{x} - f(x, y) + \alpha'_x \dot{x} + \alpha'_y \dot{y} = \\ &= -a(x, y)(z - \alpha(x, y)) - f(x, y) + \alpha'_x y + \alpha'_y \dot{x} = \\ &= -a(x, y)(z - \alpha(x, y)) - f(x, y) + \alpha'_x y + \alpha'_y (z - \alpha(x, y)) = \\ &= -f(x, y) - (a(x, y) - \alpha'_y)(z - \alpha(x, y)) + \alpha'_x y. \end{aligned}$$

Заменив функцию  $f(x, y)$  ее представлением (3), приходим к системе уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z - \alpha(x, y), \quad \dot{z} = -(a(x, y) - \alpha'_y(x, y))z. \quad (4)$$

Поясним тождество (3) для линейного случая, когда уравнение (2) имеет вид

$$\ddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Из предполагаемого равенства (3) выводим

$$cx + by = \alpha'_x(x, y)y + \alpha(x, y)(a - \alpha'_y(x, y)). \quad (6)$$

Если уравнению (6) удовлетворяет линейная функция  $\alpha(x, y) = \alpha x + \beta y$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , то, подставляя ее в тождество (3), приходим к равенствам

$$c = \alpha(a - \beta), \quad b = \alpha + \beta(a - \beta). \quad (7)$$

Отсюда  $c = (b - \beta(a - \beta))(a - \beta)$ , или  $c = (\beta^2 - \beta a + b)(a - \beta)$ . Поэтому число  $\beta$  является корнем кубического уравнения

$$\beta^3 - 2a\beta^2 + (a^2 + b)\beta + c - ab = 0. \quad (8)$$

Как известно, вещественный корень  $\beta \in \mathbb{R}$  уравнения (8) всегда существует. Определяя таким образом  $\beta$ , из первого уравнения (7) имеем:  $\alpha = \frac{c}{a - \beta}$ ,  $\beta \neq a$ .

В результате анализа проведенных рассуждений можно сделать вывод о том, что в линейном случае для задачи об асимптотической устойчивости всегда существует функция  $\alpha(x, y)$ , удовлетворяющая равенству (3). Отметим, что вырожденный случай  $\beta = a$  дает  $c = 0$ . Следовательно, нулевое решение линейного уравнения (5) не может быть асимптотически устойчивым.

С учетом равенств (7) характеристическое уравнение для (5) записывается в виде

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + (\alpha + \beta(a - \beta))\lambda + \alpha(a - \beta) = 0, \quad \text{т. е. } (\lambda^2 + \beta\lambda + \alpha)(\lambda + a - \beta) = 0.$$

Для асимптотической устойчивости нулевого решения (5) корни характеристического уравнения должны иметь отрицательные вещественные части. Последнее будет выполнено при условиях

$$a > \beta > 0, \quad \alpha > 0.$$

Возьмем знакопостоянную в пространстве  $\mathbb{R}^3$  функцию

$$V(x, y, z) = 0,5z^2. \quad (9)$$

Ее производная по времени в силу системы (4) равна

$$\dot{V}(x, y, z) = -(a(x, y) - \alpha'_y(x, y))z^2. \quad (10)$$

Производная будет неположительной в  $h$ -окрестности равновесия  $x = y = z = 0$  системы (4), если

$$a(x, y) \geq \alpha'_y(x, y) \quad \text{для } \|(x, y)\| < h. \quad (11)$$

*Устойчивость.* Воспользуемся теоремой 1. Заметим, что множество  $Y_0$ , на котором  $V(x, y, z) = 0$ , определяется равенством  $z = 0$ . Это множество положительно инвариантно, и на нем система (4) переходит в систему второго порядка

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\alpha(x, y). \quad (12)$$

Согласно теореме 1 при наличии знакоположительной функции  $V$  со знакоотрицательной производной по времени  $\dot{V}$  асимптотическая устойчивость решения  $x = y = 0$  системы (12) (а значит, и  $B$ -устойчивость) влечет устойчивость решения  $x = y = z = 0$  системы уравнений (5). Напомним, что система (12) изучена в работе [27]. Приемлемые условия асимптотической устойчивости такой системы отмечены следующими соотношениями [9, с. 84]:

$$\alpha(x, 0)x > 0, \quad 0 < |x| < h; \quad y(\alpha(x, y) - \alpha(x, 0)) > 0, \quad y \neq 0. \quad (13)$$

Таким образом, устойчивость решения  $x = y = z = 0$  системы (4) будет обеспечена, если существует непрерывно дифференцируемая функция  $\alpha(x, y)$ , удовлетворяющая тождеству (3) и неравенству (11), а также выполнены условия (13).

Требование асимптотической устойчивости системы (12) можно ослабить, заменив его согласно теореме 1 требованием  $B$ -устойчивости нулевого решения указанной системы. Это будет выполнено, например, если начало координат системы (12) имеет тип «центро-фокус» [28, с. 86] с функцией

$$\alpha(x, y) = y \sin^2\left(\frac{\pi}{x^2 + y^2}\right) + x, \quad x^2 + y^2 > 0.$$

Для данного случая усиление результата состоит в том, что на множестве, где  $V(x, y, z) = 0$ , вместо  $Y_0$ -асимптотической устойчивости имеет место ситуация с неасимптотической устойчивостью.

*Асимптотическая устойчивость.* Пусть выполняются условия (13). Тогда из второго условия с учетом непрерывной дифференцируемости функции  $\alpha(x, y)$  следует, что в достаточно малой окрестности точки  $x = y = 0$  необходимо выполняется неравенство  $\alpha'_y(x, y) > 0$ . В этом легко убедиться, воспользовавшись формулой Тейлора для функции  $\alpha(x, y)$ .

При исследовании задачи об асимптотической устойчивости снова воспользуемся знакопостоянной функцией (9) с производной по времени (10), но с той лишь разницей, что теперь потребуем выполнение условий более жестких, чем (11), а именно:

$$a(x, y) > \alpha'_y(x, y) > 0, \quad \|(x, y)\| < h. \quad (14)$$

Тогда множества  $Y_0$  и  $Y$ , где соответственно  $V(x, y, z) = 0$  и  $\dot{V}(x, y, z) = 0$ , совпадают. Следовательно, имеют место все условия теоремы 2. Таким образом, если существует функция  $\alpha(x, y)$ , удовлетворяющая тождеству (3) и неравенствам (13) и (14), то нулевое решение  $x = y = z = 0$  системы дифференциальных уравнений (4) будет асимптотически устойчивым.

Отметим, что указанные достаточные условия асимптотической устойчивости являются необходимыми и достаточными в линейном случае уравнения (5) с условиями (7).

*Глобальная асимптотическая устойчивость.* Для того чтобы применить теорему 3, необходимо во всех требованиях предыдущего подраздела положить (формально)  $h = +\infty$  и доказать при этом ограниченность всякого решения  $(x(t), y(t), z(t))$  системы (4).

Глобальная асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (12) будет иметь место при следующих условиях [9, с. 84]:

$$\alpha(x, 0)x > 0, x \neq 0; \quad y(\alpha(x, y) - \alpha(x, 0)) > 0, y \neq 0; \quad \int_0^x \alpha(x, 0) dx \rightarrow +\infty \text{ при } |x| \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Считая, что требования (15) выполнены, рассмотрим определенно положительную функцию

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x \alpha(x, 0) dx + \frac{c}{2}z^2, \quad c > 0.$$

Ее производную по времени в силу системы (4) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y, z) &= yz - y\alpha(x, y) + y\alpha(x, 0) - c(a(x, y) - \alpha'_y(x, y))z^2 = \\ &= -c(a(x, y) - \alpha'_y(x, y)) \left( z - \frac{y}{2c(a(x, y) - \alpha'_y(x, y))} \right)^2 - y(\alpha(x, y) - \alpha(x, 0)) + \frac{y^2}{4c(a(x, y) - \alpha'_y(x, y))}. \end{aligned}$$

Потребуем выполнение условий

$$\begin{aligned} a(x, y) > \alpha'_y(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ \frac{\alpha(x, y) - \alpha(x, 0)}{y} > \frac{1}{4c(a(x, y) - \alpha'_y(x, y))}, \quad y \neq 0, \end{aligned} \quad (16)$$

которые обеспечивают знакоотрицательность производной. Отметим, что во втором неравенстве (16) число  $c > 0$  можно взять как угодно большим.

Таким образом, условия глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения системы (4) сводятся к выполнению требований (15) и (16) при достаточно большом  $c > 0$ .

**Теорема 4.** *Предположим, что для дифференциального уравнения (2) существует непрерывно дифференцируемая функция  $\alpha(x, y)$ , удовлетворяющая тождеству (3) и неравенству (11). Тогда решение  $x = \dot{x} = \ddot{x} = 0$  уравнения (2) будет:*

- устойчивым, если выполнены условия (13);
- асимптотически устойчивым, если выполнены условия (13) и (14);
- глобально асимптотически устойчивым, если выполнены условия (15) и условия (16) при достаточно большом  $c > 0$ .

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение третьего порядка

$$\ddot{x} + a(x, \dot{x})\dot{x} + \alpha^2 \dot{x} + (\alpha^2 x + 2\alpha\dot{x})(a(x, \dot{x}) - 2\alpha) = 0, \quad (17)$$

где  $\alpha \in \mathbb{R}$  – постоянный параметр, а функция  $a: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и обеспечивает единственность решений. Положив для уравнения (17)

$$\alpha(x, y) = \alpha^2 x + 2\alpha y, \quad f(x, y) = \alpha^2 y + (\alpha^2 x + 2\alpha y)(a(x, y) - 2\alpha),$$

легко проверить, что выполняются тождества (3). В данном случае система (12) линейна, ее характеристическое уравнение есть  $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \alpha^2 = 0$ , т. е. имеется единственный корень  $\lambda = -\alpha$ .

Согласно теореме 4 решение  $x = \dot{x} = \ddot{x} = 0$  уравнения (17) будет устойчивым, если найдется такое  $h > 0$ , что

$$a(x, \dot{x}) \geq 2\alpha > 0 \quad \text{для } \|(x, \dot{x})\| < h,$$

асимптотически устойчивым, когда

$$a(x, \dot{x}) > 2\alpha > 0 \quad \text{для } \|(x, \dot{x})\| < h.$$

Нулевое решение уравнения (18) будет глобально асимптотически устойчивым, когда для некоторого достаточно большого числа  $c > 0$  выполняется неравенство

$$a(x, \dot{x}) > 2\alpha + \frac{1}{8c\alpha} \quad \forall (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2.$$

*Замечание 2.* Полученные в примере условия глобальной асимптотической устойчивости не требуют предположений о существовании частных производных функции  $a(x, \dot{x})$ , которые присутствуют в каждом из утверждений [9, гл. V, § 1] для скалярных дифференциальных уравнений третьего порядка. Таким образом, теорема 4 выделяет новый класс дифференциальных уравнений, для которых сформулированы достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости.

**2.** Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\ddot{x} + (f(x, \dot{x}) + \alpha)\dot{x} + (\alpha f(x, \dot{x}) + c)\dot{x} + \alpha cx = 0, \quad (18)$$

где  $\alpha$  и  $c$  – постоянные величины; функция  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и обеспечивает условия единственности решений. От уравнения (18) перейдем к системе уравнений, используя обозначения  $y = \dot{x} + \alpha x$ ,  $z = \dot{y}$ . Тогда для переменной  $z$  будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{z} = \dot{y} = \ddot{x} + \alpha\dot{x} &= -(f(x, \dot{x}) + \alpha)\dot{x} - (\alpha f(x, \dot{x}) + c)\dot{x} - \alpha cx + \alpha\dot{x} = \\ &= -f(x, \dot{x})(\dot{x} + \alpha x) - c(\dot{x} + \alpha x) = -f(x, \dot{x})y - cy = -f(x, y - \alpha x)z - cy. \end{aligned}$$

В результате получим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -\alpha x + y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = -cy - \varphi(x, y)z, \quad (19)$$

где положено  $\varphi(x, y) = f(x, y - \alpha x)$ . Предположим, что  $c > 0$ , и рассмотрим знакопостоянную функцию

$$V(x, y, z) = 0,5(cy^2 + z^2) \geq 0. \quad (20)$$

Ее производная по времени в силу (19) есть  $\dot{V}(x, y, z) = -\varphi(x, y)z^2$ . Для знакоотрицательности производной потребуем, чтобы для некоторого числа  $h > 0$  выполнялось

$$\varphi(x, y) \geq 0 \quad \text{при } \|(x, y)\| < h. \quad (21)$$

*Устойчивость.* Укажем условия, обеспечивающие требования теоремы 1. Заметим, что множество  $Y_0$ , на котором  $V(x, y, z) = 0$ , определяется равенствами  $y = z = 0$ . Это множество положительно инвариантно и на нем система (19) переходит в скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = -\alpha x. \quad (22)$$

Согласно теореме 1 при наличии функции  $V(x, y, z) \geq 0$  для  $c > 0$  с производной  $\dot{V}(x, y, z) \leq 0$  асимптотическая устойчивость решения  $x = 0$  уравнения (22) (а значит, и  $B$ -устойчивость) влечет устойчивость решения  $x = y = z = 0$  системы уравнений (19). Очевидно, что при  $\alpha > 0$  нулевое решение

уравнения (22) асимптотически устойчиво. Следовательно, решение  $x = y = z = 0$  системы (19) будет устойчивым, если  $c > 0$ ,  $\alpha > 0$  и при некотором  $h > 0$  выполнено условие (21).

*Асимптотическая устойчивость.* Потребуем выполнение строгих неравенств:

$$\varphi(x, y) > 0, \|(x, y)\| < h; \quad c > 0, \alpha > 0. \quad (23)$$

Для того чтобы воспользоваться теоремой 2, рассмотрим множество, где  $\dot{V} = 0$ . Оно определяется равенством  $z = 0$ . На этом множестве система (19) упрощается, а именно: с учетом неравенства  $c > 0$  она сводится к скалярному дифференциальному уравнению (22), нулевое решение которого асимптотически устойчиво при  $\alpha > 0$ . Следовательно, по теореме 2 решение  $x = y = z = 0$  системы (19) будет асимптотически устойчивым, если имеют место неравенства (23).

*Глобальная асимптотическая устойчивость.* Согласно теореме 3 укажем условия, которые наряду с (23) при всех  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  обеспечивают ограниченность любого решения  $(x(t), y(t), z(t))$  системы (19) при  $t \geq 0$ . Заметим, что наличие знакопостоянной функции (20) при  $c > 0$  со знакоотрицательной производной в силу указанной системы означает ограниченность компонент  $y(t)$  и  $z(t)$  в том смысле, что можно указать числа  $A > 0$  и  $B > 0$ , для которых  $|y(t)| < A$ ,  $|z(t)| < B \quad \forall t > 0$ .

Рассмотрим еще одну функцию Ляпунова  $V_1(x) = 0,5x^2$ . Ее производная по времени в силу (19) есть  $\dot{V}_1(x) = -\alpha x^2 + xy$ . Поскольку компонента  $y(t)$  всякого решения  $(x(t), y(t), z(t))$  системы (19) ограничена при  $t \geq 0$ , а  $\alpha > 0$ , то для достаточно больших значений  $|x(t)|$  выполняется  $\dot{V}_1(x) < 0$ . Это и означает ограниченность компоненты  $|x(t)|$  при  $t \geq 0$ .

В результате приходим к следующей теореме.

**Теорема 5.** *Предположим, что  $c > 0$ ,  $\alpha > 0$ . Тогда решение  $x = \dot{x} = \ddot{x} = 0$  уравнения (18) будет:*

- устойчивым, если при некотором  $h > 0$   $f(x, \dot{x} - \alpha x) \geq 0$  для  $\|(x, \dot{x})\| < h$ ;
- асимптотически устойчивым, если при некотором  $h > 0$   $f(x, \dot{x} - \alpha x) > 0$  для  $\|(x, \dot{x})\| < h$ ;
- глобально асимптотически устойчивым, если  $f(x, \dot{x} - \alpha x) > 0$  для  $(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2$ .

Нетрудно проверить, что условия асимптотической устойчивости теоремы 5 совпадают с аналогичными условиями в линейном случае, когда для уравнения (18)  $f(x, \dot{x}) = a = \text{const}$ .

### Заключение

Отметим следующие свойства полученных результатов, вытекающие из проведенных исследований устойчивости равновесия.

Во-первых, в каждом из рассмотренных случаев построение знакоположительной функции  $V$  оказывается достаточно простым, в то время как совершенно не очевидно, что поиск знакоопределенной функции Ляпунова, соответствующей классической теории устойчивости, приведет к положительному результату.

Во-вторых, нетрудно убедиться в том, что требования теорем 4 и 5 относительно глобальной асимптотической устойчивости не совпадают с соответствующими требованиями в утверждениях (изложенных в [9]) для скалярного дифференциального уравнения вида (2).

### Библиографические ссылки

1. Барбашин ЕА. Об устойчивости решения одного уравнения третьего порядка. *Прикладная математика и механика*. 1952;16(3):629–632.
2. Шиманов СН. Об устойчивости в целом одной нелинейной системы уравнений. *Успехи математических наук*. 1953;8(6):155–157.
3. Плисс ВА. Исследование одного нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка. *Доклады АН СССР*. 1956;111(6):1078–1180.
4. Железнов ЕИ. Об устойчивости в целом одной нелинейной системы трех уравнений. *Труды Уральского политехнического института*. 1958;74:41–45.
5. Огурцов АИ. Об устойчивости в целом решений нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. *Известия вузов. Математика*. 1958;1(2):124–129.
6. Огурцов АИ. Об устойчивости решений двух нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. *Прикладная математика и механика*. 1959;23(1):179–181.
7. Огурцов АИ. Об устойчивости решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. *Известия вузов. Математика*. 1959;3:200–209.



8. Ezeilo JOC. On the stability of the solutions of a certain differential equations of the third order. *The Quarterly Journal of Mathematics*. 1960;11(1):64–69. DOI: 10.1093/qmath/11.1.64.
9. Барбашин ЕА. *Функции Ляпунова*. Москва: Наука; 1970.
10. Ляпунов АМ. *Общая задача об устойчивости движения*. Москва, Ленинград: Гостехиздат; 1950.
11. Булгаков НГ, Калитин БС. Обобщение теорем второго метода Ляпунова. 1. Теория. *Известия АН БССР. Серия физико-математических наук*. 1978;3(3):32–36.
12. Булгаков НГ, Калитин БС. Обобщение теорем второго метода Ляпунова. 2. Примеры. *Известия АН БССР. Серия физико-математических наук*. 1979;1(1):70–74.
13. Kalitine B. Sur la stabilité des ensembles compacts positivement invariants des systèmes dynamiques. *RAIRO Automatique/Systems Analysis and Control*. 1982;16(3):275–286.
14. Калитин БС. К устойчивости компактных множеств. *Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Механика*. 1984;3:61–62.
15. Калитин БС. В-устойчивость и проблема Флоридо – Сейберга. *Дифференциальные уравнения*. 1999;35(4):453–463.
16. Kalitine B. Sur le théorème de la stabilité non asymptotique dans la méthode directe de Lyapunov. *Comptes Rendus Mathématique*. 2004;338(2):163–166. DOI: 10.1016/j.crma.2003.11.026.
17. Андреев АС. *Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений*. Ульяновск: Издательство УлГУ, 2005.
18. Павликов СВ. *Метод функционалов Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации*. Набережные Челны: Издательство Института управления; 2010.
19. Калитин БС. *Устойчивость дифференциальных уравнений (Метод знакопостоянных функций Ляпунова)*. Саарбрюккен: LAP; 2012.
20. Калитин БС. *Устойчивость неавтономных дифференциальных уравнений*. Минск: БГУ; 2013.
21. Калитин БС. *О проблемах устойчивости неавтономных дифференциальных уравнений (Метод знакопостоянных функций Ляпунова)*. Саарбрюккен: LAP; 2015.
22. Калитин БС. О решении задач устойчивости прямым методом Ляпунова. *Дифференциальные уравнения*. 2016;52(6):839–840.
23. Калитин БС. К прямому методу Ляпунова для полудинамических систем. *Математические заметки*. 2016;100(4):531–543. DOI: 10.4213/mzm11007.
24. Калитин БС. О решении задач устойчивости прямым методом Ляпунова. *Известия вузов. Математика*. 2017;6:33–43.
25. Седова НО. Глобальная асимптотическая устойчивость и стабилизация в нелинейной каскадной системе с запаздыванием. *Известия вузов. Математика*. 2008;11:68–79.
26. Rouche N, Habets P, Laloy M [Stability Theory Liapunov's Direct Method]. New York: Springer; 1977. DOI: 10.1007/978-1-4684-9362-1. (Applied Mathematical Sciences; volume 22).
27. Amerio L. Studio asintotico del moto di un punto su una linea chiusa per azione di forze indipendenti dal tempo. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> serie*. 1950;3(1–4):19–57.
28. Bhatia NP, Szegö G. *Stability theory of Dynamical systems*. Berlin, Heidelberg: Springer; 1970.

## References

1. Barbashin EA. On the stability of the solution of a third-order equation. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1952;16(3):629–632. Russian.
2. Shimanov SN. On the stability of the solution of a non-linear system of equations. *Uspekhi matematicheskikh nauk*. 1953;8(6):155–157. Russian.
3. Pliss VA. Investigation of a third-order non-linear differential equation. *Doklady AN SSSR*. 1956;111(6):1078–1180. Russian.
4. Zheleznov EI. On the stability in the large of a non-linear system of three equations. *Trudy Ural'skogo polytechnical institute*. 1958;74:41–45. Russian.
5. Ogurtsov AI. On the stability in general of solutions of third-order and fourth-order non-linear differential equations. *Izvestiya vuzov. Matematika*. 1958;1(2):124–129. Russian.
6. Ogurtsov AI. On the stability of solutions of two non-linear differential equations of the third and fourth orders. *Applied Mathematics and Mechanics*. 1959;23(1):179–181. Russian.
7. Ogurtsov AI. On the stability of solutions of certain third-order and fourth-order non-linear differential equations. *Izvestiya vuzov. Matematika*. 1959;3:200–209. Russian.
8. Ezeilo JOC. On the stability of the solutions of a certain differential equations of the third order. *The Quarterly Journal of Mathematics*. 1960;11(1):64–69. DOI: 10.1093/qmath/11.1.64.
9. Barbashin EA. *Funktsii Lyapunova* [Lyapunov functions]. Moscow: Nauka; 1970. Russian.
10. Lyapunov AM. *Obshchaya zadacha ob ustoychivosti dvizheniya* [The general problem of the stability of motion]. Moscow, Leningrad: Gostekhizdat; 1950. Russian.
11. Bulgakov NG, Kalitin BS. Generalization of the theorems of the second Lyapunov method. 1. Theory. *Izvestiya Akademii nauk BSSR. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk*. 1978;3(3):32–36. Russian.
12. Bulgakov NG, Kalitin BS. Generalization of the theorems of the second Lyapunov method. 2. Examples. *Izvestiya Akademii nauk BSSR. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk*. 1979;1(1):70–74. Russian.
13. Kalitine B. Sur la stabilité des ensembles compacts positivement invariants des systèmes dynamiques. *RAIRO Automatique/Systems Analysis and Control*. 1982;16(3):275–286.
14. Kalitine BS. On the stability of compact sets. *Vestnik BGU. Seriya 1, Fizika. Matematika. Mekhanika*. 1984;3:61–62. Russian.
15. Kalitine BS. B-stability and the Florio – Seibert problem. *Differential Equations*. 1999;35(4):453–463. Russian.
16. Kalitine B. On the theorem for nonasymptotic stability in the direct Lyapunov's method. *Comptes Rendus Mathématique*. 2004;338(2):163–166. DOI: 10.1016/j.crma.2003.11.026.
17. Andreev AS. *Ustoychivost' neavtonomnykh funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii* [Stability of non-autonomous functional-differential equations]. Ulyanovsk: Izdatel'stvo UlGU; 2005. Russian.



18. Pavlikov SV. *Metod funktsionalov Lyapunova v zadachakh ustoychivosti i stabilizatsii* [Method of Lyapunov functionals in problems of stability and stabilization]. Naberezhnye Chelny: Izdatel'stvo Instituta upravleniya; 2010. Russian.
19. Kalitine BS. *Ustoychivost' differentsial'nykh uravnenii (Metod znakopostoyannykh funktsii Lyapunova)* [Stability of differential equations (Lyapunov's method of constant-valued functions)]. Saarbrücken: LAP; 2012. Russian.
20. Kalitine BS. *Ustoychivost' neavtonomnykh differentsial'nykh uravnenii* [Stability of non-autonomous differential equations]. Minsk: Belarusian State University; 2013. Russian.
21. Kalitine BS. *O problemakh ustoychivosti neavtonomnykh differentsial'nykh uravnenii (Metod znakopostoyannykh funktsii Lyapunova)* [On stability problems of non-autonomous differential equations (Lyapunov's method of constant-valued functions)]. Saarbrücken: LAP; 2015. Russian.
22. Kalitine BS. On the solution of stability problems by the direct Lyapunov method. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika*. 2017;6:33–43. Russian.
23. Kalitine BS. K pryamomu metodu Lyapunova dlya poludinamicheskikh sistem [To the direct Lyapunov method for semi-dynamical systems]. *Matematicheskie zametki*. 2016;100(4):531–543. Russian. DOI: 10.4213/mzm11007.
24. Kalitine BS. O reshenii zadach ustoychivosti pryamym metodom Lyapunova [On the solution of stability problems by the direct Lyapunov method]. *Izvestiya vuzov. Matematika*. 2017;6:33–43. Russian.
25. Sedova NO. The Global asymptotic stability and stabilization in nonlinear cascade system with delay. *Izvestiya vuzov. Matematika*. 2008;11:68–79. Russian.
26. Rouche N, Habets P, Laloy M [Stability Theory Liapunov's Direct Method]. New York: Springer; 1977. DOI: 10.1007/978-1-4684-9362-1. (Applied Mathematical Sciences; volume 22).
27. Amerio L. Studio asintotico del moto di un punto su una linea chinsa per azione di forze indipendenti dal tempo. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> serie*. 1950;3(3):19–57. Italian.
28. Bhatia NP, Szegö G. *Stability theory of Dynamical systems*. Berlin, Heidelberg: Springer; 1970.

Статья поступила в редколлегию 26.10.2017.  
Received by editorial board 26.10.2017.

---

---

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

---

## THEORY OF PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

---

---

УДК 519.21

### ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ГРУПП СИММЕТРИЙ ЛИ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ДОХОДНОСТИ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК С НЕЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ДРЕЙФА И КВАДРАТА ВОЛАТИЛЬНОСТИ

Д. А. ПАВЛИВ<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Одной из центральных задач финансового анализа является изучение поведения динамики процентных ставок. Наиболее известные аффинные модели не способны описать реальные кривые доходности с необходимой точностью, поэтому все чаще исследователи пытаются построить более сложные и, как считается, правдоподобные неаффинные модели временной структуры доходности процентных ставок. Одной из главных проблем такого построения является решение параболического дифференциального уравнения в частных производных, задающего стоимость бескупонной облигации: для исследования свойств моделей удобно иметь решение в аналитическом виде. В данной работе рассматривается обобщенная модель с нелинейными функциями дрейфа и квадрата волатильности, которая включает в себя большинство уже известных моделей. Для решения параболического уравнения, связанного с такой моделью, используется теория групп Ли, позволяющая систематизировать и полностью алгоритмизировать подход к построению решений. В результате найдены решения некоторых частных случаев

---

#### Образец цитирования:

Павлив ДА. Об использовании групп симметрий Ли для моделей временной структуры доходности процентных ставок с нелинейными функциями дрейфа и квадрата волатильности. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2018;2:34–46.

#### For citation:

Pauliu DA. On the usage of the Lie group symmetries for term structure models with nonlinear drift and squared volatility functions. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2018;2:34–46. Russian.

---

#### Автор:

*Дмитрий Александрович Павлив* – аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Г. А. Медведев.

#### Author:

*Dzmitry A. Pauliu*, postgraduate student at the department of probability theory and mathematical statistics, faculty of applied mathematics and computer science.  
375293325768@yandex.ru

моделей, как новых, не встречавшихся ранее автору, так и уже известных. Также для неаффинной модели Ана – Гао получено более общее по сравнению с оригинальным решение. В завершение проведен численный эксперимент с использованием реальных данных Европейского центрального банка.

**Ключевые слова:** группы симметрий Ли; инфинитезимальный генератор; процентные ставки; кривая доходности; форвардная кривая; бескупонные облигации.

## ON THE USAGE OF THE LIE GROUP SYMMETRIES FOR TERM STRUCTURE MODELS WITH NONLINEAR DRIFT AND SQUARED VOLATILITY FUNCTIONS

D. A. PAULIU<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

One of the central tasks of financial analysis is the study of the behavior of the dynamics of interest rates. The most well-known affine models are not able to describe real yield curves with the necessary accuracy, so more and more often researchers are trying to build more complex and, it is believed, likelihood non-affinity models of the term structure of interest rate yields. One of the main problems of constructing such models is the solution of a parabolic differential equation in partial derivatives, which sets the cost of a zero-coupon bond – in order to study the properties of models it is convenient to have such a solution in an analytical form. In this paper, we consider a generalized model with nonlinear drift and squared volatility functions, which includes most of the already known models. To solve a parabolic equation associated with such a model, we use the theory of Lie groups, which makes it possible to systematize and completely algorithmize the approach to constructing solutions. On the basis of this approach, solutions are found for some particular cases of models, both new ones that have not been previously encountered by the author, and those that already known. Also for the non-affine Ana – Gao model, a more general solution is found in comparison with the original one. In the end, a numerical experiment was carried out using real data from the European Central Bank.

**Key words:** Lie group symmetries; infinitesimal generator; interest rates; yield curve; forward rate; zero-coupon bonds.

### Введение

Одной из ключевых задач в современном финансовом анализе является изучение поведения мгновенной процентной ставки. Большинство существующих математических моделей описывают процесс мгновенной процентной ставки  $r(t)$  с помощью диффузионного уравнения вида

$$dr(t) = \mu(t, r)dt + \sigma(t, r)dW(t), \quad (1)$$

где  $\mu(t, r)$  и  $\sigma(t, r)$  – функции дрейфа и волатильности;  $W(t)$  – винеровский процесс.

В зависимости от вида функций дрейфа и квадрата волатильности можно разделить модели на два класса: аффинные, для которых указанные функции линейны, и неаффинные. Аффинные модели просты и хорошо изучены, но, как показывает практика, не способны с необходимой точностью описать поведение реальных данных. Например, в [1] на основе анализа исторических сведений было показано, что реальные данные предполагают нелинейные дрейф и волатильность. Поэтому изучение неаффинных моделей становится все более популярным в последнее время.

Один из основных этапов построения и анализа моделей вида (1) – решение связанного с ним дифференциального уравнения в частных производных относительно стоимости бескупонной облигации  $P(t, r; T)$ , где  $T$  – срок до погашения ценной бумаги:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, r)\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \mu(t, r)\frac{\partial P}{\partial r} - rP = 0, \quad P(T, r; T) = 1. \quad (2)$$

Самый распространенный подход при решении уравнения (2) – априорное знание «удачной» замены переменных, основанное на опыте исследователя. Однако такой подход является алгоритмически несистематизированным и трудно программируемым. В качестве примера можно привести аффинные модели, где необходимо заранее знать вид решения, или, например, модель Ана – Гао [2], где используется метод функционального разделения переменных путем их неочевидной замены.

В своей работе [3] норвежский математик Софус Ли описывает систематизированную теорию построения групп симметрий дифференциальных уравнений, определяющих инвариантные (относительно структуры уравнения) преобразования. Позже эта теория получила свое развитие в работах Н. Х. Ибрагимова (например, [4]). Оказывается, что большинство известных методов решения дифференциальных уравнений, таких как замена переменных, метод понижения порядка уравнения, метод разделения переменных, метод функционального разделения переменных и др., являются частными случаями теории Ли.

В данной работе на основе теории групп симметрий Ли рассматривается решение уравнений временной структуры для моделей временной доходности процентных ставок с нелинейным дрейфом, которая объединяет в себе, как частные случаи, новые и хорошо известные существующие модели.

### Основные определения и подходы теории групп Ли

Для формального описания методологии теории групп Ли рассмотрим в качестве примера параболическое дифференциальное уравнение в частных производных относительно функции  $P(r, \tau)$

$$\Delta = P_\tau - F(\tau, r, P, P_r, P_{rr}) = 0 \quad (3)$$

вместе с обратимыми трансформациями переменных  $\tau, r, P$ :

$$\bar{\tau} = f(\tau, t, P, a), \quad \bar{r} = g(\tau, t, P, a), \quad \bar{P} = g(\tau, t, P, a), \quad (4)$$

зависящими от параметра  $a$ . Если трансформация (4) переводит решение уравнения (3) в решение того же уравнения, то она называется симметрией. Множество всех симметрий  $G$  уравнения (3) образует группу и называется группой симметрий Ли.

В [3] показано, что поиск симметрий уравнения (3) эквивалентен поиску инфинитезимальных функций  $\mu, \xi, \eta$ , определяемых как

$$\bar{\tau} \approx \tau + a\mu(\tau, r, P), \quad \bar{r} \approx r + a\xi(\tau, r, P), \quad \bar{P} \approx P + a\eta(\tau, r, P).$$

Для удобства выкладок и анализа было предложено использовать следующий оператор инфинитезимальных трансформаций:

$$X = \mu(\tau, r, P) \frac{\partial}{\partial \tau} + \xi(\tau, r, P) \frac{\partial}{\partial r} + \eta(\tau, r, P) \frac{\partial}{\partial P}, \quad (5)$$

известный в литературе как инфинитезимальный оператор или генератор группы  $G$ .

Поиск симметрий уравнения (3) сводится к решению уравнения, называемого уравнением симметрии,

$$X^{(2)}(\Delta) \Big|_{\Delta=0} = 0 \quad (6)$$

на границе (3), где  $X^{(2)}$  – вторая пролонгация оператора (5), определяемая как

$$\begin{aligned} X^{(2)} = & \mu(\tau, r, P) \frac{\partial}{\partial \tau} + \xi(\tau, r, P) \frac{\partial}{\partial r} + \eta(\tau, r, P) \frac{\partial}{\partial P} + \\ & + \vartheta(\tau, r, P, P_\tau, P_r) \frac{\partial}{\partial P_\tau} + \rho(\tau, r, P, P_\tau, P_r) \frac{\partial}{\partial P_r} + \zeta(\tau, r, P, P_\tau, P_r, P_{r\tau}, P_{rr}) \frac{\partial}{\partial P_{rr}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \vartheta(\tau, r, P, P_\tau, P_r) = & \eta_\tau - \xi_\tau P_r + (\eta_P - \mu_\tau) P_\tau - \xi_P P_\tau P_r - \mu_P P_\tau^2, \\ \rho(\tau, r, P, P_\tau, P_r) = & \eta_r + (\eta_P - \xi_r) P_r - \mu_r P_\tau - \xi_P P_r^2 - \mu_P P_\tau P_r, \\ \zeta(\tau, r, P, P_\tau, P_r, P_{r\tau}, P_{rr}) = & \eta_{rr} + (2\eta_{rP} - \xi_{rr}) P_r - \mu_{rr} P_\tau + (\eta_{PP} - 2\xi_{rP}) P_r^2 - \\ & - 2\mu_{rP} P_\tau P_r - \xi_{PP} P_r^3 - \mu_{PP} P_r^2 P_\tau + (\eta_P - 2\xi_r) P_{rr} - \\ & - 2\mu_r P_{r\tau} - 3\xi_P P_r P_{rr} - \mu_P P_\tau P_{rr} - 2\mu_P P_r P_{r\tau}. \end{aligned}$$

Следует обратить внимание на то, что пролонгация (7) рассматривает  $\tau, r$ , зависимую переменную  $P$  и ее производные как независимые переменные. Уравнение (6) решается относительно функций  $\mu, \xi, \eta$ .

Несмотря на свою громоздкость, обычно уравнение (6) решается просто, путем «зануления» коэффициентов при независимых переменных, а результат выглядит следующим образом:

$$\mu(\tau, r, P) = \sum_{i=1}^n c_i \mu_i(\tau, r, P), \quad \xi(\tau, r, P) = \sum_{i=1}^n c_i \xi_i(\tau, r, P), \quad \eta(\tau, r, P) = \sum_{i=1}^n c_i \eta_i(\tau, r, P), \quad n > 0,$$

что задает  $n$ -мерное пространство инфинитезимальных операторов

$$X_i = \mu_i(\tau, r, P) \frac{\partial}{\partial \tau} + \xi_i(\tau, r, P) \frac{\partial}{\partial r} + \eta_i(\tau, r, P) \frac{\partial}{\partial P}, \quad i = \overline{1, n},$$

и соответствующих трансформаций (4) как решение системы

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial a_i} = \mu_i(\bar{\tau}, \bar{r}, \bar{P}), \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial a_i} = \xi_i(\bar{\tau}, \bar{r}, \bar{P}), \quad \frac{\partial \bar{P}}{\partial a_i} = \eta_i(\bar{\tau}, \bar{r}, \bar{P}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Трансформации, определяемые как решение (8), в силу своих свойств (они переводят решение уравнения в решение) позволяют искать новые решения исходного уравнения (3) на основе известных. Так, воспользовавшись простейшими или даже тривиальными решениями, иногда можно построить более сложные решения.

В тех случаях, когда неизвестно ни одного решения уравнения (3), ищут инвариантные относительно трансформаций решения. Данная техника заключается в поиске симметрий специального вида, переводящих решение уравнения в само себя.

### Описание модели

В работе [1] показано, что реальные данные финансового рынка свидетельствуют о нелинейном поведении как функции дрейфа, так и квадрата волатильности процесса краткосрочной процентной ставки. В частности, эмпирически установлено, что оптимальная форма функции волатильности моделей временной доходности процентных ставок должна быть пропорциональна  $r^{\frac{3}{2}}$ . В работе [2] описана (опираясь на результаты [1]) неаффинная модель, удовлетворяющая указанным выше свойствам. Здесь будет предложена более общая модель с неаффинными функциями дрейфа и волатильности, включающая в себя большинство известных моделей временной структуры как частные случаи.

Рассмотрим неаффинную модель вида

$$dr = (ar^p + b(t)r^q)dt + cr^k dW, \quad (9)$$

где  $a, c, p, q, k$  – некоторые константы;  $b(t)$  – произвольная функция. Диффузионное уравнение (9) соответствует следующему уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{1}{2} c^2 r^{2k} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + (ar^p + b(\tau)r^q) \frac{\partial P}{\partial r} - rP, \quad P(0, r) = 1, \quad (10)$$

где  $\tau = T - t$  есть время до погашения бескупонной облигации.

Найдем классические симметрии Ли для (1). Уравнение симметрии после перегруппировки принимает вид

$$\begin{aligned} & c^2 r^{2k} \mu_p P_r P_{r\tau} + c^2 r^{2k} \mu_r P_{r\tau} + \frac{1}{2} c^2 r^{2k} \left( (ar^p + b(\tau)r^q) \mu_{pp} + \xi_{pp} \right) P_r^3 + \frac{1}{4} c^4 r^{4k} \mu_{pp} P_r^2 P_{rr} - \\ & - \frac{1}{2} c^2 r^{2k} \left( \eta_{pp} + rP \mu_{pp} - 2 \left( (ar^p + b(\tau)r^q) \mu_{rp} + \xi_{rp} \right) - 2k(\theta - r) \mu_{rp} \right) P_r^2 + \\ & + \frac{1}{2} c^2 r^{2k} \left( 2\xi_p + c^2 r^{2k} \mu_{rp} \right) P_r P_{rr} + \\ & + \frac{1}{4} c^2 r^{2k-1} \left( -4k\xi + r \left( 2rP \mu_p + 2(ar^p + b(\tau)r^q) \mu_r + 4\xi_r + c^2 r^{2k} \mu_{rr} - 2\mu_\tau \right) \right) P_{rr} - \\ & - P_r \left( apr^{p-1} + qr^{q-1} b(\tau) \right) \xi + rPP_r \left( ar^p + r^q b(\tau) \right) \mu_p + rPP_r \xi_p + \\ & + c^2 r^{2k} P_r \left( -2\eta_{rp} - 2rP \mu_{rp} + (ar^p + b(\tau)r^q) \mu_{rr} + \xi_{rr} \right) + \\ & + P_r \left( ar^p + b(\tau)r^q \right) \left( (ar^p + b(\tau)r^q) \mu_r + \xi_r - \mu_\tau \right) - 2\xi_\tau - r^q P_r b_\tau \mu + \\ & + r\eta + P\xi - r^2 P^2 \mu_p - (ar^p + r^q b(\tau)) \eta_r - rP \left( ar^p + r^q b(\tau) \right) \mu_r - \\ & - \frac{1}{2} c^2 r^{2k} \left( \eta_{rr} + rP \mu_{rr} \right) + \eta_\tau + rP \left( -\eta_p + \mu_\tau \right) = 0, \end{aligned}$$

что эквивалентно системе уравнений

$$\mu_p = 0, \quad (11)$$

$$\mu_r = 0, \quad (12)$$

$$(ar^p + b(\tau)r^q)\mu_{pp} + \xi_{pp} = 0, \quad (13)$$

$$\eta_{pp} + rP\mu_{pp} - 2((ar^p + b(\tau)r^q)\mu_{rp} + \xi_{rp}) - 2k(\theta - r)\mu_{rp} = 0, \quad (14)$$

$$\mu_{pp} = 0, \quad (15)$$

$$2\xi_p + c^2r^{2k}\mu_{rp} = 0, \quad (16)$$

$$-4k\xi + r(2rP\mu_p + 2(ar^p + b(\tau)r^q)\mu_r + 4\xi_r + c^2r^{2k}\mu_{rr} - 2\mu_\tau) = 0, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & -2(apr^p + qr^qb(\tau))\xi + r(2rP(ar^p + r^qb(\tau))\mu_p + 2rP\xi_p + \\ & + c^2r^{2k}(-2\eta_{rp} - 2rP\mu_{rp} + (ar^p + b(\tau)r^q)\mu_{rr} + \xi_{rr})) + \\ & + 2(ar^p + b(\tau)r^q)((ar^p + b(\tau)r^q)\mu_r + \xi_r - \mu_\tau) - 2\xi_\tau - 2r^{q+1}b_\tau\mu = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & r\eta + P\xi - r^2P^2\mu_p - (ar^p + r^qb(\tau))\eta_r - rP(ar^p + r^qb(\tau))\mu_r - \\ & - \frac{1}{2}c^2r^{2k}(\eta_{rr} + rP\mu_{rr}) + \eta_\tau + rP(-\eta_p + \mu_\tau) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (11), (12) и (15) можно заключить, что

$$\mu = A(\tau), \quad (20)$$

где  $A(\tau)$  – некоторая пока неизвестная функция. Из уравнений (13), (16) и (17) с учетом (20) получим

$$\xi = \begin{cases} re(\tau) + \frac{A'(\tau)r \ln r}{2}, & k = 1, \\ r^k e(\tau) + \frac{rA'(\tau)}{2(1-k)}, & k \neq 1, \end{cases} \quad (21)$$

где  $e(\tau)$  – функция, подлежащая определению. После подстановки (20) и (21) в уравнение (14) имеем

$$\eta = G(\tau, r)P + d(\tau, r),$$

где  $G(\tau, r)$  и  $d(\tau, r)$  – неизвестные функции. Подставляя найденные значения в (18), находим значения функции  $G(\tau, r)$ :

$$G(\tau, r) = \begin{cases} h(\tau) - \frac{ae(\tau)}{c^2}r^{p-1} - \frac{aA_\tau}{2c^2}r^{p-1} \ln r - \frac{b(\tau)A_\tau}{2c^2}r^{q-1} \ln r - \\ - \frac{1}{c^2} \left( b(\tau)e(\tau) + \frac{b_\tau A(\tau)}{q-1} \right) r^{q-1} + \left( \frac{A_\tau}{4} - \frac{e_\tau}{c^2} \right) \ln r - \\ - \frac{A_{\tau\tau}}{4c^2} \ln^2 r, & k = 1, \\ h(\tau) + \frac{k}{2}e(\tau)r^{k-1} - \frac{a}{c^2}e(\tau)r^{p-k} + \frac{aA_\tau}{2c^2(k-1)}r^{p-2k+1} - \\ - \frac{b(\tau)e(\tau)}{c^2}r^{q-k} + \left( \frac{b(\tau)A_\tau}{2c^2(k-1)} - \frac{b_\tau A(\tau)}{c^2(1-2k+q)} \right) r^{q-2k+1} + \\ + \frac{e_\tau}{c^2(k-1)}r^{1-k} - \frac{A_{\tau\tau}}{4c^2(k-1)^2}r^{2(1-k)}, & k \neq 1. \end{cases}$$



С учетом найденных функций уравнение (19) примет вид

$$z(\tau, r)P + \left( d_\tau - \frac{1}{2}c^2 r^{2\gamma} d_{rr} - (ar^p + b(\tau)r^q) d_r + rd \right) = 0, \quad (22)$$

где

$$z(\tau, r) = \left\{ \begin{aligned} & r(e(\tau) + A_\tau) + \frac{1}{2}a(p-2)((p-1)e(\tau) + A_\tau)r^{p-1} + \frac{a^2}{2c^2}(2(p-1)e(\tau) + A_\tau)r^{2(p-1)} + \\ & + \left( \frac{q-2}{2}b(\tau)((q-1)e(\tau) + A_\tau) + \left( \frac{q-2}{2}A(\tau) - \frac{e(\tau)}{c^2} - \frac{A_\tau}{c^2(q-1)} \right) b_\tau - \frac{A(\tau)b_{\tau\tau}}{c^2(q-1)} \right) r^{q-1} + \\ & + \frac{a(b(\tau)((p+q-2)e(\tau) + A_\tau) + A(\tau)b_\tau)}{c^2} r^{q+p-2} + \\ & + \frac{1}{8}c^2 A_\tau + \frac{1}{2}A_\tau r \ln r + \frac{a}{4}(p-2)(p-1)A_\tau r^{p-1} \ln r + \\ & + \frac{a^2(p-1)A_\tau}{2c^2} r^{2(p-1)} \ln r + \frac{A_\tau(c^2(q-1)(q-2)b(\tau) - 2b_\tau)}{4c^2} r^{q-1} \ln r + \\ & + \frac{a(q+p-2)}{2c^2} b(\tau) A_\tau r^{p+q-2} \ln r + \frac{(q-1)b^2(\tau)A_\tau}{2c^2} r^{2(q-1)} \ln r - \\ & - \frac{e_\tau}{2} + h_\tau + \frac{A_{\tau\tau}}{4} - \frac{e_{\tau\tau}}{c^2} \ln r - \frac{A_{\tau\tau\tau}}{4c^2} \ln^2 r, \quad k=1, \\ & - \frac{1}{4}c^2(k-1)(k-2)ke(\tau)r^{3(k-1)} - \frac{1}{2}a^2c^2(2k-p)(p-1)e(\tau)r^{k+p-2} + \\ & + \frac{1}{2}(q-1)(q-2k)e(\tau)b(\tau)r^{k+q-2} - \frac{a^2(k-p)}{c^2}e(\tau)r^{2p-k+1} - \\ & - \frac{a(2k-q-p)}{c^2}e(\tau)b(\tau)r^{p+q-k-1} - \frac{k-q}{c^2}e(\tau)b^2(\tau)r^{2q-k-1} - \\ & - \frac{a^2(2k-p-1)(2k-p)}{4(k-1)}A_\tau r^{p-1} - (2k-q) \left( \frac{2k-q-1}{4(k-1)}b(\tau)A_\tau + \frac{1}{2}A(\tau)b_\tau \right) r^{q-1} - \\ & - a \frac{c^2(1-2k-p)}{2c^2(k-1)}A_\tau r^{2p-2k} + a \left( \frac{4k-p-q-2}{2c^2(k-1)}b(\tau)A_\tau + \frac{A(\tau)b_\tau}{c^2} \right) r^{p+q-2k} + \\ & + b(\tau) \left( \frac{2k-q-1}{2c^2(k-1)}b(\tau)A_\tau + \frac{A(\tau)b_\tau}{c^2} \right) r^{2q-2k} + e(\tau)r^k - \frac{1}{c^2}e(\tau)b_\tau r^{q-k} + h_\tau + \\ & + \frac{2k-1}{4(k-1)}A_{\tau\tau} + \frac{2k-3}{2(k-1)}A_\tau r + \frac{(4k-q-3)A_\tau b_\tau + 2(k-1)A(\tau)b_{\tau\tau}}{2c^2(k-1)(2k-q-1)} r^{q-2k+1} + \\ & + \frac{1}{c^2(k-1)}e_{\tau\tau}r^{1-k} - \frac{A_{\tau\tau\tau}}{4c^2(k-1)^2}r^{-2(k-1)}, \quad k \neq 1, \end{aligned} \right. \quad (23)$$

где в качестве значения функции  $d$  следует выбирать любое решение  $\phi$  исходного уравнения.

В силу линейной независимости функций  $r, r^h, \ln r, \ln^m r$ , где  $h$  и  $m$  – некоторые константы, для решения уравнения (22) с учетом (23) достаточно приравнять к нулю коэффициенты уравнения  $z(\tau, r) = 0$  при различных степенях  $r, \ln r$ . Случай  $k = 1$  и общий случай  $k \neq 1$  приводят к следующим значениям:

$$\mu = c_1, \quad \xi = 0, \quad \eta = c_2 P + \phi(\tau, r),$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – некоторые константы. Данному решению соответствует следующее векторное пространство инфинитезимальных генераторов, порождаемых базисными векторами,

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad X_p = P \frac{\partial}{\partial P}, \quad X_\varphi = \varphi \frac{\partial}{\partial P}.$$

Такие генераторы соответствуют элементарным преобразованиям – сдвигу по времени, масштабированию и аддитивности решений:

$$\begin{aligned} X_1 : \bar{\tau} &= \tau + a_1, \quad \bar{r} = r, \quad \bar{P} = P, \\ X_p : \bar{\tau} &= \tau, \quad \bar{r} = r, \quad \bar{P} = a_p P, \\ X_\varphi : \bar{\tau} &= \tau, \quad \bar{r} = r, \quad \bar{P} = P + \varphi(r, \tau). \end{aligned}$$

Указанные преобразования не представляют интереса с точки зрения поиска новых решений уравнения (10) и не позволяют построить инвариантные решения. Поэтому более привлекательными являются частные случаи, когда параметры  $p, q, k$  и функция  $b(\tau)$  выбираются таким образом, чтобы приравнять значения степеней  $r$  при различных слагаемых в (23), например полагая  $k + p - 1 = q - 2k + 1$ .

Рассмотрим случай, когда  $k = \frac{3}{2}, p = 2, q = 3$ . Тогда функция  $z(\tau, r)$  примет вид

$$\begin{aligned} z(\tau, r) &= \frac{3b^2(\tau)e(\tau)}{2c^2} r^{\frac{7}{2}} + \frac{b(\tau)(A(\tau)b_\tau - b(\tau)A_\tau)}{c^2} r^3 + \frac{2ab(\tau)e(\tau)}{c^2} r^{\frac{5}{2}} + \\ &+ \frac{e(\tau)(16a^2 - 16(a-2)c^2 + 3c^4 - 32b_\tau)}{32c^2} r^{\frac{3}{2}} + \frac{a(A(\tau)b_\tau - b(\tau)A_\tau)}{c^2} r^2 - \\ &- \frac{A(\tau)b_{\tau\tau}}{c^2} r + \frac{2e_{\tau\tau}}{c^2} r^{-\frac{1}{2}} - \frac{A_{\tau\tau\tau}}{c^2} r^{-1} + h_\tau + A_{\tau\tau}. \end{aligned}$$

Решая уравнение  $z(\tau, r) = 0$ , находим

$$A(\tau) = c_1 + c_2\tau, \quad b(\tau) = c_4(c_1 + c_2\tau), \quad e(\tau) = 0, \quad h(\tau) = c_3,$$

что в итоге приводит к следующему векторному пространству инфинитезимальных операторов исходного уравнения:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad X_2 = \tau \frac{\partial}{\partial \tau} - r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a}{c^2} P \frac{\partial}{\partial P}, \quad X_3 = P \frac{\partial}{\partial P}, \quad X_\varphi = \varphi \frac{\partial}{\partial P}. \quad (24)$$

Будем искать решение уравнения (10) с учетом начального условия, используя пространство симметрий (24). Для этого найдем подалгебру симметрий, инвариантную относительно начального условия. Согласно [5] это можно сделать путем решения системы уравнений

$$\begin{cases} Y(\tau)|_{\tau=0} = 0, \\ Y(P-1)|_{P=1} = 0, \end{cases} \quad (25)$$

где

$$Y = \sum_{i=1}^n c_i X_i.$$

Система (25) после подстановки генераторов (24) преобразуется к виду

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = -c_2 \frac{a}{c^2}.$$

Тогда инфинитезимальный оператор можно записать как

$$Y = \tau \frac{\partial}{\partial \tau} - r \frac{\partial}{\partial r},$$

что дает следующую систему на характеристической поверхности:

$$\begin{cases} \eta - \xi P_r - \mu P_\tau = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{1}{2} c^2 r^3 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + (ar^2 + \tau r^3) \frac{\partial P}{\partial r} - rP. \end{cases} \quad (26)$$

Решение первого уравнения системы (26) может быть найдено с помощью метода характеристик:

$$P(\tau, r) = \psi(z), \quad z = \tau r.$$

Тогда, подставляя данное решение в (26), имеем

$$0 = \frac{1}{2} c^2 z^2 \psi'' + (az + z^2 - 1) \psi' - \psi. \quad (27)$$

В общем случае разрешить уравнение (27) не удастся, однако если положить  $a = 0$  и  $c^2 = 2$ , то решение может быть найдено:

$$\psi(z) = e^{-z} \left( C_1 + C_2 \int_1^z \exp\left(u - \frac{1}{u}\right) du \right),$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные константы. Окончательно можно записать

$$P(\tau, r) = e^{-\tau r} \left( C_1 + C_2 \int_1^{\tau r} \exp\left(u - \frac{1}{u}\right) du \right). \quad (28)$$

Таким образом, для модели

$$dr = (\gamma - t)r^3 dt + \sqrt{2}r^{\frac{3}{2}} dW,$$

где  $\gamma$  – некоторый параметр, стоимость бескупонной облигации может быть найдена в частном случае, когда время погашения  $T$  в точности совпадает с параметром  $\gamma$ , по формуле

$$P(t, r) = e^{-(\gamma-t)r} \left( C_1 + C_2 \int_1^{(\gamma-t)r} \exp\left(u - \frac{1}{u}\right) du \right) \Leftrightarrow T = \gamma.$$

Другим частным случаем может служить модель со следующим набором параметров:  $k = \frac{3}{2}$ ,  $p = 2$ ,  $q = 0$ ,  $b(\tau) = 0$ , что соответствует диффузионному уравнению

$$dr = \alpha r^2 dt + cr^{\frac{3}{2}} dW.$$

Тогда функция  $z(\tau, r)$  примет вид

$$z(\tau, r) = \frac{1}{32} \left( 32 - 16a + \frac{16a^2}{c^2} + 3c^2 \right) e(\tau) r^{\frac{3}{2}} + h_\tau + A_{\tau\tau} + \frac{2e_{\tau\tau}}{c^2 \sqrt{r}} - \frac{A_{\tau\tau\tau}}{c^2 r} = 0.$$

Решая уравнение  $z(\tau, r) = 0$ , находим

$$\begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} e(\tau) = 0, \\ A(\tau) = c_1 \tau^2 + c_2 \tau + c_3, \\ h(\tau) = -2c_1 \tau + c_4, \end{array} \right. & c \neq 2\sqrt{\frac{2a - 4 + \sqrt{a^2 - 16a + 16}}{3}}; \\ \left\{ \begin{array}{l} e(\tau) = c_1 \tau + c_2, \\ A(\tau) = c_3 \tau^2 + c_4 \tau + c_5, \\ h(\tau) = -2c_3 \tau + c_6, \end{array} \right. & c = 2\sqrt{\frac{2a - 4 + \sqrt{a^2 - 16a + 16}}{3}}. \end{cases} \quad (29)$$

Рассмотрим первое решение из (29). Оно приводит к системе

$$\begin{aligned} X_1 &= \tau^2 \frac{\partial}{\partial \tau} - 2r\tau \frac{\partial}{\partial r} + 2 \frac{r\tau(a - c^2) - 1}{c^2 r} P \frac{\partial}{\partial P}, \\ X_2 &= \tau \frac{\partial}{\partial \tau} - r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a}{c^2} P \frac{\partial}{\partial P}, \\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad X_4 = P \frac{\partial}{\partial P}, \quad X_\varphi = \varphi \frac{\partial}{\partial P}, \end{aligned}$$

что после нахождения инвариантной подалгебры инфинитезимальных генераторов дает решение:

$$\begin{aligned}
 P(\tau, r) = & c_1 \left( \frac{2}{c^2 r \tau} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{a}{c^2} - \vartheta} {}_1F_1 \left( -\frac{1}{2} + \frac{a}{c^2} - \vartheta, 1 - 2\vartheta, -\frac{2}{c^2 r \tau} \right) + \\
 & + c_2 \left( \frac{2}{c^2 r \tau} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{a}{c^2} + \vartheta} {}_1F_1 \left( -\frac{1}{2} + \frac{a}{c^2} + \vartheta, 1 + 2\vartheta, -\frac{2}{c^2 r \tau} \right), \quad (30) \\
 & \vartheta = \frac{\sqrt{8c^2 + (c^2 - 2a)^2}}{2c^2},
 \end{aligned}$$

где  ${}_1F_1$  – конфлюэнтная гипергеометрическая функция Куммера, а коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  выбираются таким образом, чтобы выполнялось начальное условие

$$c_1 \frac{\Gamma(1-2\vartheta)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{a}{c^2} - \vartheta\right)} + c_2 \frac{\Gamma(1+2\vartheta)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{a}{c^2} + \vartheta\right)} = 1. \quad (31)$$

Второе решение из (29) приводит к системе генераторов

$$\begin{aligned}
 X_1 &= r^2 \tau \frac{\partial}{\partial r} + \frac{8 - 4ar\tau + 3c^2 r \tau}{4c^2 \sqrt{r}} P \frac{\partial}{\partial P}, \\
 X_2 &= r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{3c^2 - 4a}{4c^2} \sqrt{r} P \frac{\partial}{\partial P}, \\
 X_3 &= \tau^2 \frac{\partial}{\partial \tau} - 2r\tau \frac{\partial}{\partial r} + 2 \frac{(a - c^2)r\tau - 1}{c^2 r} P \frac{\partial}{\partial P}, \\
 X_4 &= \tau \frac{\partial}{\partial \tau} - r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a}{c^2} P \frac{\partial}{\partial P}, \\
 X_5 &= \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad X_6 = P \frac{\partial}{\partial P}, \quad X_\varphi = \varphi \frac{\partial}{\partial P},
 \end{aligned}$$

что, в свою очередь, позволяет найти решение исходного уравнения, которое в точности совпадает с (30).

В качестве еще одного примера можно рассмотреть модель с набором параметров:  $k = 2, p = 2, q = 0, b(\tau) = 0$ , что соответствует диффузионному уравнению

$$dr = \alpha r^2 dt + cr^2 dW.$$

Тогда функцию  $z(\tau, r)$  можно записать как

$$z(\tau, r) = -(\alpha - 1)e(\tau)r^2 + \frac{\alpha^2 A_\tau}{2c^2} - \frac{1}{2}(\alpha - 1)rA_\tau + h_\tau + \frac{3}{4}A_{\tau\tau} + \frac{e_{\tau\tau}}{c^2 r} - \frac{A_{\tau\tau\tau}}{4c^2 r^2} = 0.$$

Уравнение  $z(\tau, r) = 0$  имеет два решения:

$$\left\{ \begin{aligned} & e(\tau) = 0, \\ & A(\tau) = c_1, \\ & h(\tau) = c_2, \alpha \neq 1, \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} & e(\tau) = c_4 \tau + c_5, \\ & A(\tau) = c_1 \tau^2 + c_2 \tau + c_3, \\ & h(\tau) = -\frac{3c^2 c_1 \tau + c_2 \tau + c_1 \tau^2}{2c^2} + c_6, \alpha = 1. \end{aligned} \right. \quad (32)$$

Первое решение из (32) порождает только простейшие генераторы, поэтому не представляет интереса для дальнейшего исследования. Второе решение приводит к системе генераторов

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \tau^2 \frac{\partial}{\partial \tau} - r\tau \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1+r\tau(r\tau+3c^2r-2)}{2c^2r^2} P \frac{\partial}{\partial P}, \\
 X_2 &= \tau \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-r\tau}{2c^2r} P \frac{\partial}{\partial P}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial \tau}, \\
 X_4 &= r^2 \tau \frac{\partial}{\partial r} + \left( \frac{1-r\tau}{c^2r} + r\tau \right) P \frac{\partial}{\partial P}, \\
 X_5 &= r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \left( r - \frac{1}{c^2} \right) P \frac{\partial}{\partial P}, \quad X_6 = P \frac{\partial}{\partial P}, \quad X_\varphi = \varphi \frac{\partial}{\partial P},
 \end{aligned}$$

что после нахождения инвариантной подалгебры генераторов позволяет решить исходное уравнение,

$$P(\tau, r) = 1 - r\tau. \quad (33)$$

Следует отметить, что решение (33) не зависит от параметров модели. Также оно не удовлетворяет условиям, вытекающим из экономического смысла стоимости бескупонной облигации, т. е. для  $r > 0$ :  $P(\infty, r) = 0$ ,  $P(\tau, r) > 0$ .

Модель (9) включает в себя большинство известных моделей. Рассмотрим, например, случай  $k = \frac{3}{2}$ ,  $p = 2$ ,  $q = 1$ ,  $b(\tau) = b$ , соответствующий модели Ана – Гао [2]. Тогда функция  $z(\tau, r)$  примет вид

$$\begin{aligned}
 z(\tau, r) &= \frac{1}{32} \left( 32 - 16a + \frac{16a^2}{c^2} + 3c^2 \right) e(\tau) r^{\frac{3}{2}} + \left( \frac{a}{c^2} - 1 \right) b A_\tau + \\
 &+ h_\tau + A_{\tau\tau} - \frac{b^2 e(\tau) - 4e_{\tau\tau}}{2c^2 \sqrt{r}} + \frac{b^2 A_\tau - A_{\tau\tau}}{c^2 r} = 0,
 \end{aligned}$$

что после решения уравнения  $z(\tau, r) = 0$  дает

$$A(\tau) = c_1 \frac{e^{b\tau}}{b} - c_2 \frac{e^{-b\tau}}{b} + c_3, \quad e(\tau) = 0, \quad h(\tau) = -c_2 \frac{2c^2 - a}{c^2} e^{-b\tau} - c_1 \frac{a}{c^2} e^{b\tau} + c_4,$$

откуда можно найти векторное пространство инфинитезимальных операторов исходного уравнения

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{e^{b\tau}}{b} \frac{\partial}{\partial \tau} - r e^{b\tau} \frac{\partial}{\partial r}, \quad X_2 = -\frac{e^{-b\tau}}{b} \frac{\partial}{\partial \tau} - r e^{-b\tau} \frac{\partial}{\partial r} + 2e^{-b\tau} \left( \frac{a}{c^2} + \frac{b}{rc^2} - 1 \right) P \frac{\partial}{\partial P}, \\
 X_3 &= \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad X_4 = P \frac{\partial}{\partial P}, \quad X_\varphi = \varphi \frac{\partial}{\partial P},
 \end{aligned}$$

и окончательно прийти к решению

$$\begin{aligned}
 P(\tau, r) &= c_1 \left( \frac{2b}{c^2 r (1 - e^{b\tau})} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{a}{c^2} - \vartheta} {}_1F_1 \left( -\frac{1}{2} + \frac{a}{c^2} - \vartheta, 1 - 2\vartheta, -\frac{2b}{c^2 r (1 - e^{b\tau})} \right) + \\
 &+ c_2 \left( \frac{2b}{c^2 r (1 - e^{b\tau})} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{a}{c^2} + \vartheta} {}_1F_1 \left( -\frac{1}{2} + \frac{a}{c^2} + \vartheta, 1 + 2\vartheta, -\frac{2b}{c^2 r (1 - e^{b\tau})} \right), \quad \vartheta = \frac{\sqrt{8c^2 + (c^2 - 2a)^2}}{2c^2},
 \end{aligned}$$

где коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  выбираются таким образом, чтобы выполнялось начальное условие (31).

$$c_1 \frac{\Gamma(1 - 2\vartheta)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{a}{c^2} - \vartheta\right)} + c_2 \frac{\Gamma(1 + 2\vartheta)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{a}{c^2} + \vartheta\right)} = 1.$$

Заметим, что известное решение уравнения модели Ана – Гао, полученное авторами в [2], является частным случаем найденного здесь решения.

Нетрудно показать, что (9) включает в себя и другие известные модели как частные случаи, например модель Васичека [6] с решением

$$P(\tau, r) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4k} B^2(\tau) + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2}\right)(B(\tau) - \tau)\right) e^{-rB(\tau)}, \quad B(\tau) = \frac{1 - e^{-k\tau}}{k},$$

и модель CIR [7] –

$$P(\tau, r) = \exp\left(-\frac{2k\theta}{\sigma^2} \left(\frac{\varepsilon - k}{2} \tau - \ln\left(1 + \frac{\varepsilon - k}{2} B(\tau)\right)\right) - rB(\tau)\right),$$

$$\varepsilon = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}, \quad B(\tau) = \left(\frac{\varepsilon + k}{2} + \frac{\varepsilon}{\exp(\varepsilon\tau) - 1}\right)^{-1}.$$

Кроме рассмотренных выше, существуют другие различные комбинации параметров  $p$ ,  $q$  и  $k$ , которые могут порождать новые нетривиальные симметрии рассмотренного уравнения.

### Эмпирический анализ

Проиллюстрируем вычисление временной структуры доходности на примере кривой доходности  $y(\tau, X)$  и форвардной кривой  $f(\tau, X)$ , которые по определению имеют вид

$$y(\tau, r) = -\frac{\ln P(\tau, r)}{\tau}, \quad f(\tau, r) = -\frac{\partial \ln P(\tau, r)}{\partial \tau}.$$

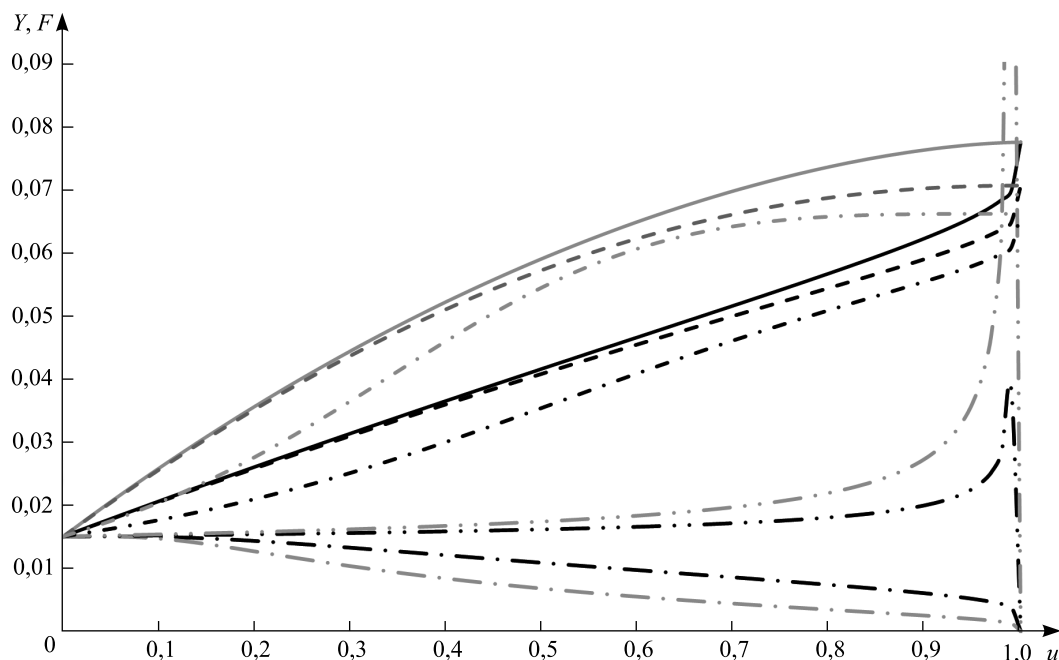
На практике для использования описанных выше моделей необходимо знание их параметров и значений мгновенной процентной ставки. В качестве аппроксимации последней можно принять ставку с наименьшим доступным на рынке сроком конвертации. Обычно таковой является одномесячная либо трехмесячная ставка. Здесь будем использовать данные Европейского центрального банка по трехмесячным процентным ставкам на 24.08.2014 г. Для оценки параметров применим метод моментов, а вероятностные характеристики моделей можно найти способом, описанным в [8]. Все модели рассматриваются в риск-нейтральной постановке. Результаты оценки неизвестных параметров моделей приведены в таблице.

Оценки неизвестных параметров  
 Estimated values of unknown parameters

№ п/п	Модель	Оценки параметров	Математическое ожидание	Дисперсия
1	Модель Васичека	$k = 0,1283; \theta = 0,0827; \sigma = 0,0133$	0,0827	0,0006
2	Модель CIR	$k = 0,1343; \theta = 0,0781; \sigma = 0,0657$	0,0781	0,0012
3	Модель Ана – Гао	$k = 3,4387; \theta = 0,0828; \sigma = 1,1920$	0,0686	0,0009
4	Модель с нелинейным дрейфом: $k = \frac{3}{2}, p = 2, q = 0, b(\tau) = 0$	$\alpha = -0,025; c = 4,7683$	0,0019	0,0009
5	Модель с нелинейным дрейфом: $k = 2, p = 2, q = 0, b(\tau) = 0$	$\alpha = 22,5206; c = 16,6005$	0,08172	0,0067

На рисунке изображены кривая доходности и форвардная кривая для моделей из таблицы. Чтобы представить данные кривые «целиком» для всего интервала значений сроков до погашения  $\tau \in (0, \infty)$ , использовано нелинейное преобразование этих сроков  $u = 1 - e^{-\rho\tau}$  [9], которое отображает положительную полуось  $(0, \infty)$  в единичный интервал  $(0, 1)$ . Принятое при расчетах численное значение  $\rho = \frac{\ln 10}{30} = 0,07675$  соответствует тому, что сроки до погашения от 0 до 30 отображаются в интервал  $(0; 0,9)$ , так что  $Y(u) = y(\tau, X)$ ,  $F(u) = f(\tau, X)$ , где  $\tau = \frac{-\ln(1-u)}{\rho}$ . Значение мгновенной процентной ставки  $r = 0,015$ .





Кривые доходности (черные) и форвардные кривые (серые) для моделей:  
№ 1 – сплошные; № 2 – пунктир; № 3 – штрихпунктир; № 4 – длинный штрихпунктир; № 5 – двойной штрихпунктир  
Yield curve (black) – and forward rate curve (gray), model:  
No. 1 – solid; No. 2 – dotted line; No. 3 – dash-dotted; No. 4 – long dash-dotted; No. 5 – double dash-dotted

Как видно из рисунка, кривые для моделей № 4 и 5 стремятся к нулю при  $\tau \rightarrow \infty$  ( $u \rightarrow 1$ ). Действительно, такое поведение кривых для данных моделей справедливо в риск-нейтральной постановке и не зависит от параметров моделей и уровня процентных ставок. Следует отметить, что указанные кривые демонстрируют различное поведение, и конкретный выбор модели в том или ином случае должен сопровождаться дополнительным анализом.

### Заключение

В работе представлены примеры конкретных моделей (как новых, не встречавшихся автору в открытых источниках, так и хорошо изученных), описываемых общим уравнением с нелинейными функциями дрейфа и волатильности (9), а также для них найдены выражения стоимости бескупонной облигации в аналитическом виде. Для модели Ана – Гао получено более общее решение, чем найденное в оригинальной работе [2]. Многие из построенных моделей содержат  $r^{\frac{3}{2}}$  в функции волатильности, что соответствует результатам, представленным в работе Я. Айт-Сахала (Y. Ait-Sahalia) [1], где на основе реальных данных показано, что такое значение является наиболее предпочтительным. Полученные результаты могут быть полезны как для дальнейших теоретических исследований, так и для применения на практике при анализе временной структуры доходности процентных ставок на финансовом рынке.

### Библиографические ссылки

1. Ait-Sahalia Y. Testing continuous-time models of the spot interest rate. *The Review of Financial Studies*. 1996;9(2):385–426.
2. Ahn D, Gao B. A parametric nonlinear model of term structure dynamics. *The Review of Financial Studies*. 1999;12(4):721–762. DOI: 10.1093/rfs/12.4.721.
3. Lie S. On integration of a class of linear partial differential equations by means of definite integrals, *Archiv der Mathematik* VI(3), 328–368, 1881 [in German]. Reprinted in S. Lie, *Gesammelte Abhandlungen*, Volume 3, paper XXXV. (English translation published in CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Volume 2, Ibragimov NH, editor. Boca Raton, FL: CRC Press; 1995.)
4. Ibragimov NH, Gazizov RK. Lie symmetry analysis of differential equations in finance. *Nonlinear Dynamics*. 1998;17(4):387–407. DOI: 10.1023/A:1008304132308.
5. Sinkala W, Leach PGL, O'Hara JG. Zero-coupon bond prices in the Vasicek and CIR models: Their computation as group-invariant solutions. *Mathematical methods in the Applied Sciences*. 2008;31(6):665–678. DOI: 10.1002/mma.935.
6. Медведев ГА. О временной структуре доходности. 1. Модель Васичека. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2012;1(18):102–111.

7. Медведев ГА. О временной структуре доходности. 2. Модель Кокса – Ингерсолла – Росса. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2012;2(19):102–111.
8. Медведев ГА. Плотности вероятностей процессов процентных ставок доходности. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2016;3(36):35–48.
9. Медведев ГА. О временной структуре доходности. 7. Новая версия. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2013;4(25):61–70.

## References

1. Ait-Sahalia Y. Testing continuous-time models of the spot interest rate. *The Review of Financial Studies*. 1996;9(2):385–426.
2. Ahn D, Gao B. A parametric nonlinear model of term structure dynamics. *The Review of Financial Studies*. 1999;12(4):721–762. DOI: 10.1093/rfs/12.4.721.
3. Lie S. On integration of a class of linear partial differential equations by means of definite integrals, *Archiv der Mathematik* VI(3), 328–368, 1881 [in German]. Reprinted in S. Lie, *Gesammelte Abhandlungen*, Volume 3, paper XXXV. (English translation published in CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Volume 2, Ibragimov NH, editor. Boca Raton, FL: CRC Press; 1995.)
4. Ibragimov NH, Gazizov RK. Lie symmetry analysis of differential equations in finance. *Nonlinear Dynamics*. 1998;17(4):387–407. DOI: 10.1023/A:1008304132308.
5. Sinkala W, Leach PGL, O'Hara JG. Zero-coupon bond prices in the Vasicek and CIR models: Their computation as group-invariant solutions. *Mathematical methods in the Applied Sciences*. 2008;31(6):665–678. DOI: 10.1002/mma.935.
6. Medvedev GA. On term structure of yield rates. 1. Vasicek model. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika*. 2012;1(18):102–111. Russian.
7. Medvedev GA. On term structure of yield rates. 2. The Cox Ingersoll Ross model. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika*. 2012;2(19):102–111. Russian.
8. Medvedev GA. The probability density of the processes of yield interest rates. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika*. 2016;3(36):35–48. Russian.
9. Medvedev GA. On term structure of yield rates. 7. The New Version. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika*. 2013;4(25):61–70. Russian.

Статья поступила в редакцию 07.02.2018.  
Received by editorial board 07.02.2018.

## АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ БИНОМИАЛЬНОЙ УСЛОВНО АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ ДАННЫХ

М. К. ДОЛГАЛЁВА<sup>1)</sup>, Ю. С. ХАРИН<sup>1), 2)</sup>

<sup>1)</sup>НИИ прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета,  
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

<sup>2)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассматривается биномиальная условно авторегрессионная модель дискретных пространственно-временных данных, которая является многомерной неоднородной цепью Маркова с конечным пространством состояний. Для этой модели найдены условия, при которых она удовлетворяет эргодическому принципу в случае, когда экзогенные факторы зависят от времени. Для статистического оценивания параметров модели используется метод максимального правдоподобия. Доказано, что построенная оценка максимального правдоподобия является состоятельной и асимптотически нормально распределенной при любых ограниченных значениях параметров модели и ограниченных значениях экзогенного фактора при условии статистической идентифицируемости параметров модели. Представлены результаты компьютерных экспериментов на модельных данных, иллюстрирующие состоятельность оценок максимального правдоподобия.

**Ключевые слова:** пространственно-временные данные; неоднородная цепь Маркова; эргодический принцип; оценка максимального правдоподобия; состоятельность; асимптотическая нормальность.

## ASYMPTOTIC ANALYSIS OF STATISTICAL ESTIMATORS OF PARAMETERS FOR BINOMIAL CONDITIONALLY AUTOREGRESSIVE MODEL OF SPATIO-TEMPORAL DATA

М. К. DAUHALIOVA<sup>a</sup>, Yu. S. KHARIN<sup>a, b</sup>

<sup>a</sup>Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Belarusian State University,  
4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

<sup>b</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: M. K. Dauhaliova (mzhurak@gmail.com)

The binomial conditionally autoregressive model of discrete spatio-temporal data is considered in this paper. This model is a multidimensional inhomogeneous Markov chain with a finite state space. Conditions, under which the bino-

### Образец цитирования:

Долгалёва МК, Харин ЮС. Асимптотический анализ статистических оценок параметров биномиальной условно авторегрессионной модели пространственно-временных данных. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;2:47–57.

### For citation:

Dauhaliova MK, Kharin YuS. Asymptotic analysis of statistical estimators of parameters for binomial conditionally autoregressive model of spatio-temporal data. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;2:47–57. Russian.

### Авторы:

**Марина Константиновна Долгалёва** – младший научный сотрудник.

**Юрий Семенович Харин** – член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук; директор<sup>1)</sup>; профессор кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики<sup>2)</sup>.

### Authors:

**Maryna K. Dauhaliova**, junior researcher.  
mzhurak@gmail.com

**Yuriy S. Kharin**, corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus, doctor of science (physics and mathematics); director<sup>a</sup>; professor at the department of mathematical modeling and data analysis, faculty of applied mathematics and informatics<sup>b</sup>.  
kharin@bsu.by

mial conditionally autoregressive model satisfies the ergodic principle, are found in case when exogenous factors depend on time. The maximum likelihood approach is used for statistical estimation of model parameters. It is proved that the constructed maximum likelihood estimators are consistent and asymptotically normal distributed for any bounded values of the model parameters and any bounded values of the exogenous factor in case of statistical identifiability of model parameters. Results of computer experiments on simulated data illustrate consistency of maximum likelihood estimators.

**Key words:** spatio-temporal data; inhomogeneous Markov chain; ergodic principle; maximum likelihood estimator; consistency of estimator; asymptotic normality.

## Введение

На практике регистрируемые статистические данные часто содержат информацию об изменении реального процесса во времени и в пространстве одновременно [1; 3]. Такие данные возникают при решении прикладных задач в медицине, экономике, метеорологии [4]. Приведем краткий обзор литературы, иллюстрирующий актуальность исследования моделей пространственно-временных данных. В [5] изучены зависимости между уровнями тяжести дорожно-транспортных происшествий с учетом одновременно пространственных и временных корреляций, проанализированы дорожно-транспортные происшествия в Англии в период 2005–2013 гг. В [6] предложена новая пространственно-временная модель с пространственным сглаживанием для исследования болезней, которая применялась для анализа риска респираторных и сердечно-сосудистых заболеваний в различных административных районах Англии. В [7] рассмотрена байесовская биномиальная геостатистическая модель для распределения плотности локализации малярийных комаров.

В данной статье исследуется биномиальная условно авторегрессионная модель дискретных пространственно-временных данных, которая построена в [8]. Она является многомерной цепью Маркова с конечным пространством состояний. Ранее установлены условия эргодичности исследуемой модели [8], а также построены оценки максимального правдоподобия, которые состоятельные и асимптотически нормально распределенные [9] в случае однородной цепи Маркова. Нами рассматривается случай, когда модель содержит экзогенные факторы, зависящие от времени, и цепь Маркова не является однородной.

## Биномиальная условно авторегрессионная модель

Введем обозначения:  $(\Omega, F, \mathbf{P})$  – основное вероятностное пространство;  $\mathbb{N}$  – множество натуральных чисел;  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ;  $\mathbb{Z}$  – множество целых чисел;  $\mathbb{R}$  – множество действительных чисел;  $s \in S = \{1, 2, \dots, n\}$  – индексная переменная, кодирующая пространственные координаты географических регионов (условимся далее их называть сайтами), на которые разбита изучаемая пространственная область;  $n$  – число сайтов;  $t \in \mathbb{Z}$  – дискретное время;  $x_{s,t} \in A = \{0, 1, \dots, N\}$  – дискретная случайная величина наблюдения в момент времени  $t$  в сайте  $s$ , принимающая значения из множества  $A$ ;  $F_{\bar{s}, < t} = \sigma\{x_{u,\tau} : u \in S, \tau < t\} \subset F$  –  $\sigma$ -алгебра, порожденная указанными в скобках случайными величинами;  $z_{j,s,t} \in \mathbb{R}^1, j = 1, \dots, m$ , – наблюдаемый (известный) набор значений  $m$  внешних (экзогенных) факторов (переменных) в момент времени  $t$  в сайте  $s$ ;  $X_t = (x_{1,t}, \dots, x_{n,t})' \in A^n$  – вектор-столбец, задающий временной срез исследуемого явления по всем  $n$  сайтам в момент времени  $t \in \mathbb{Z}$ ;  $Z_{s,t} = (z_{1,s,t}, z_{2,s,t}, \dots, z_{m,s,t})' \in \mathbb{R}^m$  – вектор-столбец, задающий значения  $m$  внешних факторов в момент времени  $t$  в сайте  $s$ ;  $L\{\xi\}$  – закон распределения вероятностей случайной величины  $\xi$ ;  $\mathbf{E}\{\cdot\}$ ,  $\mathbf{D}\{\cdot\}$ ,  $\mathbf{cov}\{\cdot, \cdot\}$ ,  $\mathbf{corr}\{\cdot, \cdot\}$  – символы математического ожидания, дисперсии, ковариации и коэффициента корреляции случайных величин соответственно;  $N_n(\mu, \Sigma)$  –  $n$ -мерный нормальный закон распределения вероятностей с математическим ожиданием  $\mu \in \mathbb{R}^n$ , ковариационной матрицей  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ;  $I\{A\}$  – индикаторная функция события  $A$ .

**Определение 1** [8]. Биномиальная условно авторегрессионная модель пространственно-временных наблюдений определяется тремя модельными предположениями:

1) при фиксированной предыстории  $\{X_1, \dots, X_{t-1}\}$  случайные величины  $x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{n,t}$  условно независимы;

2) условное распределение вероятностей  $x_{s,t}$  является биномиальным с параметром  $p_{s,t} \in [0, 1]$ ,  $s \in S, t \in \mathbb{Z}$ :

$$\mathbf{P}\{x_{s,t} = l | F_{\bar{s}, < t}\} = C_N^l p_{s,t}^l (1 - p_{s,t})^{N-l}, \quad l \in A, \quad C_N^l = \frac{N!}{(N-l)!l!}; \quad (1)$$

3) параметр  $p_{s,t}$  определяется соотношением

$$\ln \frac{p_{s,t}}{1 - p_{s,t}} = \sum_{i=1}^n a_{s,i} x_{i,t-1} + \sum_{j=1}^m b_{s,j} z_{j,s,t}, \quad s \in S, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

где  $a_s = (a_{s,1}, \dots, a_{s,n})' \in \mathbb{R}^n$  – вектор-столбец авторегрессионных коэффициентов,  $b_s = (b_{s,1}, \dots, b_{s,m})' \in \mathbb{R}^m$  – вектор-столбец регрессионных коэффициентов.

Пусть  $\theta_s = (a_s', b_s')' \in \mathbb{R}^{n+m}$ ,  $s \in S$ ,  $\theta = (\theta_1', \dots, \theta_n')' \in \Theta \subset \mathbb{R}^D$  – составной вектор-столбец  $D = n(n+m)$  параметров модели;  $\Theta$  – множество допустимых значений параметров модели, являющееся компактом в  $\mathbb{R}^D$ ; штрих обозначает транспонирование. В силу (2) справедливо следующее выражение для вычисления вероятности  $p_{s,t}$ :

$$p_{s,t} = p_s(X_{t-1}, Z_{s,t}) ::= \exp(\theta_s' Y_{s,t}) (1 + \exp(\theta_s' Y_{s,t}))^{-1}, \quad s \in S, \quad t \in \mathbb{Z},$$

где  $Y_{s,t} = (X_{t-1}', Z_{s,t}')' \in A^n \times \mathbb{R}^m$  – составной вектор-столбец «предопределенных» к моменту  $t$  переменных.

Обозначим  $L = \left\{ l_j = (l_{1,j}, \dots, l_{n,j})' \in A^n: j = 0, 1, \dots, v \right\}$ ,  $v = |L| = (N+1)^n$  – лексикографически упорядоченное множество  $v$  всевозможных значений вектора  $X_t$ . Например, множество  $L$  может быть упорядочено следующим образом:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

Здесь при упорядочении сначала идет нулевой вектор, затем – векторы всевозможных комбинаций 0 и 1, затем – комбинации из 0, 1 и 2 и т. д.

### Вероятностные свойства биномиальной условно авторегрессионной модели

Для биномиальной условно авторегрессионной модели (1), (2) доказано [8], что наблюдаемый векторный временной ряд  $X_t$  является неоднородной  $n$ -мерной векторной цепью Маркова с конечным пространством состояний  $L$  и матрицей вероятностей одношаговых переходов  $Q = Q(t; \theta) = (q_{I,J}(t; \theta)) \in [0, 1]^{v \times v}$ ,  $I = (i_s), J = (j_s) \in L$ :

$$q_{I,J}(t; \theta) = \prod_{s=1}^n C_N^{j_s} \left( \exp(a_s' I + b_s' Z_{s,t}) \right)^{j_s} \left( 1 + \exp(a_s' I + b_s' Z_{s,t}) \right)^{-N}, \quad t \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

и начальным распределением вероятностей  $p(\theta) = (p_J(\theta))' \in [0, 1]^v$ :

$$p_J(\theta) ::= \mathbf{P}\{X_1 = J\} = \prod_{s=1}^n C_N^{j_s} \left( \exp(b_s' Z_{s,1}) \right)^{j_s} \left( 1 + \exp(b_s' Z_{s,1}) \right)^{-N}, \quad J \in L.$$

Матрица условных вероятностей переходов

$$H(t_1, t_2; \theta) = (h_{I,J}(t_1, t_2; \theta)), \quad h_{I,J}(t_1, t_2; \theta) = \mathbf{P}_\theta \{X_{t_2} = J | X_{t_1} = I\}, \quad I, J \in L,$$

цепи Маркова  $X_t$  за  $t_2 - t_1$  шагов от момента времени  $t_1$  до момента  $t_2$  ( $t_1 < t_2$ ,  $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$ ) имеет вид [8]:  $H(t_1, t_2; \theta) = Q(t_1 + 1; \theta) Q(t_1 + 2; \theta) \dots Q(t_2; \theta)$ , где  $\mathbf{P}_\theta \{ \}$  обозначает распределение вероятностей для модели (1), (2), когда истинное значение параметра есть  $\theta \in \Theta$ .

Текущее распределение вероятностей  $p(t; \theta) = (p_J(t; \theta))' \in [0, 1]^v$  в момент времени  $t$  определяется соотношением



$$p_J(t; \theta) ::= \mathbf{P}_\theta \{X_t = J\} = \sum_{I \in L} p_I(\theta) h_{I,J}(1, t; \theta), \quad J \in L, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Если для модели (1), (2) вектор внешних факторов  $Z_{s,t} = (z_{1,s,t}, \dots, z_{m,s,t})' \equiv Z_s \in \mathbb{R}^m$  не зависит от  $t$ , то  $n$ -мерная векторная цепь Маркова  $X_t$  является однородной и для нее существует [8] единственное стационарное распределение  $\pi = (\pi_I) \in [0, 1]^{v \times v}$ , являющееся решением системы уравнений

$$Q' \pi = \pi, \quad \sum_{I \in L} \pi_I = 1.$$

Исследуем вероятностные свойства биномиальной условно авторегрессионной модели (1), (2) в случае, когда  $Z_{s,t} \in \mathbb{R}^m$  зависит от времени  $t$  и  $X_t$  является неоднородной  $n$ -мерной векторной цепью Маркова. Воспользуемся вспомогательными понятиями из [10; 11].

**Определение 2** [10]. Неоднородная цепь Маркова подчиняется эргодическому принципу, если имеет место соотношение

$$\left| h_{I,J}(t_1, t_2; \theta) - h_{I',J}(t_1, t_2; \theta) \right| \xrightarrow{|t_2 - t_1| \rightarrow \infty} 0, \quad I, I', J \in L, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{N}, \quad \theta \in \Theta. \quad (4)$$

**Определение 3** [11]. Матрица  $B$  называется неотрицательной  $B \geq 0$  (положительной  $B > 0$ ), если каждый элемент в  $B$  неотрицателен (положителен). Неприводимая неотрицательная матрица называется примитивной, если она имеет только одно уникальное собственное число.

**Лемма 1.** Из эргодического принципа (4) для неоднородной цепи Маркова следует

$$\left| h_{I,J}(t_1, t_2; \theta) - p_J(t_2; \theta) \right| \xrightarrow{|t_2 - t_1| \rightarrow \infty} 0, \quad I, J \in L, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{N}, \quad \theta \in \Theta. \quad (5)$$

Доказательство. Применяя формулу полной вероятности и условие нормировки, имеем

$$\left| h_{I,J}(t_1, t_2; \theta) - p_J(t_2; \theta) \right| = \left| \sum_{I' \in L} (h_{I,J}(t_1, t_2; \theta) - h_{I',J}(t_1, t_2; \theta)) p_{I'}(t_1; \theta) \right|. \quad (6)$$

Воспользуемся неравенством треугольника:

$$\left| \sum_{I' \in L} (h_{I,J}(t_1, t_2; \theta) - h_{I',J}(t_1, t_2; \theta)) p_{I'}(t_1; \theta) \right| \leq \sum_{I' \in L} |h_{I,J}(t_1, t_2; \theta) - h_{I',J}(t_1, t_2; \theta)| p_{I'}(t_1; \theta). \quad (7)$$

Так как  $L$  – конечно,  $p_{I'}(t_1; \theta) \in [0, 1]$ , то из (4), (6), (7) следует (5).

**Лемма 2.** Если имеет место модель (1), (2), то при любых ограниченных значениях коэффициентов  $\{\theta_s\}$  и ограниченных значениях экзогенных факторов  $\{z_{j,s,t}\}$  для  $n$ -мерной векторной цепи Маркова  $X_t$  выполняется эргодический принцип (4).

Доказательство. В [10] (в теореме 2) доказаны условия, при которых цепь Маркова подчиняется эргодическому принципу:

У1) матрица вероятностей одношаговых переходов  $Q(t; \theta) = (q_{I,J}(t; \theta)) \in [0, 1]^{v \times v}$ ,  $I, J \in L$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , является стохастической примитивной матрицей, которая при умножении на любую стохастическую примитивную матрицу дает примитивную матрицу;

У2) для всех положительных элементов  $q_{I,J}^+(t; \theta)$  матрицы  $Q(t; \theta)$  выполняется

$$\min_{I, J \in L} q_{I,J}^+(t; \theta) \geq \lambda > 0 \quad (8)$$

равномерно относительно  $t$  для некоторого  $\lambda > 0$ .

Проверим выполнение условий У1, У2 в нашем случае. Согласно [8] при любых ограниченных значениях коэффициентов  $\{\theta_s\}$  и ограниченных значениях экзогенных факторов  $\{z_{j,s,t}\}$  все элементы матрицы вероятностей одношаговых переходов положительны:  $q_{I,J}(t; \theta) > 0$  для любых  $I, J \in L$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , т. е. стохастическая матрица  $Q(t; \theta)$  является положительной:  $Q(t; \theta) > 0$ . Согласно [11] неотрицательная матрица  $B$  является примитивной, если существует такое  $p \in \mathbb{N}$ , что  $B^p > 0$ . Для матрицы  $Q(t; \theta)$  это условие верно при  $p = 1$ , т. е.  $Q(t; \theta)$  примитивна для любого  $t$ . Найдем произведение матрицы  $Q(t; \theta)$  на произвольную стохастическую [11] примитивную матрицу  $B = (b_{I,J}) \in [0, 1]^{v \times v}$ :

$$Q(t; \theta) B = \left( \sum_{K \in L} q_{I,K}(t; \theta) b_{K,J} \right)_{I,J} \in [0, 1]^{v \times v}; \quad b_{I,J} \in [0, 1], \quad \sum_{J \in L} b_{I,J} = 1, \quad I \in L. \quad (9)$$



Так как матрица  $B$  примитивна, то она не имеет нулевого столбца, т. е. с учетом (9)

$$\exists I \in L, b_{I,J} > 0, J \in L. \quad (10)$$

Из (10) и установленного выше факта, что  $Q(t; \theta) > 0$ , следует:  $\exists K \in L, q_{I,K}(t; \theta) b_{K,J} > 0, I, J \in L$ , откуда  $\sum_{K \in L} q_{I,K}(t; \theta) b_{K,J} > 0, I, J \in L$ . Это означает, что произведение матриц  $Q(t; \theta)B > 0$  – положительная и, следовательно, примитивная матрица, т. е. доказана выполнимость условия У1.

С учетом того что матрица  $Q(t; \theta) > 0$ , перепишем условие (8) в виде

$$\min_{I, J \in L} q_{I,J}(t; \theta) \geq \lambda > 0. \quad (11)$$

Поскольку значения коэффициентов  $\{\theta_s\}$  и экзогенных факторов  $\{z_{j,s,t}\}$  ограничены, то величины  $a_{s,i}, b_{s,j} z_{j,s,t}$  принадлежат отрезкам:  $a_{s,i} \in [\underline{a}_s, \bar{a}_s] \subset \mathbb{R}, b_{s,j} z_{j,s,t} \in [\underline{c}_s, \bar{c}_s] \subset \mathbb{R}, i \in A, s \in S, t \in \mathbb{N}$ , где  $|\underline{a}_s| < \infty, |\bar{a}_s| < \infty, |\underline{c}_s| < \infty, |\bar{c}_s| < \infty$ . Найдем такое  $\lambda > 0$ , при котором (11) выполняется равномерно относительно  $t$ :

$$\begin{aligned} \min_{I, J \in L} q_{I,J}(t; \theta) &= \min_{I, J \in L} \prod_{s=1}^n C_N^{j_s} \left( \exp(a'_s I + b'_s Z_{s,t}) \right)^{j_s} \left( 1 + \exp(a'_s I + b'_s Z_{s,t}) \right)^{-N} \geq \\ &\geq \prod_{s=1}^n \frac{\min_{I, J \in L} \left( C_N^{j_s} \exp(j_s a'_s I + j_s b'_s Z_{s,t}) \right)}{\max_{I, J \in L} \left( 1 + \exp(a'_s I + b'_s Z_{s,t}) \right)^N} \geq \prod_{s=1}^n \frac{\min_{I, J \in L} \left( \exp(j_s a'_s I + j_s b'_s Z_{s,t}) \right)}{\max_{I, J \in L} \left( 1 + \exp(a'_s I + b'_s Z_{s,t}) \right)^N}. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку функции  $e^x, (1 + e^x)^N$  – неубывающие, то с учетом (12) имеем

$$\min_{I, J \in L} q_{I,J}(t; \theta) \geq \prod_{s=1}^n e^{\min_{I, J \in L} j_s (a'_s I + b'_s Z_{s,t})} \left( 1 + e^{\max_{I, J \in L} (a'_s I + b'_s Z_{s,t})} \right)^{-N}. \quad (13)$$

Учитывая, что  $i_s, j_s \in A = \{0, 1, \dots, N\}$ , находим

$$\begin{aligned} \min_{I, J \in L} j_s (a'_s I + b'_s Z_{s,t}) &\geq \min_{I, J \in L} j_s a'_s I + \min_{I, J \in L} j_s b'_s Z_{s,t} = \sum_{i=1}^n \min_{I, J \in L} j_s a'_{s,i} i + \sum_{j=1}^m \min_{I, J \in L} j_s b_{s,j} z_{j,s,t} = \\ &= nN^2 \underline{a}_s I \{ \underline{a}_s < 0 \} + mN \underline{c}_s I \{ \underline{c}_s < 0 \}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \max_{I \in L} (a'_s I + b'_s Z_{s,t}) &= \max_{I \in L} a'_s I + \max_{I \in L} b'_s Z_{s,t} = \sum_{i=1}^n \max_{I \in L} a'_{s,i} i + \sum_{j=1}^m \max_{I \in L} b_{s,j} z_{j,s,t} = \\ &= Nn \bar{a}_s I \{ \bar{a}_s \geq 0 \} + m \bar{c}_s. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставим (14) и (15) в (13):

$$\min_{I, J \in L} q_{I,J}(t; \theta) \geq \prod_{s=1}^n \frac{e^{nN^2 \underline{a}_s I \{ \underline{a}_s < 0 \} + mN \underline{c}_s I \{ \underline{c}_s < 0 \}}}{\left( 1 + e^{Nn \bar{a}_s I \{ \bar{a}_s \geq 0 \} + m \bar{c}_s} \right)^N} =: \lambda > 0, \quad (16)$$

т. е. справедливо (11) и условие У2. Следовательно, для цепи Маркова  $X_t$  выполняется эргодический принцип (4).

*Замечание.* На практике значения коэффициентов и экзогенных переменных обычно принадлежат некоторым симметричным отрезкам:

$$a_{s,i} \in [-a_s^*, a_s^*] \subset \mathbb{R}, b_{s,j} \in [-b_s^*, b_s^*] \subset \mathbb{R}, z_{j,s,t} \in [-z_s^*, z_s^*] \subset \mathbb{R}, i \in A, s \in S, t \in \mathbb{N},$$

где  $a_s^*, b_s^*, z_s^* \in (0, +\infty), s \in S$ . В этом случае согласно (16) имеем

$$\lambda = \left( \prod_{s=1}^n \left( e^{Nna_s^* + mb_s^* z_s^*} \left( 1 + e^{Nna_s^* + mb_s^* z_s^*} \right) \right) \right)^{-N} > 0.$$

**Асимптотические свойства оценки  
 максимального правдоподобия параметров модели**

В рамках модели (1), (2) логарифмическая функция правдоподобия для  $n \times T$  пространственно-временных наблюдений  $\{x_{s,t} : s \in S, t = 1, 2, \dots, T\}$ , где  $T$  – длительность наблюдения, имеет аддитивный по  $\theta_1, \dots, \theta_n$  вид [8]:

$$l(\theta) = \ln \mathbf{P}_{\theta^0} \{X_1\} \prod_{t=2}^T \mathbf{P}_{\theta^0} \{X_t | X_{t-1}\} = \sum_{s=1}^n l_s(\theta_s), \quad (17)$$

$$l_s(\theta_s) = \sum_{t=2}^T \left( x_{s,t} \theta'_s Y_{s,t} - N \ln(1 + \exp(\theta'_s Y_{s,t})) + \ln C_N^{x_{s,t}} \right).$$

Оценка максимального правдоподобия (ОМП)  $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^D$  составного вектора параметров определяется как решение экстремальной задачи [8]

$$l(\theta) \rightarrow \max_{\theta} \quad (18)$$

В [9] доказано, что если  $m = 1$ ,  $z_{1,s,t} \equiv z_s \neq 0$  не зависит от  $t$  и цепь Маркова  $X_t \in L$  стационарна, то при любых ограниченных значениях коэффициентов  $\{\theta_s\}$  и ограниченном  $z_s \in \mathbb{R}^1$  построенная согласно (18) ОМП  $\hat{\theta}$  при  $T \rightarrow +\infty$  является состоятельной и асимптотически нормально распределенной:

$$L \left\{ \sqrt{T} G^{\frac{1}{2}} (\hat{\theta} - \theta^0) \right\} \longrightarrow N_D(O_D, I_D),$$

где  $O_D$  – нулевой вектор-столбец порядка  $D$ ;  $I_D$  – единичная матрица порядка  $D$ , а блочно-диагональная информационная матрица Фишера  $G$  вычисляется по формуле

$$G = N \operatorname{diag} \left\{ \mathbf{E} \left[ Y_{s,t} Y'_{s,t} p_s(X_{t-1}, z_s) (1 - p_s(X_{t-1}, z_s)) \right] \right\}, \quad Y_{s,t} = (X'_{t-1}, z_s)', \quad s = 1, \dots, n.$$

Установим условия состоятельности ОМП, построенной для модели (1), (2) в общем случае согласно (18). Аналогично [12] определим информационную функцию Кульбака для случайных наблюдений  $X_{t-1}, X_t \in L, t \in \mathbb{N}$ ,

$$K_t(\theta^0, \theta) = \mathbf{E}_{\theta^0} \left\{ \ln \frac{\mathbf{P}_{\theta^0} \{X_t | X_{t-1}\}}{\mathbf{P}_{\theta} \{X_t | X_{t-1}\}} \right\}, \quad \theta, \theta^0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^D, \quad (19)$$

где  $\mathbf{P}_{\theta} \{X_t | X_{t-1}\}$ ,  $\mathbf{E}_{\theta} \{X_t | X_{t-1}\}$  обозначает условное распределение вероятностей и условное математическое ожидание соответственно, вычисленные при значении параметра  $\theta \in \Theta$  вероятностной модели (1), (2);  $\mathbf{P}_{\theta} \{X_1 | X_0\} ::= \mathbf{P}_{\theta} \{X_1\}$ . Как видно из (3), функция Кульбака (19) зависит от  $t$  через экзогенные переменные  $Z_{s,t} \in \mathbb{R}^m$  (в рассмотренном ранее в [9] стационарном случае эта зависимость отсутствовала). В связи с этим введем так называемую усредненную функцию Кульбака для  $T$  наблюдений  $X_1, \dots, X_T \in A^n$ :

$$K_T^*(\theta^0, \theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T K_t(\theta^0, \theta), \quad \theta, \theta^0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^D. \quad (20)$$

**Лемма 3.** *Справедливо неравенство*

$$K_t(\theta^0, \theta) \geq 0, \quad \theta, \theta^0 \in \mathbb{R}^D,$$

причем  $K_t(\theta^0, \theta) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}_{\theta^0} \{X_t | X_{t-1}\} \stackrel{n.n.}{=} \mathbf{P}_{\theta} \{X_t | X_{t-1}\}$ .

Доказательство. В силу (19), неравенства Йенсена [12] для выпуклой функции  $y = -\ln x$  и условия нормировки имеем цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} K_t(\theta^0, \theta) &= \mathbf{E}_{\theta^0} \left\{ -\ln \frac{\mathbf{P}_{\theta} \{X_t | X_{t-1}\}}{\mathbf{P}_{\theta^0} \{X_t | X_{t-1}\}} \right\} \geq -\ln \mathbf{E}_{\theta^0} \left\{ \frac{\mathbf{P}_{\theta} \{X_t | X_{t-1}\}}{\mathbf{P}_{\theta^0} \{X_t | X_{t-1}\}} \right\} = \\ &= -\ln \sum_{I, J \in L} \frac{\mathbf{P}_{\theta} \{X_t = J | X_{t-1} = I\}}{\mathbf{P}_{\theta^0} \{X_t = J | X_{t-1} = I\}} \mathbf{P}_{\theta^0} \{X_t = J | X_{t-1} = I\} \mathbf{P}_{\theta^0} \{X_{t-1} = I\} = \\ &= -\ln \sum_{I, J \in L} \mathbf{P}_{\theta} \{X_t = J | X_{t-1} = I\} \mathbf{P}_{\theta^0} \{X_{t-1} = I\} = -\ln 1 = 0, \end{aligned}$$

причем неравенство Йенсена обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{P}_{\theta^0} \{X_t | X_{t-1}\} \stackrel{n.n.}{=} \mathbf{P}_{\theta} \{X_t | X_{t-1}\}.$$

Из леммы 3 следует, что функция  $K_t(\theta^0, \theta)$  достигает своего минимального (нулевого) значения при  $\theta = \theta^0$ , однако в силу наличия экзогенных переменных  $Z_{1,t}, \dots, Z_{n,t} \in \mathbb{R}^m$  эта точка минимума может быть не единственной. По построению (20) таким же свойством обладает и усредненная функция Кульбака  $K_T^*(\theta^0, \theta)$ .

**Теорема 1.** Если имеет место биномиальная условно авторегрессионная модель (1), (2), значения экзогенных переменных  $\{Z_{s,t}\}$  ограничены и таковы, что усредненная функция Кульбака (20) имеет единственный минимум при  $\theta = \theta^0$ , то ОМП  $\hat{\theta}$  является состоятельной оценкой:

$$\hat{\theta} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} \theta^0. \quad (21)$$

Доказательство. Представим ОМП в виде, эквивалентном (18):

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} l(\theta) = \arg \min_{\theta \in \Theta} \left( \frac{1}{T} (l(\theta^0) - l(\theta)) \right).$$

Согласно (17) это равенство преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \arg \min_{\theta \in \Theta} \left( \frac{1}{T} \left( \ln \mathbf{P}_{\theta^0} \{X_1\} \prod_{t=2}^T \mathbf{P}_{\theta^0} \{X_t | X_{t-1}\} - \ln \mathbf{P}_{\theta} \{X_1\} \prod_{t=2}^T \mathbf{P}_{\theta} \{X_t | X_{t-1}\} \right) \right) = \\ &= \arg \min_{\theta \in \Theta} \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln \frac{\mathbf{P}_{\theta^0} \{X_t | X_{t-1}\}}{\mathbf{P}_{\theta} \{X_t | X_{t-1}\}} \right) = \arg \min_{\theta \in \Theta} \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u(X_t, X_{t-1}; \theta^0, \theta) \right), \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\mathbf{P}_{\theta^0} \{X_1 | X_0\} ::= \mathbf{P}_{\theta^0} \{X_1\}$ ,  $u(X_t, X_{t-1}; \theta^0, \theta) = \ln \frac{\mathbf{P}_{\theta^0} \{X_t | X_{t-1}\}}{\mathbf{P}_{\theta} \{X_t | X_{t-1}\}}$  – статистика вклада.

Воспользуемся условиями теоремы Бернштейна [13] для выполнения закона больших чисел применительно к случайной последовательности  $u(X_t, X_{t-1}; \theta^0, \theta)$ :

C1) дисперсия  $\mathbf{D}\{u(X_t, X_{t-1}; \theta^0, \theta)\}$  ограничена;

C2)  $\mathbf{corr}\{u(X_{t_1}, X_{t_1-1}; \theta^0, \theta), u(X_{t_2}, X_{t_2-1}; \theta^0, \theta)\} \xrightarrow{|t_1-t_2| \rightarrow \infty} 0$ .

В силу (1), (2) и ограниченности параметров модели:  $\theta^0, \theta \in \Theta$ , дисперсия  $\mathbf{D}\{u(X_t, X_{t-1}; \theta^0, \theta)\}$  также ограничена, т. е. условие C1 выполняется.

Без потери общности рассмотрим случай, когда  $t_2 < t_1 - 1$ . Имеем по определению и свойствам математического ожидания:

$$\begin{aligned} &\mathbf{cov}\{u(X_{t_1}, X_{t_1-1}; \theta^0, \theta), u(X_{t_2}, X_{t_2-1}; \theta^0, \theta)\} = \\ &= \sum_{I_1, I_2, J_1, J_2 \in L} u(J_1, I_1; \theta^0, \theta) u(J_2, I_2; \theta^0, \theta) P(I_1, I_2, J_1, J_2), \end{aligned} \quad (23)$$

$$P(I_1, I_2, J_1, J_2) ::=$$

$$::= \mathbf{P}\{X_{t_1} = J_1, X_{t_1-1} = I_1, X_{t_2} = J_2, X_{t_2-1} = I_2\} - \mathbf{P}\{X_{t_1} = J_1, X_{t_1-1} = I_1\} \mathbf{P}\{X_{t_2} = J_2, X_{t_2-1} = I_2\}.$$

Применим формулу умножения вероятностей:

$$\begin{aligned} P(I_1, I_2, J_1, J_2) &= \mathbf{P}\{X_{t_1} = J_1 | X_{t_1-1} = I_1, X_{t_2} = J_2, X_{t_2-1} = I_2\} \mathbf{P}\{X_{t_1-1} = I_1 | X_{t_2} = J_2, X_{t_2-1} = I_2\} \times \\ &\times \mathbf{P}\{X_{t_2} = J_2 | X_{t_2-1} = I_2\} \mathbf{P}\{X_{t_2-1} = I_2\} - \mathbf{P}\{X_{t_1} = J_1 | X_{t_1-1} = I_1\} \mathbf{P}\{X_{t_1-1} = I_1\} \times \\ &\times \mathbf{P}\{X_{t_2} = J_2 | X_{t_2-1} = I_2\} \mathbf{P}\{X_{t_2-1} = I_2\}. \end{aligned}$$

Тогда в силу марковского свойства для  $t_2 < t_1 - 1$  имеем

$$\begin{aligned}
 & P(I_1, I_2, J_1, J_2) = \\
 & = \mathbf{P}\{X_{t_1} = J_1 | X_{t_1-1} = I_1\} \mathbf{P}\{X_{t_2} = J_2 | X_{t_2-1} = I_2\} \mathbf{P}\{X_{t_1-1} = I_1 | X_{t_2} = J_2\} \mathbf{P}\{X_{t_2-1} = I_2\} - \\
 & - \mathbf{P}\{X_{t_1} = J_1 | X_{t_1-1} = I_1\} \mathbf{P}\{X_{t_1-1} = I_1\} \mathbf{P}\{X_{t_2} = J_2 | X_{t_2-1} = I_2\} \mathbf{P}\{X_{t_2-1} = I_2\} = \\
 & = \left( \mathbf{P}\{X_{t_1-1} = I_1 | X_{t_2} = J_2\} - \mathbf{P}\{X_{t_1-1} = I_1\} \right) \times \\
 & \times \mathbf{P}\{X_{t_1} = J_1 | X_{t_1-1} = I_1\} \mathbf{P}\{X_{t_2} = J_2 | X_{t_2-1} = I_2\} \mathbf{P}\{X_{t_2-1} = I_2\}. \tag{24}
 \end{aligned}$$

Поскольку по условию теоремы 1 значения  $\{\theta_s\}$  и  $\{z_{j,s,t}\}$  ограничены, то в силу леммы 2 выполняется эргодический принцип и из леммы 1 следует

$$\left| \mathbf{P}\{X_{t_1-1} = I_1 | X_{t_2} = J_2\} - \mathbf{P}\{X_{t_1-1} = I_1\} \right| \xrightarrow{|t_1-t_2| \rightarrow \infty} 0. \tag{25}$$

Из (23) – (25) заключаем, что  $\left| \mathbf{cov}\{u(X_{t_1}, X_{t_1-1}; \theta^0, \theta), u(X_{t_2}, X_{t_2-1}; \theta^0, \theta)\} \right| \xrightarrow{|t_1-t_2| \rightarrow \infty} 0$ . Это означает, что зависимость между  $u(X_{t_1}, X_{t_1-1}; \theta^0, \theta)$  и  $u(X_{t_2}, X_{t_2-1}; \theta^0, \theta)$  ослабевает при  $|t_1 - t_2| \rightarrow \infty$ . Следовательно, по определению коэффициента корреляции и ограниченности  $\mathbf{D}\{u(X_t, X_{t-1}; \theta^0, \theta)\}$  выполняется условие С2, и к  $\{u(X_t, X_{t-1}; \theta^0, \theta)\}$  применим закон больших чисел Бернштейна для слабо зависимых случайных величин:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( \ln \frac{\mathbf{P}_{\theta^0}\{X_t | X_{t-1}\}}{\mathbf{P}_{\theta}\{X_t | X_{t-1}\}} - \mathbf{E} \left[ \ln \frac{\mathbf{P}_{\theta^0}\{X_t | X_{t-1}\}}{\mathbf{P}_{\theta}\{X_t | X_{t-1}\}} \right] \right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0. \tag{26}$$

Закон больших чисел (26) с учетом (20) можно записать в эквивалентном виде:

$$\bar{K}_T(\theta^0, \theta) - K_T^*(\theta^0, \theta) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0, \tag{27}$$

где  $\bar{K}_T(\theta^0, \theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u(X_t, X_{t-1}; \theta^0, \theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln \frac{\mathbf{P}_{\theta^0}\{X_t | X_{t-1}\}}{\mathbf{P}_{\theta}\{X_t | X_{t-1}\}}$ .

По условию теоремы 1 имеем  $\arg \min_{\theta \in \Theta} K_T^*(\theta^0, \theta) = \theta^0$ , а согласно (22)  $\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Theta} \bar{K}_T(\theta^0, \theta)$ , поэтому для модели (1), (2) из сходимости целевых функций (27) следует сходимость точек минимума (21).

Отметим, что согласно лемме 3 условие унимодальности функции Кульбака есть и условие статистической идентифицируемости параметров [12; 14], т. е. условие разрешимости задачи состоятельного оценивания этих параметров при  $T \rightarrow \infty$ . Вектор параметров модели (1), (2) является составным:  $\theta = (\theta'_1, \dots, \theta'_n)' \in \Theta \subset \mathbb{R}^D$ ,  $\theta_s = (a'_s, b'_s)' \in \mathbb{R}^{n+m}$ , где  $a_s = (a_{s,1}, \dots, a_{s,n})' \in \mathbb{R}^n$  – вектор-столбец  $n$  авторегрессионных коэффициентов,  $b_s = (b_{s,1}, \dots, b_{s,m})' \in \mathbb{R}^m$  – вектор-столбец  $m$  регрессионных коэффициентов при экзогенных переменных. Как доказано в [9], при отсутствии экзогенных переменных идентифицируемость параметров  $a_s$  обеспечивается их ограниченностью. Согласно теореме 1 условие идентифицируемости параметров  $b_s$ , т. е. условие унимодальности функции  $K_T^*(\theta^0, \theta)$ , эквивалентно следующему (при  $T \rightarrow \infty$ ):  $(b_s - b_s^0)Z_{s,t} = 0$ ,  $s \in S$ ,  $t = 1, \dots, T \Leftrightarrow b_s = b_s^0$ ,  $s \in S$ . Такое выполняется, если экзогенные переменные  $\{Z_{s,t}\} \subset \mathbb{R}^m$  удовлетворяют условию Эйкера [12] на минимальное характеристическое число  $(m \times m)$ -матрицы  $Q_{T,s}$ :

$$Q_{T,s} = \sum_{t=1}^T (Z_{s,t} - \bar{Z}_s)(Z_{s,t} - \bar{Z}_s)', \bar{Z}_s = T^{-1} \sum_{t=1}^T Z_{s,t} : \lambda_{\min}(Q_{T,s}) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} +\infty, s \in S.$$

Исследуем теперь асимптотическое ( $T \rightarrow \infty$ ) распределение ОМП  $\hat{\theta}$ . Определим информационную матрицу Фишера для случайных наблюдений  $X_{t-1}, X_t \in L$ ,  $t \in \mathbb{N}$ :

$$J_t(\theta) = -\mathbf{E}_{\theta} \left\{ \nabla_{\theta}^2 \ln \mathbf{P}_{\theta} \{X_t | X_{t-1}\} \right\} \in \mathbb{R}^{D \times D}, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^D,$$

и «усредненную» матрицу Фишера для  $T$  наблюдений  $X_1, \dots, X_T \in A^n$ :

$$J_T(\theta) = T^{-1} \sum_{t=1}^T J_t(\theta), \quad \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^D.$$

**Теорема 2.** В условиях теоремы 1, если  $|J_T(\theta^0)| \neq 0$ , то ОМП  $\hat{\theta}$  является асимптотически нормально распределенной:

$$L \left\{ \left( T J_T(\theta^0) \right)^{\frac{1}{2}} (\hat{\theta} - \theta^0) \right\} \longrightarrow N_D(O_D, I_D). \quad (28)$$

Доказательство. Теорема 2 доказывается по схеме доказательства теоремы из [12], в которой найдены условия асимптотической нормальности ОМП для независимых наблюдений. Для того чтобы применить указанную схему для случая зависимых наблюдений, необходимо проверить условия:

$$B1) \quad -T^{-1} J_T^{-1}(\theta^0) \nabla_{\theta}^2 l(\theta^0) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} I_D;$$

$$B2) \quad L \left\{ \left( T J_T(\theta^0) \right)^{\frac{1}{2}} \nabla_{\theta} l(\theta^0) \right\} \longrightarrow N_D(O_D, I_D).$$

В теореме 1 доказано выполнение закона больших чисел для слабо зависимых случайных величин  $u(X_t, X_{t-1}; \theta^0, \theta) = \ln \mathbf{P}_{\theta^0} \{X_t | X_{t-1}\} \left( \mathbf{P}_{\theta} \{X_t | X_{t-1}\} \right)^{-1}$ ; аналогично доказывается закон больших чисел для  $-\nabla_{\theta}^2 u(X_t, X_{t-1}; \theta^0, \theta) = -\nabla_{\theta}^2 \ln \mathbf{P}_{\theta} \{X_t | X_{t-1}\}$ :

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( -\nabla_{\theta}^2 \ln \mathbf{P}_{\theta} \{X_t | X_{t-1}\} - \mathbf{E} \left[ -\nabla_{\theta}^2 \ln \mathbf{P}_{\theta} \{X_t | X_{t-1}\} \right] \right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} O_D,$$

что эквивалентно справедливости условия B1.

Проверим условия (теорема 1 из [15]) применимости центральной предельной теоремы к сумме  $\nabla_{\theta} l \Big|_{\theta=\theta^0} = \sum_{t=1}^T v(X_t, X_{t-1}; \theta^0)$ ,  $v(X_t, X_{t-1}; \theta^0) = \nabla_{\theta} \ln \mathbf{P}_{\theta} \{X_t | X_{t-1}\} \Big|_{\theta=\theta^0}$ :

C1) случайные величины равномерно ограничены:  $|v(X_t, X_{t-1}; \theta^0)| \leq C < \infty$ , что верно в силу ограниченности параметров модели и экзогенных факторов;

C2) дисперсия равномерно отделена от нуля:  $\mathbf{D} \{v(X_t, X_{t-1}; \theta^0)\} \geq c > 0$ . Данный факт доказывается аналогично доказательству условия У2 леммы 2;

C3) для элементов матрицы  $Q(t; \theta)$  справедливо

$$T^{\frac{1}{3}} \min_{\substack{I, K \in L \\ t=1, \dots, T}} \sum_{J \in L} \min \{q_{I,J}(t; \theta), q_{K,J}(t; \theta)\} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \infty. \quad (29)$$

Для выполнения (29) достаточно условия:  $T^{\frac{1}{3}} \min_{t=1, \dots, T} \sum_{J \in L} \min_{I \in L} q_{I,J}(t; \theta) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \infty$ , которое имеет место в силу установленного ранее свойства равномерной отделимости от нуля переходных вероятностей

$q_{I,J}(t; \theta) \geq c > 0$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ . Таким образом, выполняется центральная предельная теорема в виде B2, откуда следует (28).

### Результаты компьютерного моделирования

Рассматривалась биномиальная условно авторегрессионная модель (1), (2) при следующих значениях параметров:

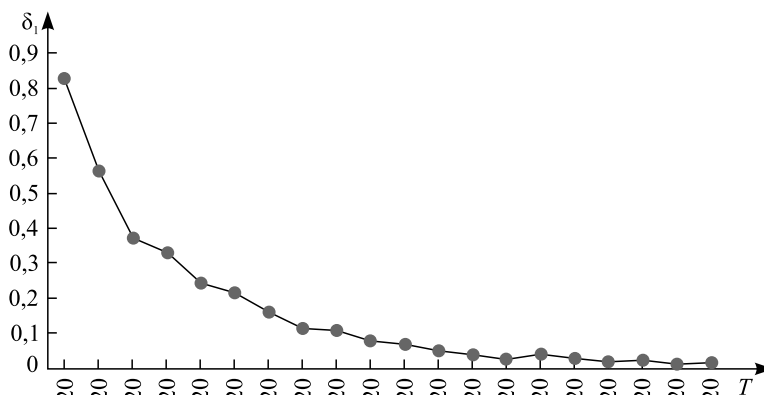
$$N = 4, \quad A = \{0, 1, \dots, 4\}, \quad n = 3, \quad S = \{1, 2, 3\}, \quad m = 1, \quad z_{1,s,t} = \cos(t+s), \quad s \in S, \quad t \in \mathbb{N}, \quad D = 12;$$

$$\theta_1 = (-0,2; 0,18; -0,15; 0,2)', \quad \theta_2 = (-0,18; 0,24; -0,05; -0,1)', \quad \theta_3 = (0,13; -0,13; -0,29; 0,3)'$$

По методу Монте-Карло вычислялась экспериментальная (выборочная) вероятность отклонения ОМП  $i$ -го параметра модели  $\hat{\theta}_i$  от истинного значения  $\theta_i^0$  более чем на  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ,  $i = 1, \dots, D$ ):

$$\hat{\delta}_i = \hat{\mathbf{P}} \left\{ |\hat{\theta}_i - \theta_i^0| > \varepsilon \right\} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M I \left\{ |\hat{\theta}_i^{(k)} - \theta_i^0| > \varepsilon \right\},$$

где  $\theta_i^0$  – истинное значение  $i$ -го параметра;  $\hat{\theta}_i^{(k)}$  – ОМП  $i$ -го параметра модели ( $i = 1, 2, \dots, 12$ ) по  $k$ -й реализации пространственно-временных данных ( $k = 1, 2, \dots, M$ );  $M = 1000$  – количество реализаций Монте-Карло. Для иллюстрации состоятельности оценки  $\hat{\theta}_1$  на рисунке представлен график зависимости  $\hat{\delta}_1$  от длительности наблюдений  $T$  при  $i = 1$ ,  $T \in [20, 1920]$ .



Вероятность отклонения ОМП модели от истинного значения  
The probability of deviation of MLE of the model from the true value

Таким образом, в случае, когда экзогенные факторы зависят от  $t$  ( $z_{1,s,t} = \cos(t+s)$ ,  $s \in S$ ,  $t \in \mathbb{N}$ ), построенные ОМП являются состоятельными, как и для однородных цепей Маркова.

### Библиографические ссылки

1. Kharin Yu. *Robustness in Statistical Forecasting*. New York: Springer; 2013. DOI: 10.1007/978-3-319-00840-0.
2. Kharin Yu, Zhurak M. Statistical analysis of spatio-temporal data based on Poisson model. *Informatica*. 2015;26(1):67–87. DOI: 10.15388/Informatica.2015.39.
3. Kharin Yu, Zhurak M. Statistical forecasting based on binomial conditional autoregressive model of spatio-temporal data. *Pliska Studia Mathematica*. 2017;27:23–36.
4. Gelfand AE. *Handbook of Spatial Statistics*. [USA]: Taylor and Francis Group, LLC; 2010.
5. Boulieri A, Liverani S, Hoogh K, Blangiardo M. A space-time multivariate Bayesian model to analyse road traffic accidents by severity. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A*. 2017;180(1):119–139. DOI: 10.1111/rssa.12178.
6. Rushworth A, Lee D, Sarran C. An adaptive spatiotemporal smoothing model for estimating trends and step changes in disease risk. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C*. 2017;66(1):141–157. DOI: 10.1111/rssc.12155.
7. Amek N, Bayoh N, Hamel M, Lindblade KA, Gimnig J, Laserson KF, et al. Spatio-temporal modeling of sparse geostatistical malaria sporozoite rate data using a zero inflated binomial model. *Spatial and Spatio-temporal Journal of Epidemiology*. 2011;2(4): 283–290. DOI: 10.1016/j.sste.2011.08.001.
8. Харин ЮС, Журак МК. Биномиальная условно авторегрессионная модель пространственно-временных данных и ее вероятностно-статистический анализ. *Доклады НАН Беларуси*. 2015;59(6):5–12.
9. Харин ЮС, Журак МК. Асимптотический анализ оценок максимального правдоподобия параметров биномиальной условно авторегрессионной модели пространственно-временных данных. *Известия НАН Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2016;1:36–45. DOI: 10.29235/1561-2430-2016-0-1-36-45.
10. Сарымсаков ТА, Мустафин ХА. К эргодической теореме для неоднородных цепей Маркова. *Труды Среднеазиатского государственного университета им. В. И. Ленина*. 1957;74:1–37.
11. Ланкастер П. *Теория матриц*. Москва: Наука; 1973.
12. Харин ЮС, Зуев НМ, Жук ЕЕ. *Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика*. Минск: БГУ; 2011.
13. Бернштейн СН. *Теория вероятностей*. Москва: Госиздателство; 1927.
14. Боровков АА. *Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез*. Москва: Наука; 1984.
15. Добрушин РЛ. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. I. *Теория вероятностей и ее приложения*. 1956;1(1):72–89.

### References

1. Kharin Yu. *Robustness in Statistical Forecasting*. New York: Springer; 2013. DOI: 10.1007/978-3-319-00840-0.
2. Kharin Yu, Zhurak M. Statistical analysis of spatio-temporal data based on Poisson model. *Informatica*. 2015;26(1):67–87. DOI: 10.15388/Informatica.2015.39.
3. Kharin Yu, Zhurak M. Statistical forecasting based on binomial conditional autoregressive model of spatio-temporal data. *Pliska Studia Mathematica*. 2017;27:23–36.



4. Gelfand AE. *Handbook of Spatial Statistics*. [USA]: Taylor and Francis Group, LLC; 2010.
5. Bouliari A, Liverani S, Hoogh K, Blangiardo M. A space-time multivariate Bayesian model to analyse road traffic accidents by severity. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A*. 2017;180(1):119–139. DOI: 10.1111/rssa.12178.
6. Rushworth A, Lee D, Sarran C. An adaptive spatiotemporal smoothing model for estimating trends and step changes in disease risk. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C*. 2017;66(1):141–157. DOI: 10.1111/rssc.12155.
7. Amek N, Bayoh N, Hamel M, Lindblade KA, Gimnig J, Laserson KF, et al. Spatio-temporal modeling of sparse geostatistical malaria sporozoite rate data using a zero inflated binomial model. *Spatial and Spatio-temporal Journal of Epidemiology*. 2011;2(4):283–290. DOI: 10.1016/j.sste.2011.08.001.
8. Kharin YuS, Zhurak MK. Binomial conditional autoregressive model of the space-time data and its probabilistic and statistical analysis. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 2015;59(6):5–12. Russian.
9. Kharin YuS, Zhurak MK. Asymptotic analysis of maximum likelihood estimators for parameters of binomial conditionally autoregressive model of spatio-temporal data. *Proceedings of the National Academy of Sciences. Physics and Mathematics Series*. 2016;1:36–45. DOI: 10.29235/1561-2430-2016-0-1-36-45. Russian.
10. Sarymsakov TA, Mustafin HA. On an ergodic theorem for inhomogeneous Markov chains. *Trudy Sredneaziatskogo gosudarstvennogo universiteta im. V. I. Lenina*. 1957;74:1–37. Russian.
11. Lancaster P. *Teoriya matrits* [The theory of matrices]. Moscow: Nauka; 1973. Russian.
12. Kharin YuS, Zuev NM, Zuk EE. *Teoriya veroyatnostei, matematicheskaya i prikladnaya statistika* [Probability theory, mathematical and applied statistics]. Minsk: Belarusian State University; 2011. Russian.
13. Bernshtein SN. *Teoriya veroyatnostei* [Probability theory]. Moscow: Gosizdatel'stvo; 1927. Russian.
14. Borovkov AA. *Matematicheskaya statistika. Otsenka parametrov. Proverka gipotez* [Math statistics. Evaluation of parameters. Hypotheses testing]. Moscow: Nauka; 1984. Russian.
15. Dobrushin RL. Central limit theorem for nonstationary Markov Chains. I. *Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya*. 1956;1(1):72–89. Russian.

Статья поступила в редколлегию 07.02.2018.  
Received by editorial board 07.02.2018.

---

---

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

---

## THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

---

---

УДК 539.3

### СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В АНИЗОТРОПНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИНАХ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С УЧЕТОМ ТЕПЛООБМЕНА С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

В. В. КОРОЛЕВИЧ<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Международный центр современного образования,  
ул. Штепанска, 61, 110 00, г. Прага, Чешская Республика

Приводится решение осесимметричной стационарной задачи теплопроводности для профилированных полярно-ортотропных кольцевых пластин с учетом теплообмена их с внешней средой через основания. Теплофизические характеристики материала пластины предполагаются не зависящими от температуры. Задаются значения температур на контурах кольцевой пластины. Внутренние источники тепла в ней отсутствуют. Распределение температур в таких пластинах осесимметричное. Представлены аналитические решения стационарной задачи теплопроводности для кольцевых анизотропных пластин: постоянной толщины, обратноконических и конических. При нахождении решения в общем случае записывается интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода, соответствующее заданному дифференциальному уравнению стационарной теплопроводности для профилированных анизотропных кольцевых пластин. Приводятся в явном виде ядра интегрального уравнения для анизотропных кольцевых пластин степенного и экспоненциального профилей. Решение интегрального уравнения записывается с помощью резольвенты. Указывается, что из-за наличия иррациональных функций в ядрах интегрального уравнения необходимо применять численные методы при вычислении итерированных ядер либо численно решать интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода. Дана формула расчета температур в анизотропных кольцевых пластинах произвольного профиля.

---

**Образец цитирования:**

Королевич ВВ. Стационарные температурные поля в анизотропных кольцевых пластинах переменной толщины с учетом теплообмена с внешней средой. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2018;2:58–66.

**For citation:**

Karalevich UV. Stationary temperature fields in the anisotropic ring plates of variable thickness considering the heat exchange with external environment. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2018;2:58–66. Russian.

---

**Автор:**

Владимир Васильевич Королевич – преподаватель.

**Author:**

Uladzimir V. Karalevich, lecturer.  
v.korolevich@mail.ru

**Ключевые слова:** полярно-ортотропная кольцевая пластина; температура; стационарное уравнение теплопроводности; дифференциальное уравнение; интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода; пластина постоянной толщины; обратноконическая пластина; коническая пластина; пластина степенного профиля; пластина экспоненциального профиля.

## STATIONARY TEMPERATURE FIELDS IN THE ANISOTROPIC RING PLATES OF VARIABLE THICKNESS CONSIDERING THE HEAT EXCHANGE WITH EXTERNAL ENVIRONMENT

U. V. KARALEVICH<sup>a</sup>

<sup>a</sup>International Center of Modern Education,  
61 Štěpánská, Praha 1, PSČ 110 00, Czech Republic

The solution of the axisymmetric stationary problem of the heat conductivity for profiled polar-orthotropic annular plates considering the heat exchange with external environment through the bases is presented. Thermophysical characteristics of the material of the plate are assumed to be temperature-independent. The temperature values on the contours of the annular plate are given. There are no internal heat sources in the plate. The temperature distribution in such plates will be axisymmetric. Analytical solutions of the stationary heat conductivity problem for the following anisotropic annular plates are presented: the plate of constant thickness, the back conical and the conical plate. The Volterra integral equation of the second kind corresponding to the given differential equation of the stationary heat conductivity for profiled anisotropic annular plates is written to obtain the solution in the general case. The kernels of the integral equation for anisotropic annular plates of power and exponential profiles are given explicitly. The solution of the integral equation is written by using the resolvent. It is indicated that due to the presence of irrational functions in the kernels of the integral equation it is necessary to apply numerical methods in the calculation of iterated kernels or numerically solve the Volterra integral equation of the second kind. A formula for the calculation of temperatures in anisotropic annular plates of an arbitrary profile is given.

**Key words:** polar-orthotropic annular plate; temperature; stationary equation of heat conductivity; differential equation; Volterra integral equation of the second kind; plate of a constant thickness; back conical plate; conical plate; plate of a power profile; plate of an exponential profile.

### Введение

В современных турбомашинах, центрифугах, сепараторах, аппаратах пищевой и химической промышленности широко применяются кольцевые пластины из анизотропных материалов. Такие пластины часто находятся в интенсивных неоднородных тепловых полях, совершая при этом теплообмен через основания с внешней средой. Воздействие этих тепловых полей приводит к дополнительным, так называемым температурным напряжениям, которые необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации указанных конструкций.

### Постановка задачи

Рассмотрим кольцевую пластину, толщина  $h(r)$  которой изменяется вдоль радиуса  $r$  по заданному закону. Пластина изготовлена из материала, обладающего цилиндрической анизотропией, причем ось анизотропии совпадает с геометрической осью пластины и в каждой точке тела имеются три взаимно ортогональные плоскости упругой симметрии.

Пусть на внутреннем контуре ( $r = r_0$ ) пластины поддерживается постоянная температура  $T_1^*$ , на внешнем контуре ( $r = R$ ) –  $T_2^*$  ( $T_2^* > T_1^*$ ), причем температура пластины больше температуры окружающей среды  $T_0$ . Предполагается, что температура в тонкой кольцевой пластине не изменяется по толщине и пренебрегается теплообмен через боковую поверхность. Внутренних источников тепла в пластине не имеется. Тепловое поле в такой полярно-ортотропной пластине будет осесимметричным.

В данной работе исследуется распределение температуры в полярно-ортотропных кольцевых пластинах переменной толщины с учетом теплообмена с внешней средой.

### Решение задачи

Введем цилиндрическую систему координат  $r, \theta, z$ , поместив начало в точке пересечения оси анизотропии со срединной плоскостью пластины.

Уравнение стационарной теплопроводности для полярно-ортотропной пластины переменной толщины с учетом теплообмена с внешней средой через оба основания пластины запишется в виде [1; 2]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rh(r) \lambda_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( h(r) \lambda_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) - 2H(T - T_0) \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{dh}{dr} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 0, \quad (1)$$

где  $\lambda_r$  и  $\lambda_\theta$  – радиальный и тангенциальный коэффициенты теплопроводности соответственно;  $H$  – коэффициент теплоотдачи. Предполагается, что все эти коэффициенты не зависят от температуры  $T$ .

Если тепловое поле осесимметричное, то  $T$  не будет зависеть от тангенциальной координаты  $\theta$  и можно исключить второе слагаемое в уравнении (1). В результате имеем

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \left( \frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r} \right) \frac{dT}{dr} - \frac{2H}{\lambda_r h(r)} (T(r) - T_0) \sqrt{1 + \frac{1}{4} (h'(r))^2} = 0. \quad (2)$$

Это уравнение отличается от уравнения стационарной теплопроводности [3, с. 136] наличием в (2) выражения  $\sqrt{1 + \frac{1}{4} (h'(r))^2}$ , учитывающего кривизну поверхности пластины переменной толщины.

Введем новую функцию  $\Theta_0(r)$ :

$$\Theta_0(r) = T(r) - T_0. \quad (3)$$

С учетом (3) уравнение (2) запишется в виде

$$\frac{d^2 \Theta_0}{dr^2} + \left( \frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r} \right) \frac{d\Theta_0}{dr} - \frac{2H}{\lambda_r h(r)} \sqrt{1 + \frac{1}{4} (h'(r))^2} \Theta_0(r) = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим несколько частных случаев распределения температуры в анизотропных профилированных кольцевых пластинах.

**Кольцевая пластина постоянной толщины  $h_0$ .** Дифференциальное уравнение (4) примет вид

$$\frac{d^2 \Theta_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Theta_0}{dr} - \frac{2H}{\lambda_r h_0} \Theta_0(r) = 0. \quad (5)$$

Введем новую переменную  $x = \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} r$  и приведем (5) к модифицированному уравнению Бесселя:

$$x^2 \Theta_0'' + x \Theta_0' - (x^2 + 0^2) \Theta_0(x) = 0.$$

Его решение выражается через модифицированную функцию Бесселя 1-го рода нулевого порядка  $I_0(x)$  и модифицированную функцию Бесселя 2-го рода нулевого порядка  $K_0(x)$  (функцию Макдональда) [4]:

$$\Theta_0(x) = C_1 I_0(x) + C_2 K_0(x),$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные.

Возвращаясь к переменной  $r$ , запишем общее решение уравнения (5) в виде

$$\Theta_0(r) = C_1 I_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} r \right) + C_2 K_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} r \right). \quad (6)$$

Постоянные  $C_1, C_2$  определим из граничных условий:

$$\begin{cases} \Theta_0(r_0) = T_1^* - T_0, \\ \Theta_0(R) = T_2^* - T_0. \end{cases} \quad (7)$$

Удовлетворяя решение (6) граничным условиям (7), получим следующую систему алгебраических уравнений относительно неизвестных  $C_1, C_2$ :

$$\begin{cases} C_1 I_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} r_0 \right) + C_2 K_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} r_0 \right) = T_1^* - T_0, \\ C_1 I_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} R \right) + C_2 K_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} R \right) = T_2^* - T_0. \end{cases} \quad (8)$$

Решение системы (8) есть

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{\Delta_1} \left[ K_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} R \right) (T_1^* - T_0) - K_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} r_0 \right) (T_2^* - T_0) \right], \\ C_2 = -\frac{1}{\Delta_1} \left[ I_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} R \right) (T_1^* - T_0) - I_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} r_0 \right) (T_2^* - T_0) \right], \end{cases} \quad (9)$$

где  $\Delta_1 = \left[ I_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} r_0 \right) K_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} R \right) - I_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} R \right) K_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} r_0 \right) \right]$ .

По формуле (3), учитывая решение (6) и выражения (9), получим распределение температуры  $T(r)$  в полярно-ортотропной кольцевой пластине постоянной толщины  $h_0$  при учете теплообмена ее с внешней средой:

$$\begin{aligned} T(r) = & T_1^* \frac{1}{\Delta_1} \left[ I_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} r \right) K_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} R \right) - I_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} R \right) K_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} r \right) \right] + \\ & + T_2^* \frac{1}{\Delta_1} \left[ I_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} r_0 \right) K_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} r \right) - I_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} r \right) K_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} r_0 \right) \right] + \\ & + T_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\Delta_1} \left[ I_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} R \right) - I_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} r_0 \right) \right] K_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} r \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Delta_1} \left[ K_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} R \right) - K_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} r_0 \right) \right] I_0 \left( \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}} r \right) \right\}. \end{aligned}$$

**Обратноконическая кольцевая пластина.** Закон изменения толщины  $h(r)$  вдоль радиуса  $r$  для такой пластины описывается формулой  $h(r) = h_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)$ , где  $h_0$  – толщина пластины на внутреннем контуре ( $r = r_0$ ). Дифференцируя функцию  $h(r)$  и подставляя в уравнение (4), получим

$$\frac{d^2 \Theta_0}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Theta_0}{dr} - \frac{H \sqrt{h_0^2 + 4r_0^2}}{\lambda_r h_0} \frac{1}{r} \Theta_0(r) = 0. \quad (10)$$

Обозначим  $\frac{H \sqrt{h_0^2 + 4r_0^2}}{\lambda_r h_0} = b$  и введем новую функцию  $Z_1(2\sqrt{b}\sqrt{r})$ :

$$\Theta_0(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} Z_1(2\sqrt{b}\sqrt{r}). \quad (11)$$

Подставляя выражение (11) в уравнение (10), для функции  $Z_1(t)$  получим модифицированное уравнение Бесселя

$$t^2 Z_1''(t) + t Z_1'(t) - (t^2 + 1^2) Z_1(t) = 0, \quad (12)$$

где аргумент  $t = 2\sqrt{b}\sqrt{r}$ .

Решение уравнения (12) выражается через модифицированную функцию Бесселя 1-го рода 1-го порядка  $I_1(t)$  и модифицированную функцию Бесселя 2-го рода 1-го порядка  $K_1(t)$  (функцию Макдональда):

$$Z_1(t) = \tilde{C}_1 I_1(t) + \tilde{C}_2 K_1(t),$$

где  $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$  – произвольные постоянные.

Возвращаясь к замене (11), запишем решение дифференциального уравнения (10):

$$\Theta_0(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \left[ \tilde{C}_1 I_1(2\sqrt{b}\sqrt{r}) + \tilde{C}_2 K_1(2\sqrt{b}\sqrt{r}) \right]. \quad (13)$$

Постоянные  $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$  определим из граничных условий. Подстановка решения (13) в условия (7) приводит к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ :

$$\begin{cases} \tilde{C}_1 I_1(2\sqrt{b}\sqrt{r}) + \tilde{C}_2 K_1(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}) = \sqrt{r_0} (T_1^* - T_0), \\ \tilde{C}_1 I_1(2\sqrt{b}\sqrt{R}) + \tilde{C}_2 K_1(2\sqrt{b}\sqrt{R}) = \sqrt{R} (T_2^* - T_0). \end{cases} \quad (14)$$

Решение системы (14) есть

$$\begin{cases} \tilde{C}_1 = \frac{\sqrt{r_0}}{\Delta_2} K_1(2\sqrt{b}\sqrt{R})(T_1^* - T_0) - \frac{\sqrt{R}}{\Delta_2} K_1(2\sqrt{b}\sqrt{r_0})(T_2^* - T_0), \\ \tilde{C}_2 = -\frac{\sqrt{r_0}}{\Delta_2} I_1(2\sqrt{b}\sqrt{R})(T_1^* - T_0) + \frac{\sqrt{R}}{\Delta_2} I_1(2\sqrt{b}\sqrt{r_0})(T_2^* - T_0), \end{cases} \quad (15)$$

где  $\Delta_2 = \left[ I_1(2\sqrt{b}\sqrt{r_0})K_1(2\sqrt{b}\sqrt{R}) - I_1(2\sqrt{b}\sqrt{R})K_1(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}) \right]$ .

По формуле (3), учитывая решение (13) и выражения (15), получим распределение температуры  $T(r)$  в полярно-ортотропной обратноконической кольцевой пластине при учете теплообмена ее с внешней средой:

$$\begin{aligned} T(r) = & T_1^* \left\{ \frac{1}{\Delta_2} \sqrt{\frac{r_0}{r}} \left[ I_1(2\sqrt{b}\sqrt{r})K_1(2\sqrt{b}\sqrt{R}) - I_1(2\sqrt{b}\sqrt{R})K_1(2\sqrt{b}\sqrt{r}) \right] \right\} + \\ & + T_2^* \left\{ \frac{1}{\Delta_2} \sqrt{\frac{R}{r}} \left[ I_1(2\sqrt{b}\sqrt{r_0})K_1(2\sqrt{b}\sqrt{r}) - I_1(2\sqrt{b}\sqrt{r})K_1(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}) \right] \right\} + \\ & + T_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\Delta_2} \left[ \sqrt{R}K_1(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}) - \sqrt{r_0}K_1(2\sqrt{b}\sqrt{R}) \right] \frac{1}{\sqrt{r}} I_1(2\sqrt{b}\sqrt{r}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Delta_2} \left[ \sqrt{r_0}I_1(2\sqrt{b}\sqrt{R}) - \sqrt{R}I_1(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}) \right] \frac{1}{\sqrt{r}} K_1(2\sqrt{b}\sqrt{r}) \right\}. \end{aligned}$$

**Коническая кольцевая пластина.** Профили конических кольцевых пластин или пластин прямолинейного профиля задаются формулой  $h(r) = h_0^* \left( 1 - \frac{r}{R_1} \right)$ , где  $h_0^*$  – толщина пластины в центре ( $r = 0$ );  $R_1$  – радиус окружности пересечения образующих конуса ( $R \leq R_1$ ). Дифференцируя функцию  $h(r)$  и подставляя в уравнение (4), получим

$$\frac{d^2 \Theta_0}{dr^2} + \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{(R_1 - r)} \right) \frac{d\Theta_0}{dr} - \frac{H\sqrt{h_0^{*2} + 4R_1^2}}{\lambda_r h_0^*} \frac{1}{(R_1 - r)} \Theta_0(r) = 0. \quad (16)$$

Обозначив  $\frac{H\sqrt{h_0^{*2} + 4R_1^2}R_1}{\lambda_r h_0^*} = b^*$  и сделав замену переменной  $s = \frac{r}{R_1}$ , где  $s \in [\delta_0; \delta_1]$ ,  $\delta_0 = \frac{r_0}{R_1} > 0$ ,

$\delta_1 = \frac{R}{R_1} < 1$ , преобразуем уравнение (16) к виду

$$s(1-s)\Theta_0''(s) + (1-2s)\Theta_0'(s) - b^*s\Theta_0(s) = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) обладает двумя особыми регулярными точками  $s = 0$  и  $s = 1$ . Согласно общей теории дифференциальных уравнений, для каждой особой регулярной точки существуют решения в виде



сходящихся в этой окрестности степенных рядов, при этом вторые частные решения могут содержать логарифмические члены.

Так как в нашем случае определяющее уравнение  $\rho(\rho-1)+\rho=0$  относительно особой точки  $s=0$  имеет корни  $\rho_1=\rho_2=0$ , то общее решение дифференциального уравнения (17) есть

$$\Theta_0(s) = \widehat{C}_1 \Theta_0^{(1)}(s) + \widehat{C}_2 \Theta_0^{(2)}(s), \quad (18)$$

где  $\widehat{C}_1, \widehat{C}_2$  – произвольные постоянные. Здесь первое частное решение будет

$$\Theta_0^{(1)}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k,$$

а второе частное решение примет вид

$$\Theta_0^{(2)}(s) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k \right) \ln s + \sum_{k=0}^{\infty} b_k s^k.$$

Коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  находятся из рекуррентных соотношений [3, с. 137]:

$$a_{k+1} = \frac{k}{k+1} a_k + \frac{b^*}{(k+1)^2} a_{k-1} \quad (k \geq 2),$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0;$$

$$b_{k+1} = \frac{k}{k+1} b_k + \frac{b^*}{(k+1)^2} b_{k-1} - \frac{2}{k+1} a_{k+1} + \frac{2k+1}{(k+1)^2} a_k \quad (k \geq 2),$$

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1.$$

Постоянные  $\widehat{C}_1, \widehat{C}_2$  определим из граничных условий. Подстановка решения (18) в граничные условия (7) приводит к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\widehat{C}_1, \widehat{C}_2$ :

$$\begin{cases} \widehat{C}_1 \Theta_0^{(1)}(\delta_0) + \widehat{C}_2 \Theta_0^{(2)}(\delta_0) = T_1^* - T_0, \\ \widehat{C}_1 \Theta_0^{(1)}(\delta_1) + \widehat{C}_2 \Theta_0^{(2)}(\delta_1) = T_2^* - T_0, \end{cases} \quad (19)$$

откуда

$$\begin{cases} \widehat{C}_1 = \frac{1}{\Delta_3} \left[ \Theta_0^{(2)}(\delta_1)(T_1^* - T_0) - \Theta_0^{(2)}(\delta_0)(T_2^* - T_0) \right], \\ \widehat{C}_2 = -\frac{1}{\Delta_3} \left[ \Theta_0^{(1)}(\delta_1)(T_1^* - T_0) - \Theta_0^{(1)}(\delta_0)(T_2^* - T_0) \right], \end{cases} \quad (20)$$

где  $\Delta_3 = \left[ \Theta_0^{(1)}(\delta_0) \Theta_0^{(2)}(\delta_1) - \Theta_0^{(1)}(\delta_1) \Theta_0^{(2)}(\delta_0) \right]$ .

По формуле (3), учитывая (18)–(20), получим распределение температуры  $T(r)$  в полярно-ортотропной конической кольцевой пластине при учете теплообмена ее с внешней средой:

$$\begin{aligned} T(r) = & T_1^* \frac{1}{\Delta_3} \left[ \Theta_0^{(2)}(\delta_1) \Theta_0^{(1)}(s) - \Theta_0^{(1)}(\delta_1) \Theta_0^{(2)}(s) \right] + T_2^* \frac{1}{\Delta_3} \left[ \Theta_0^{(1)}(\delta_0) \Theta_0^{(2)}(s) - \Theta_0^{(2)}(\delta_0) \right. \\ & \left. \times \Theta_0^{(1)}(s) \right] + T_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\Delta_3} \left[ \Theta_0^{(2)}(\delta_0) - \Theta_0^{(2)}(\delta_1) \right] \Theta_0^{(1)}(s) + \frac{1}{\Delta_3} \left[ \Theta_0^{(1)}(\delta_0) - \Theta_0^{(1)}(\delta_1) \right] \Theta_0^{(2)}(s) \right\}. \end{aligned}$$

Для всех остальных профилей кольцевых пластин общее решение найдем с помощью интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода. Полагаем

$$\frac{d^2 \Theta_0}{dr^2} = \eta_0(r). \quad (21)$$

Последовательно интегрируя выражение (21), имеем

$$\frac{d\Theta_0}{dr} = \int_{r_0}^r \eta_0(s) ds + \dot{\Theta}_0(r_0), \quad \Theta_0(r) = \int_{r_0}^r (r-s)\eta_0(s) ds + \dot{\Theta}_0(r_0)(r-r_0) + \Theta_0(r_0). \quad (22)$$

Здесь использовалась формула Дирихле

$$\underbrace{\int_{r_0}^r dr_1 \int_{r_0}^{r_1} dr_2 \dots \int_{r_0}^{r_{n-1}} \eta_0(r_n) dr_n}_{n \text{ раз}} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{r_0}^r (r-s)^{n-1} \eta_0(s) ds.$$

Подставив в уравнение (4) вместо функции  $\Theta_0(r)$  и ее производных правые части выражений (21), (22), получим искомое линейное интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода

$$\eta_0(r) = \lambda \int_{r_0}^r K_0(r, s) \eta_0(s) ds + f_0(r), \quad (23)$$

где  $\lambda = -1$  есть числовой параметр;  $K_0(r, s) = \left\{ \left( \frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r} \right) - \frac{H}{\lambda_r} \sqrt{\frac{4}{h^2(r)} + \left( \frac{h'(r)}{h(r)} \right)^2} (r-s) \right\}$  – ядро интегрального уравнения;  $f_0(r) = \frac{\partial K_0(r, s)}{\partial s} \Theta_0(r_0) - K_0(r, r_0) \dot{\Theta}_0(r_0)$  – свободный член интегрального уравнения.

Запишем в явном виде ядра интегрального уравнения (23) для пластин степенного и экспоненциального профилей.

Толщина пластины *степенного профиля* задается формулой  $h(r) = h_0 \left( \frac{r_0}{r} \right)^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ , где  $h_0$  – толщина пластины в центре на внутреннем контуре ( $r = r_0$ ). Ядро интегрального уравнения (23) в этом случае имеет вид

$$K_0(r, s) = \left[ \frac{(1-\alpha)}{r} - \frac{2H}{\lambda_r h_0} \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{h_0}{r_0} \right)^2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 + \left( \frac{r_0}{r} \right)^{-2\alpha}} (r-s) \right].$$

Для кольцевой пластины *экспоненциального профиля*, толщина которой описывается формулой  $h(r) = h_0^* e^{\beta \left( \frac{r}{R} \right)}$ ,  $\beta = \ln \left( \frac{h_1}{h_0^*} \right)$  ( $h_1 < h_0^*$ ), где  $h_0^*$  – толщина пластины в центре ( $r = 0$ );  $h_1$  – толщина пластины на внешнем контуре ( $r = R$ ), ядро интегрального уравнения (23) есть

$$K_0(r, s) = \left[ \left( \frac{\beta}{R} + \frac{1}{r} \right) - \frac{2H}{\lambda_r h_0^*} \sqrt{\frac{1}{4} \left( \beta \frac{h_0^*}{R} \right)^2 + e^{2\beta \left( \frac{r}{R} \right)}} (r-s) \right].$$

Общее решение линейного интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода (23) записывается с помощью *резольвенты*  $R_0(r, s; \lambda)$  в виде [5]

$$\eta_0(r) = \lambda \int_{r_0}^r R_0(r, s; \lambda) f_0(s) ds + f_0(r). \quad (24)$$

Здесь функция  $R_0(r, s; \lambda)$  определяется функциональным рядом:

$$R_0(r, s; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_{0, m+1}(r, s),$$

который для непрерывных ядер  $K_{0, m}(r, s)$  сходится абсолютно и равномерно.

*Повторяющиеся*, или *итерированные*, ядра  $K_{0, m}(r, s)$  вычисляются по рекуррентным формулам:

$$K_{0,1}(r, s) = K_0(r, s),$$

$$K_{0,2}(r, s) = \int_s^r K_0(r, t) K_{0,1}(t, s) dt,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$K_{0,m}(r, s) = \int_s^r K_0(r, t) K_{0,m-1}(t, s) dt.$$

Если свободный член  $f_0(r)$  непрерывен в  $[r_0, R]$ , а ядро  $K_0(r, s)$  непрерывно при  $r_0 \leq r \leq R$ ,  $r_0 \leq s \leq r$ , то линейное интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода (23) имеет при любом параметре  $\lambda (\lambda \neq 0)$  единственное непрерывное решение, определяемое формулой (24).

Ввиду наличия иррациональностей от степенных или экспоненциальных функций в ядре интегрального уравнения вычисление интегралов итерированных ядер следует вести численными методами.

Отметим, что интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода можно решать и другими аналитическими и численными методами, указанными, например, в [6].

Используя вторую формулу (22) и граничные условия (7), получим распределение температуры  $T(r)$  в полярно-ортотропной кольцевой пластине произвольного профиля при учете теплообмена ее с внешней средой:

$$T(r) = \int_{r_0}^r (r-s)\eta_0(s) ds - \left(\frac{r-r_0}{R-r_0}\right) \int_{r_0}^R (R-s)\eta_0(s) ds + \left(\frac{R-r}{R-r_0}\right) T_1^* + \left(\frac{r-r_0}{R-r_0}\right) T_2^*. \quad (25)$$

Температура  $T_0$  окружающей среды входит неявно в функцию  $\eta_0(s)$  формулы (25).

### Заключение

Приведенные точные решения стационарной задачи теплопроводности для трех профилей анизотропных кольцевых пластин (постоянной толщины, обратноконической и конической) применяются для расчета температурных напряжений в таких пластинах. В случае использования в машиностроительных или авиационных конструкциях анизотропных кольцевых пластин более сложных профилей надо воспользоваться формулой (25) с численным решением интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода (23).

### Библиографические ссылки

1. Уздалев АИ. *Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела*. Саратов: Издательство Саратовского университета; 1967.
2. Уздалев АИ, Брюханова ЕН. Уравнение теплопроводности для пластины переменной толщины с неоднородными теплофизическими свойствами. В: Уздалев АИ, редактор. *Задачи прикладной теории упругости*. Саратов: Саратовский политехнический институт; 1985. С. 3–7.
3. Коваленко АД. *Пластинки и оболочки в роторах турбомашин*. Киев: Издательство АН УССР; 1955.
4. Бронштейн ИН, Семендяев КА. *Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов*. Москва: Наука; 1981.
5. Краснов МЛ, Киселев АИ, Макаренко ГИ. *Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями*. Москва: КомКнига; 2007.
6. Верлань АФ, Сизиков ВС. *Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы*. Киев: Наукова думка; 1986.

### References

1. Uzdalev AI. *Nekotorye zadachi termouprugosti anizotropnogo tela* [Some problems of thermoelasticity of an anisotropic body]. Saratov: Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta; 1967. Russian.
2. Uzdalev AI, Bryukhanova EN. Equations of thermal conductivity for plates of variable thickness with inhomogeneous thermo-physical properties. In: Uzdalev AI, editor. *Zadachi prikladnoi teorii uprugosti* [Problems of Applied Theory of Elasticity]. Saratov: Saratov Polytechnic Institute; 1985. p. 3–7. Russian.

3. Kovalenko AD. *Plastinki i obolochki v rotorakh turbomashin* [Plates and shells in rotors of turbomachines]. Kiev: Izdatel'stvo AN USSR; 1955. Russian.

4. Bronshtein IN, Semendiaev KA. *Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya VTUZov* [A handbook on mathematics for engineers and students VTUZov]. Moscow: Nauka; 1981. Russian.

5. Krasnov ML, Kiselev AI, Makarenko GI. *Integral'nye uravneniya: zadachi i primery s podrobnymi resheniyami* [Integral equations: problems and examples with detailed solutions]. Moscow: KomKniga; 2007. Russian.

6. Verlan' AF, Sizikov VS. *Integral'nye uravneniya: metody, algoritmy, programmy* [Integral equations: methods, algorithms, programs]. Kiev: Naukova dumka; 1986. Russian.

Статья поступила в редакцию 27.10.2017.  
Received by editorial board 27.10.2017.

---

---

# ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

---

## INFORMATICS, COMPUTER SCIENCE AND MANAGEMENT

---

---

УДК 512.644

### ИДЕНТИФИКАЦИЯ СЕНСОРНОЙ КОНФИГУРАЦИИ И УПРАВЛЕНИЕ ПОТОКАМИ

Л. А. ПИЛИПЧУК<sup>1)</sup>, А. С. ПИЛИПЧУК<sup>1)</sup>, Е. Н. ПОЛЯЧОК<sup>1)</sup>, А. И. ФАРАЗЕЙ<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Статья посвящена разработке стратегий идентификации расположения специальных программируемых устройств (сенсоров) в узлах сети для сбора, обработки, анализа информации о функции потока в целях оценки дуговых потоков в той части сети, которая непосредственно не наблюдается. Одним из направлений решения задачи является перебор возможных размещений, основанный на эвристических соображениях. В качестве модели потоковой сети с сенсорами используется разреженная недоопределенная система линейных алгебраических

---

#### Образец цитирования:

Пилипчук ЛА, Пилипчук АС, Полячок ЕН, Фаразей АИ. Идентификация сенсорной конфигурации и управление потоками. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;2:67–76.

#### For citation:

Pilipchuk LA, Pilipchuk AS, Polyachok EN, Farazei AI. Identification of the sensors configuration and flows control. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;2:67–76. Russian.

---

#### Авторы:

**Людмила Андреевна Пилипчук** – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики.

**Андрей Степанович Пилипчук** – соискатель кафедры методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук; профессор кафедры методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики А. И. Калинин.

**Евгений Николаевич Полячок** – магистрант кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – Л. А. Пилипчук.

**Артем Иванович Фаразей** – студент факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – Л. А. Пилипчук.

#### Authors:

**Ludmila A. Pilipchuk**, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of computer applications and systems, faculty of applied mathematics and computer sciences. [pilipchuk@bsu.by](mailto:pilipchuk@bsu.by)

**Andrei S. Pilipchuk**, postgraduate student at the department of optimal control methods, faculty of applied mathematics and computer sciences.

[an.pilipchuk@gmail.com](mailto:an.pilipchuk@gmail.com)

**Eugene N. Polyachok**, master's degree student at the department of computer applications and systems, faculty of applied mathematics and computer sciences.

[arszp10@gmail.com](mailto:arszp10@gmail.com)

**Artem I. Farazei**, student at the faculty of applied mathematics and computer sciences.

[artem.farazei@gmail.com](mailto:artem.farazei@gmail.com)

уравнений. Определяются условия единственности решения системы специального вида, полученной исходя из априорной информации от сенсоров, установленных в обозреваемых узлах сети. Однако проверка этих условий с помощью перебора возможна только для небольших сетей. Получены оценки, ограничивающие число просматриваемых вариантов, и обоснован интервал изменения количества обозреваемых узлов, гарантирующих полную наблюдаемость сети. Эти результаты позволяют увеличить размерности решаемых задач. Для исследуемого класса задач найдены условия эффективной применимости точных методов. Разработаны методы нахождения субоптимальных решений установления полной наблюдаемости сети для заданного порога интенсивности. Получены численные результаты построения субоптимальных решений для различных значений порога интенсивности. Представлена визуализация сенсорной конфигурации обозреваемых узлов, гарантирующих полную наблюдаемость сети.

**Ключевые слова:** граф; разреженная система; моделирование; сенсорная конфигурация; оптимальные и субоптимальные решения; визуализация.

## IDENTIFICATION OF THE SENSORS CONFIGURATION AND FLOWS CONTROL

L. A. PILIPCHUK<sup>a</sup>, A. S. PILIPCHUK<sup>a</sup>, E. N. POLYACHOK<sup>a</sup>, A. I. FARAZEI<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: L. A. Pilipchuk (pilipchuk@bsu.by)

The article is devoted to the development of strategies for identifying the location of special programmable devices (sensors) in network nodes for collecting, processing, analyzing information about the flow function in order to evaluate arc flows in that part of the network that is not directly observed. One of the ways to solve this problem is to search through possible placements, based on heuristic considerations. In work as a model of a flow network with sensors, a sparse underdetermined system of linear algebraic equations is used. The conditions for the uniqueness of the solution of a special kind of system obtained as a result of the use of a priori information from sensors installed in the monitored nodes of the network are determined. However, checking these conditions with a full search can only be used for small networks. The estimations limiting the number of viewed configurations of nodes are obtained and the interval of changing the number of monitored nodes that guarantee the complete observability of the network is justified. These results make it possible to increase the dimensionality of the problems being solved. Methods are developed for finding suboptimal solutions to establish the complete observability of the network for a given intensity threshold. Numerical results of constructing suboptimal solutions for various values of the intensity threshold are obtained. The results of visualization of the sensory configuration of the observed nodes are presented, which guarantee complete observability of the network. Conditions for effective applicability of exact methods are obtained for problems of the investigated class.

**Key words:** graph; sparse system; modeling; configuration of sensors; optimal and suboptimal solutions; visualization.

### Введение

Неотъемлемой составляющей в задачах управления потоками и их контроля в сетях является проектирование стратегий расположения специальных программируемых устройств (сенсоров). Технологии коммуникации позволяют получить информацию о потоках в больших сетях с помощью сенсоров и видеокамер для относительно незначительной части сети. Первостепенную важность имеет разработка *оптимальных* стратегий расположения минимального количества сенсоров в узлах сети для сбора частичной информации о функции потока. На основании анализа и использования полученных данных рассматривается возможность оценки потоков в той части сети, которая непосредственно не наблюдается. Задача моделирования процессов оценки потоков на ненаблюдаемой части может быть представлена в виде недоопределенной системы линейных алгебраических уравнений, где совокупность переменных соответствует неизвестным дуговым потокам и переменным интенсивностям узлов, а совокупность уравнений – условиям баланса. Необходимо установить сенсоры в определенные (обозреваемые) узлы для сбора полной информации о функции потока, которая бы гарантировала полную наблюдаемость сети. В результате обработки информации от установленных в обозреваемые узлы сенсоров получена специальная разреженная система линейных алгебраических уравнений, единственность решения которой гарантирует полную наблюдаемость сети. Решение системы линейных алгеб-



раических уравнений определяет численные значения потоков на ненаблюдаемой части исходной сети. Это означает, что все потоки известны, т. е. сеть полностью наблюдаема.

Данная проблема упоминается в литературе [1] как проблема местоположения датчиков (Sensor Location Problem, SLP). В [2] доказано, что задача идентификации минимального числа датчиков и их конфигураций является  $NP$ -полной. В последние несколько лет проблема расположения сенсоров SLP для мониторинга потоков в сети была объектом растущего интереса в связи с ее актуальностью в области контроля и управления движением. С ростом размерности сети стратегии *полного* перебора для определения оптимальных конфигураций обзорываемых узлов  $NP$ -полных задач данного класса оказываются неприемлемыми. В этом контексте первостепенное значение имеет разработка новых подходов и стратегий определения местоположения датчиков, развитие технологий и алгоритмов численного решения разреженных систем линейных алгебраических уравнений.

В [3–5] изложены новые подходы к построению оптимального решения задачи определения минимального количества специальных программируемых устройств (сенсоров) и конфигураций обзорываемых узлов сети для сбора полной информации о функции потока, которая бы гарантировала полную наблюдаемость сети. В [4] продолжено исследование проблемы, представлена математическая формулировка задачи SLP, а также применен генетический подход к поиску приемлемых решений. В [3; 5] рассмотрен подход, основанный на методах декомпозиции потоков и позволяющий представить систему для моделирования процессов оценки потоков в виде независимых подсистем. Также даны эффективные алгоритмы и технологии численного решения независимых подсистем определения дуговых потоков на ненаблюдаемой части сети, основанные на применении аппарата теории графов, результатов разреженного сетевого и матричного анализа.

### Оптимальные решения задачи расположения сенсоров для оценки потоков на ненаблюдаемой части сети

Основой для моделирования процессов оценки потоков на ненаблюдаемой части графа является недоопределенная система линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{ji} = \begin{cases} x_i, & i \in I^*, \\ 0, & i \in I \setminus I^*, \end{cases} \quad (1)$$

где  $I^* \subseteq I$ ,  $I^* \neq \emptyset$ ,  $G = (I, U)$  – связный ориентированный двунаправленный граф с множеством узлов  $I$  и множеством дуг  $U$ , определенных на  $I \times I$ ,  $|I| < \infty$ ,  $|U| < \infty$ .  $I_i^+(U) = \{j \in I : (i, j) \in U\}$ ,  $I_i^-(U) = \{j \in I : (j, i) \in U\}$ . Двунаправленный граф  $G$  обладает следующим свойством: если существует дуга  $(i, j) \in U$  с дуговым потоком  $x_{ij}$ , то существует и дуга  $(j, i) \in U$  с дуговым потоком  $x_{ji}$ , который в общем случае может не совпадать с  $x_{ij}$ .

Задача нахождения оптимального расположения сенсоров в сети заключается в том, чтобы по данному графу  $G = (I, U)$ , описывающему транспортную сеть, найти подмножество  $M$  обзорываемых узлов минимального размера  $|M|$  и их конфигурации при размещении специальных программируемых устройств (сенсоров) для наблюдения за потоками. Пусть  $M$  – множество обзорываемых узлов графа  $G = (I, U)$ , в которых установлены указанные устройства сбора информации,  $M \subseteq I$ . Для заданного множества  $M$  обзорываемых узлов известна следующая априорная информация (показания установленных датчиков):

$$x_{ij} = f_{ij}, \quad j \in I_i^+(U), \quad x_{ji} = f_{ji}, \quad j \in I_i^-(U), \quad i \in M; \quad x_i = f_i, \quad i \in M \cap I^*, \quad (2)$$

где наблюдаемые дуговые потоки  $f_{ij}$  и наблюдаемые переменные интенсивности  $f_i$  получены априори из (2) на основании данных от сенсоров. Учтем дополнительную информацию о коэффициентах разбиения потока. Используя известные коэффициенты разбиения  $p_{ij}$ ,  $0 < p_{ij} \leq 1$ ,  $(i, j) \in U$ , можно выразить общий исходящий поток  $F(i) = \sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij}$  как функцию от объема потока по каждой исходящей дуге.

На основании известных коэффициентов разбиения  $p_{ij}$ ,  $(i, j) \in U$ , найденных для дуг сети  $G = (I, U)$ , определяются дополнительные уравнения взаимосвязи дуговых потоков следующим образом. Если для узла  $i$  выполняется соотношение  $|I_i^+(U)| \geq 2$ , то для любой другой дуги, исходящей из этого узла, например  $(i, v_i)$ , дуговые потоки для всех дуг, исходящих из узла  $i$  (за исключением дуги  $(i, v_i)$ ), выражаются через дуговой поток  $x_{i, v_i}$  следующим образом:

$$x_{i,j} = p_{i,j}F(i), (i, j) \in U, \text{ или } x_{ij} = \frac{p_{i,j}}{p_{i,v_i}}x_{i,v_i}, j \in I_i^+(U) \setminus \{v_i\}, |I_i^+(U)| \geq 2, \quad (3)$$

где  $(i, v_i)$  – каноническая дуга, исходящая из узла. Обозначим  $\beta_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{p_{i,v_i}}$ , если  $|I_i^+(U)| \geq 2$ , и  $\beta_{i,j} = p_{i,v_i}$ ,  $|I_i^+(U)| = 1$ . Определим из (3) численные значения дуговых потоков  $x_{ij}$ , которые можно выразить с помощью коэффициентов разбиения  $p_{ij}$ ,  $p_{i,v_i}$  через наблюдаемые потоки  $x_{i,v_i} = f_{i,v_i}$  согласно (2), полученные от специальных программируемых устройств (сенсоров), установленных в узлах множества  $M$ . Численные значения дуговых потоков, выраженные с помощью (3) через коэффициенты разбиения потока, подставим в уравнения системы (1). Удалим из графа  $G = (I, U)$  дуги с известными значениями дуговых потоков и узлы с известными значениями переменной интенсивности  $x_i = f_i$ ,  $i \in M \cap I^*$ . Исключим из системы (3) те уравнения, которые не содержат неизвестных дуговых потоков и интенсивностей узлов. Пусть  $q$  – число оставшихся уравнений вида (3) с неизвестными значениями дуговых потоков. С учетом выполненных преобразований графа  $G$  получим новый граф  $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ ,  $\bar{I}^* = I^* \setminus (M \cap I^*)$ . В результате система (1), (3) преобразуется к виду

$$\sum_{j \in I_i^+(\bar{U})} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(\bar{U})} x_{ji} = \begin{cases} a_i + x_i, & i \in \bar{I}^*, \\ a_i, & i \in \bar{I} \setminus \bar{I}^*, \end{cases} \quad (4)$$

$$\sum_{(i,j) \in \bar{U}} \lambda_{ij}^p x_{ij} = 0, p \in P = \{1, \dots, q\}, \text{ если } P \neq \emptyset. \quad (5)$$

Заметим, что множество  $P$  может быть пустым. Коэффициенты в уравнениях (5), связывающие неизвестные дуговые потоки, равны:  $\lambda_{ij}^p = 1$ ,  $\lambda_{i,v_i}^p = -\frac{p_{ij}}{p_{i,v_i}}$ ,  $j \in I_i^+(\bar{U}) \setminus \{v_i\}$ , если  $|I_i^+(\bar{U})| > 1$ ,  $i \in \bar{I}$ ;  $\lambda_{ij}^p = 0$ ,

если  $|I_i^+(\bar{U})| = 1$ ,  $i \in \bar{I}$ . Неизвестными системы (4)–(5) являются дуговые потоки  $x_{ij}$ ,  $(i, j) \in \bar{U}$ , и переменные интенсивности узлов  $x_i$ ,  $i \in \bar{I}^*$ ,  $\bar{I}^* \subseteq \bar{I}$ . Орграф  $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$  может быть несвязным и (или) не двунаправленным. Некоторые компоненты связности графа  $\bar{G}$  могут не содержать узлов из множества  $\bar{I}^*$ .

Сформулируем задачу поиска *оптимального* расположения сенсоров в узлах графа  $G = (I, U)$  для оценки дуговых потоков и переменных интенсивностей узлов: *найти подмножество  $M$  узлов минимального размера,  $M \subseteq I$ , такое, чтобы соответствующая система (4)–(5) имела единственное решение.*

**Теорема 1.** Пусть  $A$  – матрица инцидентности связного ориентированного графа  $G$ . Строки усеченной матрицы инцидентности  $\tilde{A}$ , образованной удалением любой строки матрицы  $A$ , линейно независимы.

*Доказательство.* Ранг матрицы инцидентности связного ориентированного графа  $G = (I, U)$  равен  $|I| - 1$ , и дуги, соответствующие базисному множеству столбцов матрицы инцидентности, образуют остовное дерево графа  $G$ . Линейная независимость усеченной матрицы инцидентности  $\tilde{A}$  следует из приведения подматрицы матрицы  $\tilde{A}$ , которая соответствует базисным столбцам, к виду верхней треугольной матрицы, определитель которой отличен от нуля. Теорема доказана.

С целью уменьшить число  $|U|$  столбцов в матрице инцидентности  $A$  графа  $G = (I, U)$  до числа  $|I| - 1$  построим матрицу  $H$  размерности  $|I| \times (|I| - 1)$ , используя известные коэффициенты разбиения  $p_{ij}$ ,  $(i, j) \in U$ , для каждой дуги  $(i, j) \in U$ . Напомним, что согласно (3) можно выразить общий исходящий из узла  $i \in I$  поток  $F(i) = \sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij}$  как функцию от объема потока по каждой исходящей дуге.

Элементы матрицы  $H$  вычисляются следующим образом:

$$H_{i,j} = \begin{cases} \beta_{j,i}, & \text{если } e_j \text{ – каноническая дуга, } i \neq j, (j, i) \in U, \\ - \sum_{k \in I_i^+(U)} \beta_{i,k}, & \text{если } e_j \text{ – каноническая дуга, } i = j, \\ 0, & \text{если } i \text{ и } j \text{ не соединены дугой.} \end{cases}$$

Матрица  $H$  имеет линейно зависимые строки, поскольку сумма всех ее строк равна нулю. Следовательно, ранг матрицы  $H$  меньше  $|I|$ .

**Теорема 2.** *Строки матрицы  $\tilde{H}$ , образованной в результате удаления из матрицы  $H$  строки с номером  $i^* \in \{1, \dots, |I|\}$ , являются линейно независимыми.*

Доказательство. Пусть  $|I| = n$  и узлы графа пронумерованы:  $1, \dots, n$ . Без ограничения общности предположим, что  $i^* = n$ , и обозначим  $\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_{n-1}$  строки матрицы  $\tilde{H}$ . Проведем доказательство от противного. Допустим, что строки  $\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_{n-1}$  матрицы  $\tilde{H}$  линейно зависимы. Тогда существуют

такие коэффициенты  $b_1, \dots, b_{n-1}$ ,  $\sum_{i=1}^{n-1} b_i^2 > 0$ , что

$$\sum_{i=1}^{n-1} b_i \tilde{H}_i = 0.$$

Умножим обе части последнего уравнения на вектор потока  $f^* = (f_{e_1}, \dots, f_{e_n})$ , содержащий значения дуговых потоков только через канонические дуги  $(e_1, \dots, e_n)$ . В результате получим

$$b_1 \tilde{H}_1 f^* + \dots + b_{n-1} \tilde{H}_{n-1} f^* = 0,$$

что равносильно выражению

$$b_1 \tilde{H}_{1,e_1} f_{e_1} + \dots + b_1 \tilde{H}_{1,e_n} f_{e_n} + b_2 \tilde{H}_{2,e_1} f_{e_1} + \dots + b_2 \tilde{H}_{2,e_n} f_{e_n} + \dots \\ \dots + b_{n-1} \tilde{H}_{n-1,e_1} f_{e_1} + \dots + b_{n-1} \tilde{H}_{n-1,e_n} f_{e_n} = 0.$$

По определению матрицы  $\tilde{H}$  имеем

$$\tilde{H}_{i,e_j} f_{e_j} = \beta_{j,i} f_{e_j} = f_{j,i}, \text{ если } i \neq j, \text{ и } \tilde{H}_{i,e_j} f_{e_j} = - \left( \sum_{k \in I_i^+(U)} \beta_{i,k} \right) f_{e_j} = - \sum_{k \in I_i^+(U)} f_{i,k}, \text{ если } i = j,$$

или

$$(\pm b_1 \mp b_2) f_{1,2} + \dots + (\pm b_1 \mp b_{n-1}) f_{1,n-1} + \\ + (\pm b_2 \mp b_1) f_{2,1} + \dots + (\pm b_2 \mp b_{n-1}) f_{2,n-1} + \dots \\ \dots + (\pm b_{n-1} \mp b_1) f_{n-1,1} + \dots + (\pm b_{n-1} \mp b_{n-2}) f_{n-1,n-2} + \\ + (\pm b_1 f_{1,n} \mp b_1 f_{n,1}) + \dots + (\pm b_{n-1} f_{n-1,n} \mp b_{n-1} f_{n,n-1}) = 0,$$

где знак первого элемента в каждой паре коэффициентов вида  $(\pm b_i \mp b_j)$  противоположен знаку второго элемента и зависит от направления дуги и  $f_{i,j} = 0$ , если узлы  $i$  и  $j$  не являются смежными. Поскольку данное выражение должно выполняться для всех возможных ненулевых значений потоковой функции, то все коэффициенты этого уравнения при значениях потока  $f_{i,j}$  должны быть равны нулю, т. е. имеем следующие соотношения:

$$\pm b_i \mp b_j = 0, \text{ где } f_{i,j} \neq 0, i \neq j, i < n, j < n, \quad (6)$$

$$b_k = 0, \text{ где } f_{k,n} \neq 0, \text{ или } f_{n,k} \neq 0, k < n. \quad (7)$$

Рассмотрим усеченную матрицу инцидентности  $\tilde{A}$ . Заметим, что каждый столбец этой матрицы содержит максимум два ненулевых элемента:  $+1, -1$ . Если рассмотреть линейную комбинацию строк матрицы  $\tilde{A}$  и коэффициентов  $b_1, \dots, b_{n-1}$ , то можно убедиться, что каждый элемент результирующего вектора имеется в левой части соотношений (6) – (7), однако согласно тем же соотношениям эти элементы должны быть равны нулю. Таким образом, имеем

$$b_1 \tilde{A}_1 + \dots + b_{n-1} \tilde{A}_{n-1} = 0.$$

Однако из данного выражения следует, что строки усеченной матрицы  $\tilde{A}$  являются линейно зависимыми, что противоречит теореме 1. Таким образом, строки матрицы  $\tilde{H}$  линейно независимы.

**Следствие 1.** *Рассмотрим усеченную матрицу  $\tilde{H}$ . Удалим из нее столбец, который соответствует канонической дуге узла  $i^*$ . Полученная матрица  $\hat{H}$  размерности  $(n-1) \times (n-1)$  является матрицей полного ранга.*

Доказательство. Проводится по схеме доказательства теоремы 2.

**Теорема 3.** Пусть  $G = (I, U)$  – связный двунаправленный ориентированный граф. Основой для моделирования процессов оценки потоков на ненаблюдаемой части графа  $G$  является недоопределенная система линейных алгебраических уравнений (1), при этом выполняется условие  $I^* = \emptyset$ . Известны коэффициенты  $p_{ij}$ ,  $(i, j) \in U$ , разбиения потока для всех дуг графа. Тогда достаточно одной наблюдаемой дуги графа  $G$  для вычисления значений дуговых потоков всего графа.

Доказательство. Пусть  $e_k$  – обозреваемая дуга, которая соответствует узлу  $k$ . Сформируем матрицу  $\tilde{H}$  для графа  $G$ , при этом канонической дугой для узла  $k$  является обозреваемая дуга  $e_k$ . Для дуги  $e_k$  известно численное значение  $f_{e_k}$  дугового потока. Используя соотношение (3), можно явно вычислить значения элементов столбца, соответствующего канонической дуге  $e_k$ , следующим образом:

$$f_{k,j} = \beta_{k,j} f_{e_k}. \quad (8)$$

Обозначим  $\tilde{H}^{(k)}$  столбец с элементами (8), соответствующий канонической дуге  $e_k$ . Сформируем вектор правой части:  $b = -\tilde{H}^{(k)}$ . Удалим столбец  $\tilde{H}^{(k)}$  из матрицы  $\tilde{H}$ . В результате получим матрицу  $\hat{H}$  размерности  $(n-1) \times (n-1)$ . Составим следующую систему:

$$\hat{H}x = b, \quad (9)$$

где  $x$  – вектор, содержащий значения дуговых потоков через канонические дуги, за исключением дуги  $e_k$ . Согласно следствию 1 матрица  $\hat{H}$  является матрицей полного ранга, а значит, таковой является и матрица  $\tilde{H}$ . Таким образом, система (9) имеет единственное решение, вычислив которое мы можем воспользоваться соотношениями (8) для вычисления значений потока для всех дуг графа  $G$ . Теорема доказана.

**Следствие 2.** Пусть  $G$  – связный ориентированный двунаправленный граф с функцией потока (1), содержащий  $k = |I^*|$  узлов с переменной интенсивностью. Известны коэффициенты  $p_{ij}$ ,  $(i, j) \in U$ , разбиения потока для всех дуг графа. Для определения численных значений дуговых потоков всего графа достаточно разместить  $k = |I^*|$  сенсоров в узлах множества  $I^*$ .

Доказательство. Обозначим:  $v_1, \dots, v_k$  – узлы с переменной интенсивностью  $x_i$ ,  $i \in I^*$ . Так как все узлы с переменной интенсивностью являются обозреваемыми, то известны априори численные значения  $x_i$ ,  $i \in I^*$  (т. е. разница между общим входящим и общим выходящим потоком каждого узла). Кроме этого, известны численные значения дуговых потоков для  $k$  канонических дуг. С учетом этого матрица  $\tilde{H}'$  преобразованной системы (1) содержит  $n - k$  неизвестных,  $n = |U|$ . Удалим из матрицы  $\tilde{H}'$  столбцы  $\tilde{H}'^{(v_1)}, \dots, \tilde{H}'^{(v_k)}$ , соответствующие узлам  $v_1, \dots, v_k$ , предварительно построив вектор правой части:  $b' = -\sum_{i=1}^k \tilde{H}'^{(v_i)}$ . В результате получим матрицу  $\hat{H}'$  размерности  $(n-k) \times (n-k)$ . Составим следующую систему:

$$\hat{H}'x = b, \quad (10)$$

где  $x$  – вектор, содержащий значения дуговых потоков через канонические дуги, за исключением дуги  $e_k$ . По теореме 2 матрица  $\hat{H}'$  является матрицей полного ранга, а значит, и  $\tilde{H}'$  – матрица полного ранга. Таким образом, из системы (10) однозначно определяются значения дуговых потоков для канонических дуг.

### Моделирование процессов оценки потоков на ненаблюдаемой части сети: субоптимальные решения

Стратегии полного перебора узлов графа  $G$  в целях поиска наименьшего числа  $|M|$  обозреваемых узлов и их конфигураций исследуемого класса NP-полных задач SLP, которые бы гарантировали полную наблюдаемость сети, можно применять для относительно небольших сетей. Определение оптимальной конфигурации расстановки сенсоров с использованием алгоритмов полного перебора вариантов

$$C_m^1 = m, C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}, \dots, C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

потребуется огромных вычислительных затрат даже для относительно малой размерности сети  $G = (I, U)$ ,  $m = |I|$ . В случае моделирования процесса трафика в масштабах крупных городов количество транспортных средств может достигать десятков тысяч и изменения величин дуговых потоков

и переменных интенсивностей узлов обычно лежат в широком диапазоне. В некоторых практических задачах дискретной оптимизации малейшие изменения значений отдельных параметров не оказывают существенного влияния на решения, поэтому некоторыми ограничениями на параметры реальной модели можно пренебречь и (или) включить дополнительные ограничения в математическую модель. Кроме этого, коэффициенты разбиения  $p_{ij}, (i, j) \in U$ , переменные интенсивности узлов  $x_i, i \in I^*$ , и дуговые потоки  $x_{ij}, (i, j) \in U$ , являются неточными данными (получены непосредственно из измерений, подвержены ошибкам округления). Один из способов выражения неточности данных, имеющий с пользовательской точки зрения хорошие свойства [6], опирается на интервальные матрицы и векторы. Интервальный вектор  $\mathbf{b}$  представляет собой матрицу-столбец  $\mathbf{b} = \{b : \underline{b} \leq b \leq \bar{b}\}$ , т. е.  $\mathbf{b} = [\underline{b}, \bar{b}] = [b_c - \delta, b_c + \delta]$ ,  $\underline{b}, \bar{b} \in \mathbb{R}^m$ , где  $b_c = \frac{1}{2}(\underline{b} + \bar{b})$  – средний вектор (вектор середин);  $\delta = \frac{1}{2}(\bar{b} - \underline{b})$  – неотрицательный вектор радиусов [6].

Для определения численных значений дуговых потоков графа  $G$  достаточно разместить  $k = |I^*|$  сенсоров в узлах множества  $M = I^*$  (следствие 2). Интервал изменения количества  $|M|$  обозреваемых узлов, гарантирующих полную наблюдаемость сети, равен  $[\underline{h}, \bar{h}]$ , где  $\underline{h} = 1$  и  $\bar{h} = |I^*|$ ,  $|M| \leq |I^*|$ . Следовательно, верхняя граница  $\bar{h}$  интервала  $[\underline{h}, \bar{h}]$  уменьшилась до значения  $|I^*|$  по сравнению с первоначальным значением  $\bar{h} = |I|$ . В реальных моделях относительно небольшие изменения переменной интенсивности  $x_i, i \in I^*$ , не оказывают существенного влияния на решения. Для численных значений переменной интенсивности  $x_i, i \in I^*$ , введем порог интенсивности  $t$  (*intensity threshold*),  $t > 0$ . Пусть величины данного порога изменяются в интервале  $[\underline{t}, \bar{t}]$ ,  $\underline{t} > 0$ ,  $\bar{t} = V$ . Границы последнего  $\underline{t} > 0$  и  $\bar{t} = V$  определяются опытным путем. С пользовательской точки зрения значения порога интенсивности из интервала  $[\underline{t}, \bar{t}]$  не должны оказывать существенного влияния на решения задачи.

Выберем некоторое численное значение порога интенсивности  $t \in [\underline{t}, \bar{t}]$ . Определим множество узлов  $\tilde{I}^*, \tilde{I}^* \subseteq I^*$ , для которых выполняются неравенства

$$|x_i| < t, i \in \tilde{I}^*. \quad (11)$$

Исключим из  $I^*$  те узлы, для которых выполнены условия (11). Обновим множество  $I^*$  узлов графа  $G$  с переменной интенсивностью  $x_i, i \in I^*$ , следующим образом:  $I^* = I^* \setminus \tilde{I}^*$ . Очевидно, что для переменных интенсивностей  $x_i, i \in I^*$ , обновленного множества  $I^*$  выполнены соотношения  $|x_i| \geq t, i \in I^*$ . Для новых множеств узлов  $I^*$  и  $I \setminus I^*$  графа  $G$  представим систему (1). После расположения сенсоров в узлах обновленного множества  $I^*$  и обработки полученной априорной информации (2), (3) получим разреженную систему линейных алгебраических уравнений (4)–(5), единственность решения  $x = (x_{ij}, (i, j) \in \bar{U}, x_i, i \in \bar{I}^*)$  которой гарантирует полную наблюдаемость сети  $G$ .

Сформулируем задачу поиска *субоптимального* ( $t$ -оптимального) решения задачи расположения сенсоров в узлах графа  $G = (I, U)$  для оценки дуговых потоков и переменных интенсивностей узлов: для заданного порога интенсивности  $t, |x_i| \geq t, i \in \bar{I}^*$ , найти такое подмножество  $M$  узлов графа  $G$ ,  $M \subseteq I$ , чтобы соответствующая система (4)–(5) имела единственное решение.

Субоптимальные решения экстремальных задач рассматривались и ранее. Исследованию  $\epsilon$ -оптимальных (субоптимальных) решений экстремальных задач специального вида, приемлемых по значению целевой функции, посвящены работы [7; 8]. Общий подход к построению  $k$ -оптимальных решений кратчайших путей в динамическом программировании рассматривается в работах [9; 10]. Интерес к построению таких решений повышается в связи с крупными изменениями используемых вычислительных средств, улучшением характеристик вычислительной техники, ее быстродействия и оперативной памяти, появлением многопроцессорных систем и новых возможностей организации вычислительных процессов, заложенных в высокоуровневых языках программирования, которые имеют в своем наличии дополнительные структуры и библиотеки для прикладного использования. Вычислительная сторона задачи существенно меняется в зависимости от того, перебор какого количества субоптимальных решений необходимо выполнить.

Естественным является следующий подход: перебирать  $t$ -оптимальные решения для различных численных значений порога интенсивности  $t$  из интервала  $[\underline{t}, \bar{t}]$  до тех пор, пока не встретится  $t$ -оптимальное решение, которое является приемлемым по числу сенсоров  $|M| = |I^*|$  и значению  $t$  порога



интенсивности. Далее для выбранного  $t$ -оптимального решения применяются стратегии случайного поиска с целью уменьшить число  $|M|$  обозреваемых узлов.

### Численные результаты построения субоптимальных решений задачи расположения сенсоров на реальных данных

Численные результаты построения субоптимальных решений задачи расположения сенсоров для оценки дуговых потоков на ненаблюдаемых частях сетей получены для реальных данных (сети  $G_1, G_2$ ) с использованием ПЭВМ Intel G3900, 16 Гб ОЗУ, и применением возможностей стандартных библиотек высокоуровневого языка программирования Python распараллеливания на четырех потоках. Характеристики сетей  $G_1$  и  $G_2$  приведены ниже. В таблице представлены субоптимальные решения на реальных данных для различных значений порога интенсивности  $t$ .

Разработано приложение на языке программирования Python 3 для считывания информации со специальных программируемых устройств (сенсоров) и построения субоптимального решения для фиксированного порога интенсивности из заданного интервала. Входные данные и результаты численного решения задачи SLP хранятся в СУБД *PostgreSQL 10*. Визуализация расположения сенсоров осуществляется в геоинформационной системе *Quantum GIS*. Пересчет данных о транспортных потоках на ненаблюдаемой части сети осуществляется на основе априорной информации, полученной от сенсоров. Разработан программный комплекс для визуализации сенсорной конфигурации обозреваемых узлов субоптимального решения задачи SLP, которое для заданного порога интенсивности  $t$  гарантирует полную наблюдаемость сети.

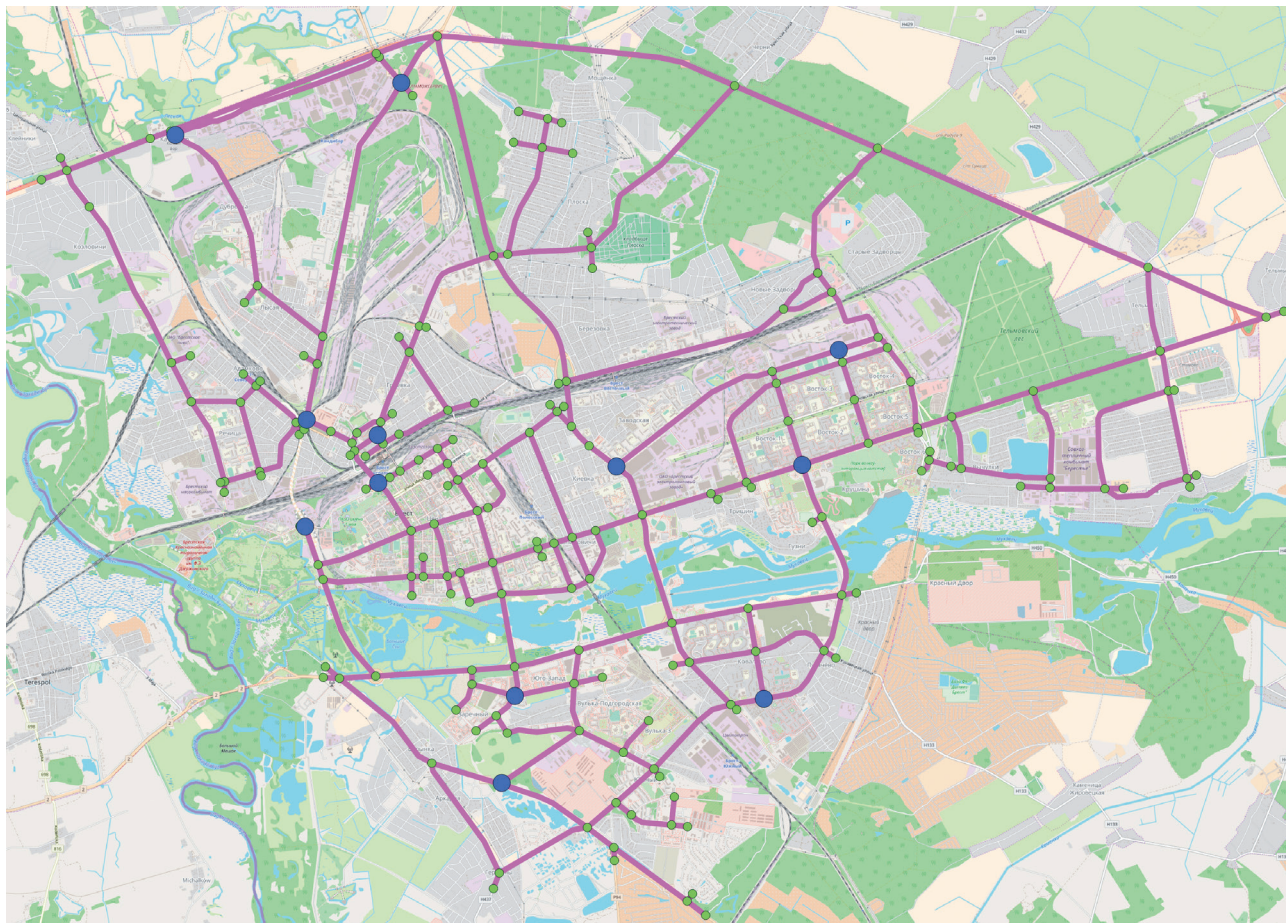
#### Субоптимальные решения задачи SLP для реальных сетей при различных значениях порога интенсивности

#### The results of solving the sensor location problem for different values of the intensity threshold

Параметры сети	Порог интенсивности $t$	Начальное число обозреваемых узлов	Конечное число обозреваемых узлов	Число обусловленности матрицы	Ранг матрицы	Время вычисления дуговых потоков, с
$G_1 = (I_1, U_1),$ $ I_1  = 81,  U_1  = 234$	5	78	29	245	101	0,028
	20	71	51	169	50	0,013
	50	58	39	205	61	0,025
	70	53	18	1839	98	0,021
	100	38	11	33 820	97	0,013
	150	23	7	143 900	90	0,014
	200	14	5	696 080	85	0,014
	300	9	5	27 474	80	0,012
$G_2 = (I_2, U_2),$ $ I_2  = 99,  U_2  = 258$	5	99	66	466	71	0,004
	20	88	54	30 009	84	0,017
	50	71	54	284	67	0,019
	70	60	21	39 894	122	0,013
	100	51	17	55 798	121	0,021
	150	36	12	12 528	116	0,028
	200	24	7	596 980	114	0,020
	300	15	5	383 341	109	0,020

На рисунке представлены результаты визуализации сенсорной конфигурации обозреваемых узлов субоптимального решения задачи SLP, которое для заданного порога интенсивности  $t = 150$  гарантирует полную наблюдаемость сети  $G_2$ .





Сенсорная конфигурация обозреваемых узлов (синяя заливка), гарантирующая полную наблюдаемость сети  $G_2 = (I_2, U_2)$ ,  $|I_2| = 99$ ,  $|U_2| = 258$ ,  
при пороге интенсивности  $t = 150$ ,  $|M| = 12$

Sensory configuration of the observed nodes of the set  $M$  (blue fill),  
which is guarantees full observability of the network  $G_2 = (I_2, U_2)$ ,  $|I_2| = 99$ ,  $|U_2| = 258$ ,  
for given the threshold of intensity  $t = 150$ ,  $|M| = 12$

Получены численные результаты построения субоптимальных решений и представлена визуализация сенсорной конфигурации обозреваемых узлов, которая гарантирует полную наблюдаемость сети.

### Библиографические ссылки

1. Bianco L, Confessore G, Gentili M. Combinatorial aspects of the sensor location problem. *Annals of Operation Research*. 2006;144(1):201–234. DOI: 10.1007/s10479-006-0016-9.
2. Bianco L, Confessore G, Reverberi P. A network based model for traffic sensor location with implication in O/D matrix estimates. *Transportation Science*. 2001;35(1):50–60. DOI: 10.1287/trsc.35.1.50.10140.
3. Pilipchuk LA. *Sparse Linear Systems and Their Applications*. Minsk: Belarusian State University; 2013.
4. Bianco L, Cerrone C, Cerulli R, Gentili M. Locating sensors to observe network arc flows: exact and heuristic approaches. *Computers and Operation Research*. 2014;46:12–22. DOI: 10.1016/j.cor.2013.12.013.
5. Pilipchuk LA, Pilipchuk AS. Sparse linear systems: theory of decomposition, methods, technology, applications and implementation in Wolfram Mathematica. *AIP Conference Proceedings*. 2015;1690(1):060006. DOI: 10.1063/1.4936744.
6. Фидлер М, Недома Й, Рамик Я, Рон И, Циммерманн К. Задачи линейной оптимизации с неточными данными. Москва: Институт компьютерных исследований; 2008.
7. Габасов Р, Кириллова ФМ, Костюкова ОИ. *Конструктивные методы оптимизации. Ч. 3. Сетевые задачи*. Минск: БГУ; 1986.
8. Pilipchuk L, Pilipchuk A, Pesheva Y. Algorithms for construction of optimal and suboptimal solutions in network optimization problems. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2009;54(2):193–205.
9. Романовский ИВ. Субоптимальные решения. Петрозаводск: Издательство Петрозаводского университета; 1998.
10. Романовский И. В. Перебор субоптимальных решений в дискретных задачах оптимизации. *Компьютерные инструменты в образовании*. 2012;6:25–34.

## References

1. Bianco L, Confessore G, Gentili M. Combinatorial aspects of the sensor location problem. *Annals of Operation Research*. 2006;144(1):201–234. DOI: 10.1007/s10479-006-0016-9.
2. Bianco L, Confessore G, Reverberi P. A network based model for traffic sensor location with implication in O/D matrix estimates. *Transportation Science*. 2001;35(1):50–60. DOI: 10.1287/trsc.35.1.50.10140.
3. Pilipchuk LA. *Sparse Linear Systems and Their Applications*. Minsk: Belarusian State University; 2013.
4. Bianco L, Cerrone C, Cerulli R, Gentili M. Locating sensors to observe network arc flows: exact and heuristic approaches. *Computers and Operation Research*. 2014;46:12–22. DOI: 10.1016/j.cor.2013.12.013.
5. Pilipchuk LA, Pilipchuk AS. Sparse linear systems: theory of decomposition, methods, technology, applications and implementation in Wolfram Mathematica. *AIP Conference Proceedings*. 2015;1690(1):060006. DOI: 10.1063/1.4936744.
6. Fidler M, Nedoma I, Ramik Ya, Ron I, Tsimmermann K. *Zadachi lineinoi optimizatsii s netochnymi dannymi* [Problems of linear optimization with inaccurate data]. Moscow: Institute for Computer Studies; 2008. Russian.
7. Gabasov R, Kirillova FM, Kostyukova OI. *Konstruktivnye metody optimizatsii. Chast' 3. Setevye zadachi* [Constructive optimization methods. Part 3. Network tasks]. Minsk: Belarusian State University; 1986. Russian.
8. Pilipchuk L, Pilipchuk A, Pesheva Y. Algorithms for construction of optimal and suboptimal solutions in network optimization problems. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2009;54(2):193–205.
9. Romanovskii IV. *Suboptimal'nye resheniya* [Suboptimal solutions]. Petrozavodsk: Izdatel'stvo Petrozavodskogo universiteta; 1998. Russian.
10. Romanovskii I. V. [Survey of suboptimal solutions in discrete optimization problems]. *Komp'yuternye instrumenty v obrazovanii*. 2012;6:25–34. Russian.

Статья поступила в редакцию 07.02.2018.  
Received by editorial board 07.02.2018.

## АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ В БГУ РАБОТ INDICATIVE ABSTRACTS OF THE PAPERS DEPOSITED IN THE BSU

*УДК 519.72(075.8)+004.056.55(075.8)*

*Овсянников А. В. Теория информации и кодирования [Электронный ресурс] : учеб.-метод. комплекс для спец. 1-21 06 01-01 «Современные иностранные языки (преподавание)». Ч. 1 / А. В. Овсянников ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2018. 94 с. : ил. Библиогр.: с. 91, 94. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/193396>. Загл. с экрана. Деп. 27.03.2018, № 002227032018.*

Учебно-методический комплекс содержит материал, включающий фундаментальные понятия информации, энтропии, избыточности, кодирования, сжатия данных, эффективности систем передачи информации. Комплекс представлен теоретическим разделом с контрольными вопросами и лабораторным практикумом, а также учебной программой дисциплины. Адресуется студентам специальности «Современные иностранные языки (преподавание)» факультета социокультурных коммуникаций БГУ. Может быть использован в процессе изучения информационно-коммуникационных технологий, связанных с системами распознавания и обработки образов, сигналов, речевой и мультимедийной информации.

*УДК 004:378.147.091.313(075.8)*

**Методические рекомендации по подготовке и защите дипломных работ для студентов первой ступени высшего образования специальности 1-26 03 01 «Управление информационными ресурсами» [Электронный ресурс] / сост.: Ю. Н. Силкович [и др.] ; ИБМТ БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2018. 48 с. : табл. Библиогр.: с. 48. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/194326>. Загл. с экрана. Деп. 20.04.2018, № 003020042018.**

Представлены общие требования к содержанию, структуре, оформлению дипломных работ, порядок их подготовки и защиты для студентов специальности 1-26 03 01 «Управление информационными ресурсами».

## СОДЕРЖАНИЕ

### ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

<i>Матвеев Г. В., Матулис В. В.</i> Совершенная верификация модулярной схемы .....	4
<i>Адмиралова А. Н., Беняш-Кривец В. В.</i> О многообразиях представлений некоторых HNN-расширений свободных групп .....	10

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

<i>Гладков А. Л., Никитин А. И.</i> О множестве разрушения решений начально-краевой задачи для системы параболических уравнений с нелокальными граничными условиями .....	17
<i>Калитин Б. С.</i> Об устойчивости дифференциальных уравнений третьего порядка .....	25

### ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

<i>Павлив Д. А.</i> Об использовании групп симметрий Ли для моделей временной структуры доходности процентных ставок с нелинейными функциями дрейфа и квадрата волатильности .....	34
<i>Долгалёва М. К., Харин Ю. С.</i> Асимптотический анализ статистических оценок параметров биномиальной условно авторегрессионной модели пространственно-временных данных .....	47

### ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

<i>Королевич В. В.</i> Стационарные температурные поля в анизотропных кольцевых пластинах переменной толщины с учетом теплообмена с внешней средой .....	58
--	----

### ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

<i>Пилипчук Л. А., Пилипчук А. С., Полячок Е. Н., Фаразей А. И.</i> Идентификация сенсорной конфигурации и управление потоками .....	67
Аннотации депонированных в БГУ работ .....	77

## CONTENTS

### GEOMETRY AND ALGEBRA

<i>Matveev G. V., Matulis V. V.</i> Perfect verification of modular scheme.....	4
<i>Admiralova A. N., Beniash-Kryvets V. V.</i> On representation varieties of some HNN-extensions of free groups .....	10

### DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

<i>Gladkov A. L., Nikitin A. I.</i> On blow-up set of solutions of initial boundary value problem for a system of parabolic equations with nonlocal boundary conditions .....	17
<i>Kalitine B. S.</i> On the stability of third order differential equations .....	25

### THEORY OF PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

<i>Pauliu D. A.</i> On the usage of the Lie group symmetries for term structure models with nonlinear drift and squared volatility functions .....	34
<i>Dauhaliova M. K., Kharin Yu. S.</i> Asymptotic analysis of statistical estimators of parameters for binomial conditionally autoregressive model of spatio-temporal data .....	47

### THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

<i>Karalevich U. V.</i> Stationary temperature fields in the anisotropic ring plates of variable thickness considering the heat exchange with external environment.....	58
---	----

### INFORMATICS, COMPUTER SCIENCE AND MANAGEMENT

<i>Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. S., Polyachok E. N., Farazei A. I.</i> Identification of the sensors configuration and flows control .....	67
---	----

Indicative abstracts of the papers deposited in the BSU.....	77
--	----



*Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области математики и информатики).*

*Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ).*

**Журнал Белорусского  
государственного университета.  
Математика. Информатика.  
№ 2. 2018**

Учредитель:  
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4,  
220030, г. Минск.

Почтовый адрес: пр. Независимости, 4,  
220030, г. Минск.

Тел. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: [jmathinf@bsu.by](mailto:jmathinf@bsu.by)

«Журнал Белорусского государственного  
университета. Математика. Информатика»  
издается с января 1969 г.  
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ.  
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»  
(ISSN 1561-834X).

Редактор *Т. Р. Джум*  
Технический редактор *Ю. А. Тарайковская*  
Корректор *Л. А. Меркуль*

Подписано в печать 23.07.2018.  
Тираж 125 экз. Заказ 233.

Республиканское унитарное предприятие  
«Информационно-вычислительный центр  
Министерства финансов Республики Беларусь».  
ЛП № 02330/89 от 03.03.2014.  
Ул. Кальварийская, 17, 220004, г. Минск.

© БГУ, 2018

**Journal  
of the Belarusian State University.  
Mathematics and Informatics.  
No. 2. 2018**

Founder:  
Belarusian State University

Registered address: 4 Niezaliežnasci Ave.,  
Minsk 220030.

Correspondence address: 4 Niezaliežnasci Ave.,  
Minsk 220030.

Tel. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: [jmathinf@bsu.by](mailto:jmathinf@bsu.by)

«Journal of the Belarusian State University.  
Mathematics and Informatics»  
published since January, 1969.  
Until 2017 named «Vestnik BGU.  
Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika»  
(ISSN 1561-834X).

Editor *T. R. Dzhum*  
Technical editor *Y. A. Taraikouskaya*  
Proofreader *L. A. Merkul'*

Signed print 23.07.2018.  
Edition 125 copies. Order number 233.

Republican Unitary Enterprise  
«Informatsionno-vychislitel'nyi tsentr  
Ministerstva finansov Respubliki Belarus'».  
License for publishing No. 02330/89, 3 March, 2014.  
17 Kal'varyjskaja Str., Minsk 220004.

© BSU, 2018