



БЕЛОРУССКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ЖУРНАЛ
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА ИНФОРМАТИКА

JOURNAL
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

MATHEMATICS and INFORMATICS

Издается с января 1969 г.
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)

Выходит три раза в год

1

2018

МИНСК
БГУ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор **ХАРИН Ю. С.** – доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси; директор Научно-исследовательского института прикладных проблем математики и информатики БГУ, заведующий кафедрой математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: kharin@bsu.by

Ответственный секретарь **МАТЕЙКО О. М.** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: matseika@bsu.by

- Абламейко С. В.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Альтенбах Х. Магдебургский университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия.
Беняш-Кривец В. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Гладков А. Л. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Головко В. А. Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь.
Гороховик В. В. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Громак В. И. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Демидо Г. Институт математики и информатики Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва.
Дудкин А. А. Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Дымков М. П. Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь.
Егоров А. Д. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Жоландек Х. Институт математики Варшавского университета, Варшава, Польша.
Журавков М. А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Зубков А. М. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.
Кашин Б. С. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Княжище Л. Б. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Кожанов А. И. Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.
Котов В. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Краснопрошин В. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Кротов В. Г. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Макаров Е. К. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Мандрик П. А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Матус П. П. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Медведев Д. Г. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Михасев Г. И. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Ровба Е. А. Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Гродно, Беларусь.
Сафонов В. Г. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Скиба А. Н. Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель, Беларусь.
Тузигов А. В. Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Чижик С. А. Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Янчевский В. И. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

EDITORIAL BOARD

- Editor-in-chief** **KHARIN Y. S.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor, corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus; director of the Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, head of the department of mathematical modelling and data analysis of the faculty of applied mathematics and computer science of the Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: kharin@bsu.by
- Executive secretary** **MATEIKO O. M.**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of general mathematics and computer science of the faculty of mechanics and mathematics of the Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: matseika@bsu.by
- Ablameyko S. V.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Altenbach H. Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany.
Beniash-Kryvets V. V. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Gladkov A. L. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Golovko V. A. Brest State Technical University, Brest, Belarus.
Gorokhovich V. V. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Gromak V. I. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Dzemyda G. Institute of Mathematics and Informatics of the Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
Doudkin A. A. United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Dymkov M. P. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Egorov A. D. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Zoladek H. Mathematics Institute of the University of Warsaw, Warsaw, Poland.
Zhuravkov M. A. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Zubkov A. M. Lomonosov Moscow State University, Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
Kashin B. S. Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Knyazhishche L. B. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Kozhanov A. I. Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia.
Kotov V. M. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Krasnoproshin V. V. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Krotov V. G. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Makarov E. K. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Mandrik P. A. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Matus P. P. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Medvedev D. G. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Mikhasev G. I. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Rovba E. A. Yanka Kupala Grodno State University, Grodno, Belarus.
Safonov V. G. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Skiba A. N. Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus.
Tuzikov A. V. Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Chizhik S. A. National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Yanchevskii V. I. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

УДК 517.986

2-ОДНОРОДНЫЕ C^* -АЛГЕБРЫ С ПРОСТРАНСТВОМ ПРИМИТИВНЫХ ИДЕАЛОВ, ГОМЕОМОРФНЫМ ДВУМЕРНОМУ ОРИЕНТИРУЕМОМУ КОМПАКТНОМУ СВЯЗНОМУ МНОГООБРАЗИЮ, ПОРОЖДЕННЫЕ ИДЕМПОТЕНТАМИ

М. В. ЩУКИН¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет,
пр. Независимости, 65, 220013, г. Минск, Беларусь

Ранее было доказано, что каждая n -однородная C^* -алгебра изоморфна алгебре всех непрерывных сечений соответствующего алгебраического расслоения. При этом база расслоения есть пространство идеалов этой алгебры в оболочечно-ядерной топологии. С использованием этой реализации в настоящей работе рассмотрена 2-однородная C^* -алгебра A с пространством примитивных идеалов, гомеоморфным двумерному компактному связному ориентируемому многообразию. Нами сконструированы три идемпотента из алгебры A таких, что наименьшая банахова алгебра, их содержащая, совпадает с алгеброй A .

Ключевые слова: C^* -алгебра; идемпотент; конечномерные неприводимые представления; операторная алгебра; порождающие элементы.

Образец цитирования:

Щукин М. В. 2-Однородные C^* -алгебры с пространством примитивных идеалов, гомеоморфным двумерному ориентируемому компактному связному многообразию, порожденные идемпотентами // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 4–9.

For citation:

Shchukin M. V. 2-Homogeneous C^* -algebras with the space of primitive ideals homeomorphic to a two-dimensional oriented compact connected manifold generated by idempotents. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2018. No. 1. P. 4–9 (in Russ.).

Автор:

Михаил Владимирович Щукин – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики № 1 факультета информационных технологий и робототехники.

Author:

Mikhail V. Shchukin, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics No. 1, faculty of information technology and robotics.
mvs777777@gmail.com

2-HOMOGENEOUS C^* -ALGEBRAS WITH THE SPACE OF PRIMITIVE IDEALS HOMEOMORPHIC TO A TWO-DIMENSIONAL ORIENTED COMPACT CONNECTED MANIFOLD GENERATED BY IDEMPOTENTS

M. V. SHCHUKIN^a

^aBelarusian National Technical University, 65 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220013, Belarus

Before showed in 1961 that every n -homogeneous C^* -algebra is isomorphic to the algebra of all continuous sections for the appropriate algebraic bundle. The base space for the bundle is homeomorphic to the space of primitive ideals for the algebra in the appropriate topology. By using that we considered the 2-homogeneous C^* -algebra A such that the space of primitive ideals of the algebra is homeomorphic to a two-dimensional compact oriented connected manifold. We constructed three idempotents from the algebra A that generated the algebra.

Key words: C^* -algebra; idempotent; finite-dimensional irreducible representations; operator algebras; number of generators.

Интерес к C^* -алгебрам, порожденным идемпотентами, появился в связи с применением в теории сингулярных интегральных операторов. Алгебра сингулярных интегральных операторов над простым контуром может быть реализована как алгебра, порожденная двумя идемпотентами. Такие алгебры могут иметь неприводимые представления размерности только 1 и 2. В работе [1] описана структура пространства представлений банаховых алгебр, порожденных N идемпотентами с некоторыми конкретными соотношениями между ними. В работе [2] описана структура n -однородных C^* -алгебр с пространством примитивных идеалов, гомеоморфным двумерной сфере S^2 . Используя эту реализацию, в работах [3; 4] доказано, что любая n -однородная ($n \geq 2$) C^* -алгебра с пространством примитивных идеалов $Prim A$, гомеоморфным двумерной сфере S^2 , может быть порождена тремя идемпотентами и не может быть порождена двумя идемпотентами. В работах [5; 6] найдено минимальное число идемпотентов, порождающих некоторые C^* -алгебры и матричные алгебры. В настоящей работе нами доказывается, что любая 2-однородная C^* -алгебра над компактным двумерным связным ориентируемым многообразием может быть порождена тремя идемпотентами. Для этого мы используем результаты работы [7], в которой описана структура n -однородных C^* -алгебр с пространством примитивных идеалов, гомеоморфным двумерному ориентируемому компактному связному многообразию.

Для доказательства основных результатов нам понадобится реализация n -однородных C^* -алгебр над компактным двумерным многообразием.

Предложение 1 [8]. *Компактное двумерное связное ориентируемое многообразие гомеоморфно сфере P_k с приклеенными k ручками.*

Пусть задана n -однородная C^* -алгебра A над пространством P_k . Вырежем из множества P_k часть сферы D , гомеоморфную открытому кругу.

Предложение 2 [7]. *Ограничение расслоения ξ_A на множество $P_k \setminus D$ тривиально.*

Реализуем множество $P_k \setminus D$ как верхнюю часть единичной сферы с k ручками. Пусть B_V обозначает алгебру непрерывных квадратных матриц-функций на $P_k \setminus D$ порядка n с дополнительным условием на границе:

$$a(z) = V^{-1}(z)a(1)V(z), \quad a(z) \in B_V, \quad V(z) = \begin{pmatrix} z^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

где z – комплексная координата на плоскости. Высоту точки над плоскостью обозначим через h .

Предложение 3 [7]. *Алгебра A изоморфна одной из алгебр B_V .*

Реализуем $P_k \setminus D$ как верхнюю полусферу радиусом 1 с k ручками, которые не выходят за пределы цилиндра радиусом 1 и высотой $\frac{1}{2}$. Имеет место результат, аналогичный предложению 3.

Предложение 4. *Алгебра A над P_k изоморфна одной из алгебр B_V , где B_V – алгебра над $P_k \setminus D$, определяемая соотношениями:*

$$a(z) = V(z)a(1)V^{-1}(z), \quad a(z) \in B_V, \quad V(z) = \begin{pmatrix} z^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ для } z \in S^1 = \delta D.$$

Некоторые результаты исследования структуры C^* -алгебр B_V

Обозначим через E_{ij} квадратную матрицу порядка n , у которой на пересечении i -й строки и j -го столбца стоит число 1, а остальные элементы этой матрицы равны 0.

Лемма 1. Алгебру B_V , рассматриваемую как модуль над своим центром, изоморфным $C(P_k)$, можно реализовать как прямую сумму модулей

$$B_V = E_{11}C(P_k) \oplus E_{12}B_m \oplus \dots \oplus E_{1n}B_m \oplus E_{s1}B_{-m} \oplus E_{st}C(P_k),$$

где $C(P_k)$ – алгебра всех непрерывных функций на P_k . Модуль B_m состоит из функций $a(z) \in C(P_k \setminus D)$, удовлетворяющих дополнительно условию на границе $a(z) = z^m \cdot a(1)$, $z \in S^1 = \delta D$.

Доказательство. Любой элемент $g \in B_V$ имеет вид $g(x, y, h) \in C(P_k \setminus D, C^{n \times n})$, $(x, y, h) \in R^3$, удовлетворяющий при $h = 0$ условию

$$g(z) = \begin{pmatrix} z^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11}(1) & g_{12}(1) & \dots & g_{1n}(1) \\ g_{21}(1) & g_{22}(1) & \dots & g_{2n}(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1}(1) & g_{n2}(1) & \dots & g_{nm}(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{-m} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$g(z) = \begin{pmatrix} g_{11}(1) \cdot |z|^{2m} & g_{12}(1) \cdot z^m & \dots & g_{1n}(1) \cdot z^m \\ g_{21}(1) \cdot z^{-m} & g_{22}(1) & \dots & g_{2n}(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1}(1) \cdot z^{-m} & g_{n2}(1) & \dots & g_{nm}(1) \end{pmatrix}.$$

Поскольку $z \in S^1$, то $|z|=1$. Тогда $g_{11}(z) = g_{11}(1)$ и функцию g_{11} можно рассматривать как функцию на P_k . Функции g_{ij} ($2 \leq i, j \leq n$) также можно рассматривать как функции из $C(P_k)$. Функции $g_{1j}(x, y, h)$ ($2 \leq j \leq n$) образуют модуль B_m , функции $g_{i1}(x, y, h)$ ($2 \leq i \leq n$) порождают модуль B_{-m} . Лемма доказана.

Лемма 2. Если функции $f_1, \dots, f_t \in B_m$ ($-(n-1) \leq m \leq n-1$) и в любой точке $x_0 \in P_k \setminus D$ $\exists i \in \overline{1, t}$, $\exists i \in \overline{1, t}$, $f_i(x_0) \neq 0$, то $B_m = f_1 \cdot C(P_k) + \dots + f_t \cdot C(P_k)$.

Доказательство. Рассмотрим для каждой точки $x_0 \in P_k \setminus D$ открытый шар U_{x_0} радиусом $r(x_0)$ такой, что некоторая функция $f_i(x) \neq 0$, $x \in 2U_{x_0} \cap (P_k \setminus D)$. Здесь $2U_{x_0}$ обозначает шар радиусом $2r(x_0)$ и с тем же центром, что и U_{x_0} . При этом, если $x_0 \in S^1 = \delta D$, то $f_i(z) = z^m \cdot f_i(1) \neq 0$ при $z \in S^1$. Для точки $x_0 \in S^1$ выберем так окрестность U_{x_0} , чтобы $S^1 \subset U_{x_0}$. В этом случае множество $U_{x_0} = \bigcup_{z \in S^1} U_z$. Поскольку $P_k \setminus D$ компактно, то существует конечное подпокрытие U_1, \dots, U_s . Возьмем разбиение единицы h_1, \dots, h_s , подчиненное покрытию U_1, \dots, U_s . Тогда функцию $f \in B_m$ можно представить в виде $f = fh_1 + \dots + fh_s$. В силу выбора окрестностей U_i $\forall i \in \overline{1, t}$, $\exists n(i)$, $f_{n(i)}(x) \neq 0$, $x \in (2U_i) \cap (P_k \setminus D)$. Тогда на $\overline{U_i}$ существует и ограничена функция $\frac{1}{f_{n(i)}}$. По лемме Титце – Брауэра – Урысона она продолжается до непрерывной функции

$\frac{1}{f_{n(i)}^*}$, определенной на всем P_k . Теперь получаем, что $f = f \cdot h_1 \cdot f_{n(1)} \cdot \frac{1}{f_{n(1)}^*} + \dots + f \cdot h_s \cdot f_{n(s)} \cdot \frac{1}{f_{n(s)}^*}$. Функции $f \cdot h_i \cdot \frac{1}{f_{n(i)}^*} \in C(P_k)$, следовательно, получено требуемое разложение.

Обратно, модуль $f_i \cdot C(P_k) \subset B_m$ по определению модуля B_m , тогда $f_1 \cdot C(P_k) + \dots + f_i \cdot C(P_k) \subset B_m$. Лемма доказана.

Лемма 3. Любой элемент $f \in C(P_k \setminus D) \setminus \{f(z) = f(1), z \in \delta D\}$ может быть представлен в виде $f = f_1 g_1 + f_2 g_2$, где $f_i \in B_m, g_i \in B_{-m}$.

Доказательство. Алгебра непрерывных функций $C(P_k \setminus D)$ с условием $f(z) = f(1), z \in \delta D$, изоморфна алгебре $C(P_k)$.

Возьмем покрытие U_1, U_2 множества P_k такое, что U_1 содержит точку x_1 пересечения $P_k \setminus D$ и оси Oh и не содержит точек $z \in S^1 = \delta D$, \bar{U}_2 не содержит точку x_1 .

Пусть h_1, h_2 – разбиение единицы для покрытия U_1 и U_2 . Возьмем $f_2 = \sqrt{fh_2} \cdot \frac{z}{|z|}, g_2 = \sqrt{fh_2} \cdot \frac{\bar{z}}{|z|}$, где $\sqrt{fh_2}$ обозначает в обоих случаях одну и ту же ветвь корня. Эти функции определены, так как $\frac{1}{|z|} > 0$ ограничено снизу на множестве \bar{U}_2 . Далее, положим $f_1 = \sqrt{fh_1}, g_1 = \sqrt{fh_1}$, где выбрано одинаковое значение корня в обоих случаях. Тогда $f_1 \in B_m$ и $g_1 \in B_{-m}$, так как $\sqrt{fh_1}(z) = 0$ при $z \in S^1 = \delta D$. Справедлив следующий ряд равенств: $f = fh_1 + fh_2 = \sqrt{fh_1} \cdot \sqrt{fh_1} + \sqrt{fh_2} \cdot \frac{z}{|z|} \cdot \sqrt{fh_2} \cdot \frac{\bar{z}}{|z|} = f_1 g_1 + f_2 g_2$, из которого следует утверждение леммы. Лемма доказана.

2-Однородные C^* -алгебры над двумерными компактными связными ориентируемыми многообразиями

Следующая теорема является основным результатом данной работы.

Теорема 1. Пусть A обозначает 2-однородную C^* -алгебру над двумерным компактным связным ориентируемым многообразием P_k . Тогда алгебра A может быть порождена тремя идемпотентами. Доказательство. Пусть A_1 обозначает 2-однородную C^* -алгебру

$$B_V, V(z) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим идемпотенты

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & h_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h_1 & 0 \end{bmatrix}, P_3 = \frac{1}{1 + |f|^2} \begin{bmatrix} 1 & f \\ \bar{f} & |f|^2 \end{bmatrix},$$

где h_1, f, \bar{f} обозначают следующие функции: $h_1(x, y, h) = h, f(x, y, h) = x + iy, \bar{f}(x, y, h) = x - iy$. Проверить, являются ли матрицы-функции P_1, P_2, P_3 идемпотентами, можно непосредственным вычислением. Идемпотенты P_1, P_2, P_3 принадлежат алгебре A_1 по определению алгебры A_1 .

Пусть B – наименьшая банахова алгебра, содержащая P_1, P_2, P_3 . Рассмотрим произведение $P_1 \cdot P_2 = \begin{bmatrix} 1 + h_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Функция $1 + h_1^2$ разделяет точки множества $h \in [0, 1]$ и нигде не обращается в нуль, значит, она порождает алгебру непрерывных функций $C(h)$. Другими словами, для любой функции $h_2 \in C(h)$ существует последовательность многочленов $M_n(1 + h_1^2)$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(1 + h_1^2) = h_2$. Тогда

$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(P_1 \cdot P_2) = \begin{bmatrix} h_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Отсюда следует, что алгебра матриц-функций $\begin{bmatrix} C(h) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \subset B$, в частности

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B.$$

Элемент $E_{11} \cdot P_3 \cdot E_{11} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+|f|^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B$. Этот элемент порождает алгебру $\begin{bmatrix} C(|f|) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \subset B$. В част-

ности, $\begin{bmatrix} 1+|f|^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B$.

Элемент $\begin{bmatrix} 1+|f|^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot P_3 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B$ и также $P_3 \cdot \begin{bmatrix} 1+|f|^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B$.

Далее, элементы $P_2 - E_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h & 0 \end{bmatrix} \in B$, $P_1 - E_{11} = \begin{bmatrix} 0 & h \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B$.

Элементы $\begin{bmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{f} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |f|^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B$,

$$\begin{bmatrix} 0 & h \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{f} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\bar{f} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B,$$

$$\begin{bmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hf & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B.$$

Функции hf и $h\bar{f}$ разделяют точки в одной плоскости на высоте $h_0 > 0$ над плоскостью $h = 0$. Функция h разделяет точки по вертикали, все эти функции вместе с функцией, тождественно равной 1, порождают алгебру $C(P_k^*)$ согласно теореме Стоуна – Вейерштрасса. Здесь P_k^* обозначает множество $P_k \setminus D$, склеенное по окружности $S^1 = \partial D$. Пространство P_k^* гомеоморфно множеству P_k . Это значит, что алгебра непрерывных функций $C(P_k^*)$ изоморфна алгебре $C(P_k)$.

Поскольку функции f и h не равны одновременно нулю на $P_k \setminus D$, то матрицы $\begin{bmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 & h \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ порождают модуль $\begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ над алгеброй $\begin{bmatrix} C(P_k) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ в соответствии с леммой 2.

Матрицы-функции $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{f} & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h & 0 \end{bmatrix}$ порождают модуль $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{-1} & 0 \end{bmatrix}$ над алгеброй $\begin{bmatrix} C(P_k) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Из леммы 3 следует, что элементы из модулей $\begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{-1} & 0 \end{bmatrix}$ порождают алгебру $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C(P_k) \end{bmatrix} \subset B$.

Итак, B содержит множества $\begin{bmatrix} C(P_k) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{-1} & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C(P_k) \end{bmatrix}$. В силу леммы 1 имеем следующее равенство для алгебр: $B = A_1$. Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. Bottcher A., Gohberg I., Karlovich Yu., et al. Banach algebras generated by N idempotents and applications // *Oper. Theory. Adv., Appl.* 1996. Vol. 90. P. 19–54. DOI: 10.1007/978-3-0348-9040-3_2.
2. Antonevich A., Krupnik N. On trivial and non-trivial n -homogeneous C^* -algebras // *Integr. Equ. Oper. Theory.* 2000. Vol. 38, issue 2. P. 172–189. DOI: 10.1007/BF01200122.
3. Шукин М. В. Нетривиальная C^* -алгебра, порожденная четырьмя идемпотентами // *Тр. Ин-та математики НАН Беларуси.* 2001. Т. 9. С. 161–163.
4. Shchukin M. Non-trivial C^* -algebras generated by idempotents // *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Operators, Differential Equations and Applications : semin. on fixed point theory Cluj-Napoca : in 3 vols (Cluj-Napoca, 12–17 Sept., 2001).* Cluj-Napoca, 2002. Vol. 3. P. 353–359.
5. Krupnik N., Roch S., Silbermann B. On C^* -algebras generated by idempotents // *J. Funct. Anal.* 1996. Vol. 137, issue 2. P. 303–319. DOI: 10.1006/jfan.1996.0048.
6. Рабанович В. І. Матричні банахові алгебри і теорія зображень : дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.01.01. Київ, 2000.
7. Шукин М. В. n -Однородные C^* -алгебры с пространством примитивных идеалов, гомеоморфным ориентируемому компактному двумерному многообразию // *Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* 2010. № 2. С. 12–17.
8. Масси У. Алгебраическая топология. М. : Мир, 1977.

References

1. Bottcher A., Gohberg I., Karlovich Yu., et al. Banach algebras generated by N idempotents and applications. *Oper. Theory. Adv., Appl.* 1996. Vol. 90. P. 19–54. DOI: 10.1007/978-3-0348-9040-3_2.
2. Antonevich A., Krupnik N. On trivial and non-trivial n -homogeneous C^* -algebras. *Integr. Equ. Oper. Theory.* 2000. Vol. 38, issue 2. P. 172–189. DOI: 10.1007/BF01200122.
3. Shchukin M. V. [Non-trivial C^* -algebra generated by four idempotents]. *Proc. of the Inst. of Math. of the Natl. Acad. of Sci. of Belarus.* 2001. Vol. 9. P. 161–163 (in Russ.).
4. Shchukin M. Non-trivial C^* -algebras generated by idempotents. *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Operators, Differential Equations and Applications : semin. on fixed point theory Cluj-Napoca : in 3 vols (Cluj-Napoca, 12–17 Sept., 2001).* Cluj-Napoca, 2002. Vol. 3. P. 353–359.
5. Krupnik N., Roch S., Silbermann B. On C^* -algebras generated by idempotents. *J. Funct. Anal.* 1996. Vol. 137, issue 2. P. 303–319. DOI: 10.1006/jfan.1996.0048.
6. Rabanovich V. I. [The matrix algebras and the theory of representations] : diss. ... PhD (phys. and math.) : 01.01.01. Kiev, 2000 (in Ukrainian).
7. Shchukin M. V. [n -Homogeneous C^* -algebras with the set of primitive ideals homeomorphic to an oriented connected compact two-dimensional manifold]. *Proc. Natl. Acad. of Sci. of Belarus. Phys. and Math. Ser.* 2010. No. 2. P. 12–17 (in Russ.).
8. Massi U. *Algebraichesкая topologiya.* Moscow : Mir, 1977.

Статья поступила в редколлегию 10.07.2017.
Received by editorial board 10.07.2017.

УДК 517.51+517.53

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ВЫСШИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ БЛЯШКЕ

Т. С. МАРДВИЛКО¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Получены верхние и нижние оценки для квазинормы (нормы) для высших производных произведения Бляшке в пространстве L_p . Результаты получены для всех $p \in (0, +\infty) \setminus \left\{ \frac{1}{s} \right\}$, где $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ – порядок рассматриваемой производной. Случай $p = \frac{1}{s}$ исследован автором ранее.

Пусть $a_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ – набор из n комплексных чисел, лежащих в единичном круге $|z| < 1$. Обозначим произведение Бляшке с нулями в точках a_1, a_2, \dots, a_n :

$$b_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z}.$$

Для $0 < p < \frac{1}{s}$ и $s \in \mathbb{N}$, а также $s = 1$ и $p > 1$ найден $\inf_{a_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p}$, а для $\frac{1}{s} < p < \infty$ и $s \in \mathbb{N}$ получен $\sup_{a_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p}$. В остальных случаях доказаны оценки, точные по порядку.

Основные результаты изложены в теоремах 1–5 настоящей работы.

Ключевые слова: произведение Бляшке; рациональные функции; высшие производные; пространство Лебега.

Благодарность. Автор выражает благодарность профессору А. А. Пекарскому за постоянную поддержку, обсуждение результатов данной работы и полезные замечания.

Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований НАН Беларуси «Конвергенция».

INTEGRATE INEQUALITIES FOR THE HIGHER DERIVATIVES OF BLASHKE PRODUCT

T. S. MARDVILKA^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Upper and lower inequalities for the higher derivatives of Blaschke product in the Lebesgue space L_p are obtained in this work. All $p \in (0, +\infty) \setminus \left\{ \frac{1}{s} \right\}$, $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, are considered, where s is order of the derivative. The case $p = \frac{1}{s}$ was investigated by the author earlier.

Let $a_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ be a certain set of n complex numbers laying in the unit disc $|z| < 1$. Let us introduce the Blaschke products

Образец цитирования:

Мардвилко Т. С. Интегральные неравенства для высших производных произведения Бляшке // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 10–16.

For citation:

Mardvilka T. S. Integrate inequalities for the higher derivatives of Blaschke product. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2018. No. 1. P. 10–16 (in Russ.).

Автор:

Татьяна Сергеевна Мардвилко – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры теории функций механико-математического факультета.

Author:

Tatsiana S. Mardvilka, PhD (physics and mathematics), doцент; associate professor at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics.
mardvilko@mail.ru

$$b_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z}$$

with zeros at the points a_1, a_2, \dots, a_n .

For $0 < p < \frac{1}{s}$ and $s \in \mathbb{N}$ holds the equality $\inf_{a_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p} = 0$. For $p > 1$ holds the equality $\inf_{a_n} \|b_n'\|_{L_p} = n$. For $\frac{1}{s} < p < \infty$ and $s \in \mathbb{N}$ holds the equality $\sup_{a_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p} = +\infty$. In other cases, the obtained estimates are exact in order.

The main results of the present paper are stated in theorems 1–5.

Key words: Blaschke product; rational functions; higher derivatives; Lebesgue space.

Acknowledgements. The author would like to thank professor A. A. Pekarskii for support, constructive criticism and productive discussion of the manuscript.

This work supported by state programs for scientific research of the National Academy of Sciences of Belarus «Convergence».

Через $C(T)$ обозначим пространство непрерывных комплекснозначных функций f на единичной окружности $T = \{z : |z| = 1\}$, наделенных нормой

$$\|f\|_{C(T)} = \max_{z \in T} |f(z)|.$$

Будем также работать с пространством Лебега L_p , $0 < p < \infty$, измеримых комплексных функций на T с конечной квазинормой (нормой при $1 \leq p < \infty$)

$$\|f\|_{L_p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_T |f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty.$$

Пусть $a_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ – набор из n комплексных чисел, лежащих в круге $D = \{z : |z| < 1\}$. Рассмотрим произведение Бляшке с нулями в точках a_1, a_2, \dots, a_n :

$$b_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z}. \quad (1)$$

Введем также рациональные функции вида

$$r_n(z) = \frac{p_n(z)}{(1 - \bar{a}_1 z) \cdot (1 - \bar{a}_2 z) \cdot \dots \cdot (1 - \bar{a}_n z)}, \quad (2)$$

где $p_n(z)$ – многочлен степени не выше n .

Произведения Бляшке играют важную роль в рациональной аппроксимации. В частности, в [1] было замечено, что первую производную рациональной функции (2) можно мажорировать первой производной произведения Бляшке (1) и равномерной нормой $r_n(z)$:

$$|r_n'(z)| \leq |b_n'(z)| \cdot \|r_n\|_{C(T)}, \quad z \in T. \quad (3)$$

Интегрируя неравенство (3), приходим к следующему неравенству для первой производной рациональной функции, полученному в [2]:

$$\|r_n'\|_{L_1} \leq n \|r_n\|_{C(T)}. \quad (4)$$

В [3] и [4] обобщены неравенства (3) и (4) на высшие производные. В частности, получено следующее неравенство типа Бернштейна для высших производных рациональных функций:

$$\|r_n^{(s)}\|_{L_{\frac{1}{s}}} \leq c(s) \cdot n^s \cdot \|r_n\|_{C(T)}, \quad s \geq 2. \quad (5)$$

Здесь и ниже через $c(\dots)$, $c_1(\dots)$, $c_2(\dots)$, $c_n(\dots)$ обозначаем положительные величины, зависящие от указанных в скобках параметров.

Неравенства (4) и (5) применяются для доказательства обратных теорем рациональной аппроксимации функций [2–5]. Произведения Бляшке (1) играют роль экстремальных функций в выражениях (3) и (4). Неравенства (5) являются точными относительно множителя n^s . В этом можно убедиться на примере функции $r_n = b_n$ (см. ниже равенство (6)). Что же касается постоянной $c(s)$ из неравенства (5), то ее точное значение до сих пор не определено. Оценки этой постоянной можно найти в работе [6], где автором также была получена точная постоянная в неравенстве для высших производных произведений Бляшке: было доказано, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ справедливо равенство

$$\sup_{a_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_{\frac{1}{s}}} = s! \lambda^s \left(\frac{1}{s}\right) \cdot n^s. \quad (6)$$

Здесь и далее для краткости будем использовать следующее обозначение:

$$\lambda(\alpha) = \frac{2^{\alpha-1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)}, \quad \alpha > 0,$$

где Γ – гамма-функция Эйлера.

В работе [6] показано также, что при $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и $n \geq s$

$$\inf_{a_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_{\frac{1}{s}}} > \frac{\pi^{s-1} \cdot (s-1) \cdot ((s-2)!)^s}{2^{3s-1} \cdot (s!)^s \cdot s^{s-1}} \cdot (n - (s-1))^s.$$

Здесь получены оценки $\|b_n^{(s)}\|_{L_p}$ для $p \in (0, +\infty) \setminus \left\{\frac{1}{s}\right\}$.

Теорема 1. Для $n, s \in \mathbb{N}$ и $\frac{1}{s} < p < \infty$ имеет место равенство

$$\sup_{a_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p} = +\infty.$$

Теорема 2. Для $n, s \in \mathbb{N}$ и $0 < p < \frac{1}{s}$ имеет место неравенство

$$\sup_{a_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p} \leq s! \lambda^s \left(\frac{1}{s}\right) \cdot n^s.$$

Нами также получены оценки снизу для рассматриваемых квазинорм.

Теорема 3. Для $n, s \in \mathbb{N}$, $0 < p < \frac{1}{s}$ имеет место равенство

$$\inf_{a_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p} = 0.$$

Теорема 4. Для $n, s \in \mathbb{N}$, $n \geq s \geq 2$, и $\frac{1}{s} < p < \infty$ имеет место неравенство

$$\inf_{a_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p} > \frac{\pi^{s-1} \cdot (s-1) \cdot ((s-2)!)^s}{2^{3s-1} \cdot (s!)^s \cdot s^{s-1}} \cdot (n - (s-1))^s.$$

Для первой производной для инфимума рассматриваемой квазинормы можно выписать точное равенство, имеющее место в следующей теореме.

Теорема 5. Для $n \in \mathbb{N}$ и $p > 1$ имеет место равенство

$$\inf_{a_n} \|b_n'\|_{L_p} = n.$$

В целях доказательства теорем 1 и 3 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1 [6]. Пусть $\alpha > 0$ и

$$J_\alpha(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_T \frac{|dz|}{|1 - \bar{\xi}z|^{1+\alpha}}, \quad \xi \in D.$$

Для $J_\alpha(\xi)$ имеют место следующие неравенства:

$$\frac{1}{(1 - |\xi|^2)^\alpha} \leq J_\alpha(\xi) \leq \frac{\lambda(\alpha)}{(1 - |\xi|^2)^\alpha}.$$

Порядковые оценки для $J_\alpha(\xi)$ можно найти также в работе [7]. Оценки из леммы 1 для $J_\alpha(\xi)$ являются точными.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим произведение Бляшке

$$b_n(z) = z^{n-1} \cdot \frac{z - \rho}{1 - \rho z}, \quad 0 < \rho < 1.$$

Представим $b_n(z)$ в виде суммы полинома степени $n - 1$ и правильной рациональной дроби

$$b_n(z) = p_{n-1}(z) + \frac{1}{\rho^n} \cdot \frac{1 - \rho^2}{1 - \rho z}, \quad (7)$$

где $p_{n-1}(z) = \frac{z^{n-1}(z - \rho) - \rho^{-n}(1 - \rho^2)}{1 - \rho z}$.

Нетрудно убедиться, что $|p_{n-1}(z)| \leq 1 + 2 \cdot \rho^{-n}$ при $z \in T$. В связи с этим согласно неравенству Бернштейна при $n \geq s + 1$ имеет место оценка

$$\|p_{n-1}^{(s)}\|_{L_p} \leq \|p_{n-1}^{(s)}\|_{C(T)} \leq (1 + 2 \cdot \rho^{-n}) \cdot \frac{(n-1)!}{(n-s-1)!}. \quad (8)$$

Пусть $n \geq s + 1$ и $s \geq 2$. Заметим, что нам достаточно рассмотреть случай $\frac{1}{s} < \rho < 1$, так как оценка для остальных значений ρ сводится к данному случаю применением неравенства Гёльдера. Итак, из соотношений (7), (8) и леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} \|b_n^{(s)}\|_{L_p}^p &\geq \left\| \left(\frac{1}{\rho^n} \cdot \frac{1 - \rho^2}{1 - \rho z} \right)^{(s)} \right\|_{L_p}^p - \|p_{n-1}^{(s)}\|_{L_p}^p \geq \\ &\geq \frac{1}{\rho^{p(n-s)}} \cdot \frac{1}{(1 - \rho^2)^{ps-1}} - \left(1 + \frac{2}{\rho^n} \right)^p \cdot \left(\frac{(n-1)!}{(n-s-1)!} \right)^p. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\rho \rightarrow 1 - 0$, получим, что правая часть последнего неравенства растет неограниченно и, следовательно, неограниченно растет и левая часть.

В случае $n < s + 1$ и $s \geq 2$

$$\|b_n^{(s)}\|_{L_p} = \frac{1}{\rho^n} \left\| \left(\frac{1 - \rho^2}{1 - \rho z} \right)^{(s)} \right\|_{L_p} = \frac{1}{\rho^n} \left\| \rho^s \frac{1 - \rho^2}{(1 - \rho z)^{s+1}} \right\|_{L_p}.$$

Применяя лемму 1, получим

$$\|b_n^{(s)}\|_{L_p} \geq \frac{1}{\rho^{n-s}} \cdot \frac{1}{(1 - \rho^2)^{s-\frac{1}{p}}} \rightarrow +\infty \text{ при } \rho \rightarrow 1 - 0.$$

И наконец, рассмотрим случай $s = 1$.

$$|b'_n(z)| = n - 1 + \frac{1 - \rho^2}{|1 - \rho z|^2}, \quad z \in T.$$

Следовательно, с учетом леммы 1 при $p > 1$ получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_T |b'_n(z)|^p |dz| \geq \frac{1}{2\pi} \int_T \frac{(1 - \rho^2)^p}{|1 - \rho z|^{2p}} |dz| \geq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(1 - \rho^2)^{p-1}}.$$

Переходя к пределу при $\rho \rightarrow 1 - 0$ в последнем неравенстве, получим также утверждение теоремы для $s = 1$ и $p > 1$.

Доказательство теоремы 2. Для доказательства данной теоремы воспользуемся неравенством Гёльдера

$$\|f \cdot g\|_p \leq \|f\|_u \cdot \|g\|_v, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}, \quad u > p.$$

Применяя неравенство Гёльдера с $u = \frac{1}{s}$ и $v = \frac{p}{1 - ps}$, сведем рассматриваемый в теореме случай к $p = \frac{1}{s}$, доказанному ранее:

$$\|b_n^{(s)}\|_{L_p} \leq \|b_n^{(s)}\|_{L_{\frac{1}{s}}} \cdot \|1\|_{L_v} = \|b_n^{(s)}\|_{L_{\frac{1}{s}}}.$$

Из последней полученной оценки и равенства (6) следует утверждение теоремы.

Замечание 1. Неравенство в теореме 2 является точным по порядку, т. е. относительно множителя n^s .

В этом можно убедиться на примере функции $b_n(z) = z^n$. Постоянная $s! \lambda^s \left(\frac{1}{s}\right)$ из теоремы 2 является точной при $s = 1$ и любом $0 < p < \frac{1}{s}$. Убедиться в этом можно также на примере функции $b_n(z) = z^n$. Из доказательства видно, что для высших производных найденная постоянная не является точной, так как применяется неравенство Гёльдера и условия, при которых неравенство Гёльдера обращается в равенство, в данном случае не выполнены.

Доказательство теоремы 3. Для $n < s$ теорема, очевидно, выполняется, так как в этом случае

$$\|(z^n)^{(s)}\|_{L_p} = 0.$$

Докажем, что теорема справедлива для $n \geq s$. Для этого рассмотрим произведение Бляшке с нулями в точках $a_k = \rho \cdot \omega_k$, где $\omega_k = e^{\frac{2\pi i k}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, и $0 < \rho < 1$. Такое произведение Бляшке можно записать следующим образом:

$$b_n(z) = \frac{z^n - \rho^n}{1 - \rho^n z^n} = -\frac{1}{\rho^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1 - \rho^{2n}}{\rho^n \cdot n(1 - \omega_k \rho z)}.$$

Для s -й производной такого произведения Бляшке справедлива оценка

$$|b_n^{(s)}(z)| \leq \frac{s!(1 - \rho^{2n})}{\rho^{n-s} \cdot n} \left\{ \frac{1}{|1 - \rho z|^{s+1}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|1 - \omega_k \rho z|^{s+1}} \right\}.$$

В силу инвариантности относительно замены ω_k на ω_0 , $k = 1, \dots, n - 1$, интеграла

$$\int_T \frac{|dz|}{|1 - \omega_k \rho z|^\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

для рассматриваемой квазинормы имеем

$$\|b_n^{(s)}\|_{L_p} \leq n^{\frac{1}{p}-1} \cdot \frac{s!(1-\rho^{2n})}{\rho^{n-s}} \cdot \left(\int_T \frac{|dz|}{|1-\rho z|^{sp+p}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Применяя лемму 1, получим оценку

$$\|b_n^{(s)}\|_{L_p} \leq c(n, p, s) \cdot \frac{1-\rho^{2n}}{\rho^{n-s}(1-\rho^2)^{s+1-\frac{1}{p}}} \text{ при } \frac{1}{s+1} < p < \frac{1}{s}. \quad (9)$$

Переходя в неравенстве (9) к пределу при $\rho \rightarrow 1-0$, получим утверждение теоремы 3 при $\frac{1}{s+1} < p < \frac{1}{s}$.

Для оценки квазинормы $\|b_n^{(s)}\|_{L_p}$ при $p \leq \frac{1}{s+1}$ применим неравенство Гельдера

$$\|b_n^{(s)}\|_{L_p} \leq \|b_n^{(s)}\|_{L_{p'}} \cdot \|1\|_{L_{pp'/(p'-p)}} = \|b_n^{(s)}\|_{L_{p'}}$$

с любым $\frac{1}{s+1} < p' < \frac{1}{s}$ и воспользуемся оценкой (9).

Замечание 2. Рассматриваемое в доказательстве теоремы 3 семейство произведений Бляшке

$$b_n(z) = \frac{z^n - \rho^n}{1 - \rho^n z^n}, \quad 0 < \rho < 1,$$

играет роль экстремальных функций также и в верхней оценке исследуемой квазинормы при $p = \frac{1}{s}$, $s \geq 2$. В работе [6] показано, что именно на таком семействе произведений Бляшке асимптотически, при $\rho \rightarrow 1-0$, достигается равенство (6).

Доказательство теоремы 4. Для оценки снизу величины $\|b_n^{(s)}\|_{L_p}$, $\frac{1}{s} < p < \infty$, $s \geq 2$, воспользуемся неравенством Гельдера

$$\|f \cdot g\|_p \geq \|f\|_u \cdot \|g\|_v, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}, \quad u < p,$$

с показателями $u = \frac{1}{s} < p$ и $v = \frac{1}{1-ps}$:

$$\|b_n^{(s)}\|_{L_p} \geq \|b_n^{(s)}\|_{L_{\frac{1}{s}}} \cdot \|1\|_{L_v} = \|b_n^{(s)}\|_{L_{\frac{1}{s}}} > \frac{\pi^{s-1} \cdot (s-1) \cdot ((s-2)!)^s}{2^{3s-1} \cdot (s!+1)^s \cdot s^{s-1}} \cdot (n-(s-1))^s.$$

Замечание 3. Неравенство в теореме 4 также является точным относительно множителя n^s . К сожалению, для нижней оценки величины $\|b_n^{(s)}\|_{L_p}$, $\frac{1}{s} \leq p < \infty$, неизвестна точная постоянная даже для критического показателя $p = \frac{1}{s}$, $s \geq 2$, при котором $\|b_n^{(s)}\|_{L_p}$ ведет себя устойчиво относительно полюсов произведения Бляшке и имеет порядок n^s .

Доказательство теоремы 5. Эта теорема доказывается аналогично теореме 4. Для получения требуемой оценки достаточно воспользоваться известным равенством для первой производной произведения Бляшке: $\|b_n'\|_{L_1} = n$.

Библиографические ссылки

1. Русак В. Н. Обобщение неравенства С. Н. Бернштейна для производной тригонометрического многочлена // Докл. АН БССР. 1963. Т. 7, № 9. С. 580–583.
2. Долженко Е. П. Некоторые точные интегральные оценки производных рациональных и алгебраических функций. Приложения // Anal. Math. 1978. Т. 4, № 4. С. 247–268.

3. Пекарский А. А. Оценки высших производных рациональных функций и их приложения // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1980. № 5. С. 21–29.
4. Lorentz G. G., von Golitschek M., Makovoz Y. Constructive Approximation. Advanced Problems. New York ; Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1996.
5. Petrushev P. P., Popov V. A. Rational Approximation of Real Functions. Cambridge : Univ. Press, 1987.
6. Mardvilko T. S. On the values of the constants in the Bernstein type inequalities for higher derivatives of rational functions // East J. Approximat. 2009. Vol. 15, № 2. P. 31–42.
7. Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K. Theory of Bergman Spaces, Boundary Problems. New York ; Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2000.

References

1. Rusak V. N. [Generalization of an inequality of S. N. Bernstein for the derivative of a trigonometrical multinomial]. *Rep. of the Acad. of Sci. of the BSSR*. 1963. Vol. 7, No. 9. P. 580–583 (in Russ.).
2. Dolzenko E. P. [Certain sharp integral estimates for the derivatives of rational and polynomial functions. Annexes]. *Anal. Math.* 1978. Vol. 4, No. 4. P. 247–268 (in Russ.).
3. Pekarshii A. A. [Estimates for higher derivatives of rational functions and their applications]. *Proc. of the Natl. Acad. of Sci. of Belarus. Phys.-Math. Ser.* 1980. No. 5. P. 21–29 (in Russ.).
4. Lorentz G. G., von Golitschek M., Makovoz Y. Constructive Approximation. Advanced Problems. New York ; Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1996.
5. Petrushev P. P., Popov V. A. Rational Approximation of Real Functions. Cambridge : Univ. Press, 1987.
6. Mardvilko T. S. On the values of the constants in the Bernstein type inequalities for higher derivatives of rational functions. *East J. Approximat.* 2009. Vol. 15, No. 2. P. 31–42.
7. Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K. Theory of Bergman Spaces, Boundary Problems. New York ; Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2000.

Статья поступила в редакцию 28.09.2017.
Received by editorial board 28.09.2017.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

УДК 517.9

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ С ОСРЕДНЕНИЕМ УРАВНЕНИЙ

С. А. СПАСКОВ¹⁾, А. К. ХМЫЗОВ²⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

²⁾ИООО «ЭПАМ Системз», ул. Академика Купревича, 1/1, 220141, г. Минск, Беларусь

Рассматривается краевая задача для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = L(t)X(t) + \dot{F}(t), \\ M_1X(0) + M_2X(b) = Q, \end{cases}$$

где $t \in T = [0, b]$, $L : T \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$ и $F : T \rightarrow \mathbb{R}^p$ – непрерывные справа матрично- и векторнозначные функции ограниченной вариации; $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Q \in \mathbb{R}^p$ – некоторые заданные матрицы и вектор. Эта задача изучается в рамках подхода, основанного на исследовании предельного поведения решений конечно-разностных с осреднением представлений исходной задачи. Вводится понятие фундаментальной матрицы, соответствующей конечно-разностному уравнению с осреднением. Доказывается теорема существования и единственности решения конечно-разностной с осреднением краевой задачи для приведенной системы.

Ключевые слова: система линейных неоднородных дифференциальных уравнений; краевая задача; конечно-разностные с осреднением уравнения; фундаментальная матрица.

Образец цитирования:

Спасков С. А., Хмызов А. К. Краевая задача для системы конечно-разностных с осреднением уравнений // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 17–28.

For citation:

Spaskov S. A., Khmyzov A. K. Boundary value problem for system of finite-difference with averaging equations. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2018. No. 1. P. 17–28 (in Russ.).

Авторы:

Сергей Александрович Спасков – аспирант кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук О. Л. Яблонский.
Антон Константинович Хмызов – ведущий инженер-программист.

Authors:

Sergey A. Spaskov, postgraduate student at the department of functional analysis and analytical economics, faculty of mechanics and mathematics.
sergey.spaskov@gmail.com
Anton K. Khmyzov, leading software engineer.
anton.khmyzov@gmail.com

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SYSTEM OF FINITE-DIFFERENCE WITH AVERAGING EQUATIONS

S. A. SPASKOV^a, A. K. KHMYZOV^b

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

^bЕрар Systems, 1/1 Akademika Kupreviča Street, Minsk 220141, Belarus

Corresponding author: A. K. Khmyzov (anton.khmyzov@gmail.com)

The boundary value problem for the system of linear nonhomogeneous differential equations with generalized coefficients is considered

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \dot{L}(t)X(t) + \dot{F}(t), \\ M_1X(0) + M_2X(b) = Q, \end{cases}$$

where $t \in T = [0, b]$, $L : T \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$ and $F : T \rightarrow \mathbb{R}^p$ are right-continuous matrix and vector valued functions of bounded variation; $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Q \in \mathbb{R}^p$ are defined matrices and vector. The problem is investigated with the help of the corresponding finite-difference with averaging equation behavior studying. The definition of the fundamental matrix, corresponding to the finite-difference with averaging equation is introduced. The theorem of the existence and uniqueness of the finite-difference with averaging boundary value problem, corresponding to the described system is proved.

Key words: system of linear nonhomogeneous differential equations; boundary value problem; finite-difference with averaging equations; fundamental matrix.

В настоящей работе рассматривается краевая задача

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \dot{L}(t)X(t) + \dot{F}(t), \\ M_1X(0) + M_2X(b) = Q, \end{cases} \quad (1)$$

где $t \in T = [0, b]$, $X : T \rightarrow \mathbb{R}^p$ – неизвестная вектор-функция, $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$; $L(t) = (L^{ij}(t))$, где $i, j = 1, \dots, p$ и $L^{ij}(\cdot)$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации, при $t \leq 0$ $L^{ij}(t) = L^{ij}(0) = 0$, при $t > b$ $L(t) = L(b)$, $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$, $F^i(\cdot)$, $i = 1, \dots, p$, – непрерывные справа функции ограниченной вариации, при $t \leq 0$ $F^i(t) = F^i(0)$, при $t > b$ $F^i(t) = F^i(b)$. M_1, M_2 – некоторые заданные матрицы: $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Q \in \mathbb{R}^p$ – некоторый заданный вектор.

Если рассматривать $\dot{L}(t)$ как обобщенную производную матричнозначной функции, то задача (1) содержит произведение обобщенной функции на разрывную $\dot{L}(t)X(t)$ и не является корректной. Определением решения рассматриваемой задачи занимались многие авторы. Основные подходы к исследованию таких уравнений заключаются в следующем: переходе к интегральному уравнению, где интеграл понимается в смысле Лебега – Стильтьеса, Перрона – Стильтьеса и др. [1], аппроксимации исходного уравнения дифференциальными уравнениями с гладкими коэффициентами [2], формализации данной задачи в рамках теории обобщенных функций [3; 4].

В работе [5] показано, что эти подходы можно охватить одним, основанным на исследовании предельного поведения решений представлением исходной задачи в виде конечно-разностных с осреднением задач [5; 6]. В рамках данного подхода соответствующая краевой задаче (1) конечно-разностная с осреднением задача может быть записана в следующем виде:

$$X_n(t + h_n) - X_n(t) = (L_n(t + h_n) - L_n(t)) \cdot X_n(t) + F_n(t + h_n) - F_n(t), \quad (2)$$

$$M_1X_n(t)|_{t \in [0, h_n]} + M_2X_n(m_b h_n + t)|_{t \in [0, h_n]} = Q_n(t)|_{t \in [0, h_n]}, \quad (3)$$

где $n \in \mathbb{N}$, $h_n \in \mathbb{R}$, $h_n < b$ – произвольные фиксированные числа; m_b – целая часть числа $\frac{b}{h_n}$; $Q_n : [0, h_n] \rightarrow \mathbb{R}^p$ – некоторая заданная вектор-функция;

$$L_n(t) = \left((L^{ij} * \rho_n^{ij})(t) \right) = \left(\int_0^{1\gamma^{ij}(n)} L^{ij}(t+s)\rho_n^{ij}(s) ds \right),$$

$$\rho_n^{ij}(t) = \gamma^{ij}(n)\rho(\gamma^{ij}(n)t), \quad \rho \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \text{supp } \rho \subset [0, 1], \quad \int_0^1 \rho(s) ds = 1;$$

γ^{ij} – некоторая монотонная функция, $\gamma^{ij}(n) \rightarrow \infty$, при $n \rightarrow \infty$.

$$F_n(t) = \left((F^i * \bar{\rho}_n)(t) \right) = \left(\int_0^{1\gamma^n} F^i(t+s)\bar{\rho}_n(s) ds \right),$$

$$\bar{\rho}_n(s) = \bar{\rho}(ns), \quad \bar{\rho} \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \bar{\rho}(s) \geq 0, \quad \text{supp } \bar{\rho} \subset [0, 1], \quad \int_0^1 \bar{\rho}(s) ds = 1.$$

Под решениями задачи (1) будем понимать предел последовательности решений соответствующих конечно-разностных с осреднением задач при $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ и $Q_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Q$ по некоторой норме. Подобная трактовка решений использовалась в случае задачи Коши в работах [6; 7], где существование такого предела было установлено в виде решения некоторого интегрального уравнения. При этом стоит отметить, что пределов может быть несколько и особую роль в этом вопросе играет связь между параметрами n и h_n . Основное же содержание настоящей работы заключается в исследовании вопроса существования и единственности решения конечно-разностной с осреднением задачи (2), (3).

Использование в описываемом подходе осреднения в указанном виде связано с положением о том, что в реальном мире нельзя, например, измерить плотность вещества в точке, а можно измерить лишь его среднюю плотность в достаточно малой окрестности этой точки и объявить это плотностью в данной точке [8, с. 82].

Фундаментальная матрица, соответствующая конечно-разностному уравнению с осреднением

Фундаментальной матрицей, соответствующей конечно-разностному с осреднением уравнению (2), назовем матрицу $B_n(t, r)$, являющуюся решением следующей задачи:

$$\begin{cases} B_n(t+h_n, r) - B_n(t, r) = (L_n(t+h_n) - L_n(t))B_n(t, r), \\ B_n(t, r)|_{t \in [r, r+h_n]} = E, \end{cases} \quad (4)$$

где $t, r \in \mathbb{R}$; E – единичная матрица.

Если положить, что t и r – произвольные фиксированные действительные числа, то существует представление $t = \tau_{t,r} + m_{t,r}h_n$, где $m_{t,r}$ и $\tau_{t,r}$ такие числа, что $\tau_{t,r} \in [r, r+h_n)$ и $m_{t,r} \in \mathbb{Z}$. Обозначим $t_{k,r} = \tau_{t,r} + kh_n$, $k \in \mathbb{Z}$. При $r = 0$ положим $m_{t,r} = m_t$, $\tau_{t,r} = \tau_t$ и $t_{k,r} = t_k$.

Утверждение 1. Фундаментальная матрица, определенная в (4):

1) существует и единственна для любых действительных t и r таких, что $t \geq r$;

2) существует и единственна для $t, r \in \mathbb{R}$ и $t < r$, если и только если $\forall t_{k,r}, k = m_{t,r}, m_{t,r} + 1, \dots, -1$,

матрица $(E + L_n(t_{k+1,r}) - L_n(t_{k,r}))$ не вырождена;

3) если выполнены условия одного из предыдущих пунктов и разность $(t - r)$ не кратна h_n , то фундаментальная матрица $B_n(t, r)$ бесконечно дифференцируема по первой переменной в некоторой окрестности точки $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Докажем пункты 1) и 2). Пусть $t \geq r$, тогда для $B_n(t, r)$, очевидно, из (4) следует представление $B_n(t, r) = \prod_{k=0}^{m_{t,r}-1} (L_n(t_{k+1,r}) - L_n(t_{k,r}) + E)$, а значит, фундаментальная матрица

$B_n(t, r)$ существует и единственна. Теперь пусть $t < r$. Если $\forall t_{k,r}, k = m_{t,r}, m_{t,r} + 1, \dots, -1$, матрица $(E + L_n(t_{k+1,r}) - L_n(t_{k,r}))$ не вырождена, то из (4) следует, что $B_n(t, r) = \prod_{k=m_{t,r}}^{-1} (L_n(t_{k+1,r}) - L_n(t_{k,r}) + E)^{-1}$, и, значит, опять фундаментальная матрица $B_n(t, r)$ существует и единственна. Обратно, если $t < r$ и существует $B_n(t, r)$, удовлетворяющая (4), то справедливо $E = \left(\prod_{k=m_{t,r}}^{-1} (L_n(t_{k+1,r}) - L_n(t_{k,r}) + E) \right) \cdot B_n(t, r)$ и в силу того, что ранг произведения матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей, имеем, что матрицы $(E + L_n(t_{k+1,r}) - L_n(t_{k,r}))$ не вырождены $\forall t_{k,r}$ при $k = m_{t,r}, m_{t,r} + 1, \dots, -1$.

Докажем пункт 3). Пусть s и r такие действительные числа, что не существует такого $k \in \mathbb{Z}$, что $s = r + kh_n$, тогда $\tau_{s,r} \neq 0$ и при $t \in s(-\tau_{s,r}, s - \tau_{s,r} + h_n)$ значение величины $m_{t,r} = m_{s,r}$, т. е. постоянно. Заметим также, что $L_n(t) \in C^\infty(T, \mathbb{R}^{p \times p})$, это непосредственно следует из [9, с. 17], а значит, и функция $(L_n(t + h_n) - L_n(t) + E)$ бесконечно дифференцируема по t при $t \in \mathbb{R}$ как линейная комбинация. Если $s > r$, то при $t \in (s - \tau_{s,r}, s - \tau_{s,r} + h_n)$ фундаментальная матрица задается формулой $B_n(t, r) = \prod_{k=0}^{m_{s,r}-1} (L_n(t_{k+1,r}) - L_n(t_{k,r}) + E)$ и как произведение бесконечно дифференцируемых функций тоже является бесконечно дифференцируемой функцией для $t \in (s - \tau_{s,r}, s - \tau_{s,r} + h_n)$. Если $s < r$ и $\forall s_{k,r} = \tau_{s,r} + kh_n, k = m_{s,r}, m_{s,r} + 1, \dots, -1$, матрица $(E + L_n(s_{k+1,r}) - L_n(s_{k,r}))$ не вырождена, то в силу непрерывности существуют такие окрестности $U_{s_{k,r}}$ точек $s_{k,r}$, что при $t \in U_{s_{k,r}}$ матрицы $(E + L_n(t + h_n) - L_n(t))$ не вырождены $\forall k \in \{m_{s,r}, m_{s,r} + 1, \dots, -1\}$. Выберем

$$U_s = (s - \tau_{s,r}, s - \tau_{s,r} + h_n) \cap \left(\bigcap_{k=m_{s,r}}^{-1} \{s : s + (k - m_{s,r}) \cdot h_n \in U_{s_{k,r}}\} \right),$$

тогда при $t \in U_s, \forall t_{k,r}, k = m_{t,r}, m_{t,r} + 1, \dots, -1$, матрицы $(E + L_n(t_{k+1,r}) - L_n(t_{k,r}))$ не вырождены и, следовательно, $(L_n(t_{k+1,r}) - L_n(t_{k,r}) + E)^{-1}$ также бесконечно дифференцируемы. Другими словами, при $t \in U_s$ существует фундаментальная матрица $B_n(t, r)$, она задается формулой $B_n(t, r) = \prod_{k=m_{t,r}}^{-1} (L_n(t_{k+1,r}) - L_n(t_{k,r}) + E)^{-1}$ и является бесконечно дифференцируемой в этой окрестности как произведение бесконечно дифференцируемых функций.

Утверждение доказано.

Теорема 1. *Общее решение уравнения (2) представимо в виде*

$$X_n(t) = B_n(t, 0) \cdot X_{n0}(\tau_t) + \sum_{k=0}^{m_t-1} B_n(t, t_{k+1}) \cdot (F_n(t_{k+1}) - F_n(t_k)), \quad (5)$$

где $X_{n0} : [0, h_n) \rightarrow \mathbb{R}^p$ – произвольная вектор-функция.

Доказательство. Непосредственной проверкой легко убедиться, что если $X_n(t)$ имеет вид, указанный в (5), то оно будет являться решением уравнения (2). С другой стороны, пусть есть некоторое $X_n^1(t)$ – решение уравнения (2) и $X_n^2(t)$ задано по формуле (5), где $X_{n0}(\cdot)$ взято равным $X_{n0}^1(t)|_{[0, h_n)} = X_n^1(t)|_{[0, h_n)}$, тогда очевидно следующее:

$$X_n^2(t) \Big|_{t \in [0, h_n]} = B_n(t, 0) \cdot X_{n0}(\tau_t) + \sum_{k=0}^{m_n-1} B_n(t, t_{k+1}) \cdot (F_n(t_{k+1}) - F_n(t_k)) = X_{n0}(t) = X_n^1(t) \Big|_{t \in [0, h_n]},$$

т. е. $X_n^1(t)$ и $X_n^2(t)$ совпадают на интервале $[0, h_n)$. Очевидно также, что $X_n^2(t)$ является решением уравнения (2). Более того, заметим, что если вектор-функции $X_n^1(t)$ и $X_n^2(t)$ – решения уравнения (2) и для некоторого t выполняется $X_n^2(t) = X_n^1(t)$, то $X_n^2(t + h_n) = X_n^1(t + h_n)$. Следовательно, $X_n^2(t) = X_n^1(t)$ для любого $t \in T = [0; b]$, и, значит, произвольное решение уравнения (2) может быть описано формулой (5).

Следствие 1. *Существует единственное решение конечно-разностной с осреднением задачи Коши*

$$X_n(t + h_n) - X_n(t) = (L_n(t + h_n) - L_n(t))X_n(t) + F_n(t + h_n) - F_n(t), \quad (6)$$

$$X_n(t) \Big|_{[0, h_n]} = X_{n0}(t), \quad (7)$$

где $X_{n0} : [0, h_n) \rightarrow \mathbb{R}^p$ – некоторая вектор-функция, задающая начальное условие.

Существование и единственность решения конечно-разностной с осреднением краевой задачи

Пусть τ – некоторое произвольное фиксированное число из интервала $[0, h_n)$. Обозначим

$$H_{B_n}(\tau) = M_1 \cdot B_n(\tau, 0) + M_2 \cdot B_n(m_b h_n + \tau, 0) = M_1 + M_2 \cdot B_n(m_b h_n + \tau, 0).$$

Пусть также $H_{B_n}(\tau)^+$ – обобщенная обратная матрица для $H_{B_n}(\tau)$, т. е. выполняется условие

$$H_{B_n}(\tau) \cdot H_{B_n}(\tau)^+ \cdot H_{B_n}(\tau) = H_{B_n}(\tau). \quad (8)$$

Известно [10, с. 40], что обобщенная обратная матрица $H_{B_n}(\tau)^+$ существует при любой $H_{B_n}(\tau) \in \mathbb{R}^{p \times p}$, однако может быть не единственной. Пусть \tilde{H}_n^τ – множество матриц $H_{B_n}(\tau)^+$, удовлетворяющих условию (8).

Обозначим также $\tau_k = \tau + kh_n, k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 2. *Решение конечно-разностной с осреднением краевой задачи (2), (3) существует тогда и только тогда, когда $\forall \tau \in [0, h_n)$ выполняется*

$$(E - H_{B_n}(\tau) \cdot H_{B_n}(\tau)^+) \cdot \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_n-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) \right) = 0. \quad (9)$$

При этом, если для некоторого τ из $[0, h_n)$ множество \tilde{H}_n^τ состоит более чем из одного элемента и условие (9) выполняется хотя бы для одной матрицы $H_{B_n}(\tau)^+ \in \tilde{H}_n^\tau$, то оно выполняется для всех матриц из \tilde{H}_n^τ .

Если выполняется условие (9), то для единственности решения необходимо и достаточно, чтобы $\forall \tau \in [0, h_n)$

$$H_{B_n}(\tau)^+ \cdot H_{B_n}(\tau) = E, \quad (10)$$

где для каждого τ из $[0, h_n)$ $H_{B_n}(\tau)^+$ – некоторая матрица из \tilde{H}_n^τ . При этом условие (10) является необходимым и достаточным для того, чтобы матрица $H_{B_n}(\tau)^+$, определенная по формуле (8), была единственной и $H_{B_n}(\tau)^+ = H_{B_n}(\tau)^{-1}$.

Доказательство. Пусть выполняется условие (9) и $H_{B_n}(\tau)^+ \in \tilde{H}_n^\tau \forall \tau \in [0, h_n)$, тогда возьмем

$$\begin{aligned}
 X_{n0}(\tau)|_{\tau \in [0, h_n]} &= \left(E - H_{B_n}(\tau)^+ \cdot H_{B_n}(\tau) \right) \cdot C_{n0}(\tau) + \\
 &+ H_{B_n}(\tau)^+ \cdot \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) \right), \quad (11)
 \end{aligned}$$

где $C_{n0} : [0, h_n] \rightarrow \mathbb{R}^p$ – произвольная вектор-функция.

Покажем, что решение задачи Коши (6), (7), где $X_{n0}(\cdot)$ в формуле (7) взято определенным по формуле (11), будет удовлетворять краевым условиям (3). Согласно теореме 1 имеем

$$\begin{aligned}
 M_1 X_n(\tau)|_{\tau \in [0, h_n]} + M_2 X_n(m_b h_n + \tau)|_{\tau \in [0, h_n]} &= M_1 X_{n0}(\tau) + M_2 B_n(m_b h_n + \tau, 0) \cdot X_{n0}(\tau) + \\
 &+ M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) = \\
 &= H_{B_n}(\tau) \cdot X_{n0}(\tau) + M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right).
 \end{aligned}$$

Подставим $X_{n0}(\tau)$ из (11). С учетом (8) и (9) получим

$$\begin{aligned}
 M_1 X_n(\tau)|_{\tau \in [0, h_n]} + M_2 X_n(m_b h_n + \tau)|_{\tau \in [0, h_n]} &= H_{B_n}(\tau) \cdot \left(\left(E - H_{B_n}(\tau)^+ \cdot H_{B_n}(\tau) \right) \cdot C_{n0}(\tau) + \right. \\
 &+ \left. H_{B_n}(\tau)^+ \cdot \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) \right) \right) + \\
 &+ M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) = H_{B_n}(\tau) \cdot H_{B_n}(\tau)^+ \cdot \left(Q_n(\tau) - \right. \\
 &- \left. M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) \right) + \\
 &+ M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) = \\
 &= Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) + \\
 &+ M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) = Q_n(\tau).
 \end{aligned}$$

Обратно, пусть существует $X_n(t)$ – решение краевой задачи (2), (3), покажем, что условие (9) выполняется. Воспользуемся для $X_n(t)$ представлением (5), тогда, как показано выше, краевое условие (3) может быть записано в виде

$$\left(H_{B_n}(\tau) \cdot X_{n0}(\tau) + M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) \right) \Big|_{\tau \in [0, h_n]} = Q_n(\tau).$$

Преобразуем последнее равенство, $\forall \tau \in [0, h_n)$ имеем

$$H_{B_n}(\tau) \cdot X_{n0}(\tau) = Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & H_{B_n}(\tau) \cdot H_{B_n}(\tau)^+ \cdot H_{B_n}(\tau) \cdot X_{n0}(\tau) = \\ & = H_{B_n}(\tau) \cdot H_{B_n}(\tau)^+ \cdot \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) \right). \end{aligned}$$

Из двух последних равенств и условия (8) имеем $\forall \tau \in [0, h_n)$

$$\begin{aligned} & Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) = \\ & = H_{B_n}(\tau) \cdot H_{B_n}(\tau)^+ \cdot \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) \right), \end{aligned}$$

откуда и следует справедливость условия (9).

Далее, докажем, что если для произвольного фиксированного $\tau \in [0, h_n)$ некоторые матрицы $H_{B_n}^1(\tau)^+$, $H_{B_n}^2(\tau)^+ \in \tilde{H}_n^\tau$ и для $H_{B_n}^1(\tau)^+$ выполняется условие (9), то оно также выполняется для матрицы $H_{B_n}^2(\tau)^+$. Действительно,

$$\begin{aligned} & \left(E - H_{B_n}(\tau) \cdot H_{B_n}^2(\tau)^+ \right) \cdot \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) \right) = \\ & = \left(E - H_{B_n}(\tau) \cdot H_{B_n}^2(\tau)^+ \right) H_{B_n}(\tau) \cdot H_{B_n}^1(\tau)^+ \times \\ & \times \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) \right) = \\ & = \left(H_{B_n}(\tau) - H_{B_n}(\tau) \cdot H_{B_n}^2(\tau)^+ \cdot H_{B_n}(\tau) \right) \times \\ & \times H_{B_n}^1(\tau)^+ \cdot \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Осталось доказать единственность. Для этого вначале докажем, что для произвольного фиксированного $\tau \in [0, h_n)$ условие (10) выполняется тогда и только тогда, когда матрица $H_{B_n}(\tau)^+$, определенная в формуле (8), единственна.

Действительно, если выполняется условие (10) для некоторой $H_{B_n}^1(\tau)^+ \in \tilde{H}_n^\tau$, тогда, как известно из теории матриц, $\det(H_{B_n}(\tau)) \neq 0$ и $H_{B_n}^1(\tau)^+ = H_{B_n}(\tau)^{-1}$. Теперь, если для некоторой $H_{B_n}^2(\tau)^+ \in \tilde{H}_n^\tau$ выполняется условие (8), т. е. $H_{B_n}(\tau) \cdot H_{B_n}^2(\tau)^+ \cdot H_{B_n}(\tau) = H_{B_n}(\tau)$, то, домножив левую и правую части этого уравнения слева на $H_{B_n}(\tau)^{-1}$, получим $H_{B_n}^2(\tau)^+ \cdot H_{B_n}(\tau) = E$, откуда $H_{B_n}^2(\tau)^+ = H_{B_n}(\tau)^{-1} = H_{B_n}^1(\tau)^+$.

С другой стороны, положим, что матрица, определенная формулой (8), существует и единственна. Покажем, что в этом случае $\det(H_{B_n}(\tau)) \neq 0$ и $H_{B_n}(\tau)^+ = H_{B_n}(\tau)^{-1}$. Предположим, что $\det(H_{B_n}(\tau)) = 0$.

Следовательно, существует такая ненулевая матрица A , что $H_{B_n}(\tau) \cdot A = 0$, и тогда, очевидно, матрица $(H_{B_n}(\tau)^+ + A) \neq H_{B_n}(\tau)^+$ тоже удовлетворяет условию (8), получили противоречие, следовательно, $\det(H_{B_n}(\tau)) \neq 0$. Тогда существует обратная матрица $H_{B_n}(\tau)^{-1}$, которая, как несложно заметить, удовлетворяет условию (8), и, значит, $H_{B_n}(\tau)^+ = H_{B_n}(\tau)^{-1}$.

Теперь пусть выполняются условия (9) и (10) $\forall \tau \in [0, h_n]$. Докажем, что краевая задача (2), (3) имеет единственное решение. Как доказано выше, из выполнения условий (9) и (10) следует, что решение краевой задачи (2), (3) существует и матрица $H_{B_n}(\tau)$ обратима. Тогда с учетом теоремы 1 и несложных преобразований краевое условие (3) может быть переписано в виде начального условия

$$X_{n0}(\tau) = H_{B_n}(\tau)^{-1} \cdot \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) \right).$$

В силу следствия 1 заключаем, что решение уравнения (2), удовлетворяющее приведенному начальному условию, единственно.

И наконец, пусть краевая задача (2), (3) имеет единственное решение и выполняются условия (9). Докажем справедливость условия (10) $\forall \tau \in [0, h_n]$. Для этого предположим, что условие (10) не выполняется, т. е. для некоторого $\tau \in [0, h_n]$ $E - H_{B_n}(\tau)^+ \cdot H_{B_n}(\tau) \neq 0$, но тогда формула (11) задает семейство функций $X_{n0}(\tau)$, зависящее от выбора вектор-функции $C_{n0} : [0, h_n] \rightarrow \mathbb{R}^p$, что противоречит единственности решения. Следовательно, условие (10) выполняется.

Таким образом, теорема 2 доказана.

Утверждение 2. Пусть $H_{B_n}(\cdot)^+ : [0, h_n] \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$ – произвольная фиксированная функция такая, что $\forall \tau \in [0, h_n]$ выполняется $H_{B_n}(\tau)^+ \in \tilde{H}_n^\tau$ и для заданной конечно-разностной с осреднением краевой задачи (2), (3) выполняется условие (9), тогда $X_n(\cdot) : T \rightarrow \mathbb{R}^p$ является решением этой задачи, если и только если существует такая задача Коши (6), (7), где начальное условие имеет вид

$$X_{n0}(\tau)|_{\tau \in [0, h_n]} = (E - H_{B_n}(\tau)^+ \cdot H_{B_n}(\tau)) \cdot C_{n0}(\tau) + H_{B_n}(\tau)^+ \cdot \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) \right) \quad (12)$$

с некоторой заданной функцией $C_{n0} : [0, h_n] \rightarrow \mathbb{R}^p$, что ее решение совпадает с $X_n(t) \forall t \in T$.

Доказательство. Пусть для некоторой вектор-функции $X_n(\cdot) : T \rightarrow \mathbb{R}^p$ существует такая вектор-функция $C_{n0} : [0, h_n] \rightarrow \mathbb{R}^p$, что если рассмотреть задачу Коши (6), (7) с начальным условием, заданным формулой (12), то решение этой задачи Коши будет совпадать с функцией $X_n(t) \forall t \in T$. Докажем, что в этом случае $X_n(\cdot)$ будет решением краевой задачи (2), (3). Очевидно, $X_n(\cdot)$ является решением уравнения (2), осталось проверить выполнение краевых условий (3). В силу теоремы 1 и с учетом формул (9) и (12) имеем

$$\begin{aligned} M_1 X_n(\tau)|_{\tau \in [0, h_n]} + M_2 X_n(m_b h_n + \tau)|_{\tau \in [0, h_n]} &= M_1 X_{n0}(\tau) + M_2 B_n(m_b h_n + \tau, 0) \cdot X_{n0}(\tau) + \\ &+ M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) = \\ &= H_{B_n}(\tau) \cdot X_{n0}(\tau) + M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= H_{B_n}(\tau) \cdot \left(E - H_{B_n}(\tau)^+ \cdot H_{B_n}(\tau) \right) \cdot C_{n0}(\tau) + \\
 &+ H_{B_n}(\tau) \cdot H_{B_n}(\tau)^+ \cdot \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) \right) + \\
 &+ M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) = \\
 &= Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) + \\
 &+ M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) = Q_n(\tau).
 \end{aligned}$$

Таким образом, функция $X_n(\cdot)$ есть решение краевой задачи (2), (3).

Теперь пусть вектор-функция $X_n(\cdot) : T \rightarrow \mathbb{R}^p$ является решением задачи (2), (3). Докажем, что существует такая задача Коши (6), (7), где начальное условие задано формулой (12), и ее решение совпадает с $X_n(t) \forall t \in T$. Для этого покажем, что для любого $X_n(t)$, решения задачи (2), (3), и $X_{n0}(t)$, определенного по формуле (12), существует такая функция $C_{n0} : [0, h_n) \rightarrow \mathbb{R}^p$, что $X_n(\tau)|_{\tau \in [0, h_n)} = X_{n0}(\tau)$.

Согласно теореме 1 $X_n(t)$ представимо в виде

$$X_n(t) = B_n(t, 0) \cdot Y_{n0}(\tau_t) + \sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(t, t_{k+1}) \cdot (F_n(t_{k+1}) - F_n(t_k)),$$

где $Y_{n0} : [0, h_n) \rightarrow \mathbb{R}^p$ – некоторая вектор-функция. Тогда из (3) $\forall \tau \in [0, h_n)$ имеем

$$\begin{aligned}
 M_1 X_n(\tau)|_{\tau \in [0, h_n)} + M_2 X_n(m_b h_n + \tau)|_{\tau \in [0, h_n)} &= M_1 Y_{n0}(\tau) + M_2 B_n(m_b h_n + \tau, 0) \cdot Y_{n0}(\tau) + \\
 &+ M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) = \\
 &= H_{B_n}(\tau) \cdot Y_{n0}(\tau) + M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) = Q_n(\tau)
 \end{aligned}$$

ИЛИ

$$H_{B_n}(\tau) \cdot Y_{n0}(\tau) = Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right).$$

Согласно теореме 2 в нашем случае справедлива формула (9) и последнее равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 H_{B_n}(\tau) \cdot Y_{n0}(\tau) &= H_{B_n}(\tau) \cdot H_{B_n}(\tau)^+ \times \\
 &\times \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) \right)
 \end{aligned}$$

ИЛИ

$$H_{B_n}(\tau) \cdot \left(Y_{n0}(\tau) - H_{B_n}(\tau)^+ \cdot \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) \right) \right) = 0.$$

Тогда справедливо $\forall \tau \in [0, h_n)$

$$\begin{aligned} & Y_{n0}(\tau) - H_{B_n}(\tau)^+ \cdot \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) \right) = \\ & = \left(E - H_{B_n}(\tau)^+ \cdot H_{B_n}(\tau) \right) \times \\ & \times \left(Y_{n0}(\tau) - H_{B_n}(\tau)^+ \cdot \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Следовательно, если взять

$$C_{n0}(\tau) = Y_{n0}(\tau) - H_{B_n}(\tau)^+ \cdot \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) \right),$$

то будет справедливо

$$\begin{aligned} X_n(\tau) \Big|_{\tau \in [0, h_n)} &= Y_{n0}(\tau) = \left(E - H_{B_n}(\tau)^+ \cdot H_{B_n}(\tau) \right) \cdot C_{n0}(\tau) + \\ &+ H_{B_n}(\tau)^+ \cdot \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau_{k+1}) \cdot (F_n(\tau_{k+1}) - F_n(\tau_k)) \right) \right) = X_{n0}(\tau). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Непрерывность и дифференцируемость решения конечно-разностной с осреднением краевой задачи

В этом разделе рассмотрим вопрос о бесконечной дифференцируемости решений конечно-разностной с осреднением краевой задачи, т. е. о нахождении условий, при которых $X_n(t) \in C^\infty(T, \mathbb{R}^p)$, где $X_n(t)$ – решение (2), (3). Здесь и далее $\forall x \in \mathbb{R}^p \|x\| = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$, а $\forall A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ соответственно $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq p} \sum_{j=1}^p |a_{ij}|$.

Согласно утверждению 2 решение $X_n(\cdot)$ краевой задачи (2), (3) определяется единственным образом путем выбора функции $H_{B_n}(\cdot)^+ : [0, h_n) \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$ такой, что $\forall \tau \in [0, h_n)$ выполняется $H_{B_n}(\tau)^+ \in \tilde{H}_n^\tau$ и $C_{n0}(\cdot) : [0, h_n) \rightarrow \mathbb{R}^p$. Таким образом, свойства решения задачи (2), (3) могут быть определены путем наложения условий на функции $H_{B_n}(\cdot)^+$, $C_{n0}(\cdot)$ и $Q_n(\cdot)$. Приведем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $X_n(\cdot)$ – решение конечно-разностной с осреднением краевой задачи (2), (3), определенное выбором функций $H_{B_n}(\cdot)^+ : [0, h_n) \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$ и $C_{n0}(\cdot) : [0, h_n) \rightarrow \mathbb{R}^p$, и пусть выполнены условия

$$Q_n(\tau) \in C^\infty([0, h_n), \mathbb{R}^p),$$

$$H_{B_n}(\tau)^+ \in C^\infty([0, h_n), \mathbb{R}^{p \times p}),$$

$$C_{n0}(\tau) \in C^\infty([0, h_n), \mathbb{R}^p),$$

и при $l = 0, 1, 2, \dots$

$$\left\| \frac{d^l}{dt^l} X_{n0}(h_n - s) - \frac{d^l}{dt^l} B_n(h_n + s, 0) X_{n0}(s) - \frac{d^l}{dt^l} (F(h_n + s) - F(s)) \right\|_{s \rightarrow +0} \rightarrow 0,$$

где $X_{n_0}(\tau)$ определено по формуле (12), т. е.

$$X_{n_0}(\tau)|_{\tau \in [0, h_n]} = \left(E - H_{B_n}(\tau)^+ \cdot H_{B_n}(\tau) \right) \cdot C_{n_0}(\tau) + H_{B_n}(\tau)^+ \cdot \left(Q_n(\tau) - M_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_b-1} B_n(m_b h_n + \tau, \tau + (k+1) \cdot h_n) \cdot (F_n(t_{k+1}) - F_n(t_k)) \right) \right).$$

Тогда $X_n(t)$ принадлежит пространству $C^\infty(T, \mathbb{R}^p)$.

Доказательство. Докажем, что $X_{n_0}(\tau) \in C^\infty([0, h_n), \mathbb{R}^p)$.

В силу свойства 3) утверждения 1 фундаментальной матрицы $B_n(m_b h_n + \tau, 0) \in C^\infty([0, h_n), \mathbb{R}^{p \times p})$, следовательно, $H_{B_n}(\tau) \in C^\infty([0, h_n), \mathbb{R}^{p \times p})$, так как по определению $H_{B_n}(\tau) = M_1 + M_2 \cdot B_n(m_b h_n + \tau, 0)$.

Далее, как уже отмечалось, мы можем утверждать, что $L_n(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{p \times p})$ и $F_n(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^p)$, это следует из [9, с. 17]. Тогда функция $(L_n(t + h_n) - L_n(t) + E)$ бесконечно дифференцируема по t при $t \in \mathbb{R}$. Поскольку $B_n(m_b h_n + \tau, \tau + (k+1) \cdot h_n) = \prod_{i=k+1}^{m_b-1} (L_n(\tau_{i+1}) - L_n(\tau_i) + E)$ и количество элементов в произведении при фиксированном k постоянно $\forall \tau \in [0, h_n)$, то $B_n(m_b h_n + \tau, \tau + (k+1) \cdot h_n) \in C^\infty([0, h_n), \mathbb{R}^{p \times p})$ как функция от $\tau \in [0, h_n) \quad \forall k = 0, \overline{(m_b - 1)}$.

Следовательно, в силу условий теоремы и всего вышесказанного $X_{n_0}(\tau) \in C^\infty([0, h_n), \mathbb{R}^p)$. Справедливо также следующее преобразование:

$$\begin{aligned} & \frac{d^l}{dt^l} X_{n_0}(h_n - s) - \frac{d^l}{dt^l} B_n(h_n + s, 0) X_{n_0}(s) - \frac{d^l}{dt^l} (F_n(h_n + s) - F_n(s)) = \\ & = \frac{d^l}{dt^l} X_{n_0}(h_n - s) - \frac{d^l}{dt^l} X_{n_0}(s) - \frac{d^l}{dt^l} (L_n(h_n + s) - L_n(s)) X_{n_0}(s) - \frac{d^l}{dt^l} (F_n(h_n + s) - F_n(s)). \end{aligned}$$

Как упоминалось ранее, наше решение конечно-разностной с осреднением краевой задачи (2), (3) будет также решением задачи Коши (6), (7), где начальное условие задается формулой (12). Поэтому, как показано в [11], решение $X_n(t)$ принадлежит пространству $C^\infty(T, \mathbb{R}^p)$.

Библиографические ссылки

1. Das P. S., Sharma R. R. Existence and stability of measure differential equations // Czech. Math. J. 1972. Vol. 22, № 1. P. 145–158.
2. Завалицин С. Т., Сесекин А. Н. Импульсные процессы: модели и приложения. М.: Наука, 1991.
3. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский П. Теория обобщенных функций: секвенциальный подход. М.: Мир, 1976.
4. Colombeau J. F. New generalized functions and multiplication of distributions // Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1984.
5. Лазакович Н. В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38, № 5. С. 23–27.
6. Yablonski A. Differential equations with generalized coefficients // Nonlinear Anal. 2005. Vol. 63, issue 2. P. 171–197. DOI: 10.1016/j.na.2005.03.108.
7. Лазакович Н. В., Яблонский О. Л., Хмызов А. К. Системы дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в прямом произведении алгебр мнемофункций // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 2. С. 5–9.
8. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
9. Hörmander L. The analysis of linear partial differential operators I, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaft. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2003.
10. Ben-Israel Adi, Greville Thomas N. E. Generalized Inverses: Theory and Applications. New York: Springer-Verlag, 2003.
11. Аветушко Т. С., Лазакович Н. В., Русецкий А. Ю. Задача Коши для линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2013. № 3. С. 83–92.

References

1. Das P. S., Sharma R. R. Existence and stability of measure differential equations. *Czech. Math. J.* 1972. Vol. 22, No. 1. P. 145–158.
2. Zavalischin S. T., Seseikin A. N. Impul'snye protsessy: modeli i prilozheniya [Impulsive Processes. Models and Applications]. Moscow : Nauka, 1991 (in Russ.).
3. Antosik P., Mikusinski Y., Sikorski R. Teoriya obobshchennykh funktsii: sekventsial'nyi podkhod [Theory of distributions. The sequential approach]. Moscow : Mir, 1976 (in Russ.).
4. Colombeau J. F. New generalized functions and multiplication of distributions. Amsterdam : North-Holland Publ. Co., 1984.
5. Lazakovich N. V. [Stochastic differentials in the algebra of generalized random processes]. *Rep. of the Acad. of Sci. of Belarus.* 1994. Vol. 38, No. 5. P. 23–27 (in Russ.).
6. Yablonski A. Differential equations with generalized coefficients. *Nonlinear Anal.* 2005. Vol. 63, issue 2. P. 171–197. DOI: 10.1016/j.na.2005.03.108.
7. Lazakovich N. V., Yablonski O. L., Khmyzov A. K. [The Cauchy problem for systems of differential equations with generalized coefficients in the direct product of algebras of mnemonic functions]. *Rep. of the Natl. Acad. of Sci. of Belarus.* 2011. Vol. 55, No. 2. P. 5–9 (in Russ.).
8. Vladimirov V. S. Uravneniya matematicheskoi fiziki [Equations of Mathematical Physics]. Moscow : Nauka, 1981 (in Russ.).
9. Hörmander L. The analysis of linear partial differential operators I, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaft. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2003.
10. Ben-Israel Adi, Greville Thomas N. E. Generalized Inverses: Theory and Applications. New York : Springer-Verlag, 2003.
11. Autushka T. S., Lazakovich N. V., Rusetski A. Y. [Cauchy problem for linear inhomogeneous differential equations of second order with generalized coefficients in algebra of mnemofunctions]. *Proc. Natl. Acad. of Sci. of Belarus. Phys. and Math. Ser.* 2013. No. 3. P. 83–92 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 04.09.2017.
Received by editorial board 04.09.2017.

О НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

А. Л. ГЛАДКОВ¹⁾, Т. В. КАВИТОВА²⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

²⁾Витебский государственный университет им. П. М. Машерова,
Московский пр., 33, 210038, г. Витебск, Беларусь

Рассмотрено нелинейное нелокальное параболическое уравнение $u_t = \Delta u + a(x, t)u^r \int_{\Omega} u^p(y, t)dy - b(x, t)u^q$ для $(x, t) \in \Omega \times (0, +\infty)$ с нелинейным нелокальным граничным условием $u(x, t)|_{\partial\Omega \times (0, +\infty)} = \int_{\Omega} k(x, y, t)u^l(y, t)dy$ и начальными данными $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$, где r, p, q, l – положительные постоянные; Ω – ограниченная область в пространстве \mathbb{R}^n с гладкой границей $\partial\Omega$. Неотрицательные функции $a(x, t)$ и $b(x, t)$ определены при $x \in \bar{\Omega}$, $t \geq 0$ и локально непрерывны по Гёльдеру, неотрицательная непрерывная функция $k(x, y, t)$ определена при $x \in \partial\Omega$, $y \in \bar{\Omega}$, $t \geq 0$, неотрицательная непрерывная функция $u_0(x)$ – при $x \in \bar{\Omega}$ и удовлетворяет условию $u_0(x) = \int_{\Omega} k(x, y, 0)u_0^l(y)dy$ при $x \in \partial\Omega$. Изучены классические решения. Для доказательства существования локального максимального решения рассмотрена регуляризация исходной задачи. Установлены существование локального решения регуляризованной задачи и сходимость ее решений к локальному максимальному решению исходной задачи. Введены понятия верхнего и нижнего решений. Показано, что верхнее решение не меньше нижнего. Для нетривиальных начальных функций при выполнении определенных условий на данные задачи установлена положительность решений. Как следствие положительности решений и принципа сравнения решений доказана теорема единственности решения.

Ключевые слова: нелинейное параболическое уравнение; нелокальное граничное условие; существование решения; принцип сравнения.

Образец цитирования:

Гладков А. Л., Кавитова Т. В. О начально-краевой задаче для нелокального параболического уравнения с нелокальным граничным условием // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 29–38.

For citation:

Gladkov A. L., Kavtova T. V. On the initial-boundary value problem for a nonlocal parabolic equation with nonlocal boundary condition. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2018. No. 1. P. 29–38 (in Russ.).

Авторы:

Александр Львович Гладков – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой математической кибернетики механико-математического факультета.
Татьяна Валерьевна Кавитова – старший преподаватель кафедры геометрии и математического анализа факультета математики и информационных технологий.

Authors:

Alexander L. Gladkov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics.
gladkoyal@bsu.by
Tatiana V. Kavtova, senior lecturer at the department of geometry and mathematical analysis, faculty of mathematics and information technologies.
kavitovatv@tut.by

ON THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NONLOCAL PARABOLIC EQUATION WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITION

A. L. GLADKOV^a, T. V. KAVITOVA^b

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

^bVitebsk State University named after P. M. Masherov, 33 Maskoŭski Avenue, Vitebsk 210038, Belarus

Corresponding author: T. V. Kavitova (kavitovatv@tut.by)

We consider a nonlinear nonlocal parabolic equation $u_t = \Delta u + a(x, t)u^r \int_{\Omega} u^p(y, t)dy - b(x, t)u^q$ for $(x, t) \in \Omega \times (0, +\infty)$ with nonlinear nonlocal boundary condition $u(x, t)|_{\partial\Omega \times (0, +\infty)} = \int_{\Omega} k(x, y, t)u^l(y, t)dy$ and initial data $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$, where r, p, q, l are positive constants; Ω is a bounded domain in \mathbb{R}^n with smooth boundary $\partial\Omega$. Nonnegative functions $a(x, t)$ and $b(x, t)$ are defined for $x \in \bar{\Omega}$, $t \geq 0$ and local Hölder continuous, nonnegative continuous function $k(x, y, t)$ is defined for $x \in \partial\Omega$, $y \in \bar{\Omega}$, $t \geq 0$, nonnegative continuous function $u_0(x)$ is defined for $x \in \bar{\Omega}$ and satisfies the condition $u_0(x) = \int_{\Omega} k(x, y, 0)u_0^l(y)dy$ for $x \in \partial\Omega$. In this paper we study classical solutions. To prove the existence of a local maximal solution, we consider the regularization of the original problem. We establish the existence of a local solution of the regularized problem and the convergence of solutions of this problem to a local maximal solution of the original problem. We introduce definitions of a supersolution and a subsolution. It is shown that a supersolution is not less than a subsolution. We establish the positiveness of solutions of the problem with nontrivial initial data under certain conditions on the data of the problem. As a consequence of the positiveness of solutions and the comparison principle of solutions, we prove the uniqueness theorem.

Key words: nonlinear parabolic equation; nonlocal boundary condition; existence of solution; comparison principle.

Рассмотрено нелинейное параболическое уравнение

$$u_t = \Delta u + a(x, t)u^r \int_{\Omega} u^p(y, t)dy - b(x, t)u^q, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

с нелинейным нелокальным граничным условием

$$u(x, t) = \int_{\Omega} k(x, y, t)u^l(y, t)dy, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (2)$$

и начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

где r, p, q, l – положительные постоянные; Ω – ограниченная область в пространстве \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) с гладкой границей $\partial\Omega$.

Относительно данных задачи (1)–(3) в работе сделаны следующие предположения:

$$a(x, t), b(x, t) \in C_{\text{loc}}^{\alpha}(\bar{\Omega} \times [0, +\infty)), \quad 0 < \alpha < 1, \quad a(x, t) \geq 0, \quad b(x, t) \geq 0;$$

$$k(x, y, t) \in C(\partial\Omega \times \bar{\Omega} \times [0, +\infty)), \quad k(x, y, t) \geq 0;$$

$$u_0(x) \in C(\bar{\Omega}), \quad u_0(x) \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad u_0(x) = \int_{\Omega} k(x, y, 0)u_0^l(y)dy, \quad x \in \partial\Omega.$$

Начально-краевые задачи с нелокальностями в уравнении или граничном условии рассматривались в ряде работ [1–11]. В частности, в [1] доказан принцип сравнения для задачи (1)–(3) при $a(x, t) \equiv b(x, t) \equiv 0$, $k(x, y, t) = k(x, y)$, $l = 1$, с нелинейным членом $g(x, u)$ в уравнении. Задача (1)–(3) при $a(x, t) \equiv 0$ рассмотрена в [8], где доказаны существование локального решения, принцип сравнения решений и исследованы вопросы единственности и неединственности решений, а также в [6], где получены условия существования глобального решения и обращения решения в бесконечность в течение

конечного времени. В [2] исследуются вопросы существования локального и глобального решений задачи (1)–(3) при $a(x, t) \equiv b(x, t) \equiv 0$, $k(x, y, t) = k(x, y)$, $l = 1$, с нелокальным членом $\int_{\Omega} g(u(y, t)) dy$ в уравнении. В работе [3] получены условия существования и отсутствия глобальных положительных решений задачи (1)–(3) при $a(x, t) \equiv 1$, $r = 0$, $b(x, t) \equiv b$, $k(x, y, t) = k(x, y)$, $l = 1$. В [5] доказан принцип сравнения решений и определены условия существования и отсутствия глобальных положительных решений задачи (1)–(3) при $a(x, t) \equiv 1$, $r = 0$, $b(x, t) \equiv b$, $k(x, y, t) = k(x, y)$.

В настоящей работе для задачи (1)–(3) установлено существование локального решения и доказан принцип сравнения решений.

Локальное существование

Пусть $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$, $\Gamma_T = S_T \cup \bar{\Omega} \times \{0\}$, $T > 0$.

Определение 1. Назовем неотрицательную функцию $u(x, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(Q_T \cup \Gamma_T)$ верхним решением задачи (1)–(3) в Q_T , если

$$u_t \geq \Delta u + a(x, t)u^r \int_{\Omega} u^p(y, t) dy - b(x, t)u^q, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (4)$$

$$u(x, t) \geq \int_{\Omega} k(x, y, t)u^l(y, t) dy, \quad (x, t) \in S_T, \quad (5)$$

$$u(x, 0) \geq u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

Неотрицательную функцию $u(x, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(Q_T \cup \Gamma_T)$ назовем нижним решением задачи (1)–(3) в Q_T , если неравенства (4)–(6) выполнены с противоположным знаком. Функцию $u(x, t)$ будем называть решением задачи (1)–(3) в Q_T , если $u(x, t)$ одновременно является верхним и нижним решениями задачи (1)–(3) в Q_T .

Определение 2. Назовем решение $u(x, t)$ задачи (1)–(3) в Q_T максимальным, если для любого другого решения $v(x, t)$ задачи (1)–(3) в Q_T выполнено неравенство $v(x, t) \leq u(x, t)$, $(x, t) \in Q_T$.

Пусть последовательность $\{\varepsilon_m\}$ такова, что $0 < \varepsilon_m < 1$ и $\varepsilon_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. При $\varepsilon = \varepsilon_m$, $m = 1, 2, \dots$, введем в рассмотрение функции $u_{0\varepsilon}(x)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} u_{0\varepsilon}(x) &\in C(\bar{\Omega}), \quad u_{0\varepsilon}(x) \geq \varepsilon, \quad u_{0\varepsilon_i}(x) \geq u_{0\varepsilon_j}(x) \text{ для } \varepsilon_i \geq \varepsilon_j, \\ u_{0\varepsilon}(x) &\rightarrow u_0(x) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \\ u_{0\varepsilon}(x) &= \int_{\Omega} k(x, y, 0)u_{0\varepsilon}^l(y) dy + \varepsilon, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + a(x, t)u^r \int_{\Omega} u^p(y, t) dy - b(x, t)u^q + b(x, t)\varepsilon^q, & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, t) = \int_{\Omega} k(x, y, t)u^l(y, t) dy + \varepsilon, & (x, t) \in S_T, \\ u(x, 0) = u_{0\varepsilon}(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (8)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_m$. Понятия решения, верхнего и нижнего решений задачи (8) вводятся аналогично определению 1.

Теорема 1. Для некоторого $T > 0$ задача (8) имеет единственное решение в Q_T .

Доказательство. Построим верхнее решение задачи (8). Пусть $k = \sup_{\partial\Omega \times \Omega \times (0, T_1)} k(x, y, t)$ и $a = \sup_{Q_{T_1}} a(x, t)$ для некоторого $T_1 > 0$. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x)$, обладающую следующими свойствами:

$$\varphi(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \inf_{\Omega} \varphi(x) \geq \max\left(\sup_{\Omega} u_{0\varepsilon}(x), 1\right), \inf_{\partial\Omega} \varphi(x) \geq k \max(1, \exp(l-1)) \int_{\Omega} \varphi'(y) dy + 1.$$

Покажем, что функция $w(x, t) = \exp(\beta t)\varphi(x)$ является верхним решением задачи (8) в Q_T при подходящем выборе $\beta > 0$ и $T > 0$.

Действительно, в Q_T получим

$$\begin{aligned} w_t - \Delta w - a(x, t)w^r \int_{\Omega} w^p(y, t) dy + b(x, t)w^q - b(x, t)\varepsilon^q = \\ = \exp(\beta t) \left(\beta\varphi(x) - \Delta\varphi(x) - a(x, t)\exp[\beta(r+p-1)t] \varphi^r(x) \int_{\Omega} \varphi^p(y) dy \right) + \\ + b(x, t) (\exp(\beta qt)\varphi^q(x) - \varepsilon^q) \geq 0 \end{aligned}$$

при выполнении следующих неравенств:

$$\beta \geq \sup_{\Omega} \Delta\varphi + a \max(1, \exp(r+p-1)) \sup_{\Omega} \varphi^r(x) \int_{\Omega} \varphi^p(y) dy, \quad T \leq \min(1, 1/\beta, T_1).$$

На границе S_T имеем

$$\begin{aligned} w(x, t) - \int_{\Omega} k(x, y, t) w'(y, t) dy - \varepsilon = \exp(\beta t)\varphi(x) - \int_{\Omega} k(x, y, t)\exp(\beta lt)\varphi'(y) dy - \varepsilon \geq \\ \geq \exp(\beta t) \left(\varphi(x) - k \exp[\beta(l-1)t] \int_{\Omega} \varphi'(y) dy \right) - \varepsilon \geq 0. \end{aligned}$$

При $x \in \Omega$ выполнено

$$w(x, 0) - u_{0\varepsilon}(x) = \varphi(x) - u_{0\varepsilon}(x) \geq 0.$$

Для доказательства существования решения задачи (8) введем в рассмотрение множество

$$B = \left\{ h(x, t) \in C(\bar{Q}_T) : \varepsilon \leq h(x, t) \leq w(x, t), h(x, 0) = u_{0\varepsilon}(x) \right\}$$

и задачу

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + a(x, t)u^r \int_{\Omega} v^p(y, t) dy - b(x, t)u^q + b(x, t)\varepsilon^q, & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, t) = \int_{\Omega} k(x, y, t) v'(y, t) dy + \varepsilon, & (x, t) \in S_T, \\ u(x, 0) = u_{0\varepsilon}(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (9)$$

где $v \in B$. Понятия решения, нижнего и верхнего решений задачи (9) вводятся аналогично определению 1.

Покажем, что множество B выпукло. Действительно, пусть $h_1, h_2 \in B$, тогда $\varepsilon \leq \theta h_1 + (1-\theta)h_2 \leq w$ для $\theta \in [0, 1]$. Отметим, что для некоторого T задача (9) имеет решение $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ [12].

Пусть A – отображение, сопоставляющее каждой функции $v \in B$ решение задачи (9), т. е. $A(v) = u$. Убедимся в том, что A – непрерывное отображение множества B в себя. Несложно показать, что $\underline{u}(x, t) = \varepsilon$ и $\bar{u}(x, t) = w(x, t)$ являются нижним и верхним решениями задачи (9) соответственно. По принципу сравнения для задачи (9) A отображает множество B в себя.

Пусть $G(x, y; t - \tau)$ есть функция Грина для уравнения теплопроводности с однородным граничным условием Дирихле. В [13; 14] доказаны следующие свойства функции Грина:

$$\begin{aligned} G(x, y; t - \tau) &\geq 0, \quad x, y \in \Omega, \quad 0 \leq \tau < t, \\ \frac{\partial G(x, y; t - \tau)}{\partial n} &\leq 0, \quad G(x, y; t - \tau) = 0, \quad x \in \Omega, \quad y \in \partial\Omega, \quad 0 \leq \tau < t, \\ \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) dy &\leq 1, \quad x \in \Omega, \quad 0 \leq \tau < t, \end{aligned} \quad (10)$$

где \vec{n} – единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Несложно показать, что

$$\int_{\Omega} G(x, y; t) dy - \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, \xi; t - \tau)}{\partial n} dS_{\xi} d\tau = 1, \quad (x, t) \in Q_T. \quad (11)$$

Как известно, функция $u(x, t)$ является решением задачи (9) тогда и только тогда, когда $u(x, t)$ удовлетворяет в Q_T уравнению

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\Omega} G(x, y; t) u_{0\epsilon}(y) dy + \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) \left(a(y, \tau) u^r(y, \tau) \int_{\Omega} v^p(\eta, \tau) d\eta + b(y, \tau) (\epsilon^q - u^q(y, \tau)) \right) dy d\tau - \\ &- \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, \xi; t - \tau)}{\partial n} \left(\int_{\Omega} k(\xi, y, \tau) v^l(y, \tau) dy + \epsilon \right) dS_{\xi} d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

Покажем, что отображение A непрерывно на множестве B . Действительно, пусть u_1 и u_2 – решения задачи (9) в Q_T с $v = v_1$ и $v = v_2$ соответственно, где $v_i \in B$, $i = 1, 2$. Используя (10) и (12), получим

$$\begin{aligned} |u_1 - u_2| &= \left| \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) \left\{ a(y, \tau) \left[u_1^r(y, \tau) \int_{\Omega} (v_1^p(\eta, \tau) - v_2^p(\eta, \tau)) d\eta + \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. (u_1^r(y, \tau) - u_2^r(y, \tau)) \int_{\Omega} v_2^p(\eta, \tau) d\eta \right] - b(y, \tau) (u_1^q(y, \tau) - u_2^q(y, \tau)) \right\} dy d\tau - \\ &- \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, \xi; t - \tau)}{\partial n} \int_{\Omega} k(\xi, y, \tau) (v_1^l(y, \tau) - v_2^l(y, \tau)) dy dS_{\xi} d\tau \right| \leq \\ &\leq |\Omega| \sup_{Q_T} |v_1^p - v_2^p| \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) a(y, \tau) u_1^r(y, \tau) dy d\tau + \\ &+ \theta \sup_{Q_T} |u_1 - u_2| \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) dy d\tau - \\ &- \sup_{Q_T} |v_1^l - v_2^l| \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, \xi; t - \tau)}{\partial n} \int_{\Omega} k(\xi, y, \tau) dy dS_{\xi} d\tau, \end{aligned}$$

где

$$\theta = r |\Omega| \sup_{Q_T} a(x, t) \max \left(\epsilon^{r-1}, \sup_{Q_T} w^{r-1}(x, t) \right) \sup_{Q_T} w^p(x, t) + q \sup_{Q_T} b(x, t) \max \left(\epsilon^{q-1}, \sup_{Q_T} w^{q-1}(x, t) \right).$$

Вследствие (10) можно выбрать постоянную T таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\theta \sup_{Q_T} \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) dy d\tau < \frac{1}{2}.$$

Тогда, принимая во внимание неравенство

$$\sup_{Q_T} |u_1 - u_2| \leq 2 \left\{ p |\Omega| \max \left(\varepsilon^{p-1}, \sup_{Q_T} w^{p-1}(x, t) \right) \sup_{Q_T} \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) a(y, \tau) w^r(y, \tau) dy d\tau + \right. \\ \left. + l \max \left(\varepsilon^{l-1}, \sup_{Q_T} w^{l-1}(x, t) \right) \sup_{Q_T} \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left(-\frac{\partial G(x, \xi; t - \tau)}{\partial n} \right) \int_{\Omega} k(\xi, y, \tau) dy dS_{\xi} d\tau \right\} \sup_{Q_T} |v_1 - v_2|$$

и свойства (10), (11), получим непрерывность отображения A на множестве B . Из предыдущих рассуждений также следует, что множество функций AB равномерно ограничено. В силу (12) и свойств функции Грина [14] множество AB равномерно непрерывно. Тогда по теореме Арцела – Асколи множество AB относительно компактно в $C(\bar{Q}_T)$.

Применяя теорему Шаудера, получим существование неподвижной точки u_{ε} отображения A в B такой, что u_{ε} является решением задачи (8). Единственность решения задачи (8) следует из принципа сравнения, который может быть доказан аналогично тому, как это будет сделано в разделе «Принцип сравнения» для задачи (1)–(3). Теорема доказана.

Теорема 2. Для некоторого $T > 0$ задача (1)–(3) имеет максимальное решение в Q_T .

Доказательство. Пусть u_{ε} – решение задачи (8). Тогда u_{ε} удовлетворяет в Q_T уравнению

$$u_{\varepsilon}(x, t) = \int_{\Omega} G(x, y; t) u_{0\varepsilon}(y) dy + \\ + \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) \left(a(y, \tau) u_{\varepsilon}^r(y, \tau) \int_{\Omega} u_{\varepsilon}^p(\eta, \tau) d\eta + b(y, \tau) (\varepsilon^q - u_{\varepsilon}^q(y, \tau)) \right) dy d\tau - \\ - \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, \xi; t - \tau)}{\partial n} \left(\int_{\Omega} k(\xi, y, \tau) u_{\varepsilon}^l(y, \tau) dy + \varepsilon \right) dS_{\xi} d\tau. \quad (13)$$

Применяя принцип сравнения для решений задачи (8) при $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, получим $u_{\varepsilon_1} \leq u_{\varepsilon_2}$. Согласно теореме Дини для некоторого $T > 0$ последовательность $\{u_{\varepsilon}(x, t)\}$ сходится равномерно в \bar{Q}_T при $\varepsilon \rightarrow 0$ к некоторой функции $u_m(x, t)$. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в (13) и используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, приходим к выводу о том, что функция $u_m(x, t)$ удовлетворяет в Q_T уравнению

$$u_m(x, t) = \int_{\Omega} G(x, y; t) u_0(y) dy + \\ + \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) \left(a(y, \tau) u_m^r(y, \tau) \int_{\Omega} u_m^p(\eta, \tau) d\eta - b(y, \tau) u_m^q(y, \tau) \right) dy d\tau - \\ - \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, \xi; t - \tau)}{\partial n} \int_{\Omega} k(\xi, y, \tau) u_m^l(y, \tau) dy dS_{\xi} d\tau.$$

Следовательно, $u_m(x, t)$ есть решение задачи (1)–(3) в Q_T . Несложно показать, что $u_m(x, t)$ является максимальным решением задачи (1)–(3) в Q_T . Теорема доказана.

Принцип сравнения

Теорема 3. Пусть $\underline{u}(x, t)$ и $\bar{u}(x, t)$ – нижнее и верхнее решения задачи (1)–(3) в Q_T соответственно. Кроме того, если $\min(r, p, l) < 1$, то предположим, что $\underline{u}(x, t) > 0$ или $\bar{u}(x, t) > 0$ при $(x, t) \in Q_T \cup \Gamma_T$. Тогда $\bar{u}(x, t) \geq \underline{u}(x, t)$ при $(x, t) \in Q_T \cup \Gamma_T$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\min(r, p, l) \geq 1$. Пусть $u_{0\varepsilon}(x)$ удовлетворяет условиям (7), но только $u_{0\varepsilon}(x) \rightarrow \underline{u}(x, 0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Построим максимальное решение $\underline{u}_m(x, t)$ задачи (1)–(3) с начальным условием $u_0(x) = \underline{u}(x, 0)$ следующим образом:

$$\underline{u}_m(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t),$$

где $u_\varepsilon(x, t)$ – решение задачи (8).

Покажем, что имеют место следующие соотношения:

$$\underline{u}(x, t) \leq \underline{u}_m(x, t) \leq \bar{u}(x, t), \quad (x, t) \in Q_T \cup \Gamma_T. \quad (14)$$

Докажем второе неравенство в (14), первое доказывается аналогично.

Пусть для $t \in (0, T)$ неотрицательная функция $\varphi(x, \tau) \in C^{2,1}(\bar{Q}_t)$ и удовлетворяет однородному граничному условию Дирихле. Умножим первое уравнение (8) на φ и проинтегрируем по области Q_t :

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} u_{\varepsilon\tau}(x, \tau) \varphi(x, \tau) dx d\tau = \\ & = \int_0^t \int_{\Omega} \left(\Delta u_\varepsilon(x, \tau) + a(x, \tau) u_\varepsilon^r(x, \tau) \int_{\Omega} u_\varepsilon^p(y, \tau) dy + b(x, \tau) (\varepsilon^q - u_\varepsilon^q(x, \tau)) \right) \varphi(x, \tau) dx d\tau. \end{aligned}$$

Применяя формулу Грина и формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x, t) \varphi(x, t) dx & \leq \int_{\Omega} u_\varepsilon(x, 0) \varphi(x, 0) dx + \varepsilon^q \int_0^t \int_{\Omega} b(x, \tau) \varphi(x, \tau) dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} u_\varepsilon(x, \tau) (\varphi_\tau(x, \tau) + \Delta \varphi(x, \tau)) dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} \left(a(x, \tau) u_\varepsilon^r(x, \tau) \int_{\Omega} u_\varepsilon^p(y, \tau) dy - b(x, \tau) u_\varepsilon^q(x, \tau) \right) \varphi(x, \tau) dx d\tau - \\ & - \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi(x, \tau)}{\partial n} \left(\int_{\Omega} k(x, y, \tau) u_\varepsilon^l(y, \tau) dy + \varepsilon \right) dS_x d\tau. \end{aligned} \quad (15)$$

С другой стороны, верхнее решение $\bar{u}(x, t)$ удовлетворяет неравенству (15) с противоположным знаком и $\varepsilon = 0$. Пусть $w(x, t) = u_\varepsilon(x, t) - \bar{u}(x, t)$. Используя теорему Лагранжа, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w(x, t) \varphi(x, t) dx & \leq \int_{\Omega} w(x, 0) \varphi(x, 0) dx + \varepsilon^q \int_0^t \int_{\Omega} b(x, \tau) \varphi(x, \tau) dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} w(x, \tau) (\varphi_\tau(x, \tau) + \Delta \varphi(x, \tau) - qb(x, \tau) \theta_1^{q-1}(x, \tau) \varphi(x, \tau)) dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} a(x, \tau) \bar{u}^r(x, \tau) \varphi(x, \tau) \int_{\Omega} p \theta_2^{p-1}(y, \tau) w(y, \tau) dy dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} a(x, \tau) r \theta_3^{r-1}(x, \tau) w(x, \tau) \varphi(x, \tau) \int_{\Omega} u_\varepsilon^p(y, \tau) dy dx d\tau - \\ & - \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi(x, \tau)}{\partial n} \left(\int_{\Omega} k(x, y, \tau) l \theta_4^{l-1}(y, \tau) w(y, \tau) dy + \varepsilon \right) dS_x d\tau, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\theta_i(x, \tau)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) – положительные непрерывные, а следовательно, и ограниченные в \bar{Q}_t функции, причем

$$\sup_{Q_t} (\theta_2^{p-1}(x, \tau) + \theta_3^{r-1}(x, \tau) + \theta_4^{l-1}(x, \tau)) \leq \theta,$$

где положительная постоянная θ не зависит от ε .

Отметим, что справедливы неравенства:

$$0 \leq a(x, t) \leq M, \quad 0 \leq b(x, t) \leq M, \quad (x, t) \in \bar{Q}_T,$$

$$0 \leq k(x, y, t) \leq M, \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times \bar{\Omega} \times [0, T],$$

где M – некоторая положительная постоянная.

Определим последовательность $\gamma_k(x, \tau)$, $k = 1, 2, \dots$, следующим образом: $\gamma_k(x, \tau) \in C^\infty(\bar{Q}_t)$, $\gamma_k \geq 0$ и $\gamma_k \rightarrow qb(x, \tau)\theta_1^{q-1}(x, \tau)$ при $k \rightarrow \infty$ в $L^1(Q_t)$. Рассмотрим в Q_t задачу

$$\begin{cases} \varphi_\tau + \Delta\varphi - \gamma_k\varphi = 0, & (x, \tau) \in Q_t, \\ \varphi(x, \tau) = 0, & (x, \tau) \in S_t, \\ \varphi(x, t) = \psi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (17)$$

где $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ и $0 \leq \psi(x) \leq 1$. Обозначим решение задачи (17) через $\varphi_k(x, \tau)$. Отметим, что $\varphi_k(x, \tau) \in C^{2,1}(\bar{Q}_t)$ и в силу принципа максимума $0 \leq \varphi_k(x, \tau) \leq 1$ в \bar{Q}_t . Поскольку $\gamma_k \geq 0$, то легко показать, что $-N \leq \frac{\partial\varphi_k(x, \tau)}{\partial n} \leq 0$ на S_t , где N – некоторая положительная постоянная, не зависящая от k и ε . Положим $\varphi = \varphi_k$ в (16) и перейдем к пределу при $k \rightarrow \infty$:

$$\int_{\Omega} w(x, t)\psi(x)dx \leq \int_{\Omega} w_+(x, 0)dx + \varepsilon^q MT|\Omega| + \varepsilon NT|\partial\Omega| + m(t) \int_0^t \int_{\Omega} w_+(x, \tau)dx d\tau, \quad (18)$$

где $w_+ = \max(w, 0)$, $|\partial\Omega|$ и $|\Omega|$ – меры Лебега $\partial\Omega$ в \mathbb{R}^{n-1} и Ω в \mathbb{R}^n соответственно;

$$m(t) = M|\Omega|\theta \left(p \sup_{\bar{Q}_t} \bar{u}^r(x, \tau) + r \sup_{\bar{Q}_t} u_\varepsilon^p(x, \tau) \right) + lMN\theta|\partial\Omega|.$$

Отметим, что $m(t) \leq m(T_0)$ при $t \in (0, T_0]$ для любого $T_0 \in (0, T)$ и $w(x, 0) \leq 0$ для $x \in \Omega$.

Выберем последовательность $\psi_k(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \leq \psi_k(x) \leq 1$, сходящуюся в $L^1(\Omega)$ к функции

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } w(x, t) > 0, \\ 0, & \text{если } w(x, t) \leq 0. \end{cases}$$

Подставляя $\psi_k(x)$ вместо $\psi(x)$ в (18) и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим

$$\int_{\Omega} w_+(x, t)dx \leq \varepsilon^q MT|\Omega| + \varepsilon NT|\partial\Omega| + m(T_0) \int_0^t \int_{\Omega} w_+(x, \tau)dx d\tau, \quad t \in (0, T_0].$$

Применяя лемму Гронуолла, имеем

$$\int_{\Omega} w_+(x, t)dx \leq (\varepsilon^q MT|\Omega| + \varepsilon NT|\partial\Omega|) \exp[m(T_0)t], \quad t \in (0, T_0].$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим $w(x, t) \leq 0$ в \bar{Q}_{T_0} . В силу произвольности T_0 имеем $w(x, t) \leq 0$ в $Q_T \cup \Gamma_T$. Для случая $\min(r, p, l) < 1$ можно рассмотреть разность $w = \underline{u} - \bar{u}$ и, проводя аналогичные рассуждения с использованием положительности \underline{u} или \bar{u} , доказать утверждение теоремы. Теорема доказана.

Предположим, что выполнены следующие условия:

$$k(x, \cdot, t) \neq 0 \text{ для любых } x \in \partial\Omega \text{ и } t \in (0, T), \quad (19)$$

$$a(x, t) > 0 \text{ при } x \in \bar{\Omega} \text{ и } t \in [0, T). \quad (20)$$

Лемма 1. Пусть $u_0(x)$ – нетривиальная функция в Ω , выполнено (19) и одно из следующих условий: $q \geq 1$, или $b(x, t) \equiv 0$ в Q_T , или $l < 1$, $r + p < q < 1$ и справедливо (20). Предположим, что $u(x, t)$ – решение задачи (1)–(3) в Q_T . Тогда $u(x, t) > 0$ в $Q_T \cup S_T$.

Доказательство. Пусть $q \geq 1$ или $b(x, t) \equiv 0$ в Q_T . Обозначим

$$M = \max \left(\sup_{Q_{T_0}} u(x, t), \sup_{Q_{T_0}} b(x, t) \right),$$

где $T_0 \in (0, T)$; M – некоторая положительная постоянная. Положим $v = u \exp(\lambda t)$, где $\lambda \geq M^q$. Отметим, что в Q_{T_0} выполнено

$$v_t - \Delta v = \exp(\lambda t)(\lambda u + u_t - \Delta u) \geq u \exp(\lambda t)(\lambda - b(x, t)u^{q-1}) \geq 0.$$

Поскольку $v(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$, и $u_0(x)$ – нетривиальная неотрицательная функция в Ω , то согласно сильному принципу максимума $v(x, t) > 0$ в Q_{T_0} . Следовательно, $u(x, t) > 0$ в Q_{T_0} . Из (2) и (19) получим $u(x, t) > 0$ на S_{T_0} . В силу произвольности T_0 имеем $u(x, t) > 0$ в $Q_T \cup S_T$.

Пусть $l < 1$, $r + p < q < 1$ и выполнено условие (20). Положим

$$a_\tau = \inf_{Q_\tau} a(x, t), \quad b_\tau = \sup_{Q_\tau} b(x, t)$$

для некоторого $\tau \in (0, T)$. Через Ω' обозначим множество всех точек $\bar{\Omega}$, для которых выполнено неравенство

$$u_0(x) < \left\{ \frac{a_\tau}{2b_\tau} \int_{\Omega} u_0^p(y) dy \right\}^{\frac{1}{q-r}}.$$

Тогда для некоторого $\sigma \in (0, \tau)$ справедливо неравенство

$$a(x, t)u^r \int_{\Omega} u^p(y, t) dy - b(x, t)u^q \geq 0 \quad \text{для } x \in \bar{\Omega}' \text{ и } t \in [0, \sigma]. \quad (21)$$

Пусть Ω'' – область в Ω' такая, что $u_0(x) \not\equiv 0$ в Ω'' . Из (1) и (21) следует

$$u_t - \Delta u \geq 0 \quad \text{для } x \in \Omega'' \text{ и } t \in (0, \sigma).$$

Вследствие сильного принципа максимума $u(x, t) > 0$ для $x \in \Omega''$ и $t \in (0, \sigma]$. Отметим, что последнее неравенство выполняется для $x \in \Omega' \setminus \partial\Omega$ и $t \in (0, \sigma]$.

Для точек $x \in \overline{\Omega \setminus \Omega'}$ справедливо

$$u_0(x) \geq \left\{ \frac{a_\tau}{2b_\tau} \int_{\Omega} u_0^p(y) dy \right\}^{\frac{1}{q-r}}.$$

Тогда существует постоянная $\delta \in (0, T)$ такая, что $u(x, t) > 0$ для $x \in \overline{\Omega \setminus \Omega'}$ и $t \in [0, \delta]$. Следовательно, $u(x, t) > 0$ для $x \in \Omega$ и $t \in (0, t_1]$, где $t_1 \leq \min(\sigma, \delta)$. В силу (19) получим $u(x, t) > 0$ для $x \in \bar{\Omega}$ и $t \in (0, t_1]$. Пусть $\bar{t} \in (0, t_1)$. Легко видеть, что при достаточно малом ε нижним решением задачи (1)–(3) с начальными данными при $t = \bar{t}$ выступает функция $\underline{u}(x, t) \equiv \varepsilon$. Лемма доказана.

Простым следствием теоремы 3 и леммы 1 является следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть выполнено одно из условий:

- 1) $\min(r, p, l) \geq 1$;
 - 2) $\min(r, p, l) < 1$, справедливо (19), $u_0(x) > 0$ в $\bar{\Omega}$ и или $q \geq 1$, или $b(x, t) \equiv 0$ в Q_T , или $l < 1$, $r + p < q < 1$, верно (20);
 - 3) существует положительное в $Q_T \cup \Gamma_T$ решение задачи (1)–(3).
- Тогда решение задачи (1)–(3) единственно в Q_T .

Библиографические ссылки

1. Deng K. Comparison principle for some nonlocal problems // *Quart. Appl. Math.* 1992. Vol. 50, issue 3. P. 517–522. DOI: 10.1090/qam/1178431.
2. Lin Z., Liu Y. Uniform blowup profiles for diffusion equations with nonlocal source and nonlocal boundary // *Acta Math. Sci.* 2004. Vol. 24, issue 3. P. 443–450. DOI: 10.1016/S0252-9602(17)30168-6.
3. Wang Y., Mu C., Xiang Z. Properties of positive solution for nonlocal reaction-diffusion equation with nonlocal boundary // *Bound. Value Probl.* 2007. Vol. 2007. P. 1–12. Article ID: 064579. DOI: 10.1155/2007/64579.
4. Cui Z., Yang Z. Roles of weight functions to a nonlinear porous medium equation with nonlocal source and nonlocal boundary condition // *J. Math. Anal. Appl.* 2008. Vol. 342, issue 1. P. 559–570. DOI: 10.1016/j.jmaa.2007.11.055.
5. Mu C., Liu D., Zhou S. Properties of positive solutions for a nonlocal reaction-diffusion equation with nonlocal nonlinear boundary condition // *J. Korean Math. Soc.* 2010. Vol. 47, № 6. P. 1317–1328. DOI: 10.4134/JKMS.2010.47.6.1317.
6. Gladkov A., Guedda M. Blow-up problem for semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition // *Nonlinear Anal.* 2011. Vol. 74, № 13. P. 4573–4580. DOI: 10.1016/j.na.2011.04.027.
7. Zhong G., Tian L. Blow up problems for a degenerate parabolic equation with nonlocal source and nonlocal nonlinear boundary condition // *Bound. Value Probl.* 2012. Vol. 2012. P. 1–14. DOI: 10.1186/1687-2770-2012-45.
8. Gladkov A., Guedda M. Semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition // *Appl. Anal.* 2012. Vol. 91, issue 12. P. 2267–2276. DOI: 10.1080/00036811.2011.601297.
9. Fang Z. B., Zhang J., Yi S.-C. Roles of weight functions to a nonlocal porous medium equation with inner absorption and nonlocal boundary condition // *Abstr. Appl. Anal.* 2012. Vol. 2012. P. 1–16. DOI: 10.1155/2012/326527.
10. Fang Z. B., Zhang J. Influence of weight functions to a nonlocal p -Laplacian evolution equation with inner absorption and nonlocal boundary condition // *J. Inequal. Appl.* 2013. Vol. 2013. P. 1–10.
11. Fang Z. B., Zhang J. Global and blow-up solutions for the nonlocal p -Laplacian evolution equation with weighted nonlinear nonlocal boundary condition // *J. Integral Equ. Appl.* 2014. Vol. 26, № 2. P. 171–196. DOI: 10.1216/JIE-2014-26-2-171.
12. Pao C. V. *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*. New York : Plenum Press, 1992.
13. Kahane C. S. On the asymptotic behavior of solutions of parabolic equations // *Czechoslovak Math. J.* 1983. Vol. 33, issue 2, № 108. P. 262–285.
14. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралъцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*. М. : Наука, 1967.

References

1. Deng K. Comparison principle for some nonlocal problems. *Quart. Appl. Math.* 1992. Vol. 50, issue 3. P. 517–522. DOI: 10.1090/qam/1178431.
2. Lin Z., Liu Y. Uniform blowup profiles for diffusion equations with nonlocal source and nonlocal boundary. *Acta Math. Sci.* 2004. Vol. 24, issue 3. P. 443–450. DOI: 10.1016/S0252-9602(17)30168-6.
3. Wang Y., Mu C., Xiang Z. Properties of positive solution for nonlocal reaction-diffusion equation with nonlocal boundary. *Bound. Value Probl.* 2007. Vol. 2007. P. 1–12. Article ID: 064579. DOI: 10.1155/2007/64579.
4. Cui Z., Yang Z. Roles of weight functions to a nonlinear porous medium equation with nonlocal source and nonlocal boundary condition. *J. Math. Anal. Appl.* 2008. Vol. 342, issue 1. P. 559–570. DOI: 10.1016/j.jmaa.2007.11.055.
5. Mu C., Liu D., Zhou S. Properties of positive solutions for a nonlocal reaction-diffusion equation with nonlocal nonlinear boundary condition. *J. Korean Math. Soc.* 2010. Vol. 47, No. 6. P. 1317–1328. DOI: 10.4134/JKMS.2010.47.6.1317.
6. Gladkov A., Guedda M. Blow-up problem for semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition. *Nonlinear Anal.* 2011. Vol. 74, No. 13. P. 4573–4580. DOI: 10.1016/j.na.2011.04.027.
7. Zhong G., Tian L. Blow up problems for a degenerate parabolic equation with nonlocal source and nonlocal nonlinear boundary condition. *Bound. Value Probl.* 2012. Vol. 2012. P. 1–14. DOI: 10.1186/1687-2770-2012-45.
8. Gladkov A., Guedda M. Semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition. *Appl. Anal.* 2012. Vol. 91, issue 12. P. 2267–2276. DOI: 10.1080/00036811.2011.601297.
9. Fang Z. B., Zhang J., Yi S.-C. Roles of weight functions to a nonlocal porous medium equation with inner absorption and nonlocal boundary condition. *Abstr. Appl. Anal.* 2012. Vol. 2012. P. 1–16. DOI: 10.1155/2012/326527.
10. Fang Z. B., Zhang J. Influence of weight functions to a nonlocal p -Laplacian evolution equation with inner absorption and nonlocal boundary condition. *J. Inequal. Appl.* 2013. Vol. 2013. P. 1–10.
11. Fang Z. B., Zhang J. Global and blow-up solutions for the nonlocal p -Laplacian evolution equation with weighted nonlinear nonlocal boundary condition. *J. Integral Equ. Appl.* 2014. Vol. 26, No. 2. P. 171–196. DOI: 10.1216/JIE-2014-26-2-171.
12. Pao C. V. *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*. New York : Plenum Press, 1992.
13. Kahane C. S. On the asymptotic behavior of solutions of parabolic equations. *Czechoslovak Math. J.* 1983. Vol. 33, issue 2, No. 108. P. 262–285.
14. Ladyzhenskaja O. A., Solonnikov V. A., Ural'ceva N. N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and quasilinear equations of parabolic type]. Moscow : Nauka, 1967 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 27.10.2017.
Received by editorial board 27.10.2017.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

THEORY OF PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

УДК 519.21

О ГИБРИДНОЙ МОДЕЛИ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

Д. А. ПАВЛИВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Исследованы свойства так называемых гибридных моделей, в которых различные компоненты многомерного вектора состояния рынка описываются как аффинными, так и неаффинными моделями. Такие модели позволяют объединить в себе сильные стороны каждого из классов. На примере гибридной модели *квадратичная – Даффи – Кана* рассмотрены различные свойства основных функций временной структуры доходности – форвардной кривой и кривой доходности. Найдены условия для параметров модели, обеспечивающие возрастающий (убывающий) характер поведения кривых. Определена ширина полос, характеризующая гибкость модели при оценке параметров по реальным данным. Показано, что расширение аффинных моделей до гибридных путем добавления неаффинных составляющих не приводит к существенному усложнению анализа и в то же время повышает гибкость модели.

Ключевые слова: кривая доходности; форвардная кривая; гибридная модель; квадратичная модель; модель Даффи – Кана.

Образец цитирования:

Павлив Д. А. О гибридной модели временной структуры процентных ставок // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 39–47.

For citation:

Pauliu D. A. Hybrid term structure models. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2018. No. 1. P. 39–47 (in Russ.).

Автор:

Дмитрий Александрович Павлив – аспирант кафедры теории вероятности и математической статистики факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Г. А. Медведев.

Author:

Dzmitry A. Pauliu, postgraduate student at the department of probability theory and mathematical statistics, faculty of applied mathematics and computer science.
375293325768@yandex.ru

HYBRID TERM STRUCTURE MODELS

D. A. PAULIU^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

In this paper, we study the properties of so-called hybrid models in which the various components of a multi-dimensional vector describing the state of the market, are both affine and non-affine models. Such models allows to combine the strengths of both affine and non-affine models. Using example of a hybrid model *quadratic – Duffy – Kan* the different properties were found for the main functions of the term structure – the forward rate and the yield curve. We found conditions on the parameters of the model, when curves are increases (decreases). Width of the bands characterizing the flexibility of the model fitting to the real data was studied. As a result, it is shown that expanding affine models to hybrid models by adding non-affine factors does not add additional complexity to analysis, but increases flexibility of the model.

Key words: yield curve; forward rate; hybrid model; quadratic model; Duffy – Kan model.

В последнее время в противовес простым, аффинным моделям, например [1], появляются более сложные, неаффинные модели [2], которые, как предполагается, должны лучше описывать реальные процессы финансового рынка. Проблема неаффинных моделей заключается в их аналитической сложности даже для одномерного случая, в то время как реальные данные предполагают многомерность модели. В работе [3] исследуется возможность построения так называемых гибридных моделей, когда некоторые переменные состояния рынка описываются аффинными моделями, тогда как другие – неаффинными. Такие модели позволяют объединить преимущества каждого из классов моделей: так, аффинная составляющая может лучше описывать долгосрочное поведение процессов, в то время как неаффинная часть за счет своей нелинейности позволяет более точно описать динамику краткосрочной и среднесрочной доходности. В [3] проведен сравнительный анализ структуры волатильности процессов, получаемых с помощью простых и гибридных моделей, и показано, что гибридные модели являются более предпочтительными. В настоящей работе на основе подхода, предложенного в [3], построена гибридная модель, а также изучены ее свойства функций временной структуры доходности. В результате показано, что расширение аффинных моделей до гибридных путем добавления неаффинных составляющих не приводит к существенному усложнению анализа и в то же время повышает гибкость модели.

Одной из наиболее популярных аффинных моделей является модель Даффи – Кана, в рамках которой процесс состояния рынка $X_A(t)$ описывается диффузионным уравнением

$$dX_A(t) = k_A(\theta_A - X_A)dt + \sqrt{2k_A D_A \frac{X_A - x_A}{\theta_A - x_A}} dW_A(t), X_A(0) > x_A,$$

где k_A – параметр, определяющий коэффициент автокорреляции процесса $X_A(t)$; θ_A – стационарное среднее данного процесса; D_A – стационарная дисперсия; x_A – параметр, имеющий смысл нижней границы процесса $X_A(t)$; $W_A(t)$ – стандартный винеровский процесс. В качестве компонент вектора $X_A(t)$ могут выступать различные финансовые процессы, такие как краткосрочная, среднесрочная, долгосрочная процентные ставки, доходности биржевых индексов, долговые обязательства и т. п. Свойства данной модели детально изучены в литературе [1]. Для одномерного случая модели Даффи – Кана чаще всего предполагают, что процесс состояния рынка $X_A(t)$ совпадает с процессом краткосрочной процентной ставки $r(t)$.

Простота аффинных моделей позволяет детально исследовать различные характеристики финансового рынка, например временную структуру доходности, что является их преимуществом. Однако получаемые результаты оказываются далеки от реальных данных. В связи с этим в ходе своего развития аффинный класс моделей был расширен до неаффинного, популярность которого существенно возросла в последние годы. Одной из моделей неаффинного класса является квадратичная модель [2], в которой состояние рынка описывается вектором латентных переменных $X_Q(t)$

$$dX_Q(t) = \mu(X_Q(t))dt + \sigma(X_Q(t))dW_Q(t), t > t_0, X_Q(t_0) = x_Q \in \mathbb{R}^n$$

с функциями дрейфа $\mu(X_Q)$ и волатильности $\sigma(X_Q)$. Процентная ставка в такой модели определяется как $r(t) = r_{\min} + X_Q^T(t)\Phi X_Q(t)$, где r_{\min} – нижняя граница значений процентной ставки; Φ – диагональная n -мерная матрица [2]. Очевидно, что такая модель, в силу своей нелинейности, является более сложной для аналитического исследования.

В [3] рассматривается возможность использования так называемых гибридных моделей, когда некоторые компоненты вектора рыночного состояния $X(t)$ описываются, например, аффинной моделью $X_A(t)$, а другие – квадратичной $X_Q(t)$. Такие модели позволяют расширить возможности аффинного класса путем добавления неаффинных свойств, при этом, как будет показано далее, не приводящего к значительному усложнению анализа.

Будем предполагать независимость компонент одного класса от другого. В данном случае значение процентной ставки определяется как

$$\begin{aligned} r(t) &= \alpha + 1^T X_A(t) + X_Q^T(t)\Phi X_Q(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \\ X_A(t) &\in \mathbb{R}^m, \quad X_Q(t) \in \mathbb{R}^n, \quad \Phi = \text{diag}\{\varphi_{Q,j}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \end{aligned} \quad (1)$$

Далее, будем использовать следующее обозначение гибридных моделей: $A(n)Q(m)$, где $A(n)$ описывает n -мерную модель Даффи – Кана; $Q(m)$ – m -мерная квадратичная модель. При этом все параметры и функции, относящиеся к классу $A(n)$, будут указываться с нижним индексом A и аналогично: относящиеся к классу $Q(m)$ – с нижним индексом Q .

Чаще всего для исследования временной структуры доходности процентных ставок используют кривую доходности $y(\tau, X)$ и форвардную кривую $f(\tau, X)$. Заметим, что для рассматриваемых гибридных моделей в силу предположения межклассовой независимости компонент вектора состояния рынка имеют место следующие равенства:

$$y(\tau, X) = y_A(\tau, X_A) + y_Q(\tau, X_Q), \quad f(\tau, X) = f_A(\tau, X_A) + f_Q(\tau, X_Q). \quad (2)$$

Будем рассматривать n -мерную модель Даффи – Кана $A(n)$ в условиях следящего предположения.

Предположение 1. Компоненты n -мерного вектора состояния X_A являются независимыми.

В силу предположения 1 многомерная модель Даффи – Кана, по сути, распадается на n независимых подмоделей $A(1)$, детально исследованных в литературе, например в [1], откуда, в частности, известны следующие соотношения:

$$y_A(\tau, X_A) = \sum_{i=1}^n \left(x_{A,i} + (\theta_{A,i} - x_{A,i}) \left(\frac{B_{A,i}(\tau) X_{A,i} - x_{A,i}}{\tau} + \frac{k_{A,i}}{V_{A,i}} \left(1 - \frac{\ln(1 + v_{A,i}) B_{A,i}(\tau)}{\tau v_{A,i}} \right) \right) \right), \quad (3)$$

$$f_A(\tau, X_A) = \sum_{i=1}^n \left(x_{A,i} + (\theta_{A,i} - x_{A,i}) B_{A,i}(\tau) \left(k_{A,i} - (V_{A,i} - v_{A,i}) \frac{X_{A,i} - x_{A,i}}{\theta_{A,i} - x_{A,i}} - v_{A,i} V_{A,i} B_{A,i}(\tau) \frac{X_{A,i} - x_{A,i}}{\theta_{A,i} - x_{A,i}} \right) \right), \quad (4)$$

где

$$B_{A,i}(\tau) = \left(\frac{\varepsilon_{A,i}}{e^{\varepsilon_{A,i}\tau} - 1} + V_{A,i} \right)^{-1}, \quad \lambda_{A,i}(X_{A,i}) = -\lambda_{A,i} \sqrt{\frac{X_{A,i} - x_{A,i}}{\theta_{A,i} - x_{A,i}}},$$

$$\varepsilon_{A,i} = \sqrt{\left(k_{A,i} + \lambda_{A,i} \sigma_{A,i} \right)^2 + \frac{4k_{A,i} D_{A,i}}{\theta_{A,i} - x_{A,i}}},$$

$$\sigma_{A,i} = \frac{\sqrt{2k_{A,i} D_{A,i}}}{\theta_{A,i} - x_{A,i}}, \quad v_{A,i} = \frac{\varepsilon_{A,i} - k_{A,i} - \lambda_{A,i} \sigma_{A,i}}{2}, \quad V_{A,i} = \varepsilon_{A,i} - v_{A,i}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

где $\lambda_{A,i}(X_{A,i})$ – рыночная стоимость риска в модели Даффи – Кана.

Модель $Q(m)$ будем рассматривать при следующих упрощающих предположениях, предложенных в [2].

Предположение 2. Компоненты m -мерного вектора состояния X_Q являются независимыми. Это влечет за собой диагональность матриц K_Q и S_Q .

Предположение 3. Стационарное среднее процесса $X_Q(t)$ равно нулю, $\theta_Q = 0$. Заметим, что авторы достаточно часто делают подобное предположение, например в [2; 4].

Предположение 4. Квадратичная модель рассматривается в риск-нейтральной мере, т. е. когда рыночная стоимость риска равна нулю. Такое предположение упрощает анализ, но при этом сохраняет основные закономерности.

В качестве функций дрейфа и волатильности квадратичной модели будем использовать $-k_{Q,i}$ и $s_{Q,i}$ соответственно [2]. В условиях предположений 2–4 основные функции временной структуры доходности примут вид [2]

$$y_Q(\tau, X_Q) = \frac{1}{\tau} \left(\sum_{i=1}^m A_{Q,ii}(\tau) X_{Q,i}^2 + C_Q(\tau) \right), \quad (5)$$

$$f_Q(\tau, X_Q) = \sum_{i=1}^m \frac{dA_{Q,ii}(\tau)}{d\tau} X_{Q,i}^2 + \frac{dC_Q(\tau)}{d\tau}, \quad (6)$$

где

$$A_{Q,ii}(\tau) = \frac{\varphi_{Q,i}}{k_{Q,i} + v_{Q,i} \operatorname{cth}(\tau v_{Q,i})}, \quad v_{Q,i} = \sqrt{k_{Q,i}^2 + 2s_{Q,i}^2 \varphi_{Q,i}}; \quad \frac{dC_Q(\tau)}{d\tau} = \alpha + \sum_{i=1}^m \frac{s_{Q,i}^2 \varphi_{Q,i}}{k_{Q,i} + v_{Q,i} \operatorname{cth}(\tau v_{Q,i})};$$

$$C_Q(\tau) = \tau\alpha + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{1 + \omega_{Q,i} \exp(2v_{Q,i}\tau)}{1 + \omega_{Q,i}} \right) - (v_{Q,i} + k_{Q,i})\tau \right), \quad \omega_{Q,i} \equiv \frac{v_{Q,i} + k_{Q,i}}{v_{Q,i} - k_{Q,i}}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Утверждение 1. Имеют место следующие предельные значения при $\tau = 0$ и $\tau = \infty$:

$$y(0, X) = f(0, X) = r(X), \quad y(\infty) = f(\infty) = \sum_{i=1}^n \left(x_{A,i} + v_A \frac{(\theta_{A,i} - x_{A,i})^2}{D_{A,i}} \right) + \alpha + \sum_{j=1}^m \left(\frac{v_{Q,j} - k_{Q,j}}{2} \right).$$

Доказательство. Результат получается непосредственным взятием предела в (2) с учетом (3)–(6).

Утверждение 2. При малых сроках до погашения кривые $y(\tau, X)$ и $f(\tau, X)$ имеют представления:

$$f(\tau, X) = r(X) + \tau \sum_{i=1}^n \left((\theta_{A,i} - x_{A,i}) \left(k_{A,i} - (V_{A,i} - v_{A,i}) \frac{X_{A,i} - x_{A,i}}{\theta_{A,i} - x_{A,i}} \right) \right) +$$

$$+ \tau \sum_{j=1}^m \varphi_{Q,j} (s_{Q,j}^2 - 2X_{Q,j}^2 k_{Q,j}) + o(\tau^2),$$

$$y(\tau, X) = r(X) + \frac{1}{2} \tau \sum_{i=1}^n \left((\theta_{A,i} - x_{A,i}) \left(k_{A,i} - (V_{A,i} - v_{A,i}) \frac{X_{A,i} - x_{A,i}}{\theta_{A,i} - x_{A,i}} \right) \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \tau \sum_{j=1}^m \varphi_{Q,j} (s_{Q,j}^2 - 2X_{Q,j}^2 k_{Q,j}) + o(\tau^2),$$

при этом скорость изменения форвардной кривой в два раза выше соответствующей скорости кривой доходности.

Доказательство. Результат получается как сумма разложений в ряд Тейлора соответствующих кривых для модели Даффи – Кана и квадратичной модели.

Утверждение 3. Достаточное условие возрастания форвардной кривой гибридной модели $A(n)Q(m)$ есть выполнение следующих неравенств:

$$X_{A,i} > x_{A,i} + \frac{k_{A,i}(\theta_{A,i} - x_{A,i})}{V_{A,i} - v_{A,i}}, \quad X_{Q,j}^2 < \frac{s_{Q,j}^2}{4s_{Q,j}^2 A_{Q,ij}(\infty) + 2k_{Q,j}}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m,$$

и достаточное условие убывания форвардной кривой – выполнение неравенств:

$$X_{A,i} \leq x_{A,i} + \frac{k_{A,i}(\theta_{A,i} - x_{A,i})}{V_{A,i} + v_{A,i}}, \quad X_{Q,j}^2 > \frac{s_{Q,j}^2}{2k_{Q,j}}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Доказательство. Изучим поведение первой производной $f_Q(\tau, X_Q)$

$$\frac{df_Q(\tau, X_Q)}{d\tau} = \sum_{i=1}^m \frac{d^2 A_{Q,ii}(\tau)}{d\tau^2} X_{Q,i}^2 + \frac{d^2 C_Q(\tau)}{d\tau^2}, \quad (7)$$

где

$$\frac{d^2 A_{Q,ii}(\tau)}{d\tau^2} = -(4s_{Q,i}^2 A_{Q,ii}^2(\tau) + 2k_{Q,i}) \frac{dA_{Q,ii}(\tau)}{d\tau}, \quad \frac{d^2 C_Q(\tau)}{d\tau^2} = \sum_{i=1}^m s_{Q,i}^2 A_{Q,ii}(\tau) \frac{dA_{Q,ii}(\tau)}{d\tau}. \quad (8)$$

Перегруппировав слагаемые с учетом (8), можно переписать (7) следующим образом:

$$\frac{df_Q(\tau, X_Q)}{d\tau} = \sum_{i=1}^m \frac{dA_{Q,ii}(\tau)}{d\tau} \left(s_{Q,i}^2 - X_{Q,i}^2 (4s_{Q,i}^2 A_{Q,ii}(\tau) + 2k_{Q,i}) \right). \quad (9)$$

Попробуем найти условия, накладываемые на вектор X , при которых форвардная кривая будет равномерно возрастающей (убывающей) по τ . Эти условия соответствуют положительности (отрицательности) производной форвардной кривой (9) либо равенству ее нулю для некоторого τ . Достаточным условием того, что производная форвардной кривой будет положительной (отрицательной), служит

положительность (отрицательность) каждого из слагаемых. При этом функция $\frac{dA_{Q,ii}(\tau)}{d\tau}$ является положительной, монотонно убывающей и изменяет свои значения от $\varphi_{Q,i}$ при $\tau = 0$ и до 0 при $\tau = \infty$,

и, следовательно, первый множитель каждого из слагаемых $\frac{dA_{Q,ii}(\tau)}{d\tau}$ не будет влиять на его знак.

В связи с этим условия положительности (отрицательности) производной принимают следующий вид (соответственно):

$$X_{Q,i}^2 < \frac{s_{Q,i}^2}{4s_{Q,i}^2 A_{Q,ii}(\tau) + 2k_{Q,i}}, \quad X_{Q,i}^2 > \frac{s_{Q,i}^2}{4s_{Q,i}^2 A_{Q,ii}(\tau) + 2k_{Q,i}}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (10)$$

На основании вида функции $A_{Q,i}(\tau)$ ясно, что правая часть (10) является монотонно убывающей функцией τ , поэтому полученные результаты с учетом аналогичного утверждения для модели Даффи – Кана, приведенного в [1], доказывают утверждение.

Таким образом, выполненный анализ показывает, что определение свойств гибридной модели сводится к нахождению соответствующих свойств для моделей $A(n)$ и $Q(m)$ с последующим их комбинированием с учетом (1) и (2).

Рассмотрим проблему определения временной структуры в фиксированный момент времени t , когда состояние рынка характеризуется некоторым фиксированным вектором $X(t) = X \in \mathbb{R}^{n+m}$, которому согласно (1) сопоставимо вполне определенное значение процентной ставки r . Заметим, что это значение ставки при наличии квадратичной составляющей порождается не единственным вектором X , а существует целое многообразие векторов из \mathbb{R}^{n+m} , соответствующее этому r . Такое многообразие векторов X согласуется с многообразием временных структур, которые будут компактно располагаться в некоторой полосе и иметь одинаковое значение r при $\tau = 0$. Данное свойство существенно отличает квадратичные модели от аффинных, в которых получается только единственная кривая, соединяющая стартовое

значение $y(0) = r$ с предельным значением $y(\infty)$. Представляет интерес найти ширину этой полосы при ограничении на выбор компонент вектора X :

$$r = \alpha + \sum_{i=1}^n X_{A,i} + \sum_{j=1}^m z_{Q,j}, \quad r - \text{fix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad X_{A,i} \in (0, r - \alpha), \quad z_{Q,j} = \varphi_{Q,j} X_{Q,j}^2 \in (0, r - \alpha).$$

Заметим, что в условиях сделанных предположений предельное значение $y(\infty)$ для гибридной модели $A(n)Q(m)$ принимает вид

$$y(\infty) = f(\infty) = \alpha + \sum_{i=1}^n v_{A,i} \frac{\theta_{A,i}^2}{D_{A,i}} + \sum_{j=1}^m \frac{v_{Q,j} - k_{Q,j}}{2}.$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. В условиях сделанных предположений верхняя и нижняя границы кривой доходности и форвардной кривой (в общем случае недостижимые) при фиксированном значении процентной ставки r и фиксированной матрице Φ будут определяться выражениями:

$$y_{\max}(\tau) = y_0(\tau) + \frac{(r - \alpha)}{\tau} \max \left(B_{A, M_A}(\tau), \frac{A_{Q, M_Q M_Q}(\tau)}{\varphi_{Q, M_Q}} \right),$$

$$y_{\min}(\tau) = y_0(\tau) + \frac{(r - \alpha)}{\tau} \min \left(B_{A, m_A}(\tau), \frac{A_{Q, m_Q m_Q}(\tau)}{\varphi_{Q, m_Q}} \right),$$

$$f_{\max}(\tau, X) = f_0(\tau) + (r - \alpha) \max \left(1 - k_{A, H_A} B_{A, H_A}(\tau) - \frac{k_{A, H_A} D_{A, H_A}}{\theta_{A, H_A}} B_{A, H_A}^2(\tau); \frac{1}{\varphi_{Q, H_Q}} \frac{\partial A_{Q, H_Q H_Q}(\tau)}{\partial \tau} \right),$$

$$f_{\min}(\tau, X) = f_0(\tau) + (r - \alpha) \min \left(1 - k_{A, h_A} B_{A, h_A}(\tau) - \frac{k_{A, h_A} D_{A, h_A}}{\theta_{A, h_A}} B_{A, h_A}^2(\tau); \frac{1}{\varphi_{Q, h_Q}} \frac{\partial A_{Q, h_Q h_Q}(\tau)}{\partial \tau} \right),$$

где индексы $M_A, M_Q, m_A, m_Q, H_A, H_Q, h_A$ и h_Q выбираются таким образом, что

$$B_{A, m_A}(\tau) \leq B_{A, i}(\tau), \quad B_{A, i}(\tau) \leq B_{A, M_A}(\tau), \quad \frac{A_{Q, m_Q m_Q}(\tau)}{\varphi_{Q, m_Q}} \leq \frac{A_{Q, j j}(\tau)}{\varphi_{Q, j}}, \quad \frac{A_{Q, j j}(\tau)}{\varphi_{Q, j}} \leq \frac{A_{Q, M_Q M_Q}(\tau)}{\varphi_{Q, M_Q}},$$

$$k_{A, i} B_{A, i}(\tau) - \frac{k_{A, i} D_{A, i}}{\theta_{A, i}} B_{A, i}^2(\tau) \leq k_{A, h_A} B_{A, h_A}(\tau) - \frac{k_{A, h_A} D_{A, h_A}}{\theta_{A, h_A}} B_{A, h_A}^2(\tau),$$

$$k_{A, H_A} B_{A, H_A}(\tau) - \frac{k_{A, H_A} D_{A, H_A}}{\theta_{A, H_A}} B_{A, H_A}^2(\tau) \leq k_{A, i} B_{A, i}(\tau) - \frac{k_{A, i} D_{A, i}}{\theta_{A, i}} B_{A, i}^2(\tau),$$

$$\frac{1}{\varphi_{Q, j}} \frac{\partial A_{Q, j j}(\tau)}{\partial \tau} \leq \frac{1}{\varphi_{Q, H_Q}} \frac{\partial A_{Q, H_Q H_Q}(\tau)}{\partial \tau}, \quad \frac{1}{\varphi_{Q, h_Q}} \frac{\partial A_{Q, h_Q h_Q}(\tau)}{\partial \tau} \leq \frac{1}{\varphi_{Q, j}} \frac{\partial A_{Q, j j}(\tau)}{\partial \tau}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Теперь исследуем влияние матрицы Φ на ширину полос для кривой доходности и форвардной кривой в гибридной модели $A(n)Q(m)$. Отметим, что матрица Φ определяет как стартовое значение $y(0) = r$, так и предельное значение $y(\infty)$.

Теорема 2. В условиях сделанных предположений верхняя и нижняя границы (недостижимые) кривой доходности и форвардной кривой при фиксированных значениях процентной ставки r и $y(\infty)$ будут определяться выражениями:

$$\begin{aligned}
 y_{\max}(\tau) &= \frac{1}{2\tau} \ln \left(\operatorname{ch}(v^o \tau) + \frac{k^o}{v^o} \operatorname{sh}(v^o \tau) \right) + \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n \theta_{A,i} \frac{k_{A,i}}{V_{A,i}} \left(\tau - \frac{\ln(1 + v_{A,i}) B_{A,i}(\tau)}{v_{A,i}} \right) + \\
 &\quad + \alpha - \frac{k^o}{2} + \frac{(r - \alpha)}{\tau} \max \left(B_{A, M_A}(\tau), \frac{1}{k_o \operatorname{cth}(k_o \tau) + k_o} \right), \\
 y_{\min}(\tau) &= \frac{1}{2\tau} \ln \left(\operatorname{ch}(v_o \tau) + \frac{k_o}{v_o} \operatorname{sh}(v_o \tau) \right) + \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n \theta_{A,i} \frac{k_{A,i}}{V_{A,i}} \left(\tau - \frac{\ln(1 + v_{A,i}) B_{A,i}(\tau)}{v_{A,i}} \right) + \\
 &\quad + \alpha - \frac{k_o}{2} + \frac{(r - \alpha)}{\tau} \min \left(B_{A, m_A}(\tau), \frac{1}{v_o \operatorname{cth}(v_o \tau) + k^o} \right), \\
 f_{\max}(\tau, X) &= \alpha + \frac{1}{2} \frac{(v^o)^2 - (k^o)^2}{v^o \operatorname{cth}(v^o \tau) + k^o} + \sum_{i=1}^n \theta_{A,i} B_{A,i}(\tau) k_{A,i} + \\
 &\quad + (r - \alpha) \max \left(1 - k_{A, H_A} B_{A, H_A}(\tau) - \frac{k_{A, H_A} D_{A, H_A}}{\theta_{A, H_A}} B_{A, H_A}^2(\tau); \frac{1}{\exp(2k_o \tau)} \right), \\
 f_{\min}(\tau, X) &= \alpha + \frac{1}{2} \frac{(v_o)^2 - (k_o)^2}{v_o \operatorname{cth}(v_o \tau) + k_o} + \sum_{i=1}^n \theta_{A,i} B_{A,i}(\tau) k_{A,i} + \\
 &\quad + (r - \alpha) \min \left(1 - k_{A, h_A} B_{A, h_A}(\tau) - \frac{k_{A, h_A} D_{A, h_A}}{\theta_{A, h_A}} B_{A, h_A}^2(\tau); \frac{1}{\left(\operatorname{ch}(v^o \tau) + \frac{k^o}{v^o} \operatorname{sh}(v^o \tau) \right)^2} \right),
 \end{aligned}$$

где индексы M_A, m_A, H_A и h_A выбираются таким образом, что

$$\begin{aligned}
 B_{A, m_A}(\tau) &\leq B_{A, i}(\tau), \quad B_{A, i}(\tau) \leq B_{A, M_A}(\tau), \\
 k_{A, i} B_{A, i}(\tau) - \frac{k_{A, i} D_{A, i}}{\theta_{A, i}} B_{A, i}^2(\tau) &\leq k_{A, h_A} B_{A, h_A}(\tau) - \frac{k_{A, h_A} D_{A, h_A}}{\theta_{A, h_A}} B_{A, h_A}^2(\tau), \\
 k_{A, H_A} B_{A, H_A}(\tau) - \frac{k_{A, H_A} D_{A, H_A}}{\theta_{A, H_A}} B_{A, H_A}^2(\tau) &\leq k_{A, i} B_{A, i}(\tau) - \frac{k_{A, i} D_{A, i}}{\theta_{A, i}} B_{A, i}^2(\tau), \quad 1 \leq i \leq n,
 \end{aligned}$$

а k_o и k^o – минимальное и максимальное значения соответственно среди $k_{Q,j}$, а $v_o = k_o$ и

$$v^o = 2 \left(y(\infty) - \alpha - \sum_{i=1}^n v_{A,i} \frac{\theta_{A,i}^2}{D_{A,i}} \right) + k^o.$$

Рассмотрим численный пример для модели $A(2)Q(2)$, иллюстрирующий полученные результаты. Пусть $\alpha = 0$ и

$$\begin{aligned}
 K_A &= \begin{pmatrix} 0,08 & 0,0 \\ 0,0 & 0,03 \end{pmatrix}, \quad D_A = \begin{pmatrix} 0,001 & 0,0 \\ 0,0 & 0,002 \end{pmatrix}, \quad \theta_A = (0,005 \quad 0,002)^T, \quad X_A = \begin{pmatrix} 0,001 \\ 0,002 \end{pmatrix}, \\
 K_Q &= \begin{pmatrix} 0,6 & 0,0 \\ 0,0 & 0,13 \end{pmatrix}, \quad S_Q = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,0 \\ 0,0 & 0,08 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad X_Q = \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,08 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

где использовались оценки параметров квадратичной части модели из [2], а оценки параметров аффинной части подбирались таким образом, чтобы результирующая гибридная модель совпадала

с квадратичной на границах временной оси $Y_0(0)$ и $Y_0(\infty)$. Такой выбор параметров позволяет проводить сравнение гибридной и квадратичной моделей при заданных экзогенных переменных, характеризующих состояние финансового рынка. В этом случае значение стартовой процентной ставки $r = 0,0511$, значение предельной доходности $y(\infty) = 0,0721$. Будем называть кривую доходности $Y_0(u)$ (форвардную кривую) допустимой, если $Y_0(0) = r$ и $Y_0(\infty) = y(\infty)$. На рис. 1 представлены кривая доходности $Y(u)$ и форвардная кривая $F(u)$ для полученной гибридной модели, а также верхние и нижние границы допустимых кривых при фиксированной (базовой) матрице Φ . Здесь использовано нелинейное преобразование сроков до погашения $u = 1 - e^{-\rho\tau}$, которое отображает положительную полуось $(0, \infty)$ в единичный интервал $(0, 1)$ [5], так что $Y_0(u) = y(\tau, X)$, $F_0(u) = f(\tau, X)$, где $\tau = \frac{-\ln(1-u)}{\rho}$.

На рис. 2 показаны те же кривые, что и на рис. 1, но уже для случая, когда могут варьироваться не только допустимые векторы переменных состояния X , но и допустимые матрицы Φ , что, как видно, существенно расширяет полосу возможных кривых доходности.

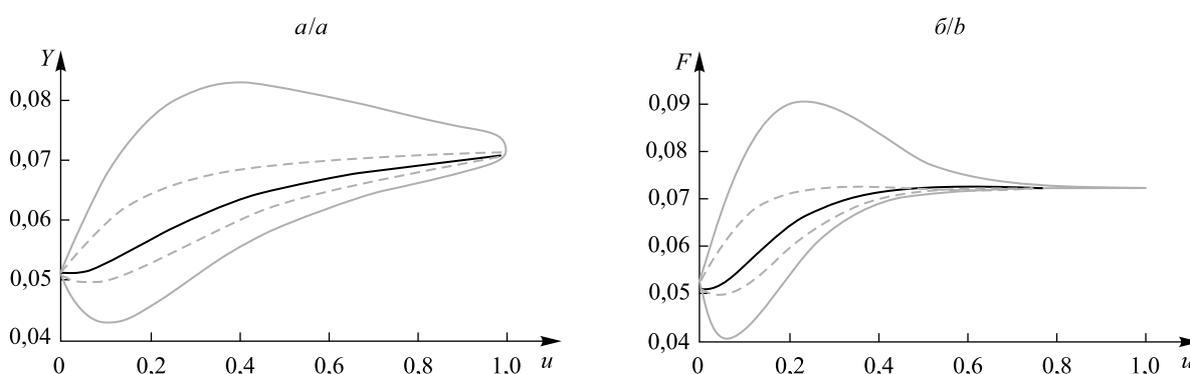


Рис. 1. Функция $Y(u)$ (черная сплошная линия) (а); функция $F(u)$ (черная сплошная линия) (б) и их верхние и нижние границы для гибридной модели $A(2)Q(2)$ (серая сплошная линия) при фиксированной матрице Φ . Информативно представлены аналогичные границы для квадратичной модели $Q(2)$ с параметрами, соответствующими значениям $r = 0,0511$ и $y(\infty) = 0,0721$ (пунктирная линия серого цвета)

Fig. 1. Function $Y(u)$ (black solid line) (a); function $F(u)$ (black solid line) (b) and their upper and lower bounds for the hybrid model $A(2)Q(2)$ (gray solid line) for a fixed matrix Φ .

Similar bounds for the quadratic model $Q(2)$ with parameters corresponding to the values $r = 0.0511$ and $y(\infty) = 0.0721$ (gray dotted line) are presented informatively

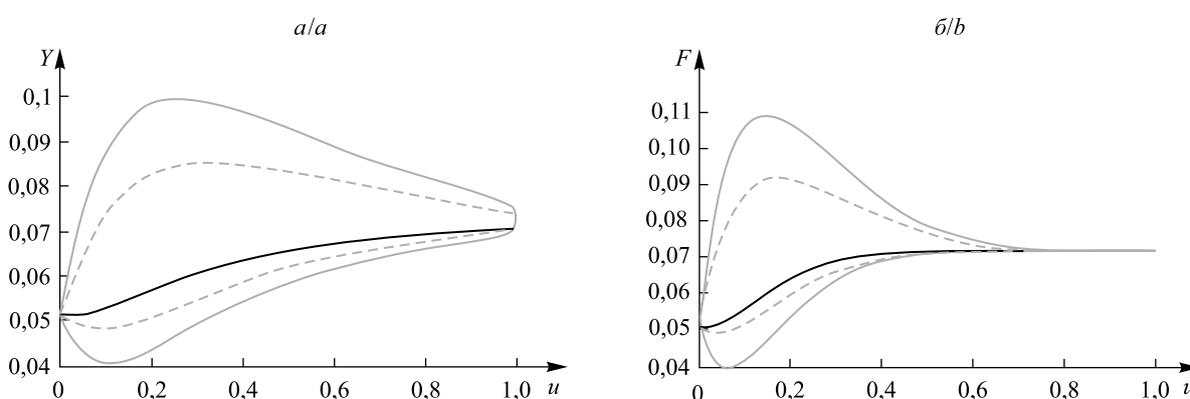


Рис. 2. Функция $Y(u)$ (черная сплошная линия) (а); функция $F(u)$ (черная сплошная линия) (б) и их верхние и нижние границы для гибридной модели $A(2)Q(2)$ (серая сплошная линия) при варьировании матрицы Φ . Информативно представлены аналогичные границы для квадратичной модели $Q(2)$ с параметрами, соответствующими значениям $r = 0,0511$ и $y(\infty) = 0,0721$ (пунктирная линия серого цвета)

Fig. 2. Function $Y(u)$ (black solid line) (a); function $F(u)$ (black solid line) (b) and their upper and lower bounds for the hybrid model $A(2)Q(2)$ (gray solid line) for a non-fixed matrix Φ .

Similar bounds for the quadratic model $Q(2)$ with parameters corresponding to the values $r = 0.0511$ and $y(\infty) = 0.0721$ (gray dotted line) are presented informatively

Полученные результаты свидетельствуют о том, что гибридная модель $A(n)Q(m)$ позволяет получить большее разнообразие кривых доходностей и форвардных кривых при фиксированных значениях $y(0)$ и $y(\infty)$ в сравнении с квадратичной моделью $Q(m)$. При этом следует отметить, что повышение размерности модели за счет добавления аффинных факторов при сделанных предположениях не приводит к значительному усложнению аналитического анализа модели.

Таким образом, построена новая гибридная модель *квадратичная – Даффи – Кана* на основе подхода, предложенного в [3], для которой выведен и доказан ряд свойств и утверждений, а также проведен ее сравнительный анализ с квадратичной моделью на предмет «гибкости» описания реальных данных при фиксированных экзогенных параметрах финансового рынка. Результаты работы могут быть использованы как для решения практических задач прикладного финансового анализа, так и для продолжения теоретических исследований неаффинных моделей временной структуры доходности процентных ставок.

Библиографические ссылки

1. *Медведев Г. А.* О временной структуре доходности. 3. Однофакторная модель Даффи – Кана // Вестн. Том. гос. ун-та. 2012. № 3 (20). С. 71–80.
2. *Медведев Г. А., Павлив Д. А.* О квадратичных моделях доходности в риск-нейтральной среде // Вестн. Том. гос. ун-та. 2016. № 4 (37). С. 44–56.
3. *Ahn D., Dittmar R., Gallant A., et al.* Purebred or hybrid?: Reproducing the volatility in term structure dynamics // *J. Econom.* 2003. Vol. 116, issues 1–2. P. 147–180. DOI: 10.1016/S0304-4076(03)00106-4.
4. *Ahn D., Dittmar R., Gallant A.* Quadratic Term Structure Models: Theory and Evidence. New Orleans : AFA, 2001.
5. *Медведев Г. А.* О временной структуре доходности. 7. Новая версия // Вестн. Том. гос. ун-та. 2013. № 4 (25). С. 61–70.

References

1. Medvedev G. A. [On term structure of yield rates. 3. The Duffie – Kan one-factor model]. *Tomsk State Univ. J.* 2012. No. 3 (20). P. 71–80 (in Russ.).
2. Medvedev G. A., Pavliv D. A. [On term structure models in risk-neutral measure]. *Tomsk State Univ. J.* 2016. No. 4 (37). P. 44–56 (in Russ.).
3. Ahn D., Dittmar R., Gallant A., et al. Purebred or hybrid?: Reproducing the volatility in term structure dynamics. *J. Econom.* 2003. Vol. 116, issues 1–2. P. 147–180. DOI: 10.1016/S0304-4076(03)00106-4.
4. Ahn D., Dittmar R., Gallant A. Quadratic Term Structure Models: Theory and Evidence. New Orleans : AFA, 2001.
5. Medvedev G. A. [On term structure of yield rates. 7. The new version]. *Tomsk State Univ. J.* 2013. No. 4 (25). P. 61–70 (in Russ.).

*Статья поступила в редколлегию 30.08.2017.
Received by editorial board 30.08.2017.*

УДК 519.24

ПРИМЕНЕНИЕ УМЕРЕННО УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В МОДЕЛЯХ GARCH(1, 1)

В. С. ТЕРЕХ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассмотрено применение классического и модифицированного умеренно устойчивых распределений при построении моделей GARCH. Такие модели используются для анализа и прогнозирования финансовых и экономических временных рядов, которые обладают определенными особенностями: кластеризацией волатильности, тяжелыми хвостами и несимметричностью распределений остатков. Приведено сравнение свойств устойчивых и умеренно устойчивых распределений, описаны методологии построения моделей и последующей оценки параметров с помощью метода максимального правдоподобия. Выполнен экспериментальный сравнительный анализ точности оценок параметров моделей с различными распределениями остатков по модельным данным, который подтверждает эффективность используемых методов. Рассмотрен пример построения моделей по реальным данным.

Ключевые слова: модель GARCH; устойчивое распределение; умеренно устойчивое распределение; метод максимального правдоподобия.

USE OF TEMPERED STABLE DISTRIBUTIONS IN GARCH(1, 1) MODELS

U. S. TSERAKH^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Use of classical and modified tempered stable distributions for GARCH models is considered in the paper. Such models are applied for the analysis of financial and economic time series, which have several special properties: volatility clustering, heavy tails and asymmetry of residuals distributions. Comparison of the properties of stable and tempered stable distributions is presented; methodologies for constructing models and subsequent estimation of parameters using the maximum likelihood method are described. An experimental based on model data comparative analysis of the accuracy of models parameters estimates for different residuals distributions was held, and it confirms the operability of the used methods. An example of building models on real data is considered.

Key words: GARCH model; stable distribution; tempered stable distribution; maximum likelihood method.

Введение

Модель GARCH [1] (Generalized Autoregressive Conditionally Heteroskedastic) – обобщенная авторегрессионная модель условной гетероскедастичности, ее модификации являются одним из основных инструментов для анализа экономических и финансовых временных рядов. Такие временные ряды имеют специфические свойства, которые должны быть учтены при построении модели. Тяжелые хвосты распределения остатков свидетельствуют о наличии экстремальных наблюдений. Распределение может быть несимметричным, это является следствием того, что различные внешние факторы по-разному

Образец цитирования:

Терех В. С. Применение умеренно устойчивых распределений в моделях GARCH(1, 1) // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 48–58.

For citation:

Tserakh U. S. Use of tempered stable distributions in GARCH(1, 1) models. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2018. No. 1. P. 48–58 (in Russ.).

Автор:

Владимир Сергеевич Терех – аспирант кафедры теории вероятности и математической статистики факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Н. Н. Труш.

Author:

Uladzimir S. Tserakh, postgraduate student at the department of probability theory and mathematical statistics, faculty of applied mathematics and computer science.
vladimir.terekh@gmail.com

вливают на изменения цен финансовых активов. Кластеризация волатильности означает, что малые изменения цен финансовых активов следуют за малыми изменениями, а большие изменения следуют за большими.

В ходе ряда исследований было установлено, что модель GARCH с нормальным распределением остатков дает неудовлетворительные результаты. Это связано с тем, что нормальное распределение имеет недостаточно тяжелые хвосты и является симметричным. Таким образом, актуальна задача исследования моделей GARCH с другими, отличными от нормального распределениями. Например, в последние годы активно изучаются модели с α -устойчивыми (α -stable) распределениями [2–4]. Такие модели дают удовлетворительные результаты, хотя и у них есть ряд недостатков. Во-первых, у α -устойчивых распределений есть конечные моменты лишь порядка меньше α . Во-вторых, они имеют явную форму функции плотности распределения лишь в нескольких частных случаях: $\alpha = 0,5$, $\alpha = 1,0$, $\alpha = 2,0$. В-третьих, хвосты α -устойчивых распределений оказываются слишком тяжелыми, они недостаточно эффективны при анализе реальных данных. Чтобы избежать описанных выше трудностей, были разработаны различные обобщения α -устойчивых распределений, которые образуют класс распределений, называемых умеренно устойчивыми.

В настоящей работе исследуются модели GARCH(1, 1) с α -устойчивым, классическим умеренно устойчивым, модифицированным умеренно устойчивым распределениями [5; 6]. Проводится сравнительный анализ точности оценивания параметров модели GARCH(1, 1), а также параметров распределений остатков с помощью метода максимального правдоподобия. Рассмотрен пример построения по реальным данным моделей GARCH(1, 1) с различными распределениями, а также выбор оптимальной модели для прогнозирования на основании статистических критериев.

Модель GARCH(1, 1) с устойчивыми распределениями

α -Устойчивое распределение. Пусть $\alpha \in (0, 2]$, $\beta \in [-1, 1]$, $\sigma \in (0, +\infty)$, $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда случайная величина X имеет α -устойчивое распределение, если ее характеристическая функция описывается следующим выражением:

$$\Phi_X(u) = \Phi_{\text{stable}}(u; \alpha, \sigma, \beta, \mu) = E[e^{iuX}] = \begin{cases} \exp\left(i\mu u - |\sigma u|^\alpha \left(1 - i\beta(\text{sign } u) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right)\right), & \alpha \neq 1, \\ \exp\left(i\mu u - |\sigma u| \left(1 + i\beta \frac{2}{\pi}(\text{sign } u) \ln|u|\right)\right), & \alpha = 1, \end{cases}$$

где $u \in \mathbb{R}$;

$$\text{sign } t = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Будем обозначать $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. Параметры имеют следующий смысл: α – параметр устойчивости; β – асимметрии; μ – сдвига; σ – масштаба. Если задать $\mu = 0$, $\sigma = 1$, $\beta = 0$, то получим стандартное α -устойчивое распределение, которое будем обозначать как $\text{std}S_\alpha$. Отметим несколько свойств α -устойчивого распределения:

$$E|X| = \mu, \alpha > 1; E|X| = \infty, 0 < \alpha \leq 1; E|X|^p < \infty, 0 < p < \alpha; E|X|^p = \infty, p \geq \alpha.$$

Приведенные выше свойства вызывают определенные трудности для использования α -устойчивого распределения при построении моделей GARCH. Более подробно это рассмотрено в [4; 7].

Классическое умеренно устойчивое распределение. Пусть $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2)$, $\sigma, \lambda_+, \lambda_- > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда случайная величина X обладает классическим умеренно устойчивым распределением (classical tempered stable, CTS), если ее характеристическая функция имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_X(u) &= \Phi_{\text{CTS}}(u; \alpha, \sigma, \lambda_+, \lambda_-, \mu) = \\ &= \exp\left(iu\mu - iu\sigma\Gamma(1-\alpha)(\lambda_+^{\alpha-1} - \lambda_-^{\alpha-1}) + \sigma\Gamma(-\alpha)\left((\lambda_+ - iu)^\alpha - \lambda_+^\alpha + (\lambda_+ - iu)^\alpha - \lambda_-^\alpha\right)\right), \end{aligned}$$

где $u \in \mathbb{R}$; Γ – гамма-функция. Будем обозначать $X \sim \text{CTS}(\alpha, \sigma, \lambda_+, \lambda_-, \mu)$. Семиинварианты для распределения находятся следующим образом:

$$c_1(X) = \mu,$$

$$c_n(X) = \alpha \Gamma(n - \alpha) (\lambda_+^{\alpha-n} + (-1)^n \lambda_-^{\alpha-n}), \quad n = 2, 3, \dots$$

Параметры α , μ , σ имеют такой же смысл, как и для α -устойчивого распределения. Параметры λ_+ и λ_- контролируют скорость затухания для положительного и отрицательного хвостов соответственно. Если $\lambda_+ > \lambda_-$ ($\lambda_+ < \lambda_-$), то распределение имеет левую (правую) асимметрию, и если $\lambda_+ = \lambda_-$, то распределение симметрично. Параметры λ_+ , λ_- и α также задают тяжесть хвостов распределения. Если сделать замену

$$\sigma = \left(\Gamma(2 - \alpha) (\lambda_+^{\alpha-2} + \lambda_-^{\alpha-2}) \right)^{-1},$$

тогда случайная величина $X \sim \text{CTS}(\alpha, \sigma, \lambda_+, \lambda_-, 0)$ имеет нулевое среднее, а дисперсия будет равна 1. В таких случаях говорят, что X имеет стандартное CTS-распределение с параметрами α , λ_+ , λ_- , и обозначают $X \sim \text{stdCTS}(\alpha, \lambda_+, \lambda_-)$.

Модифицированное умеренно устойчивое распределение. Пусть $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2)$, $\sigma, \lambda_+, \lambda_- > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда случайная величина X имеет модифицированное умеренно устойчивое распределение (modified tempered stable, MTS), если ее характеристическая функция описывается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \Phi_X(u) &= \Phi_{\text{MTS}}(u; \alpha, \sigma, \lambda_+, \lambda_-, \mu) = \\ &= \exp\left(iu\mu - \sigma(G_R(u; \alpha, \lambda_+) + G_R(u; \alpha, \lambda_-)) + iu\sigma(G_I(u; \alpha, \lambda_+) + G_I(u; \alpha, \lambda_-))\right), \end{aligned}$$

где для $u \in \mathbb{R}$

$$G_R(x; \alpha, \lambda) = 2^{-\frac{\alpha+3}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \left((\lambda^2 + x^2)^{\frac{\alpha}{2}} - \lambda^\alpha \right),$$

$$G_I(x; \alpha, \lambda) = 2^{-\frac{\alpha+3}{2}} \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \lambda^{\alpha-1} \left[{}_2F_1\left(1, \frac{1-\alpha}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{x^2}{\lambda^2}\right) - 1 \right],$$

где ${}_2F_1$ – гипергеометрическая функция. Семиинварианты для распределения находятся следующим образом:

$$c_1(X) = \mu,$$

$$c_n(X) = 2^{n-\frac{\alpha+3}{2}} \sigma \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right) (\lambda_+^{\alpha-n} + (-1)^n \lambda_-^{\alpha-n}), \quad n = 2, 3, \dots$$

Будем обозначать $X \sim \text{MTS}(\alpha, \sigma, \lambda_+, \lambda_-, \mu)$. Параметры распределения имеют такой же смысл, как и параметры CTS-распределения. Если сделать замену

$$\sigma = 2^{\frac{\alpha+1}{2}} \left(\sqrt{\pi} \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) (\lambda_+^{\alpha-2} + \lambda_-^{\alpha-2}) \right)^{-1},$$

тогда случайная величина $X \sim \text{MTS}(\alpha, \sigma, \lambda_+, \lambda_-, 0)$ будет иметь нулевое среднее, а дисперсия будет равна 1. В таких случаях говорят, что X имеет стандартное MTS-распределение с параметрами α , λ_+ , λ_- , и обозначают $X \sim \text{stdMTS}(\alpha, \lambda_+, \lambda_-)$.

Модель GARCH(1, 1). Процесс X_t , $t \in \mathbb{Z}$, удовлетворяет модели GARCH(1, 1), если

$$\begin{cases} X_t = \sigma_t Z_t, \\ \sigma_t^2 = \omega_0 + \omega_1 X_{t-1}^2 + \omega_2 \sigma_{t-1}^2, \end{cases}$$

где $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины, а $\omega_0 > 0$, $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$ – параметры модели. Условие стационарности имеет следующий вид:

$$\omega_1 + \omega_2 < 1.$$

Оценка параметров. Зададим векторы параметров и допустимые множества параметров для моделей GARCH(1, 1) с различными распределениями величин Z_t . Пусть $Z_t \sim N(0, 1)$. Тогда вектор параметров будет иметь вид

$$\theta_{\text{norm}} = (\omega_0, \omega_1, \omega_2)^T,$$

где T – знак транспонирования, а допустимое множество параметров

$$K_{\text{norm}} = \{\theta_{\text{norm}} : \omega_1 + \omega_2 < 1; 0 < \min\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\} \leq \max\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\} < 1\}.$$

Для случая, когда $Z_t \sim S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$, зададим вектор параметров и допустимое множество параметров следующим образом:

$$\theta_{\text{stable}} = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \alpha, \beta, \sigma, \mu)^T,$$

$$K_{\text{stable}} = \{\theta_{\text{stable}} : \omega_1 + \omega_2 < 1; 0 < \min\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\} \leq \max\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\} < 1; \alpha \in (0, 2]; \beta \in [-1, 1]; \sigma \in (0, +\infty)\}.$$

Для случая, когда $Z_t \sim \text{CTS}(\alpha, \sigma, \lambda_+, \lambda_-, \mu)$:

$$\theta_{\text{CTS}} = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \alpha, \lambda_+, \lambda_-, \sigma, \mu)^T,$$

$$K_{\text{CTS}} = \{\theta_{\text{CTS}} : \omega_1 + \omega_2 < 1; 0 < \min\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\} \leq \max\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\} < 1; \alpha \in (0, 1) \cup (1, 2); \lambda_+, \lambda_-, \sigma \in (0, +\infty)\}.$$

Для случая, когда $Z_t \sim \text{MTS}(\alpha, \sigma, \lambda_+, \lambda_-, \mu)$:

$$\theta_{\text{MTS}} = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \alpha, \lambda_+, \lambda_-, \sigma, \mu)^T,$$

$$K_{\text{MTS}} = \{\theta_{\text{MTS}} : \omega_1 + \omega_2 < 1; 0 < \min\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\} \leq \max\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\} < 1; \alpha \in (0, 1) \cup (1, 2); \lambda_+, \lambda_-, \sigma \in (0, +\infty)\}.$$

Введем обозначения:

$$\theta = \begin{cases} \theta_{\text{norm}}, & Z_t \sim N(0, 1), \\ \theta_{\text{stable}}, & Z_t \sim S_\alpha(\beta, \sigma, \mu), \\ \theta_{\text{CTS}}, & Z_t \sim \text{CTS}(\alpha, \sigma, \lambda_+, \lambda_-, \mu), \\ \theta_{\text{MTS}}, & Z_t \sim \text{MTS}(\alpha, \sigma, \lambda_+, \lambda_-, \mu); \end{cases}$$

$$K = \begin{cases} K_{\text{norm}}, & Z_t \sim N(0, 1), \\ K_{\text{stable}}, & Z_t \sim S_\alpha(\beta, \sigma, \mu), \\ K_{\text{CTS}}, & Z_t \sim \text{CTS}(\alpha, \sigma, \lambda_+, \lambda_-, \mu), \\ K_{\text{MTS}}, & Z_t \sim \text{MTS}(\alpha, \sigma, \lambda_+, \lambda_-, \mu). \end{cases}$$

Для оценки параметров модели GARCH(1, 1) будем использовать метод максимального правдоподобия. Пусть известна выборка размером n X_1, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$, за процессом X_t , $t \in \mathbb{Z}$. Тогда оценка $\hat{\theta}_n$ вектора параметров θ модели GARCH(1, 1) на компакте K определяется следующим образом:

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in K} \hat{L}_n(\theta),$$

где

$$\hat{L}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln \left[\frac{1}{\hat{h}_t(\theta)} f\left(\frac{X_t}{\hat{h}_t(\theta)}\right) \right],$$

$\theta \in K$, $t = \overline{1, n}$, $f(x)$ – функция плотности распределения величин Z_t ; $\widehat{h}_t(\theta)$ можно расценивать как оценку σ_t . Заметим, что $\widehat{h}_t(\theta_0) = \sigma_t$ при всех $t \in \mathbb{N}$, а θ_0 – истинный вектор параметров. В качестве $\widehat{h}_t(\theta)$ будем использовать функцию $\widehat{h}_t(\theta) = \widehat{y}_t^{1/2}(\theta)$, где $\widehat{y}_t(\theta)$ определяется следующим образом:

$$\widehat{y}_t(\theta) = \begin{cases} \varepsilon, & t = 0, \\ \omega_0 + \omega_1 X_{t-1}^2 + \omega_2 \widehat{y}_{t-1}(\theta), & t \geq 1, \end{cases}$$

где $\varepsilon \in [0, \infty)$ – произвольное начальное значение. Отметим, что для некоторых рассматриваемых выше распределений явный вид функции плотности распределения неизвестен. Для нахождения значений функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, будем использовать обратное преобразование Фурье характеристической функции $\Phi(t)$.

Анализ точности оценки параметров моделей GARCH(1, 1) с устойчивыми распределениями

По заранее заданным параметрам (табл. 1) моделировались процессы GARCH с различными распределениями остатков:

$$\begin{aligned} \text{GARCH}(1, 1)\text{-stable} &- Z_t \sim S_\alpha, \\ \text{GARCH}(1, 1)\text{-CTS} &- Z_t \sim \text{CTS}(\alpha, \lambda_+, \lambda_-), \\ \text{GARCH}(1, 1)\text{-MTS} &- Z_t \sim \text{MTS}(\alpha, \lambda_+, \lambda_-). \end{aligned}$$

Таблица 1

Истинные значения параметров

Table 1

Real parameter values

| Модель | ω_0 | ω_1 | ω_2 | α | λ_+ | λ_- |
|--------------------|------------|------------|------------|----------|-------------|-------------|
| GARCH(1, 1)-stable | 0,000 1 | 0,3 | 0,5 | 1,3 | – | – |
| GARCH(1, 1)-CTS | 0,000 1 | 0,3 | 0,5 | 1,3 | 10 | 15 |
| GARCH(1, 1)-MTS | 0,000 1 | 0,3 | 0,5 | 1,3 | 10 | 15 |

Для каждого процесса было смоделировано 50 выборок длиной T от 100 до 5000 наблюдений с интервалом 100 наблюдений. По каждой выборке проводилась оценка параметров соответствующей модели с помощью метода максимального правдоподобия, описанного в разделе «Оценка параметров», и для каждой оценки была получена стандартная ошибка. В табл. 2–4 приведены полученные оценки, в скобках даны стандартные ошибки оценок параметров каждой из моделей для выборок различной длины.

Таблица 2

Оценки параметров модели GARCH(1, 1)-stable для различных объемов выборки

Table 2

Parameter estimates of GARCH(1, 1)-stable model for samples of different length

| T | $\omega_0 = 0,000 1$ | $\omega_1 = 0,3$ | $\omega_2 = 0,5$ | $\alpha = 1,3$ |
|------|----------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 1000 | 7,7871 E-5 (3,1172 E-5) | 0,2743 (0,0172) | 0,6401 (0,0381) | 1,2215 (0,0350) |
| 2000 | 5,3643 E-5 (1,8551 E-5) | 0,2895 (0,0281) | 0,5930 (0,0669) | 1,4056 (0,0291) |
| 3000 | 0,0001231 (3,7982 E-6) | 0,2821 (0,0190) | 0,6259 (0,0392) | 1,3941 (0,0253) |

Окончание табл. 2
Ending table 2

| T | $\omega_0 = 0,0001$ | $\omega_1 = 0,3$ | $\omega_2 = 0,5$ | $\alpha = 1,3$ |
|------|----------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 4000 | 9,0823 E-5 (1,6031 E-5) | 0,3060 (0,0145) | 0,5298 (0,0413) | 1,3511 (0,0235) |
| 5000 | 0,0001092 (2,0913 E-6) | 0,2953 (0,0122) | 0,5390 (0,0334) | 1,2903 (0,0231) |

Таблица 3

**Оценки параметров модели GARCH(1, 1)-CTS
для различных объемов выборки**

Table 3

**Parameter estimates of GARCH(1, 1)-CTS model
for samples of different length**

| T | $\omega_0 = 0,0001$ | $\omega_1 = 0,3$ | $\omega_2 = 0,5$ | $\alpha = 1,3$ | $\lambda_+ = 10$ | $\lambda_- = 15$ |
|------|---------------------------|--------------------|---------------------|--------------------|---------------------|---------------------|
| 1000 | 0,0001013 (3,9621 E-5) | 0,2760 (0,0344) | 0,5811 (0,1069) | 1,3225 (0,0387) | 17,3370 (5,0788) | 16,5912 (7,6182) |
| 2000 | 0,0001628 (4,6092 E-5) | 0,3494 (0,0429) | 0,4082 (0,0690) | 1,2136 (0,0285) | 11,0608 (1,3078) | 14,1813 (1,9617) |
| 3000 | 0,0001170 (4,6433 E-5) | 0,2953 (0,0229) | 0,5345 (0,0621) | 1,2561 (0,0257) | 9,4542 (1,4710) | 16,9755 (2,2065) |
| 4000 | 0,0001145 (2,7861 E-5) | 0,3024 (0,0213) | 0,5284 (0,0414) | 1,3625 (0,0251) | 11,3170 (1,0056) | 17,3655 (1,9084) |
| 5000 | 0,0001050 (1,8093 E-5) | 0,2900 (0,0199) | 0,5577 (0,03491) | 1,3203 (0,0214) | 11,5770 (0,9962) | 14,3655 (1,4943) |

Таблица 4

**Оценки параметров модели GARCH(1, 1)-MTS
для различных объемов выборки**

Table 4

**Parameter estimates of GARCH(1, 1)-MTS model
for samples of different length**

| T | $\omega_0 = 0,0001$ | $\omega_1 = 0,3$ | $\omega_2 = 0,5$ | $\alpha = 1,3$ | $\lambda_+ = 10$ | $\lambda_- = 15$ |
|------|---------------------------|--------------------|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1000 | 0,0001086 (3,7704 E-5) | 0,2915 (0,0282) | 0,5723 (0,1045) | 1,3025 (0,0252) | 14,9946 (5,1246) | 13,2414 (7,6869) |
| 2000 | 0,0001062 (5,7113 E-5) | 0,2804 (0,0271) | 0,4888 (0,0919) | 1,2909 (0,0233) | 8,8276 (2,7494) | 21,6396 (4,1241) |
| 3000 | 0,0001011 (4,5194 E-5) | 0,3024 (0,0227) | 0,4619 (0,0567) | 1,2938 (0,0193) | 14,4264 (1,5156) | 12,7785 (2,2734) |
| 4000 | 0,0001197 (2,8935 E-5) | 0,3053 (0,0205) | 0,4784 (0,0423) | 1,3241 (0,1937) | 8,5190 (1,0512) | 17,5335 (1,5768) |
| 5000 | 0,0001378 (2,1973 E-5) | 0,2956 (0,0153) | 0,4825 (0,0383) | 1,3248 (0,01829) | 11,689 (0,8850) | 15,0909 (1,3275) |

Графики с отмеченными значениями оценок для различных длин выборок для параметров модели GARCH(1, 1)-CTS приведены на рис. 1–6. Горизонтальная линия на каждом графике соответствует истинному значению параметра. Графики зависимости стандартной ошибки от размера выборки для каждого параметра этой модели представлены на рис. 7–12.

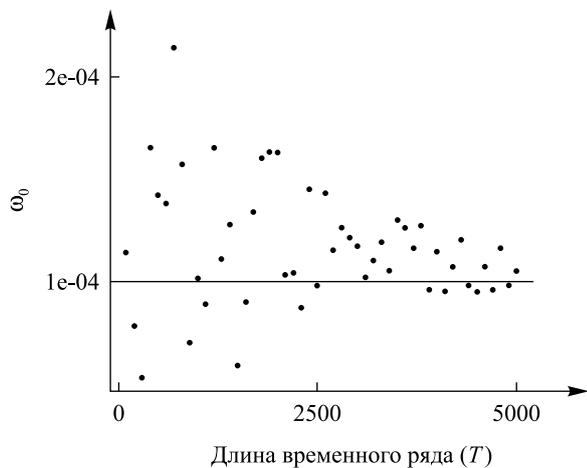


Рис. 1. Оценка параметра ω_0 в зависимости от объема выборки

Fig. 1. Parameter ω_0 estimate depending on sample length

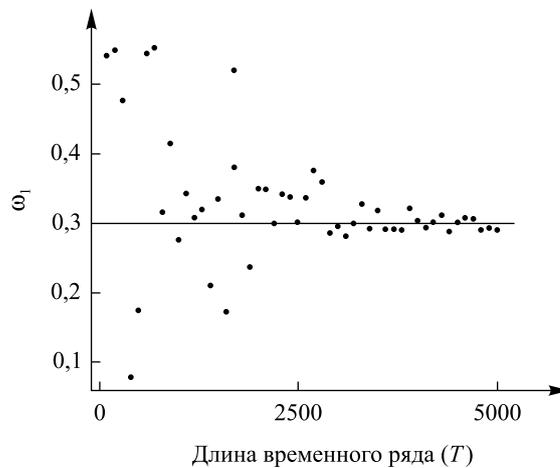


Рис. 2. Оценка параметра ω_1 в зависимости от объема выборки

Fig. 2. Parameter ω_1 estimate depending on sample length

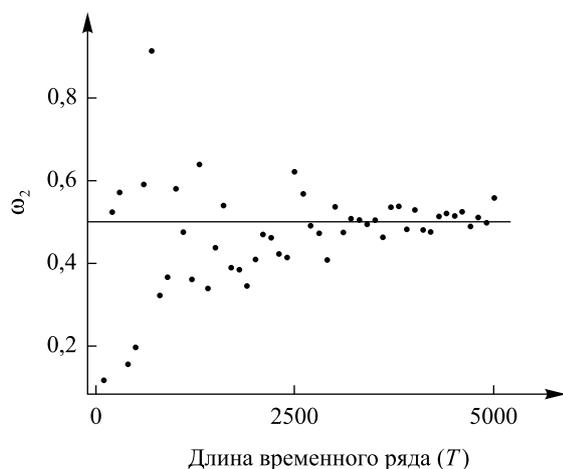


Рис. 3. Оценка параметра ω_2 в зависимости от объема выборки

Fig. 3. Parameter ω_2 estimate depending on sample length

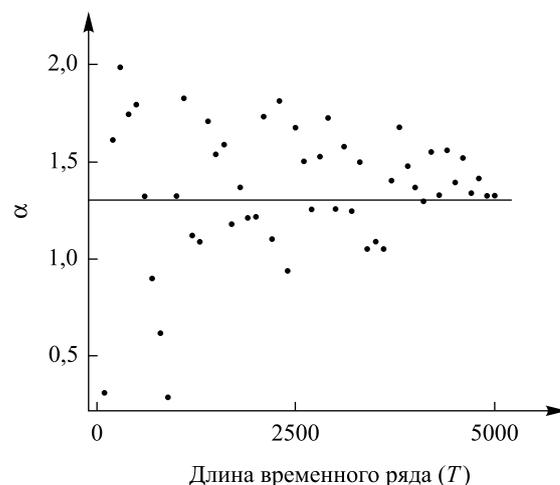


Рис. 4. Оценка параметра α в зависимости от объема выборки

Fig. 4. Parameter α estimate depending on sample length

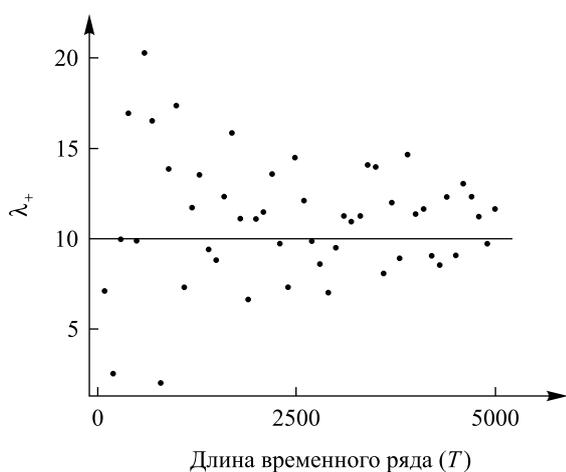


Рис. 5. Оценка параметра λ_+ в зависимости от объема выборки

Fig. 5. Parameter λ_+ estimate depending on sample length

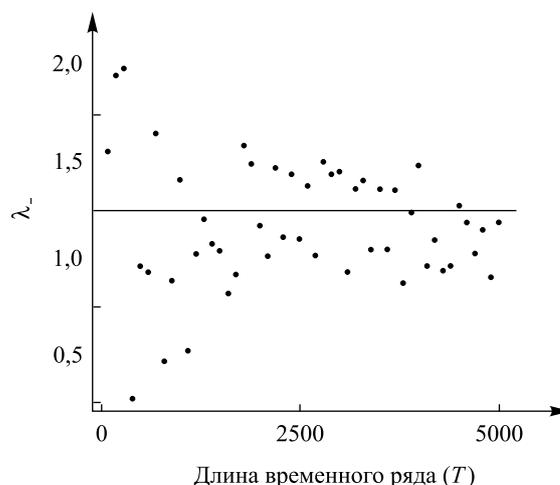


Рис. 6. Оценка параметра λ_- в зависимости от объема выборки

Fig. 6. Parameter λ_- estimate depending on sample length

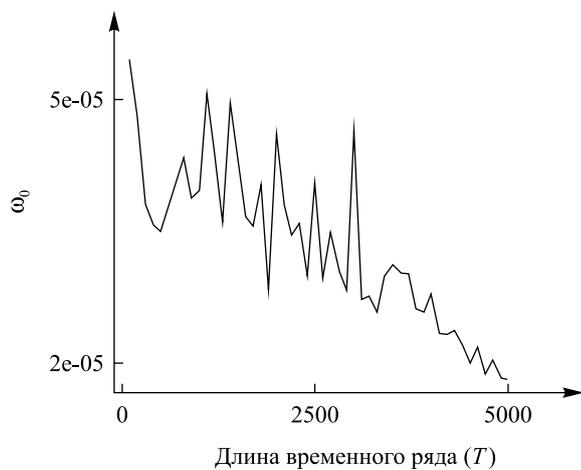


Рис. 7. Стандартная ошибка параметра ω_0 в зависимости от объема выборки

Fig. 7. Standard error of ω_0 parameter depending on sample length

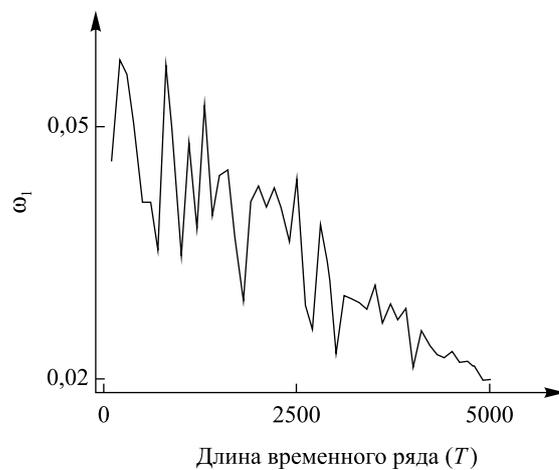


Рис. 8. Стандартная ошибка параметра ω_1 в зависимости от объема выборки

Fig. 8. Standard error of ω_1 parameter depending on sample length

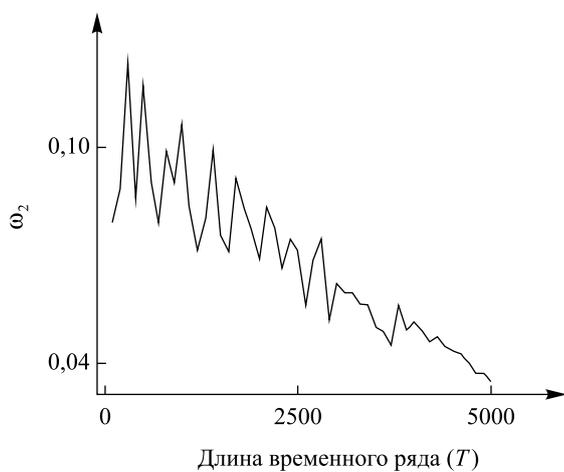


Рис. 9. Стандартная ошибка параметра ω_2 в зависимости от объема выборки

Fig. 9. Standard error of ω_2 parameter depending on sample length

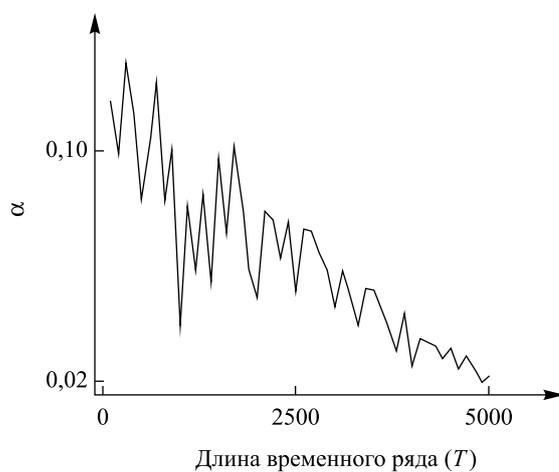


Рис. 10. Стандартная ошибка параметра α в зависимости от объема выборки

Fig. 10. Standard error of α parameter depending on sample length

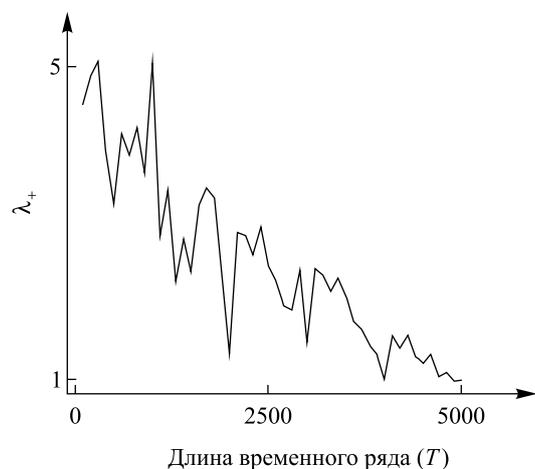


Рис. 11. Стандартная ошибка параметра λ_+ в зависимости от объема выборки

Fig. 11. Standard error of λ_+ parameter depending on sample length

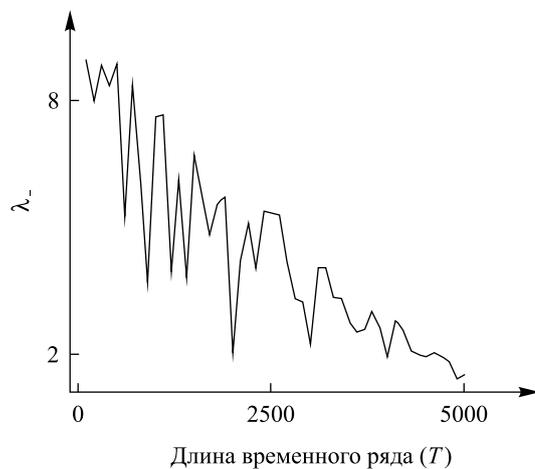


Рис. 12. Стандартная ошибка параметра λ_- в зависимости от объема выборки

Fig. 12. Standard error of λ_- parameter depending on sample length

Построение моделей GARCH(1,1) по реальным данным

Рассмотрим пример построения моделей GARCH(1, 1) для данных стоимостей акций компании *Microsoft* (MSFT). Используются дневные данные с 1 марта 2007 г. по 1 марта 2017 г. Предположим, что динамика логарифма доходности ценных бумаг имеет следующий вид:

$$\log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \sigma_t Z_t, \quad 1 \leq t \leq T,$$

где $S_t > 0$ – стоимость ценной бумаги в момент времени t , $t \in \mathbb{N}$; $\sigma_t Z_t$ – волатильность доходности, определенная с помощью модели GARCH(1, 1). Для временного ряда были построены модели GARCH(1, 1) с нормальным, α -устойчивым, классическим умеренно устойчивым, модифицированным умеренно устойчивым распределениями остатков. Результаты оценки параметров моделей приведены в табл. 5.

Таблица 5

Оценки параметров моделей GARCH(1,1)
с различными распределениями остатков (по данным MSFT)

Table 5

Parameter estimates of GARCH(1,1) models
with different residuals distributions (for MSFT data)

| Модель | ω_0 | ω_1 | ω_2 | α | λ_+ | λ_- |
|-------------------|------------|------------|------------|----------|-------------|-------------|
| GARCH(1,1)-normal | 6,3755 E-5 | 0,1984 | 0,7988 | – | – | – |
| GARCH(1,1)-stable | 4,9219 E-5 | 0,1275 | 0,8664 | 1,5931 | – | – |
| GARCH(1,1)-CTS | 5,0119 E-5 | 0,1164 | 0,7553 | 1,6989 | 0,0693 | 0,0724 |
| GARCH(1,1)-MTS | 5,8313 E-5 | 0,1323 | 0,6931 | 1,6534 | 0,0721 | 0,0694 |

Для оценки того, насколько хорошо модель подходит для временного ряда, использовался критерий Колмогорова – Смирнова. Нулевые гипотезы определены следующим образом: $H_0(\text{normal})$, $H_0(\text{stable})$, $H_0(\text{CTS})$, $H_0(\text{MTS})$ – остатки соответствуют нормальному, устойчивому, классическому умеренно устойчивому, модифицированному умеренно устойчивому распределениям соответственно. В табл. 6 приведены статистики Колмогорова – Смирнова (KS) и их p -значения. Согласно полученным результатам нулевая гипотеза $H_0(\text{normal})$ отклоняется, так как p -значение меньше уровня значимости, равного 5%. Остальные нулевые гипотезы не отклоняются.

Таблица 6

Статистики Колмогорова – Смирнова
и их p -значения

Table 6

Kolmogorov – Smirnov statistics and p -values

| Распределение остатков | KS | p -Значение |
|------------------------|--------|---------------|
| Normal | 0,1201 | 0,0000 |
| Stable | 0,0286 | 0,0561 |
| CTS | 0,0194 | 0,1445 |
| MTS | 0,0210 | 0,1501 |

Для сравнения моделей и выбора наилучшей использовались следующие информационные критерии:

1) критерий Акаике (Akaike information criterion, AIC):

$$AIC = -2 \frac{LLF}{T} + 2 \left(\frac{k}{T} \right),$$

2) байесовский критерий (Bayesian information criterion, BIC):

$$\text{BIC} = -2 \frac{LLF}{T} + \frac{k \ln T}{T},$$

3) критерий Хеннана – Куинна (Hannan – Quinn information criterion, HQIC):

$$\text{HQIC} = -2 \frac{LLF}{T} + \frac{2k \ln(\ln T)}{T},$$

где LLF – значение функции правдоподобия; T – длина временного ряда; k – количество параметров модели. Результаты представлены в табл. 7.

Таблица 7

Результаты информационных критериев

Table 7

Information criteria results

| Критерий | GARCH(1,1)-normal | GARCH(1,1)-stable | GARCH(1,1)-CTS | GARCH(1,1)-MTS |
|----------|-------------------|-------------------|----------------|----------------|
| AIC | -3,595 95 | -3,978 65 | -4,087 05 | -4,130 93 |
| BIC | -3,589 16 | -3,970 16 | -4,075 16 | -4,149 34 |
| HQIC | -3,593 53 | -3,975 62 | -4,082 82 | -4,150 32 |

Согласно результатам, приведенным в табл. 7, лучшей следует признать модель GARCH(1,1)-MTS, потому что она имеет наименьшие значения информационных критериев.

Заключение

На основании проведенных исследований можно сделать вывод о том, что умеренно устойчивые распределения могут быть использованы для моделирования финансовых временных рядов. Более того, модели GARCH(1, 1) с умеренно устойчивыми распределениями могут показывать лучшие результаты по сравнению с традиционно применяемыми моделями.

Библиографические ссылки

1. Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity // *J. Econom.* 1986. Vol. 31, № 3. P. 307–327.
2. Paolella M. S. Stable-GARCH models for financial returns: Fast estimation and tests for stability // *Econometrics*. 2016. Vol. 4, № 2. P. 1–28.
3. Francq C., Meintanis S. G. Fourier-type estimation of the power GARCH model with stable-paretian innovations // *Metrika*. 2016. Vol. 79. P. 389–424.
4. Терех В. С., Труш Н. Н. Исследование моделей GARCH(1, 1) с устойчивыми возмущениями // XII Белорусская математическая конференция (Минск, 5–10 сент. 2016 г.) : тез. докл. Минск, 2016. С. 14.
5. Koponen I. Analytic approach to the problem of convergence of truncated Levy flights towards the Gaussian stochastic process // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 52, issue 1. P. 1197–1199. DOI: 10.1103/PhysRevE.52.1197.
6. Kim Y. S., Rachev S. T., Chung D. M. The modified tempered stable distribution, GARCH-models and option pricing // Technical report, Chair of Econometrics, Statistics and Mathematical Finance School of Economics and Business Engineering University of Karlsruhe. Karlsruhe, 2006.
7. Терех В. С. Построение и исследование свойств M-оценки параметров модели GARCH(1, 1) // Сборник работ 72-й научной конференции студентов и аспирантов Белорусского государственного университета (Минск, 11–22 мая 2015 г.) : в 3 ч. Минск, 2015. Ч. 1. С. 112–115.

References

1. Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *J. Econom.* 1986. Vol. 31, No. 3. P. 307–327.
2. Paolella M. S. Stable-GARCH models for financial returns: Fast estimation and tests for stability. *Econometrics*. 2016. Vol. 4, No. 2. P. 1–28.
3. Francq C., Meintanis S. G. Fourier-type estimation of the power GARCH model with stable-paretian innovations. *Metrika*. 2016. Vol. 79. P. 389–424.

4. Tserakh U. S., Trough N. N. Issledovanie modeley GARCH(1, 1) s ustoychivymi vozmushcheniyami [GARCH(1, 1) models with stable perturbations]. *The XII Belarusian Mathematical Conference* (Minsk, 5–10 Sept., 2016) : thesis. Minsk, 2016. P. 14 (in Russ.).
5. Koponen I. Analytic approach to the problem of convergence of truncated Levy flights towards the Gaussian stochastic process. *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 52, issue 1. P. 1197–1199. DOI: 10.1103/PhysRevE.52.1197.
6. Kim Y. S., Rachev S. T., Chung D. M. The modified tempered stable distribution, GARCH-models and option pricing. *Technical report, Chair of Econometrics, Statistics and Mathematical Finance School of Economics and Business Engineering University of Karlsruhe*. Karlsruhe, 2006.
7. Tserakh U. S. Postroenie i issledovanie svoystv M-ocenki parametrov modeli GARCH(1, 1) [M-estimate of GARCH(1, 1) model parameters computation and exploration]. *The 72nd Scientific BSU Conference of students and postgraduate students* (Minsk, 11–22 May, 2015) : in 3 parts. Minsk, 2015. Part 1. P. 112–115 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 10.10.2017.
Received by editorial board 10.10.2017.

ВВЕДЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ КУЛЬБАКА – ЛЕЙБЛЕРА С ПОМОЩЬЮ РАЗБИЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТНОГО ПРОСТРАНСТВА

Э. Э. СОКОЛ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Изучается проблема эквивалентности двух определений информационной функции Кульбака – Лейблера. Обычно ее вводят с помощью интеграла от логарифма плотности одной вероятностной меры по отношению к другой. При этом в последнее время активно исследуется понятие t -энтропии динамической системы, которое вводится с помощью измеримых разбиений фазового пространства и является обобщением информационной функции. Решается вопрос о том, в каких ситуациях указанные определения эквивалентны, а в каких нет. В частности, эквивалентность имеет место, если обе меры конечны.

Ключевые слова: информационная функция Кульбака – Лейблера; t -энтропия.

INTRODUCTION OF THE KULLBACK – LEIBLER INFORMATION FUNCTION BY MEANS OF PARTITIONS OF THE PROBABILITY SPACE

E. E. SOKAL^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

In the paper we study the equivalence problem of two definitions of the Kullback – Leibler information function. It is commonly defined by integration of the logarithm of the density of one probability measure with respect to another. On the other hand, recently a concept of t -entropy of a dynamical system (that is a generalization of the information function) is actively explored, and this concept is defined by means of measurable partitions of the phase space. In the paper we investigate in which situations the two definitions are equivalent and in which ones they are not. In particular, the equivalence holds if both measures are finite.

Key words: Kullback – Leibler information function; t -entropy.

Информационная функция Кульбака – Лейблера в теории вероятностей и математической статистике рассматривается как мера уклонения некоторой вероятностной меры ν от другой вероятностной меры μ . Она используется для оценки вероятностей больших уклонений в последовательности независимых испытаний. Если говорить точнее, она определяет логарифмическую асимптотику вероятности (по отношению к распределению μ) множества тех исходов, которые порождают эмпирические меры, близкие к ν [1].

Образец цитирования:

Сокол Э. Э. Введение информационной функции Кульбака – Лейблера с помощью разбиений вероятностного пространства // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 59–67.

For citation:

Sokal E. E. Introduction of the Kullback – Leibler information function by means of partitions of the probability space. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2018. No. 1. P. 59–67 (in Russ.).

Автор:

Эдвард Эдуардович Сокол – аспирант кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор В. И. Бахтин.

Author:

Edvard E. Sokal, postgraduate student at the department of functional analysis and analytical economics, faculty of mechanics and mathematics.
edward.e.sokol@gmail.com

Информационная функция Кульбака – Лейблера от пары аргументов ν и μ , являющихся вероятностными мерами на одном и том же измеримом пространстве, определяется при помощи формулы

$$\rho(\nu, \mu) = \int \varphi \ln \varphi d\mu, \quad \varphi = \frac{d\nu}{d\mu}, \quad (1)$$

если ν абсолютно непрерывна относительно μ . Если же ν не абсолютно непрерывна относительно μ , значение $\rho(\nu, \mu)$ полагают равным $+\infty$. В формуле (1) при $\varphi = 0$ значение выражения $\varphi \ln \varphi$ считают равным нулю. При этом в работах [2–4] был рассмотрен аналог информационной функции для динамических систем, который называется t -энтропией. При определении t -энтропии используется не интеграл, а конечные разбиения фазового пространства. Кроме того, в работе [5] информационная функция $\rho(\nu, \mu)$ вводится для конечно-аддитивных мер ν , что аналогично определению t -энтропии и также базируется на конечных измеримых разбиениях пространства. Таким образом, в случае счетно-аддитивной меры ν имеются два разных определения информационной функции: с помощью формулы (1) и с помощью измеримых разбиений пространства. Цель настоящей работы – исследование их эквивалентности. В теореме 2, приведенной ниже, эта эквивалентность доказывается в случае конечной меры μ . В теореме 3, представленной далее, она устанавливается для σ -конечной меры μ и абсолютно непрерывной меры ν , удовлетворяющей условию

$$\int_{\{\varphi < 1\}} \varphi \ln \varphi d\mu > -\infty, \quad \varphi = \frac{d\nu}{d\mu}. \quad (2)$$

Приведенные в настоящей работе примеры показывают, что при нарушении условия (2), а также в случае бесконечной меры μ и не абсолютно непрерывной меры ν указанные два определения неэквивалентны.

Случай конечной меры μ

Пусть X – произвольное множество, \mathfrak{A} – σ -алгебра его подмножеств. Введем следующие обозначения: $M(X)$ – множество конечных мер на (X, \mathfrak{A}) , $M_1(X)$ – множество вероятностных мер на (X, \mathfrak{A}) , $M_\sigma(X)$ – множество σ -конечных мер на (X, \mathfrak{A}) .

Очевидно, справедлива цепочка включений:

$$M_1(X) \subset M(X) \subset M_\sigma(X).$$

Возьмем меры $\nu \in M_1(X)$ и $\mu \in M(X)$. В этом случае информационная функция $\rho(\nu, \mu)$ определяется с помощью (1), где интеграл берется по множеству X .

Пусть $G = \{X_1, X_2, \dots\}$ – произвольное дискретное, т. е. конечное либо счетное, разбиение X на измеримые подмножества X_i . Определим информационную функцию $\rho'(\nu, \mu)$ с помощью формулы

$$\rho'(\nu, \mu) = \sup_G \sum_{X_i \in G} \nu(X_i) \ln \frac{\nu(X_i)}{\mu(X_i)}. \quad (3)$$

Если $\nu(X_i) = 0$, то тогда соответствующее слагаемое в (3) считаем равным нулю (в том числе и при равенстве $\mu(X_i) = 0$). Если же $\nu(X_i) > 0$ и $\mu(X_i) = 0$, то соответствующее слагаемое и вся сумма в формуле (3) считаются равными $+\infty$.

Теорема 1. Для конечных мер $\mu \in M(X)$ в определении (3) достаточно использовать лишь конечные разбиения G . От этого значение правой части (3) не изменится.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное или счетное разбиение $G = \{X_1, X_2, \dots\}$, что

$$\sum_{X_i \in G} \nu(X_i) \ln \frac{\nu(X_i)}{\mu(X_i)} > \rho'(\nu, \mu) - \varepsilon. \quad (4)$$

Покажем, что разбиение G в (4) можно выбрать конечным. Предположим, что G есть счетное разбиение. Рассмотрим множества $Y_n = \bigcup_{i > n} X_i$. Очевидно, $\bigcap_n Y_n = \emptyset$. Поэтому $\nu(Y_n) \rightarrow 0$ и

$$v(Y_n) \ln \frac{v(Y_n)}{\mu(Y_n)} \geq v(Y_n) \ln \frac{v(Y_n)}{\mu(X)} \rightarrow 0. \quad (5)$$

Рассмотрим конечное разбиение $G_n = \{X_1, X_2, \dots, X_n, Y_n\}$. Из (5) следует, что

$$\sup_n \left(\sum_{i=1}^n v(X_i) \ln \frac{v(X_i)}{\mu(X_i)} + v(Y_n) \ln \frac{v(Y_n)}{\mu(Y_n)} \right) \geq \sum_{X_i \in G} v(X_i) \ln \frac{v(X_i)}{\mu(X_i)}.$$

Отсюда видно, что если в неравенстве (4) заменить G на конечное разбиение G_n с достаточно большим номером n , то оно останется в силе. В итоге для любого $\varepsilon > 0$ имеем конечное разбиение G , удовлетворяющее (4). В силу произвольности ε отсюда следует, что супремум в (3) не зависит от того, какие разбиения G рассматриваются – конечные или счетные.

Теорема 2. Для $v \in M_1(X)$ и $\mu \in M(X)$ выполняется равенство

$$\rho(v, \mu) = \rho'(v, \mu).$$

Доказательство. Если мера $v \in M_1(X)$ не является абсолютно непрерывной относительно $\mu \in M(X)$, то по определению $\rho(v, \mu) = +\infty$. Кроме того, в этом случае существует такое множество $A \in \mathfrak{A}$, что $\mu(A) = 0$ и $v(A) > 0$. Рассмотрим разбиение $G = \{A, X \setminus A\}$. Для него формула (3) дает равенство $\rho'(v, \mu) = +\infty$, т. е. в случае меры $v \in M_1(X)$, которая не абсолютно непрерывна относительно $\mu \in M(X)$, равенство ρ и ρ' выполняется.

Пусть теперь v абсолютно непрерывна относительно μ . Тогда по теореме Радона – Никодима она имеет плотность $\varphi = \frac{dv}{d\mu}$. Определим множество $Y = \{x \in X \mid \varphi(x) = 0\}$. Очевидно, $v(Y) = 0$. Рассмотрим любое дискретное измеримое разбиение G пространства X . Для него справедлива следующая выкладка:

$$\begin{aligned} -\int_X \varphi \ln \varphi d\mu &= -\int_{X \setminus Y} \ln \frac{dv}{d\mu} dv = \int_{X \setminus Y} \ln \frac{d\mu}{dv} dv = \\ &= \sum_{X_i \in G: v(X_i) > 0} v(X_i) \int_{X_i \setminus Y} \frac{\ln \left(\frac{d\mu}{dv} \right)}{v(X_i)} dv \leq \sum_{X_i \in G: v(X_i) > 0} v(X_i) \ln \left(\int_{X_i \setminus Y} \frac{d\mu}{v(X_i)} dv \right) = \\ &= \sum_{X_i \in G: v(X_i) > 0} v(X_i) \ln \frac{\mu(X_i \setminus Y)}{v(X_i)} \leq -\sum_{X_i \in G} v(X_i) \ln \frac{v(X_i)}{\mu(X_i)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где в средней строке для каждого слагаемого используется неравенство Йенсена, т. е. для любого дискретного измеримого разбиения G верно неравенство

$$\rho(v, \mu) = \int_X \ln \frac{dv}{d\mu} dv \geq \sum_{X_i \in G} v(X_i) \ln \frac{v(X_i)}{\mu(X_i)}.$$

Отсюда вытекает, что $\rho(v, \mu) \geq \rho'(v, \mu)$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множества:

$$X_i = \{x \in X \mid (i-1)\varepsilon \leq \ln \varphi < i\varepsilon\}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, для них справедливы неравенства:

$$e^{(i-1)\varepsilon} \mu(X_i) \leq v(X_i) = \int_{X_i} \varphi d\mu \leq e^{i\varepsilon} \mu(X_i).$$

Из них следует, что

$$(i-1)\varepsilon \leq \ln \frac{v(X_i)}{\mu(X_i)} \leq i\varepsilon, \quad \text{если } \mu(X_i) > 0. \quad (7)$$

Также для $x \in X_i$ выполняется

$$(i-1)\varepsilon \leq \ln \varphi(x) \leq i\varepsilon. \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует

$$-\varepsilon v(X_i) + v(X_i) \ln \frac{v(X_i)}{\mu(X_i)} \leq \int_{X_i} \ln \varphi d\nu \leq v(X_i) \ln \frac{v(X_i)}{\mu(X_i)} + \varepsilon v(X_i). \quad (9)$$

Заметим, что в случае $\mu(X_i) = 0$ автоматически $\nu(X_i) = 0$ и неравенства (9) остаются в силе. Они также остаются в силе, если в них заменить X_i на множество $X_\infty = \{x \in X \mid \varphi(x) = 0\}$. Рассмотрим разбиение $G = \{X_\infty\} \cup \{X_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ множества X . Суммируя неравенства (9) по элементам этого разбиения, получаем

$$-\varepsilon + \sum_{X_i \in G} v(X_i) \ln \frac{v(X_i)}{\mu(X_i)} \leq \int_X \ln \varphi d\nu \leq \sum_{X_i \in G} v(X_i) \ln \frac{v(X_i)}{\mu(X_i)} + \varepsilon. \quad (10)$$

В силу произвольности ε из правого неравенства (10) вытекает, что $\rho(\nu, \mu) \leq \rho'(\nu, \mu)$. Тем самым теорема доказана.

Случай σ -конечной меры μ

Пусть теперь $\nu \in M_1(X)$ и $\mu \in M_\sigma(X)$. В работе [6] было доказано, что в этой ситуации информационную функцию $\rho(\nu, \mu)$ можно определить следующим образом:

$$\rho(\nu, \mu) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \nexists \varphi(x) = \frac{d\nu(x)}{d\mu(x)}, \\ \int_X \varphi \ln \varphi d\mu, & \text{если } \exists \varphi(x) = \frac{d\nu(x)}{d\mu(x)} \text{ и } \int_{\{\varphi < 1\}} \varphi \ln \varphi d\mu > -\infty, \\ -\infty, & \text{если } \exists \varphi(x) = \frac{d\nu(x)}{d\mu(x)} \text{ и } \int_{\{\varphi < 1\}} \varphi \ln \varphi d\mu = -\infty. \end{cases}$$

Функцию $\rho'(\nu, \mu)$ по-прежнему будем определять формулой (3). Далее, нашей целью является исследование вопроса о том, когда и в каком смысле выполняется равенство $\rho(\nu, \mu) = \rho'(\nu, \mu)$.

Прежде всего заметим, что в случае бесконечной меры μ счетные разбиения G в формуле (3) нельзя заменить на конечные. Действительно, пусть $X = \mathbb{N}$. Рассмотрим такую меру $\mu \in M_\sigma(\mathbb{N})$, что $\mu(i) = 1$, и такую меру $\nu \in M_1(\mathbb{N})$, что $\nu(i) = \frac{1}{2^i}$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\rho'(\nu, \mu) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(i) \ln \frac{\nu(i)}{\mu(i)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \ln \frac{1}{2^i} = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i \ln 2}{2^i} > -\infty.$$

С другой стороны, для любого конечного разбиения $G = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ множества \mathbb{N} найдется такое i , при котором $\mu(X_i) = +\infty$, и поэтому

$$\sup_G \sum_{X_i \in G} \nu(X_i) \ln \frac{\nu(X_i)}{\mu(X_i)} = -\infty,$$

если супремум берется по конечным разбиениям G .

В связи с этим далее будем считать, что супремум в (3) берется по всем конечным и счетным разбиениям G .

Теорема 3. Пусть мера $\nu \in M_1(X)$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mu \in M_\sigma(X)$ и плотность $\varphi = \frac{d\nu}{d\mu}$ удовлетворяет условию

$$\int_{\{\varphi < 1\}} \varphi \ln \varphi \, d\mu > -\infty.$$

Тогда выполняется равенство

$$\rho(\nu, \mu) = \rho'(\nu, \mu).$$

Доказательство этой теоремы дословно воспроизводит доказательство теоремы 2 в случае абсолютно непрерывной меры ν . Поэтому мы не будем его повторять.

Примеры

Далее, исследуем случаи, которые теоремы 2 и 3 не охватывают: 1) случай не абсолютно непрерывной меры $\nu \in M_1(X)$ по отношению к бесконечной мере $\mu \in M_\sigma(X)$; 2) случай абсолютно непрерывной меры $\nu \in M_1(X)$ относительно бесконечной меры $\mu \in M_\sigma(X)$ с плотностью $\varphi = \frac{d\nu}{d\mu}$, удовлетворяющей условию

$$\int_{\{\varphi < 1\}} \varphi \ln \varphi \, d\mu = -\infty. \quad (11)$$

Сначала установим справедливость следующего утверждения.

Лемма 4. Пусть заданы конечные меры $\nu \in M(X)$, $\mu \in M(X)$ и дискретное измеримое разбиение $\{X_i\}$ пространства X . Тогда выполняется неравенство

$$\nu(X) \ln \frac{\nu(X)}{\mu(X)} \leq \sum_i \nu(X_i) \ln \frac{\nu(X_i)}{\mu(X_i)}. \quad (12)$$

Доказательство. Справедливость (12) вытекает из вогнутости логарифмической функции и следующей выкладки, аналогичной выкладке (6):

$$\begin{aligned} -\sum_i \nu(X_i) \ln \frac{\nu(X_i)}{\mu(X_i)} &= \sum_{\nu(X_i) > 0} \nu(X_i) \ln \frac{\mu(X_i)}{\nu(X_i)} = \\ &= \nu(X) \sum_{\nu(X_i) > 0} \frac{\nu(X_i)}{\nu(X)} \ln \frac{\mu(X_i)}{\nu(X_i)} \leq \nu(X) \ln \left(\sum_{\nu(X_i) > 0} \frac{\nu(X_i) \mu(X_i)}{\nu(X) \nu(X_i)} \right) \leq \\ &\leq \nu(X) \ln \frac{\mu(X)}{\nu(X)} = -\nu(X) \ln \frac{\nu(X)}{\mu(X)}. \end{aligned}$$

1. Пусть мера $\nu \in M_1(X)$ не абсолютно непрерывна по отношению к бесконечной мере $\mu \in M_\sigma(X)$. Тогда по определению $\rho(\nu, \mu) = +\infty$. С другой стороны, выясним, какой результат может давать формула (3).

В качестве примера рассмотрим пространство $X = \mathbb{N}$, меру μ вида

$$\mu(i) = \begin{cases} 0, & i = 1, \\ 1, & i > 1 \end{cases}$$

и меру ν вида

$$\nu(i) = \frac{C}{(i+1) \ln^2(i+1)}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где нормировочная константа $C > 0$ определяется условием

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{C}{(i+1) \ln^2(i+1)} = 1.$$

Рассмотрим произвольное разбиение $G = \{X_1, X_2, \dots\}$ множества \mathbb{N} . Не ограничивая общности, можно считать, что $1 \in X_1$. При этом возможны три случая:

- $X_1 = \{1\}$;
- X_1 конечно и содержит элементы, отличные от единицы;
- X_1 бесконечно.

В случае а) получаем $v(X_1) \ln \frac{v(X_1)}{\mu(X_1)} = +\infty$. Применяя лемму 4 к множествам X_i и их разбиениям на отдельные элементы, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{+\infty} v(X_i) \ln \frac{v(X_i)}{\mu(X_i)} &\leq \sum_{i=2}^{+\infty} \sum_{j \in X_i} v(j) \ln \frac{v(j)}{\mu(j)} = \sum_{j=2}^{+\infty} v(j) \ln \frac{v(j)}{\mu(j)} = \\ &= \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{C}{(j+1) \ln^2(j+1)} \ln \frac{C}{(j+1) \ln^2(j+1)} = \sum_{j=3}^{+\infty} \frac{C \ln C}{j \ln^2 j} - \sum_{j=3}^{+\infty} \frac{C}{j \ln j} - \sum_{j=3}^{+\infty} \frac{2C \ln(\ln j)}{j \ln^2 j} = -\infty. \end{aligned}$$

В этой ситуации сумма в правой части (3) обладает тем свойством, что в ней одно слагаемое равно $+\infty$, а сумма остальных слагаемых обращается в $-\infty$, и, следовательно, не существует разумного способа приписать определенное значение правой части (3).

В случае б) выражение $v(X_1) \ln \frac{v(X_1)}{\mu(X_1)}$ конечно и, используя лемму 4, аналогично предыдущей выкладке получаем

$$\sum_{i=2}^{+\infty} v(X_i) \ln \frac{v(X_i)}{\mu(X_i)} \leq \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus X_1} v(j) \ln \frac{v(j)}{\mu(j)} = -\infty.$$

В этой ситуации правая часть (3) обращается в $-\infty$.

В случае в) имеем $v(X_1) \ln \frac{v(X_1)}{\mu(X_1)} = -\infty$ и, поскольку $v(j) < \mu(j)$ для всех $j \geq 2$,

$$\sum_{i=2}^{+\infty} v(X_i) \ln \frac{v(X_i)}{\mu(X_i)} \leq 0.$$

Значит, в этой ситуации, так же как и в случае б), правая часть (3) принимает значение $-\infty$.

Если же необходимо иметь равенство $\rho(v, \mu) = \rho'(v, \mu)$, то неизбежно приходим к необходимости считать значение правой части (3) равным $+\infty$ в случае а), что выглядит неестественно. Другой возможный способ добиться равенства $\rho(v, \mu) = \rho'(v, \mu)$ в случае не абсолютно непрерывной меры v – просто положить $\rho'(v, \mu) = +\infty$ без какой-либо связи с равенством (3).

2. Теперь рассмотрим случай, когда мера $v \in M_1(X)$ абсолютно непрерывна относительно бесконечной меры $\mu \in M_\sigma(X)$ с плотностью $\varphi = \frac{dv}{d\mu}$, удовлетворяющей условию (11). Тогда по определению $\rho(v, \mu) = -\infty$. Выясним, какой результат в этой ситуации может давать формула (3).

В качестве примера рассмотрим множество $X = \mathbb{Z}$, меру μ вида

$$\mu(i) = \begin{cases} 1, & i \geq 1, \\ 2^{i-1}, & i < 1 \end{cases} \quad (13)$$

и меру v вида

$$v(i) = \begin{cases} \frac{A}{(i+1) \ln^2(i+1)}, & i \geq 1, \\ \frac{B}{(i-1)^2}, & i < 1, \end{cases} \quad (14)$$

где нормировочные константы $A > 0$ и $B > 0$ определяются условиями:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A}{(i+1) \ln^2(i+1)} = \frac{1}{2}, \quad \sum_{i=-\infty}^0 \frac{B}{(i-1)^2} = \frac{1}{2}.$$

Очевидно, v абсолютно непрерывна относительно меры μ с плотностью

$$\varphi(i) = \begin{cases} \frac{A}{(i+1)\ln^2(i+1)}, & i \geq 1, \\ \frac{B}{2^{i-1}(i-1)^2}, & i < 1. \end{cases}$$

Проверим, что выполняется условие (11). Действительно, нетрудно видеть, что

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \varphi(i) \ln(\varphi(i)) \mu(i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{A}{(i+1)\ln^2(i+1)} \ln \frac{A}{(i+1)\ln^2(i+1)} = -\infty. \quad (15)$$

Кроме того, по построению $\sum_{i=1}^{+\infty} \varphi(i) = \frac{1}{2}$, поэтому $\varphi(i) < 1$ при $i \geq 1$.

Также легко видеть, что

$$\sum_{i=-\infty}^0 \varphi(i) \ln(\varphi(i)) \mu(i) = \sum_{i=-\infty}^0 \frac{B}{(i-1)^2} \ln \frac{B}{2^{i-1}(i-1)^2} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{B}{(i+1)^2} \ln \frac{B2^{i+1}}{(i+1)^2} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{B}{i^2} \ln \frac{B2^i}{i^2} = +\infty. \quad (16)$$

Кроме того, $\varphi(i) \rightarrow +\infty$ при $i \rightarrow -\infty$. Это означает, что существует такое i' , что $\varphi(i) \geq 1$ для всех $i \leq i'$.

Таким образом, в этом примере выполняется (11) и по определению имеем $\rho(\nu, \mu) = -\infty$. А из (15) и (16) следует, что ряд

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \nu(i) \ln \frac{\nu(i)}{\mu(i)} \quad (17)$$

расходится в обе стороны.

Зафиксируем произвольное разбиение $G = \{X_1, X_2, \dots\}$ множества \mathbb{Z} . Убедимся, что для заданных формулами (13) и (14) мер у суммы

$$\sum_{X_i \in G} \nu(X_i) \ln \frac{\nu(X_i)}{\mu(X_i)} \quad (18)$$

можно выделить частичную сумму, равную $-\infty$. Если существует такое $X_i \in G$, что $\mu(X_i) = +\infty$, то соответствующее слагаемое в (18) обращается в $-\infty$, и тогда выделяем частичную сумму, состоящую из этого одного слагаемого. Поэтому далее можем предполагать, что $\mu(X_i) < +\infty$ для всех $X_i \in G$.

Определим G_+ как совокупность элементов разбиения G , имеющих непустое пересечение с \mathbb{N} . Для удобства введем для элементов G_+ новое обозначение и будем считать, что $G_+ = \{Y_1, Y_2, \dots\}$. Достаточно проверить, что выполняется

$$\sum_{Y_i \in G_+} \nu(Y_i) \ln \frac{\nu(Y_i)}{\mu(Y_i)} = -\infty. \quad (19)$$

В силу леммы 4 сумма в (19) может лишь увеличиться при разбиении каждого Y_i на более мелкие подмножества. Поэтому при доказательстве (19) достаточно считать, что $Y_i \cap \mathbb{N} = \{i\}$. Тогда для $i \geq 1$ будем иметь $\nu(i) \leq \nu(Y_i) \leq 1$, $\mu(Y_i) \geq \mu(i) = 1$,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \nu(i) \ln \frac{\nu(i)}{\mu(i)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \nu(i) \ln \nu(i) = -\infty, \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \nu(Y_i) \ln \frac{\nu(Y_i)}{\mu(Y_i)} \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \nu(Y_i) \ln \nu(Y_i) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \nu(i) \ln \nu(Y_i). \quad (21)$$

Для того чтобы оценить правую часть (21) сверху, для произвольного фиксированного натурального n рассмотрим задачу на условный экстремум

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \nu(i) \ln y_i \rightarrow \text{extr}, \\ \sum_{i=1}^n y_i = C_n, \quad C_n = \sum_{i=1}^n \nu(Y_i). \end{cases}$$

Решая ее методом множителей Лагранжа, получаем, что целевая функция достигает локального максимума при

$$y_i = \frac{C_n v(i)}{D_n}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где $D_n = \sum_{i=1}^n v(i)$.

Значение этого максимума равно

$$D_n \ln C_n + \sum_{i=1}^n v(i) \ln v(i) - D_n \ln D_n.$$

А поскольку целевая функция, что очевидно, вогнута и рассматривается на выпуклом множестве, то этот максимум является глобальным, т. е. выполняется

$$\sum_{i=1}^n v(i) \ln v(Y_i) \leq D_n \ln C_n + \sum_{i=1}^n v(i) \ln v(i) - D_n \ln D_n. \quad (22)$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow +\infty$ в (22), с учетом оценки (20) имеем

$$\sum_{i=1}^{+\infty} v(i) \ln v(Y_i) \leq -\infty. \quad (23)$$

Таким образом, принимая во внимание оценки (21) и (23), убеждаемся в справедливости (19). А поскольку ряд (17) расходится в обе стороны, то для произвольного разбиения $G = \{X_1, X_2, \dots\}$ множества \mathbb{Z} для суммы (18) возникает ситуация, аналогичная ситуации из предыдущего примера:

- а) либо возможно выделить две частичные суммы, одна из которых будет равна $-\infty$, а другая $+\infty$;
- б) либо возможно выделить только одну частичную сумму, равную $-\infty$, а сумма остальных слагаемых будет конечным числом.

Тогда в ситуации а) непонятно, какое значение приписать правой части (3), а в случае б) правая часть (3) обращается в $-\infty$.

Таким образом, в случае, когда мера $\nu \in M_1(X)$ абсолютно непрерывна относительно бесконечной меры $\mu \in M_\sigma(X)$ с плотностью $\phi = \frac{d\nu}{d\mu}$, удовлетворяющей условию (11), если хотим иметь равенство

$\rho(\nu, \mu) = \rho'(\nu, \mu)$, то приходим к необходимости считать значение правой части (3) равным $-\infty$ в случае а). Это вступает в смысловое противоречие с нашими действиями в предыдущем примере, где в таком же случае двусторонней расходимости ряда в правой части (3) приходилось полагать его значение равным $+\infty$. Другой возможный способ добиться равенства $\rho(\nu, \mu) = \rho'(\nu, \mu)$ в этой ситуации – просто положить $\rho'(\nu, \mu) = -\infty$ без какой-либо связи с равенством (3).

Библиографические ссылки

1. Боровков А. А. Математическая статистика: Оценка параметров. Проверка гипотез. М. : Наука, 1984.
2. Bakhtin V. I. On t -entropy and variational principle for the spectral radius of weighted shift operators // *Ergod. Theory Dyn. Syst.* 2010. Vol. 30, issue 5. P. 1331–1342. DOI: 10.1017/S0143385709000716.
3. Antonevich A. B., Bakhtin V. I., Lebedev A. V. On t -entropy and variational principle for the spectral radii of transfer and weighted shift operators // *Ergod. Theory Dyn. Syst.* 2011. Vol. 31, issue 4. P. 995–1042. DOI: 10.1017/S0143385710000210.
4. Antonevich A. B., Bakhtin V. I., Lebedev A. V. A road to the spectral radius of transfer operators // *Contemp. Math.* 2012. Vol. 567. P. 17–51. DOI: 10.1090/conm/567/11252.
5. Бахтин В. И. Спектральный потенциал, действие Кульбака и принцип больших уклонений для конечно-аддитивных мер // *Тр. Ин-та математики НАН Беларуси.* 2015. Т. 24, № 1. С. 1–13.
6. Bakhtin V., Sokal E. The Kullback – Leibler Information Function For Infinite Measures // *Entropy.* 2016. Vol. 18, issue 12. DOI:10.3390/e18120448.

References

1. Borovkov A. A. *Matematicheskaya statistika: Otsenka parametrov. Proverka gipotez.* M. : Nauka, 1984 (in Russ.).
2. Bakhtin V. I. On t -entropy and variational principle for the spectral radius of weighted shift operators. *Ergod. Theory Dyn. Syst.* 2010. Vol. 30, issue 5. P. 1331–1342. DOI: 10.1017/S0143385709000716.

3. Antonevich A. B., Bakhtin V. I., Lebedev A. V. On t -entropy and variational principle for the spectral radii of transfer and weighted shift operators. *Ergod. Theory Dyn. Syst.* 2011. Vol. 31, issue 4. P. 995–1042. DOI: 10.1017/S0143385710000210.
4. Antonevich A. B., Bakhtin V. I., Lebedev A. V. A road to the spectral radius of transfer operators. *Contemp. Math.* 2012. Vol. 567. P. 17–51. DOI: 10.1090/conm/567/11252.
5. Bakhtin V. I. [Spectral potential, Kullback action, and large deviation principle for finitely-additive measures]. *Proc. of the Inst. of Math. of the Natl. Acad. of Sci. of Belarus.* 2015. Vol. 24, No. 1. P. 1–13 (in Russ.).
6. Bakhtin V., Sokal E. The Kullback – Leibler Information Function For Infinite Measures. *Entropy.* 2016. Vol. 18, issue 12. DOI:10.3390/e18120448.

Статья поступила в редколлегию 27.10.2017.
Received by editorial board 27.10.2017.

УДК 519.2

О ВЫЧИСЛЕНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОШИБОК УСЕЧЕННОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО КРИТЕРИЯ ОТНОШЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

А. Ю. ХАРИН¹⁾, Т. Т. ТУ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Для модели независимых разнораспределенных наблюдений рассмотрен усеченный последовательный критерий (тест) отношения вероятностей для проверки двух простых гипотез. Установлены нижняя и верхняя границы вероятности того, что необходимое для завершения критерия количество наблюдений не превышает предварительно заданное число. Получены неравенства для вероятностей ошибок первого и второго рода, обобщающие известные неравенства. Построены новые приближенные выражения для вероятностей ошибок первого и второго рода. Результаты применены к модели временного ряда с трендом. Кроме того, для модели временного ряда с трендом исследованы свойства последовательного теста, в момент усечения принимающего решение на основе оценки параметра методом наименьших квадратов. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: последовательный критерий отношения вероятностей; усеченный тест; вероятности ошибок; временной ряд с трендом.

ON ERROR PROBABILITIES CALCULATION FOR THE TRUNCATED SEQUENTIAL PROBABILITY RATIO TEST

A. Y. KHARIN¹⁾, T. T. TU¹⁾

^{a)}Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: A. Y. Kharin (kharinay@bsu.by)

The truncated sequential probability ratio test of two simple hypotheses is considered for the model of independent non-identically distributed observations. The lower and upper bounds are given for the probability that the necessary number of observations to stop the test does not exceed a preassigned number. New inequalities for the error probabilities of type I and II are obtained to generalize the classic results. New approximations for the error probabilities of type I and II are constructed. The results are applied for the model of time series with trend. In addition, properties of a sequential test based on the least squares method parameter estimate at the moment of truncation are analyzed for the model of time series with trend. Computer experiment results are given.

Key words: sequential probability ratio test; truncated test; error probabilities; time series with trend.

Образец цитирования:

Харин А. Ю., Ту Т. Т. О вычислении вероятностей ошибок усеченного последовательного критерия отношения вероятностей // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 68–76.

For citation:

Kharin A. Y., Tu T. T. On error probabilities calculation for the truncated sequential probability ratio test. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2018. No. 1. P. 68–76 (in Russ.).

Авторы:

Алексей Юрьевич Харин – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики.

Тон Тхат Ту – аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – А. Ю. Харин.

Authors:

Alexey Y. Kharin, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of probability theory and mathematical statistics, faculty of applied mathematics and informatics.

kharinay@bsu.by

Ton That Tu, postgraduate student at the department of probability theory and mathematical statistics, faculty of applied mathematics and informatics.

tthattu@gmail.com

Последовательный критерий отношения вероятностей (ПКОВ), предложенный А. Вальдом в 1947 г. [1], успешно применяется во многих задачах прикладной статистики благодаря его оптимальным свойствам [2]. Ключевая особенность подхода состоит в том, что количество наблюдений N заранее не фиксируется и является случайной величиной. Основные характеристики теста (вероятности ошибок первого и второго рода и среднее число наблюдений) хорошо исследованы при условии одинаковых распределений наблюдений [1; 3–5]. На практике по разным причинам, связанным со временем, финансами или условиями эксперимента, количество наблюдений может быть ограничено заранее заданным значением M . Для такой ситуации в [1] предложен усеченный на M -м наблюдении ПКОВ. При больших значениях M А. Вальд использовал нормальную аппроксимацию для оценивания вероятностей ошибок первого и второго рода [1]. Обобщение этих оценок получено в [3]. Однако на практике исследуемые данные часто описываются более сложными моделями, например моделью временного ряда с трендом [6; 7] или более общими. Последовательный тест для проверки гипотез о параметрах временных рядов с трендом и его характеристики исследованы в [8; 9]. В настоящей статье приводятся новые неравенства для вероятностей ошибок в более общем случае независимых разнораспределенных наблюдений. В качестве применения этих общих результатов рассмотрена модель временных рядов с трендом.

Математическая модель

Пусть x_1, x_2, \dots – последовательные наблюдения независимых случайных величин $\{X_t, t \geq 1\}$, $p_t(x_t, \theta)$ – плотности распределения вероятностей, θ – неизвестное истинное значение параметра.

Рассматриваются две простые гипотезы:

$$H_0 : \theta = \theta^0, H_1 : \theta = \theta^1, \quad (1)$$

где θ^0, θ^1 – известные значения. Обозначим статистику накопленного по n наблюдениям логарифмического отношения правдоподобия для гипотез (1):

$$\Lambda_n = \Lambda_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{t=1}^n \lambda_t, \quad (2)$$

где $\lambda_t = \ln \left(\frac{p_t(x_t, \theta^1)}{p_t(x_t, \theta^0)} \right)$ – логарифмическое отношение правдоподобия, вычисленное по наблюдению x_t .

В последовательном тесте Вальда [1] при проверке гипотез (1) после n наблюдений принимается решение

$$d = \mathbf{1}_{[C_+, +\infty)}(\Lambda_n) + 2 \cdot \mathbf{1}_{(C_-, C_+)}(\Lambda_n), \quad (3)$$

где $\mathbf{1}_D(\cdot)$ означает индикаторную функцию множества D . Решение $d = 2$ соответствует продолжению процесса наблюдения, поскольку заданная точность не может быть обеспечена. Решение $d = 0$ ($d = 1$) означает остановку процесса наблюдения и принятие гипотезы H_0 (H_1) соответственно. В (3) $C_-, C_+ \in \mathbb{R}$, $C_- < C_+$ – параметры теста, называемые порогами. В соответствии с [1] будем использовать следующие значения:

$$C_- = \ln \left(\frac{\beta_0}{1 - \alpha_0} \right), \quad C_+ = \ln \left(\frac{1 - \beta_0}{\alpha_0} \right),$$

где α_0, β_0 – заданные предельно допустимые значения вероятностей ошибок первого (принять гипотезу H_1 при справедливой H_0) и второго (принять гипотезу H_0 при справедливой H_1) рода соответственно.

В силу ограничения на максимально возможное количество наблюдений используется усеченный ПКОВ (УПКОВ): если процедура (2), (3) не приводит к терминальному решению в пользу одной из гипотез (1) при $n \leq M - 1$, решение на основании M -го наблюдения принимается следующим образом:

$$d = \mathbf{1}_{(0, +\infty)}(\Lambda_M). \quad (4)$$

Результаты для общего случая

Примем обозначения: $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$, $p_i = P(A_i)$, $Q = \{q_{ij}\}_{n \times n}$, $q_{ij} = P(A_i A_j)$, $i, j = \overline{1, n}$, и \bar{Q} – обобщенная обратная матрица [10] для Q .

Для произвольных событий A_i , $i = \overline{1, n}$, имеет место неравенство [11]:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq P^T \bar{Q} P. \quad (5)$$

Будем использовать также следующее свойство нормального распределения вероятностей [12]. Если X, Y – независимые случайные величины, $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$, $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$, то

$$f_{X+Y|Y}(x|y) = \frac{f_{X+Y}(x, y)}{f_Y(y)} = n_1(x; y + \mu_x, \sigma_x^2), \quad (6)$$

где $n_1(x; \mu, \sigma^2)$ – плотность распределения вероятностей, соответствующая нормальному распределению $N(\mu, \sigma^2)$ с параметрами μ, σ^2 .

Для произвольных случайных событий $A_i, i = \overline{1, n}$, имеет место следующее неравенство [13]:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i A_{i+1}). \quad (7)$$

Пусть N – необходимое число наблюдений до остановки теста (2), (3) без ограничения количества наблюдений; α и β – вероятности ошибок первого и второго рода соответственно для такого теста.

Обозначим: $P_k(\cdot)$ – вероятностная мера при справедливой гипотезе H_k для $k \in \{0, 1\}$;

$$P_k = (p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots, p_M^{(k)})^T, \quad Q_k = \{q_{ij}^{(k)}\}_{M \times M}, \quad p_i^{(k)} = 1 - a_i^{(k)},$$

$$a_i^{(k)} = P_k(\Lambda_i \in (C_-, C_+)), \quad q_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1 - a_i^{(k)} - a_j^{(k)} + a_{ij}^{(k)}, & i \neq j, \\ 1 - a_i^{(k)}, & i = j, \end{cases}$$

$$a_{ij}^{(k)} = P_k(\Lambda_i, \Lambda_j \in (C_-, C_+)), \quad b_i^{(k)} = P_k(\Lambda_i, \Lambda_{i+1}, \Lambda_M \in (C_-, C_+)),$$

где \bar{Q}_k – обобщенная обратная матрица для Q_k .

Теорема 1. В рамках рассмотренной модели наблюдений для ПКОВ (2), (3) имеют место следующие неравенства:

$$P_k^T \bar{Q}_k P_k \leq P_k(N \leq M) \leq M - 2 - (M - 3)q_{MM}^{(k)} + \sum_{i=2}^{M-2} (q_{iM}^{(k)} - q_{ii}^{(k)} - b_i^{(k)}) - b_1^{(k)}, \quad k \in \{0, 1\}. \quad (8)$$

Доказательство. Пусть $A_i = \{\omega : \Lambda_i \notin (C_-, C_+)\}$, $i = \overline{1, M}$.

Тогда

$$P_k(N \leq M) = P_k\left(\bigcup_{i=1}^M A_i\right) = P_k(A_M) + P_k\left(\bigcup_{i=1}^{M-1} (A_i \bar{A}_M)\right).$$

Используя (7), получаем

$$\begin{aligned} P_k(N \leq M) &\leq P_k(A_M) + \sum_{i=1}^{M-1} P_k(A_i \bar{A}_M) - \sum_{i=1}^{M-2} P_k(A_i A_{i+1} \bar{A}_M) = \\ &= P_k(A_M) + \sum_{i=1}^{M-1} [P_k(A_i) - P_k(A_i A_M)] - \sum_{i=1}^{M-2} [P_k(A_i A_{i+1}) - P_k(A_i A_{i+1} A_M)] = \\ &= \sum_{i=1}^M P_k(A_i) - \sum_{i=1}^{M-1} P_k(A_i A_M) - \sum_{i=1}^{M-2} P_k(A_i A_{i+1}) + \sum_{i=1}^{M-2} P_k(A_i A_{i+1} A_M) = \\ &= \sum_{i=1}^M q_{ii}^{(k)} - \sum_{i=1}^{M-1} q_{iM}^{(k)} - \sum_{i=1}^{M-2} q_{ii+1}^{(k)} + \sum_{i=1}^{M-2} P_k(A_i A_{i+1} A_M), \end{aligned}$$

поскольку $P_k(A_i A_j) = 1 - P_k(\bar{A}_i) - P_k(\bar{A}_j) + P_k(\bar{A}_i \bar{A}_j)$, $\forall i, j = \overline{1, M}$, $k \in \{0, 1\}$.

Отметим, что

$$\begin{aligned} P_k(A_i A_{i+1} A_M) &= 1 - P_k(A_i) - P_k(A_{i+1}) - P_k(A_M) + \\ &+ P_k(A_i A_{i+1}) + P_k(A_i A_M) + P_k(A_{i+1} A_M) - P_k(\bar{A}_i \bar{A}_{i+1} \bar{A}_M) = \\ &= 1 - q_{ii}^{(k)} - q_{i+1, i+1}^{(k)} - q_{MM}^{(k)} + q_{ii+1}^{(k)} + q_{iM}^{(k)} + q_{i+1M}^{(k)} - b_i^{(k)}. \end{aligned}$$

Из этого следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{M-2} P_k(A_i A_{i+1} A_M) &= M - 2 - (M - 2)q_{MM}^{(k)} - \sum_{i=1}^{M-2} b_i^{(k)} + \sum_{i=1}^{M-2} q_{ii+1}^{(k)} - \\ &- 2 \sum_{i=1}^{M-1} q_{ii}^{(k)} + q_{11}^{(k)} + q_{M-1, M-1}^{(k)} + 2 \sum_{i=1}^{M-1} q_{iM}^{(k)} - q_{1M}^{(k)} - q_{M-1, M}^{(k)}. \end{aligned}$$

В результате получаем правую часть (8):

$$P_k(N \leq M) \leq M - 2 - (M - 3)q_{MM}^{(k)} - \sum_{i=2}^{M-2} q_{ii}^{(k)} + \sum_{i=2}^{M-2} q_{iM}^{(k)} - \sum_{i=1}^{M-2} b_i^{(k)}.$$

Левая часть (8) следует из (5). Теорема доказана.

Пусть N_M – необходимое число наблюдений для остановки усеченного теста с ограничением (4), α_M и β_M – вероятности ошибок первого и второго рода соответственно для такого теста. Обозначим $K_i^+ = P_i(N > M, \Lambda_M \in (0, C_+))$, $K_i^- = P_i(N > M, \Lambda_M \in (C_-, 0])$.

Теорема 2. Для рассмотренной модели наблюдений вероятности ошибок теста (2)–(4) удовлетворяют неравенствам:

$$\alpha_M \leq e^{-C_+}(1 - \beta_M) + K_0^+ - e^{-C_+}K_1^+, \quad (9)$$

$$\beta_M \leq e^{-C_-}(1 - \alpha_M) + K_1^- - e^{-C_-}K_0^-. \quad (10)$$

Доказательство. Пусть B_n , $n = \overline{1, M}$, – подмножества n -мерного евклидова пространства, где $C_- < \Lambda_i < C_+$ для $i = 1, 2, \dots, n-1$ и $\Lambda_n \geq C_+$; E_n , $n = \overline{1, M}$, – подмножества n -мерного евклидова пространства, где $C_- < \Lambda_i < C_+$ для $i = 1, 2, \dots, n-1$ и $\Lambda_n \leq C_-$. Обозначим функции правдоподобия по наблюдениям $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ при гипотезе H_k , $k \in \{0, 1\}$, через $p_{kn}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, т. е. $p_{kn}(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_1(x_1, \theta^k) \times \dots \times p_n(x_n, \theta^k)$. Тогда можно записать $\Lambda_n = \ln \left(\frac{p_{1n}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{p_{0n}(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right)$,

и

$$\begin{aligned} \alpha_M &= P_0(\Lambda_{N_M} \geq C_+, N_M \leq M - 1) + P_0(\Lambda_{N_M} > 0, N_M = M) = \\ &= \sum_{i=1}^{M-1} P_0(\Lambda_i \geq C_+, N_M = i) + P_0(\Lambda_M > 0, N_M = M) = \sum_{i=1}^M P_0(B_i) + P_0(0 < \Lambda_M < C_+, N_M = M) = \\ &= \sum_{i=1}^M \int_{B_i} p_{0i}(x_1, x_2, \dots, x_i) dx_1 dx_2 \dots dx_i + K_0^+ = \sum_{i=1}^M \int_{B_i} \left[p_{1i}(x_1, x_2, \dots, x_i) \frac{p_{0i}(x_1, x_2, \dots, x_i)}{p_{1i}(x_1, x_2, \dots, x_i)} \right] dx_1 dx_2 \dots dx_i + K_0^+ = \\ &= \sum_{i=1}^M \int_{B_i} p_{1i}(x_1, x_2, \dots, x_i) e^{-\Lambda_i} dx_1 dx_2 \dots dx_i + K_0^+ \leq \sum_{i=1}^M e^{-C_+} P_1(B_i) + K_0^+ = \sum_{i=1}^M e^{-C_+} (P_1(N = i) - P_1(E_i)) + K_0^+ = \\ &= e^{-C_+}(1 - \beta_M) + K_0^+ + e^{-C_+} (P_1(N = M) - P_1(N_M = M) + P_1(\Lambda_i \in (C_-, C_+), i = \overline{1, M-1}, \Lambda_M \in (C_-, 0])) = \\ &= e^{-C_+}(1 - \beta_M) + K_0^+ - e^{-C_+}K_1^+, \end{aligned}$$

что доказывает соотношение (9). Аналогично доказывается и неравенство (10). Теорема доказана.

Замечание 1. Когда $M = +\infty$, получаем $K_0^\pm = K_1^\pm = 0$ при условии, что тест заканчивается за конечное число наблюдений с вероятностью 1. В этом случае неравенства (9), (10) превращаются в известные неравенства Вальда для порогов ПКОВ [1]:

$$A \leq \frac{1 - \beta_\infty}{\alpha_\infty}, \quad B \geq \frac{\beta_\infty}{1 - \alpha_\infty},$$

где $A = e^{C_+}$ и $B = e^{C_-}$.

Замечание 2. Пусть $p_+ = K_0^+ - e^{-C_+} K_1^+$, $p_- = K_1^- - e^{C_-} K_0^-$. Если при оценивании пренебречь величинами выхода за границы интервала (C_-, C_+) в момент остановки теста, то неравенства (9), (10) превратятся в равенства:

$$\begin{cases} \alpha_M = e^{-C_+}(1 - \beta_M) + p_+, \\ \beta_M = e^{C_-}(1 - \alpha_M) + p_-. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем:

$$\alpha_M = \frac{p_+ + e^{-C_+} - e^{C_- - C_+} - p_- e^{-C_+}}{1 - e^{C_- - C_+}}, \quad \beta_M = \frac{p_- + e^{C_-} - e^{C_- - C_+} - p_+ e^{C_-}}{1 - e^{C_- - C_+}}. \quad (11)$$

Можно использовать формулы (11) для аппроксимации истинных значений α_M, β_M , однако имеется сложность аналитического вычисления значений $K_i^\pm, i = 0, 1$.

Проверка гипотез о параметрах временных рядов с трендом

Рассмотрим гипотетическую вероятностную модель временного ряда с трендом [14]:

$$x_t = \theta^T \psi(t) + \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots, M, \quad (12)$$

где $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_m(t))^T, t \geq 1$, – базисные функции тренда; $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)^T \in \mathbb{R}^m$ – неизвестный вектор параметров; $\{\xi_t, t \geq 1\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных гауссовских случайных величин; $\xi_t \sim N(0, \sigma^2)$. Рассмотрим задачу проверки гипотез (1). Для $t \geq 1$ получим

$$x_t \sim N(\theta^T \psi(t), \sigma^2), \quad p_t(x, \theta) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x - \theta^T \psi(t))^2 \right\},$$

$$\lambda_t = \lambda_t(x_t) = -\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ 2x_t(\theta^0 - \theta^1)^T \psi(t) + (\theta^1)^T \psi(t) \psi^T(t) \theta^1 - (\theta^0)^T \psi(t) \psi^T(t) \theta^0 \right\}.$$

Обозначим: $E^{(l)}(\cdot), D^{(l)}(\cdot)$ – условное математическое ожидание и дисперсия при условии, что справедлива гипотеза $H_l, l \in \{0, 1\}$; $H_n = \sum_{t=1}^n \psi(t) \psi^T(t)$.

Лемма 1 [8]. В условиях модели (12) для теста (2), (3) проверки гипотез (1) статистики λ_t, Λ_n имеют гауссовские распределения вероятностей, и справедливы соотношения:

$$E(\lambda_t) = -\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ 2(\theta^0 - \theta^1)^T \psi(t) \psi^T(t) \theta + (\theta^1)^T \psi(t) \psi^T(t) \theta^1 - (\theta^0)^T \psi(t) \psi^T(t) \theta^0 \right\},$$

$$E(\Lambda_n) = -\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ 2(\theta^0 - \theta^1)^T H_n \theta + (\theta^1)^T H_n \theta^1 - (\theta^0)^T H_n \theta^0 \right\},$$

$$D(\lambda_t) = \frac{(\theta^0 - \theta^1)^T \psi(t) \psi^T(t) (\theta^0 - \theta^1)}{\sigma^2}; \quad D(\Lambda_n) = \frac{(\theta^0 - \theta^1)^T H_n (\theta^0 - \theta^1)}{\sigma^2}.$$

Примем обозначения:

$$\Gamma = (\theta^0 - \theta^1)(\theta^0 - \theta^1)^T; \quad s_n^2 = \sum_{t=1}^n \sigma_t^2, \quad m_n^{(l)} = \sum_{t=1}^n \mu_t^{(l)} = \frac{(-1)^{l+1} s_n^2}{2}, \quad l = 0, 1;$$

$$\sigma_n^2 = D^{(0)}(\lambda_n) = D^{(1)}(\lambda_n) = \frac{(\theta^0 - \theta^1)^T \Psi(n) \Psi^T(n) (\theta^0 - \theta^1)}{\sigma^2};$$

$$\mu_n^{(l)} = E^{(l)}(\lambda_n) = \frac{(-1)^{l+1} (\theta^0 - \theta^1)^T \Psi(n) \Psi^T(n) (\theta^0 - \theta^1)}{2\sigma^2} = \frac{(-1)^{l+1} \sigma_n^2}{2}.$$

Следствие 1. Для модели (12) справедлива теорема 1 со следующими значениями:

$$a_i^{(k)} = \int_{C_-}^{C_+} n_1(x; m_i^{(k)}, s_i^2) dx; \quad q_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1 - a_i^{(k)} - a_j^{(k)} + a_{ij}^{(k)}, & i \neq j, \\ 1 - a_i^{(k)}, & i = j; \end{cases}$$

$$a_{ij}^{(k)} = \int_{C_-}^{C_+} \int_{C_-}^{C_+} n_1(x; m_i^{(k)}, s_i^2) n_1(y; x + m_j^{(k)} - m_i^{(k)}, s_j^2 - s_i^2) dx dy, \text{ если } i < j, \quad a_{ij} = a_{ji}, \text{ если } i > j;$$

$$b_i^{(k)} = \int_{C_-}^{C_+} \int_{C_-}^{C_+} \int_{C_-}^{C_+} n_1(x; m_i^{(k)}, s_i^2) n_1(y; x + \mu_{i+1}^{(k)}, \sigma_{i+1}^2) n_1(z; y + m_M^{(k)} - m_{i+1}^{(k)}, s_M^2 - s_{i+1}^2) dx dy dz.$$

Следствие 2. Для модели (12) вероятности ошибок I и II рода УПКОВ (2)–(4) удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\alpha_M \leq e^{-C_+} (1 - \beta_M) + \int_0^{C_+} \int_{C_-}^{C_+} n_1(x; m_{M-1}^{(0)}, s_{M-1}^2) n_1(y; x + \mu_M^{(0)}, \sigma_M^2) dx dy,$$

$$\beta_M \leq e^{C_-} (1 - \alpha_M) + \int_{C_-}^0 \int_{C_-}^{C_+} n_1(x; m_{M-1}^{(1)}, s_{M-1}^2) n_1(y; x + \mu_M^{(1)}, \sigma_M^2) dx dy.$$

Доказательство. Результат следует из теоремы 2, формулы (6) и следующих неравенств:

$$P_0(N > M, \Lambda_M \in (0, C_+)) \leq P_0(\Lambda_{M-1} \in (C_-, C_+), \Lambda_M \in (0, C_+)),$$

$$P_1(N > M, \Lambda_M \in (C_-, 0]) \leq P_1(\Lambda_{M-1} \in (C_-, C_+), \Lambda_M \in (C_-, 0]).$$

Следствие доказано.

Отметим, что $P_0(\Lambda_M \leq 0) = P_1(\Lambda_M > 0) = \Phi\left(\frac{\sqrt{\text{tr}(\Gamma H_M)}}{2\sigma}\right)$ для модели (12), где $\Phi(x)$ – функция стандартного нормального распределения. Это значит, что УПКОВ (2)–(4) приводит к одинаковым вероятностям правильного выбора каждой гипотезы на последнем шаге. Рассмотрим класс $\wp(M)$, состоящий

из всех линейных комбинаций x_1, x_2, \dots, x_M , имеющих вид $b^T X_M + c$, где $b = (b_1, b_2, \dots, b_M)^T \in \mathbb{R}^M$; $c \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^M b_i^2 \neq 0$; $X_M = (x_1, x_2, \dots, x_M)^T$, и удовлетворяющих условию

$$P_0(b^T X_M + c \leq 0) = P_1(b^T X_M + c > 0). \quad (13)$$

Теорема 3. Для всех $L_M \in \wp(M)$ справедливо неравенство

$$P_0(\Lambda_M \leq 0) \geq P_0(L_M \leq 0). \quad (14)$$

Доказательство. $L_M \in \wp(M) \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}$ такие, что $L_M = b^T X_M + c$. При справедливой гипотезе H_k ($k = 0, 1$) L_M имеет нормальное распределение со следующими параметрами соответственно:

$$E^{(k)}(L_M) = b^T A \theta^{(k)} + c, \quad D(L_M) = \sigma^2 b^T b,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \psi_1(1) & \psi_2(1) & \dots & \psi_m(1) \\ \psi_1(2) & \psi_2(2) & \dots & \psi_m(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_1(M) & \psi_2(M) & \dots & \psi_m(M) \end{pmatrix}.$$

Из условия (13) следует, что $E^{(0)}(L_M) = -E^{(1)}(L_M)$ или $c = -\frac{1}{2}b^T A(\theta^0 + \theta^1)$. Следовательно, $E^{(0)}(L_M) = \frac{1}{2}b^T A(\theta^0 - \theta^1)$ и $P_0(L_M \leq 0) = \Phi\left(\frac{b^T A(\theta^1 - \theta^0)}{2\sigma\sqrt{b^T b}}\right)$. Тогда неравенство (14) эквивалентно неравенству

$$\frac{b^T A(\theta^1 - \theta^0)}{\sqrt{b^T b}} \leq \sqrt{\text{tr}(\Gamma H_M)}. \quad (15)$$

Если левая часть (15) отрицательна, то это неравенство тривиально. В противном случае его можно переписать в следующем виде:

$$\left(b^T A(\theta^1 - \theta^0)\right)^2 \leq b^T b \cdot \text{tr}(\Gamma H_M).$$

Преобразуем левую часть:

$$\left(b^T A(\theta^1 - \theta^0)\right)^2 = \text{tr}\left(b^T A(\theta^1 - \theta^0)(\theta^1 - \theta^0)^T A^T b\right) = \text{tr}\left(b b^T A(\theta^1 - \theta^0)(\theta^1 - \theta^0)^T A^T\right).$$

Из свойств следа матрицы [15] получаем, что также справедливо неравенство:

$$\left(b^T A(\theta^1 - \theta^0)\right)^2 \leq \text{tr}(b b^T) \text{tr}\left(A(\theta^1 - \theta^0)(\theta^1 - \theta^0)^T A^T\right) = b^T b \cdot \text{tr}(\Gamma H_M).$$

Обозначим: $U = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M)^T$, $\rho(x, y) = (x - y)^T (x - y)$ – евклидово расстояние между векторами x и y в \mathbb{R}^m . Модель (12) в матричной форме записывается следующим образом: $X_M = A\theta + U$.

Пусть $\text{rank}(A) = m$. Оценка $\hat{\theta}$ параметра θ по методу наименьших квадратов имеет вид [14]: $\hat{\theta} = (A^T A)^{-1} A^T X_M$, ее распределение вероятностей – нормальное с параметрами $E(\hat{\theta}) = \theta$, $\text{Cov}(\hat{\theta}, \hat{\theta}) = \sigma^2 (A^T A)^{-1}$. Обозначим $\gamma = \rho(\hat{\theta}, \theta^0) - \rho(\hat{\theta}, \theta^1) = 2(\theta^1 - \theta^0)^T \hat{\theta} + (\theta^0)^T \theta^0 - (\theta^1)^T \theta^1$. Вместо (4) на M -м шаге можно использовать решающее правило:

$$\begin{cases} \text{принять } H_0, \text{ если } \gamma \leq 0, \\ \text{принять } H_1, \text{ если } \gamma > 0. \end{cases} \quad (16)$$

Теорема 4. В рамках модели наблюдений (12) для последовательного теста (2), (3), (16) справедливы следующие неравенства:

$$P_0(\gamma \leq 0) \leq P_0(\Lambda_M \leq 0), \quad P_1(\gamma > 0) \leq P_1(\Lambda_M > 0).$$

Доказательство. Достаточно показать, что $\gamma \in \mathcal{D}(M)$. Действительно, при справедливой гипотезе $H_k (k = 0, 1)$ статистика γ имеет нормальное распределение с параметрами:

$$E^{(0)}(\gamma) = -(\theta^0 - \theta^1)^T (\theta^0 - \theta^1), \quad E^{(1)}(\gamma) = (\theta^0 - \theta^1)^T (\theta^0 - \theta^1),$$

$$D(\gamma) = 4\sigma^2 (\theta^0 - \theta^1)^T (A^T A)^{-1} (\theta^0 - \theta^1).$$

$$\text{Отсюда } P_0(\gamma \leq 0) = P_1(\gamma > 0) = \Phi\left(\frac{(\theta^0 - \theta^1)^T (\theta^0 - \theta^1)}{2\sigma\sqrt{(\theta^0 - \theta^1)^T (A^T A)^{-1} (\theta^0 - \theta^1)}}\right).$$

Кроме того,

$$\gamma = 2(\theta^1 - \theta^0)^T \hat{\theta} + (\theta^0)^T \theta^0 - (\theta^1)^T \theta^1 = 2(\theta^1 - \theta^0)^T (A^T A)^{-1} A^T X_M + (\theta^0)^T \theta^0 - (\theta^1)^T \theta^1,$$

т. е. существуют $b \in \mathbb{R}^M$, $c \in \mathbb{R}$ такие, что $\gamma = b^T X_M + c$. Теорема доказана.

Результаты компьютерных экспериментов

Рассмотрим модель наблюдений (12) и гипотезы (1) для следующего случая:

$$m = 4, \sigma = 1, \theta^0 = (1; 1,5; 1; 2)^T, \theta^1 = (1, 1, 1, 1)^T, \psi(t) = \left(\frac{1}{t+1}, \frac{t}{50}, \frac{t^2}{10}, \frac{1}{t} \right)^T.$$

Обозначим оценки величины $P_0(N \leq M)$ методом Монте-Карло, нижнюю и верхнюю границы для $P_0(N \leq M)$ в следствии 1 – через \hat{p}_0 , \hat{p}_L , \hat{p}_U соответственно. Количество повторений в методе Монте-Карло равно 100 000. Численные результаты приведены в табл. 1 при справедливости гипотезы H_0 , $\alpha_0 = \beta_0 = 0,1$.

Таблица 1

Нижние и верхние границы для $P_0(N \leq M)$

Table 1

Lower and upper bounds for $P_0(N \leq M)$

| M | \hat{p}_L | \hat{p}_0 | \hat{p}_U |
|-----|-------------|-------------|-------------|
| 20 | 0,273 10 | 0,352 21 | 0,401 66 |
| 25 | 0,331 95 | 0,427 33 | 0,498 85 |
| 30 | 0,402 35 | 0,513 68 | 0,608 79 |
| 35 | 0,481 28 | 0,609 72 | 0,725 20 |
| 40 | 0,564 09 | 0,699 79 | 0,839 00 |

В табл. 1 значение \hat{p}_0 всегда находится в интервале (\hat{p}_L, \hat{p}_U) . Когда M увеличивается, все значения \hat{p}_0 , \hat{p}_L , \hat{p}_U возрастают – увеличивается вероятность завершения теста без усечения.

Обозначим приближения значений α_M , β_M , вычисленные по формулам (11), через $\bar{\alpha}_M$, $\bar{\beta}_M$ соответственно. Метод Монте-Карло использован для вычисления p_- , p_+ . Оценки методом Монте-Карло $(\hat{\alpha}_M, \hat{\beta}_M)$ и приближительные значения $(\bar{\alpha}_M, \bar{\beta}_M)$ для α_M , β_M представлены в табл. 2 при $\alpha_0 = 0,01$, $\beta_0 = 0,05$.

Таблица 2

Аппроксимация вероятностей ошибок первого и второго рода

Table 2

Error type I and II probabilities approximation

| M | $\hat{\alpha}_M$ | $\bar{\alpha}_M$ | $\hat{\beta}_M$ | $\bar{\beta}_M$ |
|-----|------------------|------------------|-----------------|-----------------|
| 20 | 0,224 88 | 0,224 77 | 0,223 45 | 0,224 38 |
| 25 | 0,206 71 | 0,206 62 | 0,207 03 | 0,208 31 |
| 30 | 0,186 61 | 0,186 80 | 0,187 26 | 0,189 63 |
| 35 | 0,165 72 | 0,165 96 | 0,164 55 | 0,167 42 |

Из табл. 2 видно, что приближенные значения $\bar{\alpha}_M$, $\bar{\beta}_M$ близки к их оценкам методом Монте-Карло. Это показывает, что формулы в замечании 2 дают приемлемое приближение для α_M , β_M .

Библиографические ссылки

1. Wald A. Sequential analysis. New York : John Wiley and Sons, 1947.
2. Харин А. Ю. Робастность байесовских и последовательных статистических решающих правил. Минск : БГУ, 2013.
3. Govindarajulu Z. Sequential statistics. Singapore : World Sci. Publ., 2004.

4. Kharin A., Kishylau D. Robust sequential testing of hypotheses on discrete probability distributions // *Austrian J. Stat.* 2005. Vol. 34, № 2. P. 153–162. DOI: 10.17713/ajs.v34i2.408.
5. Kharin A. Y. Performance and robustness evaluation in sequential hypotheses testing // *Commun. in Stat. – Theory and Methods.* 2016. Vol. 45, issue 6. P. 1693–1709. DOI: 10.1080/03610926.2014.944659.
6. Galinskij V., Kharin A. On minimax robustness of Bayesian statistical prediction // *Prob. Theory Math. Stat.* Vilnius : TEV, 1999. P. 259–266.
7. Kharin A. Y. Robust Bayesian prediction under distortions of prior and conditional distributions // *J. Math. Sci.* 2005. Vol. 126, issue 1. P. 992–997. DOI: 10.1007/PL00021966.
8. Харин А. Ю., Тон Т. Т. Последовательная статистическая проверка гипотез о параметрах временных рядов с трендом при пропусках наблюдений // *Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук.* 2016. № 3. С. 38–46.
9. Kharin A., Ton That Tu. Performance and robustness analysis of sequential hypotheses testing for time series with trend // *Austrian J. Stat.* 2017. Vol. 46, № 3–4. P. 23–36. DOI: 10.17713/ajs.v46i3-4.668.
10. Rao C. R. *Linear statistical inference and its applications.* New York : Wiley, 1965.
11. Kounias E. G. Bounds for the probability of a union, with applications // *Ann. Math. Stat.* 1968. Vol. 39, № 6. P. 2154–2158.
12. Bilodeau M., Brenner D. *Theory of multivariate statistics.* New York : Springer ; Verlag, 1999.
13. Hunter D. An upper bound for the probability of a union // *J. Appl. Probab.* 1976. Vol. 13, issue 3. P. 597–603. DOI: 10.2307/3212481.
14. Андерсон Т. *Статистический анализ временных рядов.* М. : Мир, 1976.
15. Coope I. D. On matrix trace inequalities and related topics for products of Hermitian matrices // *J. Math. Anal. Appl.* 1994. Vol. 188, issue 3. P. 999–1001. DOI: 10.1006/jmaa.1994.1475.

References

1. Wald A. *Sequential analysis.* New York : John Wiley and Sons, 1947.
2. Kharin A. Y. Robastnost' baiesovskikh i posledovatel'nykh statisticheskikh reshayushchikh pravil [Robustness of Bayesian and sequential statistical decision rules]. Minsk : BSU, 2013 (in Russ.).
3. Govindarajulu Z. *Sequential statistics.* Singapore : World Sci. Publ., 2004.
4. Kharin A., Kishylau D. Robust sequential testing of hypotheses on discrete probability distributions. *Austrian J. Stat.* 2005. Vol. 34, No. 2. P. 153–162. DOI: 10.17713/ajs.v34i2.408.
5. Kharin A. Y. Performance and robustness evaluation in sequential hypotheses testing. *Commun. in Stat. – Theory and Methods.* 2016. Vol. 45, issue 6. P. 1693–1709. DOI: 10.1080/03610926.2014.944659.
6. Galinskij V., Kharin A. On minimax robustness of Bayesian statistical prediction. *Prob. Theory Math. Stat.* Vilnius : TEV, 1999. P. 259–266.
7. Kharin A. Y. Robust Bayesian prediction under distortions of prior and conditional distributions. *J. Math. Sci.* 2005. Vol. 126, issue 1. P. 992–997. DOI: 10.1007/PL00021966.
8. Kharin A. Y., Ton T. T. [Sequential statistical hypotheses testing on parameters of time series with trend under missing values]. *Proc. of the Natl. Acad. of Sci. of Belarus. Phys.-math. ser.* 2016. No. 3. P. 38–46 (in Russ.).
9. Kharin A., Ton That Tu. Performance and robustness analysis of sequential hypotheses testing for time series with trend. *Austrian J. Stat.* 2017. Vol. 46, No. 3–4. P. 23–36. DOI: 10.17713/ajs.v46i3-4.668.
10. Rao C. R. *Linear statistical inference and its applications.* New York : Wiley, 1965.
11. Kounias E. G. Bounds for the probability of a union, with applications. *Ann. Math. Stat.* 1968. Vol. 39, No. 6. P. 2154–2158.
12. Bilodeau M., Brenner D. *Theory of multivariate statistics.* New York : Springer ; Verlag, 1999.
13. Hunter D. An upper bound for the probability of a union. *J. Appl. Probab.* 1976. Vol. 13, issue 3. P. 597–603. DOI: 10.2307/3212481.
14. Anderson T. *Statisticheskii analiz vremennykh ryadov* [Statistical analysis of time series]. Moscow : Mir, 1976 (in Russ.).
15. Coope I. D. On matrix trace inequalities and related topics for products of Hermitian matrices. *J. Math. Anal. Appl.* 1994. Vol. 188, issue 3. P. 999–1001. DOI: 10.1006/jmaa.1994.1475.

Статья поступила в редакцию 02.11.2017.
Received by editorial board 02.11.2017.

МЕХАНИКА

ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

MECHANICS

OF DEFORMABLE SOLIDS

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННЫМИ ОСНОВАНИЯМИ

В. В. КОРОЛЕВИЧ¹⁾, Д. Г. МЕДВЕДЕВ²⁾

¹⁾Международный центр современного образования, Štěpánská, 704/61, PSČ 110 00, г. Прага, Чехия

²⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Приводится решение неосесимметричной стационарной задачи теплопроводности для профилированных полярно-ортоотропных кольцевых пластин с теплоизолированными основаниями. Учитывается зависимость теплофизических характеристик материала пластины от температуры. Задаются значения температур на контурах кольцевой пластины: на внутреннем контуре – постоянная температура T_0^* , а на внешнем контуре на нескольких дугах длиной l_i ($i = \overline{1, k}$) – температура T_i^* ($T_i^* > T_0^*$). Распределение температур в такой пластине будет неосесимметричным. Предполагается, что радиальный, λ_r , и тангенциальный, λ_θ , коэффициенты теплопроводности линейно зависят от температуры $T(r, \theta)$:

$$\lambda_r(T) = \lambda_r^{(0)}(1 - \gamma T(r, \theta)), \quad \lambda_\theta(T) = \lambda_\theta^{(0)}(1 - \gamma T(r, \theta)),$$

Образец цитирования:

Королевич В. В., Медведев Д. Г. Решение неосесимметричной стационарной задачи теплопроводности для полярно-ортоотропной кольцевой пластины переменной толщины с теплоизолированными основаниями // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 77–87.

For citation:

Karalevich U. V., Medvedev D. G. The solution of the nonaxisymmetric stationary problem of heat conduction for the polar-orthotropic annular plate of variable thickness with thermal insulated bases. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2018. No. 1. P. 77–87 (in Russ.).

Авторы:

Владимир Васильевич Королевич – преподаватель.
Дмитрий Георгиевич Медведев – кандидат физико-математических наук, доцент; декан механико-математического факультета.

Authors:

Uladzimir V. Karalevich, lecturer.
v.korolevich@mail.ru
Dmitrij G. Medvedev, PhD (physics and mathematics), docent; dean of the faculty of mechanics and mathematics.
medvedev@bsu.by

где параметр $\gamma > 1$; постоянные $\lambda_r^{(0)}, \lambda_\theta^{(0)}$ определяются экспериментально при начальной температуре T_0 . При введении в рассмотрение новой функции $Z(r, \theta) = \left[T(r, \theta) - \frac{\gamma}{2} T^2(r, \theta) \right]$ исходное нелинейное дифференциальное уравнение теплопроводности приводится к линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка в частных производных.

Ключевые слова: композиционный материал; температура; полярно-ортотропная кольцевая пластина; стационарное уравнение теплопроводности; дифференциальное уравнение; интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода; резольвента; квадратное уравнение; пластина степенного профиля; коническая пластина; пластина экспоненциального профиля.

THE SOLUTION OF THE NONAXISYMMETRIC STATIONARY PROBLEM OF HEAT CONDUCTION FOR THE POLAR-ORTHOTROPIC ANNULAR PLATE OF VARIABLE THICKNESS WITH THERMAL INSULATED BASES

U. V. KARALEVICH^a, D. G. MEDVEDEV^b

^aInternational Center of Modern Education, 704/61 Štěpánská, Prague PSČ 110 00, Czech

^bBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: D. G. Medvedev (medvedev@bsu.by)

In the work is given the solution of nonaxisymmetric stationary heat conduction problem for profiled polar-orthotropic annular plates with thermally insulated bases. The dependence of the thermophysical characteristics of the plate material of the temperature is taken into account. Temperature values are set on the contours of the annular plate: temperature T_0^* is constant on the internal contour, and on the outer contour on several arcs with length l_i ($i = \overline{1, k}$) – temperature is T_1^* ($T_1^* > T_0^*$). The temperature distribution in such a plate is nonaxisymmetric. It is assumed that the radial λ_r and tangential λ_θ heat conduction coefficients are linearly dependent on the temperature $T(r, \theta)$:

$$\lambda_r(T) = \lambda_r^{(0)}(1 - \gamma T(r, \theta)), \quad \lambda_\theta(T) = \lambda_\theta^{(0)}(1 - \gamma T(r, \theta)),$$

here the parameter $\gamma > 1$; the constants $\lambda_r^{(0)}, \lambda_\theta^{(0)}$ are determined experimentally at the primary temperature T_0 . The primary nonlinear differential heat equation is reduced to a linear differential equation of the 2nd kind in partial derivatives when a new function $Z(r, \theta) = \left[T(r, \theta) - \frac{\gamma}{2} T^2(r, \theta) \right]$ is introduced in consideration.

Key words: composite material; temperature; polar-orthotropic annular plate; stationary heat conduction equation; differential equation; Volterra integral equation of the 2nd kind; resolvent; quadratic equation; plate of power profile; conical plate; plate of exponential profile.

Введение

В современном энергетическом оборудовании, машиностроительных и авиакосмических конструкциях, аппаратах пищевой и химической промышленности широко применяются кольцевые пластины из анизотропных материалов. Часто они могут находиться в неоднородных тепловых полях. Это приведет к дополнительным, так называемым температурным напряжениям в анизотропных кольцевых пластинах, которые необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации указанных конструкций.

Постановка задачи

Рассматривается кольцевая пластина, толщина $h(r)$ которой изменяется вдоль радиуса r по заданному закону. Пластина изготовлена из материала, обладающего цилиндрической анизотропией, причем ось анизотропии совпадает с геометрической осью пластины, и в каждой точке которой имеются три взаимно ортогональные плоскости упругой симметрии.

Пусть на внутреннем контуре (при $r = r_0$) пластины поддерживается постоянная температура T_0^* , а на внешнем контуре (при $r = R$) на нескольких дугах длиной l_i ($i = \overline{1, k}$) – температура T_1^* ($T_1^* > T_0^*$). Основания кольцевой пластины при $z = \pm \frac{h}{2}$ теплоизолированы. Внутренних источников тепла в пластине не имеется. Тепловое поле в такой анизотропной пластине в общем случае будет неосесимметричным.

В настоящей работе исследуется распределение температуры в полярно-ортотропных кольцевых пластинах переменной толщины с теплоизолированными основаниями с учетом зависимости теплофизических характеристик материала пластин от температуры.

Решение задачи

Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z , поместив начало в точке пересечения оси анизотропии со срединной плоскостью пластины.

Уравнение стационарной теплопроводности для полярно-ортотропной пластины переменной толщины с теплоизолированными основаниями имеет вид [1–2]

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_r(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \left(\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r} \right) \cdot \left(\lambda_r(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_\theta(T) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (1)$$

Предположим, что радиальный, λ_r , и тангенциальный, λ_θ , коэффициенты теплопроводности линейно зависят от температуры T [3]:

$$\lambda_r(T) = \lambda_r^{(0)} (1 - \gamma T(r, \theta)), \quad \lambda_\theta(T) = \lambda_\theta^{(0)} (1 - \gamma T(r, \theta)), \quad (2)$$

где параметр $\gamma > 1$; постоянные $\lambda_r^{(0)}$, $\lambda_\theta^{(0)}$ определяются экспериментально при начальной температуре T_0 .

Подстановка выражений (2) в уравнение (1) приводит к следующему однородному нелинейному дифференциальному уравнению 2-го порядка в частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left((1 - \gamma T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \left(\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r} \right) \cdot \left((1 - \gamma T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left((1 - \gamma T) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (3)$$

Введем в рассмотрение новую функцию

$$Z(r, \theta) = \left[T(r, \theta) - \frac{\gamma}{2} T^2(r, \theta) \right]. \quad (4)$$

Уравнение (3) сведется к линейному дифференциальному уравнению для новой функции $Z(r, \theta)$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \left(\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} = 0. \quad (5)$$

Разложим функцию $Z(r, \theta)$ в тригонометрический ряд Фурье

$$Z(r, \theta) = Z_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n^{(1)}(r) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n^{(2)}(r) \sin n\theta. \quad (6)$$

Первое слагаемое в разложении функции $Z(r, \theta)$ учитывает ее осесимметричную составляющую. Слагаемые, содержащие $\cos n\theta$, соответствуют симметричным составляющим функции $Z(r, \theta)$ относительно плоскости $\theta = 0$, а слагаемые, содержащие $\sin n\theta$, – наоборот симметричным.

Подставляя разложение (6) в уравнение (5), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для компонент $Z_0(r)$, $Z_n^{(i)}(r)$ ($i = 1, 2$)

$$\left\{ \begin{array}{l} (n=0) \quad \frac{d^2 Z_0}{dr^2} + \left(\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r} \right) \frac{dZ_0}{dr} = 0, \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (n \geq 1) \quad \frac{d^2 Z_n^{(i)}}{dr^2} + \left(\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r} \right) \frac{dZ_n^{(i)}}{dr} - \frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}} \cdot \frac{n^2}{r^2} Z_n^{(i)}(r) = 0. \end{array} \right. \quad (8)$$

Первое дифференциальное уравнение (7) системы, описывающее осесимметричное распределение температуры в полярно-ортотропной кольцевой пластине переменной толщины с теплоизолированными основаниями, нами подробно исследовалось в работе [4]. Его решение есть

$$Z_0(r) = C_1^{(0)} \int_{r_0}^r \frac{ds}{sh(s)} + C_2^{(0)}, \quad (9)$$

где $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}$ – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий.

Найдем решения второго дифференциального уравнения (8) системы для некоторых частных случаев.

1. Кольцевая пластина степенного профиля.

Профиль такой пластины задается выражением $h(r) = h_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, где h_0 – толщина пластины на внутреннем контуре (при $r = r_0$). Дифференцируя функцию $h(r)$ и подставляя в уравнение (8), получим однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами вида

$$\frac{d^2 Z_n^{(i)}}{dr^2} + \frac{(1-\alpha)}{r} \frac{dZ_n^{(i)}}{dr} - \frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}} \cdot \frac{n^2}{r^2} Z_n^{(i)}(r) = 0. \quad (10)$$

Введем новую переменную $t = \ln r$. Тогда дифференциальное уравнение (10) сведется к обыкновенному дифференциальному уравнению 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2 Z_n^{(i)}}{dt^2} - \alpha \frac{dZ_n^{(i)}}{dt} - n^2 \frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}} \cdot Z_n^{(i)}(t) = 0. \quad (11)$$

Характеристическое уравнение для однородного дифференциального уравнения (11) есть

$$k^2 - \alpha k - n^2 \frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}} = 0.$$

Корни этого квадратного уравнения равны

$$\begin{cases} k_1(n) = \frac{1}{2} \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4n^2 \frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}}} \right), \\ k_2(n) = \frac{1}{2} \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4n^2 \frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}}} \right). \end{cases}$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения (11) есть

$$Z_n^{(i)}(t) = C_{n,1}^{(i)} \cdot e^{k_1(n)t} + C_{n,2}^{(i)} \cdot e^{k_2(n)t},$$

где $C_{n,1}^{(i)}, C_{n,2}^{(i)}$ – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий.

При переходе к старой переменной r решение дифференциального уравнения (10) будет следующим:

$$Z_n^{(i)}(r) = C_{n,1}^{(i)} \cdot r^{k_1(n)} + C_{n,2}^{(i)} \cdot r^{k_2(n)}. \quad (12)$$

2. Кольцевая пластина конического профиля.

Профили конических кольцевых пластин или пластин прямолинейного профиля задаются формулой $h(r) = h_0^* \left(1 - \frac{r}{R_1} \right)$, где h_0^* – толщина пластины в центре (при $r = 0$); R_1 – радиус окружности пересечения образующих конуса ($R \leq R_1$). Дифференцируя функцию $h(r)$ и подставляя в уравнение (8), получим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2 Z_n^{(i)}}{dr^2} + \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1 \left(1 - \frac{r}{R_1} \right)} \right] \frac{dZ_n^{(i)}}{dr} - \frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}} \cdot \frac{n^2}{r^2} Z_n^{(i)}(r) = 0. \quad (13)$$

Введем новую переменную $x = \frac{r}{R_1}$. Тогда уравнение (13) приведет к виду

$$x^2(1-x)\frac{d^2 Z_n^{(i)}}{dx^2} + (1-2x)x\frac{dZ_n^{(i)}}{dx} - n^2 \frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}} Z_n^{(i)}(x) = 0. \quad (14)$$

В результате замены [5]

$$Z_n^{(i)}(x) = x^{\lambda_n} W_n^{(i)}(x),$$

где $\lambda_n = n \sqrt{\frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}}}$, дифференциальное уравнение (14) сводится к гипергеометрическому уравнению

$$x(1-x)\frac{d^2 W_n^{(i)}}{dx^2} + [c_n - (a_n + b_n + 1)x]\frac{dW_n^{(i)}}{dx} - a_n b_n \cdot W_n^{(i)}(x) = 0.$$

Здесь параметры a_n, b_n, c_n равны

$$a_n = \lambda_n + 1, b_n = \lambda_n, c_n = 2\lambda_n + 1.$$

В окрестности точки $x = 0$ решение дифференциального уравнения (14) выражается в гипергеометрических функциях:

1) при $c_n \neq 1, 2, 3, \dots$

$$Z_n^{(i)}(x) = \tilde{C}_{n;1}^{(i)} \cdot x^{\lambda_n} F(a_n, b_n; c_n; x) + \tilde{C}_{n;2}^{(i)} \cdot x^{\lambda_n + 1 - c_n} F(a_n + 1 - c_n, b_n + 1 - c_n; 2 - c_n; x);$$

2) при $c_n = 1 + k_n$ ($k_n = 1, 2, 3, \dots$)

$$Z_n^{(i)}(x) = \tilde{C}_{n;1}^{(i)} \cdot x^{\lambda_n} F(a_n, b_n; 1 + k_n; x) + \tilde{C}_{n;2}^{(i)} \cdot x^{\lambda_n} \Phi(a_n, b_n; 1 + k_n; x),$$

где $k_n = 2n \sqrt{\frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}}}$; $F(a, b; c; x)$, $\Phi(a, b; c; x)$ – гипергеометрические функции 1-го и 2-го родов соответственно, выражаемые степенными рядами [6]. Произвольные постоянные $\tilde{C}_{n;1}^{(i)}$, $\tilde{C}_{n;2}^{(i)}$ определяются из граничных условий.

В старой переменной r решение дифференциального уравнения (13) есть

1) при $c_n \neq 1, 2, 3, \dots$

$$Z_n^{(i)}(r) = \tilde{C}_{n;1}^{(i)} \cdot \left(\frac{r}{R_1}\right)^{\lambda_n} \cdot F\left(a_n, b_n; c_n; \frac{r}{R_1}\right) + \tilde{C}_{n;2}^{(i)} \cdot \left(\frac{r}{R_1}\right)^{\lambda_n + 1 - c_n} \cdot F\left(a_n + 1 - c_n, b_n + 1 - c_n; 2 - c_n; \frac{r}{R_1}\right);$$

2) при $c_n = 1 + k_n$ ($k_n = 1, 2, 3, \dots$)

$$Z_n^{(i)}(r) = \tilde{C}_{n;1}^{(i)} \cdot x^{\lambda_n} F\left(a_n, b_n; 1 + k_n; \frac{r}{R_1}\right) + \tilde{C}_{n;2}^{(i)} \cdot \left(\frac{r}{R_1}\right)^{\lambda_n} \cdot \Phi\left(a_n, b_n; 1 + k_n; \frac{r}{R_1}\right).$$

3. Кольцевая пластина экспоненциального профиля.

Профиль экспоненциальных кольцевых пластин задается выражением $h(r) = h_0^* e^{\beta \left(\frac{r}{R}\right)}$, где $\beta = \ln\left(\frac{h_1}{h_0^*}\right) < 0$, $\beta \in (-\infty, 0)$; h_0^* – толщина пластины в центре (при $r = 0$). Дифференцируя функцию $h(r)$ и подставляя в уравнение (8), получим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2 Z_n^{(i)}}{dr^2} + \left(\frac{\beta}{R} + \frac{1}{r}\right) \frac{dZ_n^{(i)}}{dr} - \frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}} \cdot \frac{n^2}{r^2} Z_n^{(i)}(r) = 0. \quad (15)$$

Умножая обе части уравнения (15) на r^2 , получим следующее выражение:

$$r^2 \frac{d^2 Z_n^{(i)}}{dr^2} + \left(1 + \beta \frac{r}{R}\right) r \frac{dZ_n^{(i)}}{dr} - n^2 \frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}} \cdot Z_n^{(i)}(r) = 0. \quad (16)$$

Введем новую переменную $\xi = -\beta \left(\frac{r}{R}\right)$. Тогда дифференциальное уравнение (16) примет вид

$$\xi^2 \frac{d^2 Z_n^{(i)}}{d\xi^2} + (1 - \xi) \xi \frac{dZ_n^{(i)}}{d\xi} - n^2 \frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}} \cdot Z_n^{(i)}(\xi) = 0. \quad (17)$$

Сделаем замену

$$Z_n^{(i)}(\xi) = \xi^{\lambda_n} V_n^{(i)}(\xi),$$

где $\lambda_n = n \sqrt{\frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}}}$, приведем дифференциальное уравнение (17) к вырожденному гипергеометрическому уравнению

$$\xi \frac{d^2 V_n^{(i)}}{d\xi^2} + (c_n - \xi) \frac{dV_n^{(i)}}{d\xi} - b_n V_n^{(i)}(\xi) = 0.$$

Здесь параметры b_n, c_n следующие:

$$b_n = \lambda_n, \quad c_n = 2\lambda_n + 1.$$

Решение дифференциального уравнения (17) выражается в вырожденных гипергеометрических функциях:

1) при $c_n \neq 1, 2, 3, \dots$

$$Z_n^{(i)}(\xi) = \hat{C}_{n;1}^{(i)} \cdot \xi^{\lambda_n} {}_1F_1(b_n; c_n; \xi) + \hat{C}_{n;2}^{(i)} \cdot \xi^{\lambda_n+1-c_n} {}_1F_1(b_n+1-c_n; 2-c_n; \xi);$$

2) при $c_n = 1 + k_n$ ($k_n = 1, 2, 3, \dots$) и одновременно $b_n = s_n$ ($s_n = 1, 2, 3, \dots, k_n$)

$$Z_n^{(i)}(\xi) = \hat{C}_{n;1}^{(i)} \cdot \xi^{\lambda_n} {}_1F_1(s_n; 1+k_n; \xi) + \hat{C}_{n;2}^{(i)} \cdot \xi^{\lambda_n} {}_1F_1(s_n-k_n; 1-k_n; \xi),$$

где $k_n = 2n \sqrt{\frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}}}$; ${}_1F_1(b_n; c_n; \xi)$ – вырожденная гипергеометрическая функция 2-го порядка, выражаемая степенным рядом [6]. Произвольные постоянные $\hat{C}_{n;1}^{(i)}, \hat{C}_{n;2}^{(i)}$ определяются из граничных условий.

Возвращаясь к старой переменной r , запишем решение дифференциального уравнения (16):

1) при $c_n \neq 1, 2, 3, \dots$

$$Z_n^{(i)}(r) = \hat{C}_{n;1}^{(i)} \cdot \left(-\beta \left(\frac{r}{R}\right)\right)^{\lambda_n} \cdot {}_1F_1\left(b_n; c_n; \left(-\beta \left(\frac{r}{R}\right)\right)\right) + \hat{C}_{n;2}^{(i)} \cdot \left(-\beta \left(\frac{r}{R}\right)\right)^{\lambda_n+1-c_n} \times \\ \times {}_1F_1\left(b_n+1-c_n; 2-c_n; \left(-\beta \left(\frac{r}{R}\right)\right)\right);$$

2) при $c_n = 1 + k_n$ ($k_n = 1, 2, 3, \dots$) и одновременно $b_n = s_n$ ($s_n = 1, 2, 3, \dots, k_n$)

$$Z_n^{(i)}(r) = \hat{C}_{n;1}^{(i)} \cdot \left(-\beta \left(\frac{r}{R}\right)\right)^{\lambda_n} \cdot {}_1F_1\left(s_n; 1+k_n; \left(-\beta \left(\frac{r}{R}\right)\right)\right) + \hat{C}_{n;2}^{(i)} \cdot \left(-\beta \left(\frac{r}{R}\right)\right)^{\lambda_n} \times \\ \times {}_1F_1\left(s_n-k_n; 1-k_n; \left(-\beta \left(\frac{r}{R}\right)\right)\right).$$

4. Для произвольного профиля анизотропной кольцевой пластины получим общее решение уравнения (8) с помощью интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода.

Для этого полагаем

$$\frac{d^2 Z_n^{(i)}}{dr^2} = \eta_n^{(i)}(r). \quad (18)$$

Последовательно интегрируя выражение (18), получим

$$\frac{dZ_n^{(i)}}{dr} = \int_{r_0}^r \eta_n^{(i)}(s) ds + \dot{Z}_n^{(i)}(r_0), \quad Z_n^{(i)}(r) = \int_{r_0}^r (r-s) \eta_n^{(i)}(s) ds + \dot{Z}_n^{(i)}(r_0)(r-r_0) + Z_n^{(i)}(r_0). \quad (19)$$

Здесь использовалась формула Дирихле

$$\underbrace{\int_{r_0}^r dr_1 \int_{r_0}^{r_1} dr_2 \dots \int_{r_0}^{r_{n-1}} \eta_n^{(i)}(r_n) dr_n}_{n \text{ раз}} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{r_0}^r (r-s)^{n-1} \eta_n^{(i)}(s) ds.$$

Подставляя во второе уравнение (8) системы вместо компонент $Z_n^{(i)}(r)$ и их производных правые части выражений (18), (19), получим искомое линейное интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода

$$\eta_n^{(i)}(r) = \lambda \int_{r_0}^r K_n(r, s) \eta_n^{(i)}(s) ds + f_n^{(i)}(r), \quad (20)$$

где числовой параметр $\lambda = -1$; $K_n(r, s) = \left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r} \right) - \frac{\lambda_\theta^{(0)}}{\lambda_r^{(0)}} \frac{n^2}{r^2} (r-s) \right]$ – ядро интегрального уравнения; $f_n^{(i)}(r) = \frac{\partial K_n(r, s)}{\partial s} Y_n^{(i)}(r_0) - K_n(r, r_0) \dot{Y}_n^{(i)}(r_0)$ – свободный член интегрального уравнения.

Общее решение линейного интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода (20) записывается с помощью *резольвенты* $R_n(r, s; \lambda)$ в виде [7]

$$\eta_n^{(i)}(r) = \lambda \int_{r_0}^r R_n(r, s; \lambda) f_n^{(i)}(s) ds + f_n^{(i)}(r). \quad (21)$$

Здесь функция $R_n(r, s; \lambda)$ определяется функциональным рядом

$$R_n(r, s; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_{n, m+1}(r, s),$$

который для непрерывных ядер $K_{n, m}(r, s)$ сходится абсолютно и равномерно.

Повторяющиеся, или итерированные ядра $K_{n, m}(r, s)$, определяются по следующим рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} K_{n,1}(r, s) &= K_n(r, s), \\ K_{n,2}(r, s) &= \int_s^r K_n(r, t) K_{n,1}(t, s) dt, \\ &\dots \\ K_{n,m}(r, s) &= \int_s^r K_n(r, t) K_{n, m-1}(t, s) dt. \end{aligned}$$

Если свободный член $f_n^{(i)}(r)$ непрерывен в $[r_0, R]$, а ядро $K_n(r, s)$ непрерывно при $r_0 \leq r \leq R, r_0 \leq s \leq r$, то линейное интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода (20) имеет при любом параметре λ ($\lambda \neq 0$) единственное непрерывное решение, определяемое формулой (21).

Отметим, что интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода можно решать и другими аналитическими и численными методами, указанными, например, в работе [8].

Запишем общее решение дифференциального уравнения (5) через разрешающие функции $\eta_n^{(i)}(r)$ ($i = 1, 2$):

$$Z(r, \theta) = \left(C_1^{(0)} \int_{r_0}^r \frac{ds}{sh(s)} + C_2^{(0)} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{r_0}^r (r-s) \eta_n^{(1)}(s) ds + \dot{Z}_n^{(1)}(r_0)(r-r_0) + Z_n^{(1)}(r_0) \right] \cos n\theta + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{r_0}^r (r-s) \eta_n^{(2)}(s) ds + \dot{Z}_n^{(2)}(r_0)(r-r_0) + Z_n^{(2)}(r_0) \right] \sin n\theta. \quad (22)$$

Возвращаясь к формуле (4), получим квадратное уравнение для распределения температуры в профилированной анизотропной кольцевой пластине с теплоизолированными основаниями

$$T^2(r, \theta) - \frac{2}{\gamma} T(r, \theta) + \frac{2}{\gamma} Z(r, \theta) = 0.$$

Оно имеет два решения:

$$T(r, \theta) = \frac{1}{\gamma} \left[1 \pm \sqrt{1 - 2\gamma Z(r, \theta)} \right]. \quad (23)$$

Запишем формулу (23) в следующем виде:

$$(\gamma T(r, \theta) - 1) = \pm \sqrt{1 - 2\gamma \cdot Z(r, \theta)}. \quad (24)$$

Анализируя формулу (24), получим два следующих варианта распределения температуры в профилированной анизотропной кольцевой пластине в зависимости от значения параметра γ :

$$1) \text{ если } T_1^* < \frac{1}{\gamma}, \text{ то } T(r, \theta) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\gamma \cdot Z(r, \theta)}}{\gamma}; \quad (25)$$

$$2) \text{ если } T_1^* \geq \frac{1}{\gamma}, \text{ то } T(r, \theta) = \frac{1 + \sqrt{1 - 2\gamma \cdot Z(r, \theta)}}{\gamma},$$

где функция $Z(r, \theta)$ определяется формулой (22).

В заключение рассмотрим пример расчета температурного поля в полярно-ортотропной кольцевой пластине степенного профиля, на внутреннем контуре которой поддерживается постоянная температура T_0^* , а на внешнем контуре по концам диаметра пластины приложены два точечных источника тепла с температурой T_1^* каждый.

Заменяем точечные источники тепла распределенной тепловой нагрузкой интенсивностью q , приложенной по двум малым дугам одинаковой длины $l = \varphi R$:

$$q = \frac{T_1^*}{\varphi R} \text{ при } -\frac{\varphi}{2} \leq \theta \leq \frac{\varphi}{2} \text{ и } q = \frac{T_1^*}{\varphi R} \text{ при } \left(\pi - \frac{\varphi}{2} \right) \leq \theta \leq \left(\pi + \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$q = 0 \text{ при } \frac{\varphi}{2} < \theta < \left(\pi - \frac{\varphi}{2} \right) \text{ и } q = 0 \text{ при } \left(\pi + \frac{\varphi}{2} \right) < \theta < \left(2\pi - \frac{\varphi}{2} \right),$$

где φ – произвольный, сколь угодно малый центральный угол, опирающийся на дугу l .

Разложим тепловую нагрузку q в тригонометрический ряд Фурье по косинусам с четными номерами n , так как эта нагрузка симметрична относительно диаметра:

$$q(\theta) = \frac{q_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} q_{2n} \cos 2n\theta,$$

где

$$q_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} q(\varphi) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi/2} \frac{T_1^*}{\varphi R} d\theta + \frac{2}{\pi} \int_{\pi - (\varphi/2)}^{\pi} \frac{T_1^*}{\varphi R} d\theta = \frac{2T_1^*}{\pi\varphi R} \left(\frac{\varphi}{2} - 0 \right) + \frac{2T_1^*}{\pi\varphi R} \left(\pi - \left(\pi - \frac{\varphi}{2} \right) \right) = \frac{2T_1^*}{\pi R};$$

$$q_{2n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} q(\varphi) \cos 2n\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi/2} \frac{T_1^*}{\varphi R} \cos 2n\theta d\theta + \frac{2}{\pi} \int_{\pi - (\varphi/2)}^{\pi} \frac{T_1^*}{\varphi R} \cos 2n\theta d\theta = \frac{2T_1^*}{\pi\varphi R} \frac{1}{2n} (\sin n\varphi - \sin 0) + \\ + \frac{2T_1^*}{\pi\varphi R} \frac{1}{2n} \left(\sin 2n\pi - \sin 2n \left(\pi - \frac{\varphi}{2} \right) \right) = \frac{2T_1^*}{\pi R} \left(\frac{\sin n\varphi}{n\varphi} \right).$$

При $\varphi \rightarrow 0$ $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{\sin n\varphi}{n\varphi} \right) = 1$, то $q_{2n} = \frac{2T_1^*}{\pi R}$.

Следовательно,

$$q(\theta) = \frac{T(R, \theta)}{2\pi R} = \frac{T_1^*}{\pi R} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\theta \right).$$

Таким образом, распределение температуры $T(R, \theta)$ по внешнему краю кольцевой пластины задается выражением

$$T(R, \theta) = 2T_1^* \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\theta \right). \quad (26)$$

Ниже нам придется решать нелинейную алгебраическую задачу, поэтому для получения приближенного решения ограничимся, например, двенадцатой гармоникой в выражении (26):

$$T(R, \theta) \approx 2T_1^* \left(1 + 2 \sum_{n=1}^6 \cos 2n\theta \right).$$

По формуле (4) вычислим приближенно значение функции $Z(R, \theta)$:

$$\begin{aligned} Z(R, \theta) &= \left[T(R, \theta) - \frac{\gamma}{2} T^2(R, \theta) \right] \approx 2T_1^* \left[\left(1 + 2 \sum_{n=1}^6 \cos 2n\theta \right) - \gamma T_1^* \left(1 + 2 \sum_{n=1}^6 \cos 2n\theta \right)^2 \right] \approx \\ &\approx 2T_1^* \left[\left(1 - 13\gamma T_1^* \right) + 2 \sum_{n=1}^6 \left(1 - (13 - n) \cdot \gamma T_1^* \right) \cos 2n\theta \right]. \end{aligned}$$

Решение дифференциального уравнения (5) для кольцевой пластины со степенным профилем для рассматриваемой задачи (9), (12) есть

$$\begin{aligned} Z(r, \theta) &= Z_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} Z_{2n}(r) \cos 2n\theta = \left\{ \left[\frac{C_1^{(0)}}{\alpha h_0 r_0^\alpha} (r^\alpha - r_0^\alpha) + C_2^{(0)} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{2n,1}^{(1)} \cdot r^{k_1(2n)} + C_{2n,2}^{(1)} \cdot r^{k_2(2n)} \right) \times \right. \\ &\left. \times \cos 2n\theta \right\} \approx \left\{ \left[\frac{C_1^{(0)}}{\alpha h_0 r_0^\alpha} (r^\alpha - r_0^\alpha) + C_2^{(0)} \right] + \sum_{n=1}^6 \left(C_{2n,1}^{(1)} \cdot r^{k_1(2n)} + C_{2n,2}^{(1)} \cdot r^{k_2(2n)} \right) \cos 2n\theta \right\}. \quad (27) \end{aligned}$$

Постоянные $C_1^{(0)}$, $C_2^{(0)}$, $C_{2n,1}^{(1)}$, $C_{2n,2}^{(1)}$ определяются из граничных условий

$$\begin{cases} Z(r_0, \theta) = \left(T_0^* - \frac{\gamma}{2} T_0^{*2} \right), \\ Z(R, \theta) \approx 2T_1^* \left[\left(1 - 13\gamma T_1^* \right) + 2 \sum_{n=1}^6 \left(1 - (13 - n) \cdot \gamma T_1^* \right) \cos 2n\theta \right]. \end{cases} \quad (28)$$

Подставляя решение (27) в граничные условия (28), получим системы уравнений для неизвестных постоянных $C_1^{(0)}$, $C_2^{(0)}$, $C_{2n,1}^{(1)}$, $C_{2n,2}^{(1)}$:

$$\begin{cases} C_2^{(0)} = \left(T_0^* - \frac{\gamma}{2} T_0^{*2} \right), \\ \frac{C_1^{(0)}}{\alpha h_0 r_0^\alpha} (R^\alpha - r_0^\alpha) + C_2^{(0)} = 2T_1^* (1 - 13\gamma T_1^*); \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} C_{2n,1}^{(1)} \cdot r_0^{k_1(2n)} + C_{2n,2}^{(1)} \cdot r_0^{k_2(2n)} = 0, \\ C_{2n,1}^{(1)} \cdot R^{k_1(2n)} + C_{2n,2}^{(1)} \cdot R^{k_2(2n)} = 4T_1^* [1 - (13-n) \cdot \gamma T_1^*], \quad (n = \overline{1, 6}). \end{cases} \quad (30)$$

Решения систем уравнений (29), (30) есть

$$\begin{cases} C_1^{(0)} = \alpha h_0 r_0^\alpha \cdot \frac{\left[2T_1^* (1 - 13\gamma T_1^*) - T_0^* \left(1 - \frac{\gamma}{2} T_0^* \right) \right]}{(R^\alpha - r_0^\alpha)}, \\ C_2^{(0)} = T_0^* \left(1 - \frac{\gamma}{2} T_0^* \right); \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} C_{2n,1}^{(1)} = -4T_1^* [1 - (13-n) \cdot \gamma T_1^*] \cdot \frac{\delta^{k_2(2n)}}{(\delta^{k_1(2n)} - \delta^{k_2(2n)})} \frac{1}{R^{k_1(2n)}}, \\ C_{2n,2}^{(1)} = 4T_1^* [1 - (13-n) \cdot \gamma T_1^*] \cdot \frac{\delta^{k_1(2n)}}{(\delta^{k_1(2n)} - \delta^{k_2(2n)})} \frac{1}{R^{k_2(2n)}}. \end{cases} \quad (32)$$

Подставляя найденные выражения (31), (32) для постоянных $C_1^{(0)}$, $C_2^{(0)}$, $C_{2n,1}^{(1)}$, $C_{2n,2}^{(1)}$ в формулу (27) для функции $Z(r, \theta)$, получим

$$Z(r, \theta) \approx Z_0(r) + \sum_{n=1}^6 Z_{2n}(r) \cos 2n\theta,$$

где

$$Z_0(r) = \left\{ \frac{\left[2T_1^* (1 - 13\gamma T_1^*) - T_0^* \left(1 - \frac{\gamma}{2} T_0^* \right) \right]}{(1 - \delta^\alpha)} \left(\frac{r}{R} \right)^\alpha - \frac{\left[2T_1^* (1 - 13\gamma T_1^*) \delta^\alpha - T_0^* \left(1 - \frac{\gamma}{2} T_0^* \right) \right]}{(1 - \delta^\alpha)} \right\},$$

$$Z_{2n}(r) = -4T_1^* \frac{[1 - (13-n) \cdot \gamma T_1^*]}{[\delta^{k_1(2n)} - \delta^{k_2(2n)}]} \left[\delta^{k_2(2n)} \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^{k_1(2n)} - \delta^{k_1(2n)} \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^{k_2(2n)} \right], \quad (n = \overline{1, 6}).$$

Распределение температуры $T(r, \theta)$ в профилированной полярно-ортотропной кольцевой пластине задается уравнениями (25). Данное уравнение является нелинейным алгебраическим уравнением и решение его можно получить численными методами либо приближенно аналитически.

Найдем приближенное решение уравнения (25), учитывая, что в нашем случае $2\gamma Z(r, \theta) < 1$, $\forall r \in [r_0, R]$, разложив корень квадратный в ряд по малому параметру γ до 3-го порядка малости. В результате получим

$$T(r, \theta) \approx Z(r, \theta) + \frac{\gamma}{2} Z^2(r, \theta) + \frac{\gamma^2}{2} Z^3(r, \theta), \quad (34)$$

где $Z^2(r, \theta) = y_0(r) + \sum_{n=1}^6 y_{2n}(r) \cos 2n\theta$; $Z^3(r, \theta) = v_0(r) + \sum_{n=1}^6 v_{2n}(r) \cos 2n\theta$. Коэффициенты $y_0(r)$, $y_{2n}(r)$, $v_0(r)$, $v_{2n}(r)$ связаны с коэффициентами $Z_0(r)$, $Z_{2n}(r)$ сложными алгебраическими выражениями.

Случай с несимметричным расположением точечных источников тепла на внешнем контуре анизотропной пластины приводит к еще более сложному решению задачи стационарной теплопроводности и требует отдельного исследования.

Заключение

Зависимость теплофизических параметров композитного материала пластины от температуры $T(r, \theta)$ (2) может носить и более сложный характер, например квадратичная, экспоненциальная или логарифмическая зависимости. Ход решения остается таким же, как в настоящей работе, и только на конечном этапе для нахождения распределения температуры в анизотропной кольцевой пластине придется решать кубическое или трансцендентные уравнения для функции $T(r, \theta)$. Общим для всех случаев нелинейности является то, что распределение температуры $T(r, \theta)$ в анизотропных кольцевых пластинах является неосесимметричным.

Библиографические ссылки

1. Уздалев А. И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1967.
2. Уздалев А. И., Брюханова Е. Н. Уравнение теплопроводности для пластины переменной толщины с неоднородными теплофизическими свойствами // Задачи прикладной теории упругости : межвуз. научн. сб. Саратов : Саратов. политехн. ин-т, 1985. С. 3–7.
3. Дмитриенко Ю. И. Механика композиционных материалов при высоких температурах. М. : Машиностроение, 1997.
4. Каралевич В. В., Медведев Д. Г. Стационарные температурные поля в анизотропных кольцевых пластинах переменной толщины с теплоизолированными основаниями // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2016. № 3. С. 160–165.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1976.
6. Коваленко А. Д. Круглые пластинки переменной толщины. М. : Физматгиз, 1959.
7. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями. М. : КомКнига, 2007.
8. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы : справ. пособие. Киев : Наука, 1986.

References

1. Uzdalev A. I. Nekotorye zadachi termouprugosti anizotropnogo tela [Some problems of thermoelasticity of an anisotropic body]. Saratov : Publ. House of the Saratov Univ., 1967 (in Russ.).
2. Uzdalev A. I., Bryukhanova E. N. Equations of thermal conductivity for plates of variable thickness with inhomogeneous thermophysical properties. *Zadachi prikladnoi teorii uprugosti* [Problems of Applied Theory of Elasticity] : Interuniv. sci. collect. Saratov : Saratov Polytech. Inst., 1985. P. 3–7 (in Russ.).
3. Dmitrienko Y. I. Mekhanika kompozitsionnykh materialov pri vysokikh temperaturakh [Mechanics of composite materials at high temperatures]. Moscow : Mashinostroenie, 1997 (in Russ.).
4. Karalevich V. V., Medvedev D. G. Solution of the axisymmetric stationary problems of the heat conductivity for the polar-orthotropic ring plate of variable thickness with thermally insulated bases and with temperature dependent thermophysical characteristics. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2016. No. 3. P. 160–165 (in Russ.).
5. Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam [Reference book of ordinary differential equations]. Moscow : Nauka, 1976 (in Russ.).
6. Kovalenko A. D. Kruglye plastinki peremennoi tolshchiny [Round plates of variable thickness]. Moscow : Fizmatgiz, 1959 (in Russ.).
7. Krasnov M. L., Kisilev A. I., Makarenko G. I. Integral'nye uravneniya: zadachi i primery s podrobnymi resheniyami [Integral equations: problems and examples with detailed solutions]. Moscow : KomKniga, 2007 (in Russ.).
8. Verlan' A. F., Sizikov V. S. Integral'nye uravneniya: metody, algoritmy, programmy [Integral equations: methods, algorithms, programs]. Kiev : Nauka, 1986 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 27.10.2017.
Received by editorial board 27.10.2017.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

УДК 004.925.83

ГЛОБАЛЬНАЯ БАЛАНСИРОВКА ТРИАНГУЛЯЦИОННОЙ СЕТИ

Д. Д. ВАСИЛЬКОВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Предложен новый алгоритм балансировки триангуляционной сети, содержащей точки Штейнера, основанный на методе наименьших квадратов. Он минимизирует среднеквадратичное отклонение косинусов углов триангуляции от оптимального значения 0,5. Алгоритм не имеет ограничений, поэтому может быть применен к любым триангуляциям, полученным алгоритмами сгущения триангуляционной сети, например алгоритмами Рупперта или Эртена и Унгора, при этом он не увеличивает число точек, а также не нарушает реберных связей. Проведенные эксперименты показали, что предлагаемый алгоритм существенно повышает число углов в диапазоне от 50 до 70° и не приводит к появлению треугольников с существенно меньшими минимальными углами. Алгоритм может быть эффективно реализован с использованием специализированных программных пакетов, предназначенных для быстрого решения разреженных систем линейных уравнений методом наименьших квадратов, например SuiteSparse. Благодаря этому алгоритм является простым в реализации.

Ключевые слова: триангуляция; генерация сети; балансировка триангуляции; точки Штейнера; топология триангуляционной сети; метод наименьших квадратов; погрешность интерполяции.

Образец цитирования:

Васильков Д. Д. Глобальная балансировка триангуляционной сети // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 88–94.

For citation:

Vasilkov D. D. Global balancing of a triangular mesh. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2018. No. 1. P. 88–94 (in Russ.).

Автор:

Денис Дмитриевич Васильков – ассистент кафедры дискретной математики и алгоритмики факультета прикладной математики и информатики.

Author:

Denis D. Vasilkov, assistant at the department of discrete mathematics and algorithms, faculty of applied mathematics and computer science.
molibos@gmail.com

GLOBAL BALANCING OF A TRIANGULAR MESH

D. D. VASILKOV^a

^a*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

New algorithm for Steiner triangular mesh balancing is proposed. The algorithm is based on the least squares method and minimizes the standard deviation of triangulation angles cosines from the optimal value of 0.5. The algorithm has no limitations and therefore can be applied to any triangulations obtained by triangular mesh refinement algorithms, for example Ruppert or Erten and Üngör algorithms, without increasing the resulting number of points and without breaking the edge connections. Experiments indicate that the proposed algorithm significantly increases the number of angles in range from 50 to 70° and doesn't lead to create triangles with significantly smaller minimum angles. The algorithm can be effectively implemented using specialized software packages for quick solving sparse linear systems using the least-squares method, for example SuiteSparse. Therefore the algorithm is easy to implement.

Key words: triangulation; mesh generation; mesh refinement; Steiner points; triangular mesh topology; least squares method; interpolation error.

Рассмотрим задачу геометрического моделирования следующего вида. Дан набор точек $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ на горизонтальной плоскости с известными значениями высот, требуется построить поверхность F , проходящую через эти точки и обладающую определенными свойствами. Наиболее распространенный подход к решению этой общей задачи состоит в следующем [1]: на множестве P строится триангуляция по критерию Делоне, затем над каждым треугольником вычисляется фрагмент поверхности таким образом, чтобы объединение этих фрагментов давало в результате поверхность с необходимыми свойствами. Часто эти свойства формулируются в терминах оптимизационных задач, таких как интегральная кривизна поверхности или максимальный градиент, которые требуется минимизировать. В компьютерной графике в качестве критерия используется визуальная гладкость поверхности.

Несмотря на ряд полезных свойств, триангуляция Делоне, построенная на исходных точках, не всегда может использоваться для моделирования оптимальных поверхностей. Известно [2], что при ограниченной кривизне моделируемой поверхности погрешность линейной интерполяции определяется размером треугольника, тогда как погрешность градиента существенно зависит от его формы: углы, близкие к 60°, дают наименьшую погрешность, а углы, близкие к 0 или 180°, – наибольшую. На рис. 1, *a*, изображена триангуляция Делоне, содержащая множество «плохих» (т. е. остроугольных и тупоугольных) треугольников, что делает невозможным ее использование для построения оптимальных поверхностей.

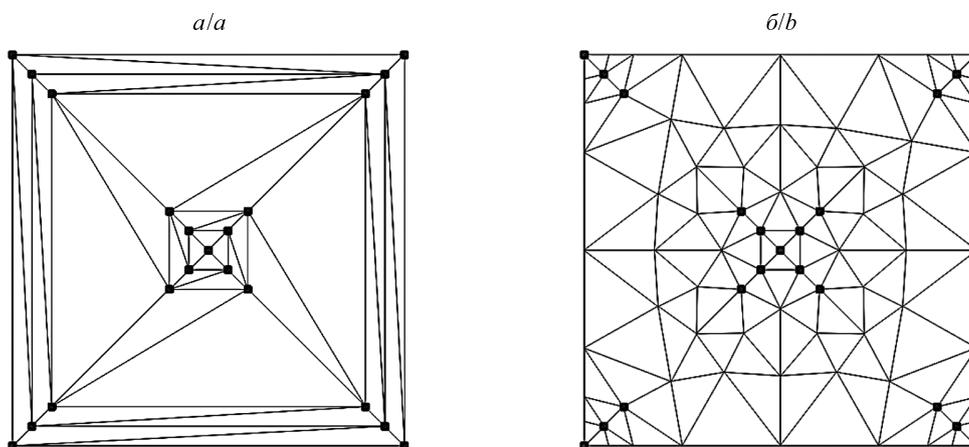


Рис. 1. Исходная триангуляция Делоне (*a*)
и триангуляция Делоне, содержащая точки Штейнера (*b*)

Fig. 1. Original Delaunay triangulation (*a*)
and Delaunay triangulation containing Steiner points (*b*)

Для оптимизации формы поверхности используется процедура сгущения (refinement) сети, которая состоит в добавлении в триангуляцию точек Штейнера (см. рис. 1, б). Предполагается, что в дальнейшем высоты в точках Штейнера должны быть каким-то образом аппроксимированы с учетом свойств, которые должна иметь поверхность. В работах [3; 4] предложены алгоритмы сгущения сети, которые последовательно вставляют точки Штейнера в определенные позиции и производят затем локальное перестроение триангуляции по критерию Делоне, разрушая «плохие» треугольники. Вставка повторяется до тех пор, пока все «плохие» треугольники не будут разрушены. Подобные процедуры, как правило, приводят к появлению большого числа новых точек, что делает трудоемким и неустойчивым процесс аппроксимации высот.

Альтернативный подход называется *балансировкой* сети и заключается в нахождении оптимального положения точек Штейнера уже после их вставки. В [5] предложен алгоритм, добавляющий точки Штейнера и одновременно оптимизирующий их положение в локальной области, что позволяет при вставке достаточно большого числа точек Штейнера построить триангуляцию с минимальным углом, не превосходящим 42° .

Предлагается использовать тот факт, что балансировку можно начинать в любой момент, например сразу после разрушения всех «плохих» треугольников в исходной триангуляции. Таким образом, при рассмотрении числа точек Штейнера в качестве входного параметра требуется найти такое местоположение этих точек, которое минимизирует среднее квадратическое отклонение углов треугольников от оптимального значения 60° . Такой подход позволяет существенно сократить число точек Штейнера и в целом упростить процесс построения поверхности.

В отличие от алгоритмов, основанных на локальных и итерационных схемах, в которых качество балансировки оценивается по значению минимального угла треугольников, в настоящей работе используются статистические оценки метода наименьших квадратов, которые являются оптимальными в классе линейных несмещенных оценок.

Глобальная балансировка

Пусть $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ – множество точек Штейнера триангуляции $T = \{V, E, F\}$, где $V = P \cup S$, E – множество ребер триангуляции; F – множество треугольников. Обозначим через $X(T)$ множество всех углов триангуляции T . Целью алгоритма является минимизация среднее квадратического отклонения углов триангуляции от оптимального значения 60° . Для упрощения заменим углы на их косинусы и рассмотрим функционал

$$A(T) = \sum_{\alpha \in X(T)} \left(\cos \alpha - \cos \frac{\pi}{3} \right)^2. \quad (1)$$

Сведем минимизацию функционала (1) к решению системы линейных уравнений с помощью метода наименьших квадратов. Запишем косинус угла α между вершинами p_1, p_0 и p_2 через скалярное произведение

$$\cos \alpha = \frac{(p_1 - p_0, p_2 - p_0)}{l_{01} l_{02}},$$

где $l_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$ – длина ребра (i, j) .

Представим векторы координат точек Штейнера в виде $\tilde{p} = p + \Delta p$, где $p = (x, y)$ – вектор координат, полученный в результате работы алгоритма сгущения; $\Delta p = (\Delta x, \Delta y)$ – неизвестная поправка. Для вершин P исходной триангуляции поправки равны нулю. Тогда углу $\angle p_1 p_0 p_2$ соответствует уравнение относительно поправок

$$\frac{p_1 + \Delta p_1 - p_0 - \Delta p_0, p_2 + \Delta p_2 - p_0 - \Delta p_0}{\tilde{l}_{01} \tilde{l}_{02}} = \cos \frac{\pi}{3}, \quad (2)$$

где $\tilde{l}_{ij} = \sqrt{(x_i + \Delta x_i - x_j - \Delta x_j)^2 + (y_i + \Delta y_i - y_j - \Delta y_j)^2}$.

Уравнение (2) не является линейным, поэтому применим линеаризацию: отбросим слагаемые, содержащие квадраты поправок, и проигнорируем зависимость длин ребер от поправок. Перенесем в правую часть свободные члены и получим

$$(a_0, \Delta p_0) + (a_1, \Delta p_1) + (a_2, \Delta p_2) = \cos \frac{\pi}{3} l_{01} l_{02} - (p_1 - p_0, p_2 - p_0), \quad (3)$$

где $a_0 = 2p_0 - p_1 - p_2$; $a_1 = p_2 - p_0$; $a_2 = p_1 - p_0$.

Таким образом, получаем линейную систему относительно поправок Δp , состоящую из уравнений (3). Подобные системы решаются методом наименьших квадратов за несколько итераций. После каждой итерации в точки вносятся найденные поправки и уточняются коэффициенты уравнений (3).

Однако вычислительные эксперименты показали, что при неравномерном распределении точек метод ведет себя неустойчиво. После нескольких итераций разрушается триангуляционная структура, точки Штейнера выходят за пределы своего окружения, происходят пересечения ребер. Причиной этого является внесение больших поправок в вершины больших треугольников, имеющих общие вершины с треугольниками значительно меньшего размера. Иными словами, для приближения угла большого треугольника к оптимальному значению 60° требуется внесение большей поправки, чем для треугольника меньшего размера. Во избежание этого каждому уравнению необходимо сопоставить некоторый вес, который уравнивал бы невязки в уравнениях для подобных треугольников.

Рассмотрим два подобных треугольника $p_1 p_0 p_2$ и $p_3 p_0 p_4$ с коэффициентом подобия s и общей точкой p_0 (рис. 2). Не теряя общности, предположим, что точка p_0 совпадает с началом координат. Тогда

$$p_3 = sR p_1,$$

$$p_4 = sR p_2,$$

где R – матрица поворота, совмещающая соответствующие стороны треугольников. Выпишем оба уравнения вида (3) для вершины p_0 :

$$(\Delta p_0, (-p_1 - p_2)) = \cos \frac{\pi}{3} |p_1| |p_2| - (p_1, p_2), \quad (4)$$

$$(\Delta p_0, sR(-p_1 - p_2)) = \cos \frac{\pi}{3} |sR p_1| |sR p_2| - (sR p_1, sR p_2). \quad (5)$$

Ортогональная матрица R не изменяет длины векторов p_1 и p_2 , поэтому уравнение (5) можно переписать в следующем виде:

$$(\Delta p_0, (-p_3 - p_4)) = s^2 \left(\cos \frac{\pi}{3} |p_1| |p_2| - (p_1, p_2) \right). \quad (6)$$

Таким образом, чтобы сбалансировать невязки уравнений (4) и (6), необходимо разделить уравнение (6) на s^2 – квадрат коэффициента подобия или разделить оба уравнения на площади соответствующих треугольников. С учетом этих весов функционал (1) следует заменить на функционал вида

$$A'(T) = \sum_{\alpha \in X} \frac{1}{S_\alpha} \left(\cos \alpha - \cos \frac{\pi}{3} \right)^2,$$

где S_α – площадь треугольника, содержащего угол α .

Вычислительные эксперименты показали, что в обновленной системе уравнений приемлемый уровень сходимости метода наименьших квадратов достигается после трех-четырёх итераций. Система является сильно разреженной, поэтому решение можно найти при помощи эффективных методов, например LSQR [6]. Использование специализированных пакетов, таких как SuiteSparse [7], позволяет выполнить балансировку сети, содержащей 10 000 точек Штейнера, за одну-две секунды.

Такое увеличение быстродействия алгоритма решения системы линейных уравнений достигается за счет возможности распараллеливания вычислений при помощи многопоточной реализации. Также указанная библиотека позволяет производить эффективную передачу вычислительной нагрузки на современные видеокарты. Предлагаемый метод балансировки является простым в программной реализации и не требует использования сложных структур данных, однако в качестве минуса данного подхода можно отметить дополнительное использование памяти для хранения коэффициентов уравнений системы.

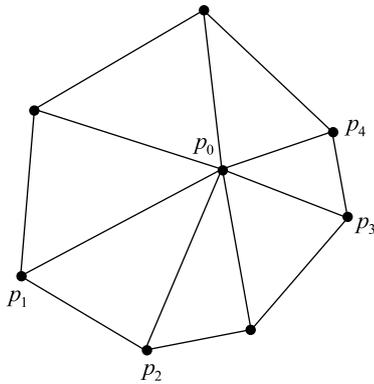


Рис. 2. Подобные треугольники с общей вершиной p_0
Fig. 2. Similar triangles with common vertex p_0

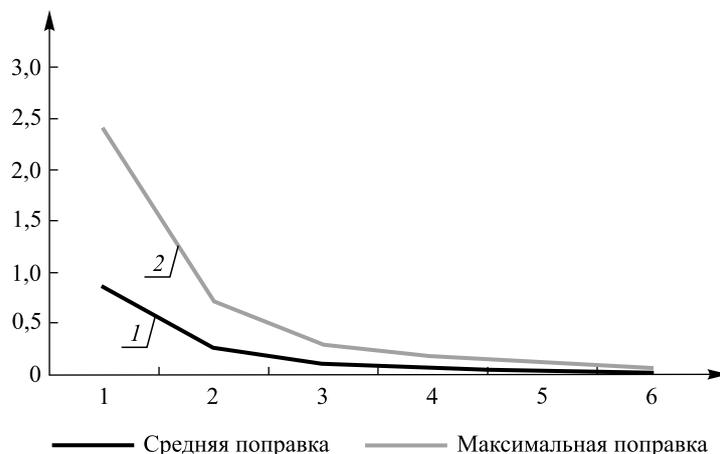


Рис. 3. График зависимости величины поправки от числа итераций на триангуляции из 500 точек в квадрате 100×100 : величины средней поправки (1) и максимальной поправки (2) после k -й итерации

Fig. 3. Graph of the dependence of the correction value on the number of iterations on triangulation of 500 points in a square of 100 per 100: the average (1) and maximum (2) corrections after the k -th iteration

Плюсом данного подхода является сохранение связей в сети: корректируются только координаты вершин, в то время как итеративные локальные подходы изменяют валентности вершин и реберные связи. Предлагаемый метод может быть использован в качестве дополнения к любому алгоритму вставки точек Штейнера без всяких ограничений.

Эксперименты и анализ результатов

Для характеристики результата работы алгоритма предлагается использовать гистограмму углов сети. В отличие от оценки минимального угла, который предлагается в работах [3–5], такой способ является статистическим и отражает качество углов триангуляции в среднем.

Результат работы алгоритма на триангуляции, полученной с помощью алгоритма Рупперта, представлен на рис. 4. Для наглядности был взят набор из малого числа вершин.

Сравнение распределения углов триангуляции до балансировки и после нее на случайных наборах из 300 и 900 точек соответственно приведено на рис. 5 и 6. На гистограммах видно, что распределение углов после балансировки близко к нормальному.

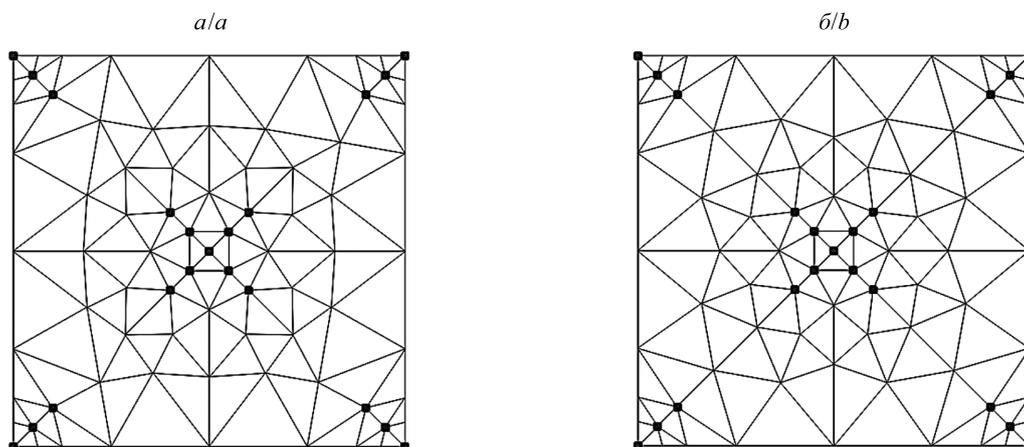


Рис. 4. Триангуляция, полученная алгоритмом Рупперта (а), и триангуляция после балансировки (б)

Fig. 4. Triangulation obtained by the Ruppert algorithm (a), and triangulation obtained after balancing (b)

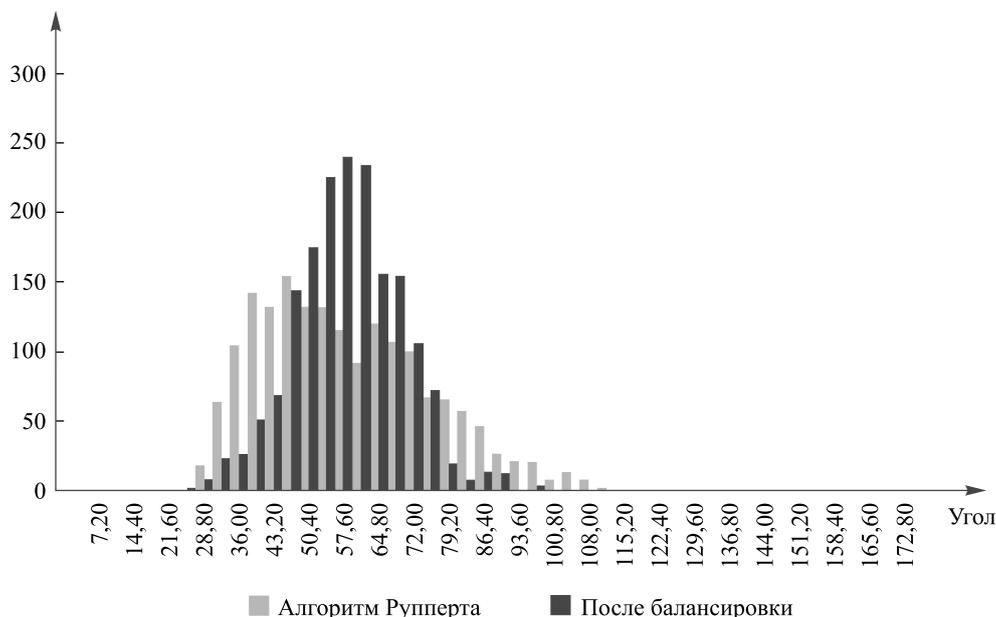


Рис. 5. Гистограмма углов на триангуляции, содержащей 300 точек: углы триангуляции до балансировки на наборе из 300 точек (светлый цвет) и после нее (темный цвет)

Fig. 5. Angle histogram of trinagulation containing 300 points: angles of triangulation before balancing on a set of 300 points (light) and after it (dark)

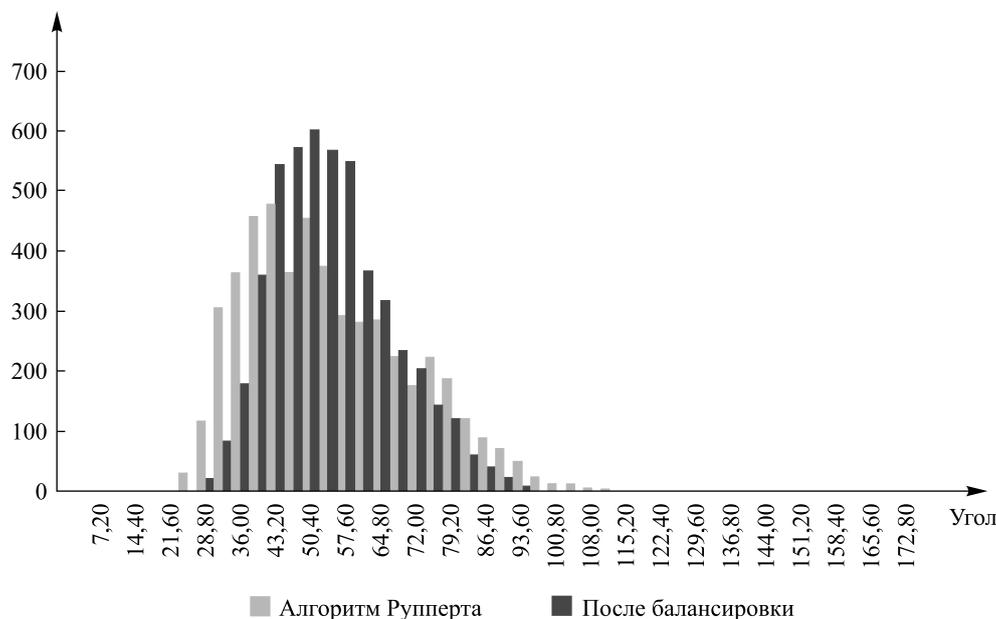


Рис. 6. Гистограмма углов на триангуляции, содержащей 900 точек: углы триангуляции до балансировки на наборе из 900 точек (светлый цвет) и после нее (темный цвет)

Fig. 6. Angle histogram of trinagulation containing 900 points: angles of triangulation before balancing on a set of 900 points (light) and after it (dark)

В экспериментах, проведенных на различных данных, число углов в диапазоне от 50° до 70° в триангуляции после балансировки составляет около 75–80 %, в то время как в оригинальных триангуляциях доля таких углов составляла менее 50 %. Выявлено также, что алгоритм не приводит к уменьшению минимального угла триангуляции на величины больше 5° .

Библиографические ссылки

1. Farin G. Curves and surfaces for CAGD. 4th ed. San Diego : Acad. Press, 1997.
2. Shewchuk J. R. What is a good linear finite element? // 11th International Meshing Roundtable (New York, 15–18 Sept., 2002). New York : Ithaca, 2002. P. 115–126.
3. Paul Chew L. Guaranteed-quality mesh generation for curved surfaces // Proceedings of the Ninth Annual Symposium on Computational Geometry (San Diego, 18–21 May, 1993). New York : ACM, 1993. P. 274–280.
4. Ruppert J. A Delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation // J. Algorithms. 1995. Vol. 18, issue 3. P. 548–585. DOI: 10.1006/jagm.1995.1021.
5. Erten H., Üngör A. Triangulations with locally optimal steiner points // Eurographics Symposium on Geometry Processing (Barcelona, 4–6 July, 2007). Barcelona, 2007. P. 1–10.
6. Paige C. C., Saunders M. A. LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares // ACM Trans. Math. Soft. 1982. Vol. 8, issue 1. P. 43–71. DOI: 10.1145/355984.355989.
7. Rennich S., Stosic D., Davis T. A. Accelerating sparse cholesky factorization on GPUs // Architectures and Algorithms : IA³ Seventh Workshop on Irregul. Appl. (Denver, 13 Novemb., 2017). New Orleans, 2014.

References

1. Farin G. Curves and surfaces for CAGD. 4th ed. San Diego : Acad. Press, 1997.
2. Shewchuk J. R. What is a good linear finite element? In: 11th International Meshing Roundtable (New York, 15–18 Sept., 2002). New York : Ithaca, 2002. P. 115–126.
3. Paul Chew L. Guaranteed-quality mesh generation for curved surfaces. In: *Proceedings of the Ninth Annual Symposium on Computational Geometry* (San Diego, 18–21 May, 1993). New York : ACM, 1993. P. 274–280.
4. Ruppert J. A Delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation. *J. Algorithms*. 1995. Vol. 18, issue 3. P. 548–585. DOI: 10.1006/jagm.1995.1021.
5. Erten H., Üngör A. Triangulations with locally optimal steiner points. In: *Eurographics Symposium on Geometry Processing* (Barcelona, 4–6 July, 2007). Barcelona, 2007. P. 1–10.
6. Paige C. C., Saunders M. A. LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares. *ACM Trans. Math. Soft.* 1982. Vol. 8, issue 1. P. 43–71. DOI: 10.1145/355984.355989.
7. Rennich S., Stosic D., Davis T. A. Accelerating sparse cholesky factorization on GPUs. *Architectures and Algorithms : IA³ Seventh Workshop on Irregul. Appl.* (Denver, 13 Novemb., 2017). New Orleans, 2014.

Статья поступила в редакцию 07.06.2017.
Received by editorial board 07.06.2017.

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

INFORMATICS, COMPUTER SCIENCE AND MANAGEMENT

УДК 528.854

ОБРАБОТКА МИКРОСКОПИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ВОЛОКОН ДЛЯ АНАЛИЗА СТРУКТУРЫ ДРЕВЕСИНЫ

О. В. НЕДЗЬВЕДЬ¹⁾, С. В. АБЛАМЕЙКО²⁾, К. Р. ХАДЖИ-МАНИЧ³⁾, А. САВИЧ³⁾

¹⁾Белорусский государственный медицинский университет, пр. Дзержинского, 83, 220116, г. Минск, Беларусь

²⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

³⁾Институт мультидисциплинарных исследований Белградского университета,
бульвар Стефана, 142, 11060, г. Белград, Сербия

Предложен алгоритм анализа смещения волокон и изменения структуры древесины при деформации. Представленный алгоритм предназначен для определения изменений в структуре клеток растений, испытывающих стресс, и изучения механических свойств волокон. Алгоритм основан на определении сдвига между слоями при помощи вычисления оптических потоков для последовательности статичных микроскопических изображений. Применение оптических потоков в данном случае дает возможность выявить особенности структурной деформации в объеме тканей растений. Алгоритм состоит из двух частей, что обуславливает ускорение вычислительного

Образец цитирования:

Недзьведь О. В., Абламейко С. В., Хаджи-Манич К. Р., Савич А. Обработка микроскопических изображений волокон для анализа структуры древесины // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 95–104.

For citation:

Nedzvedz O. V., Ablameyko S. V., Hadži-Manić K. R., Savić A. Microscopic images processing for the wood structure analysis. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2018. No. 1. P. 95–104 (in Russ.).

Авторы:

Ольга Валерьевна Недзьведь – старший преподаватель кафедры медицинской и биологической физики фармацевтического факультета.

Сергей Владимирович Абламейко – академик НАН Беларуси, доктор технических наук, профессор; профессор кафедры информационных систем управления факультета прикладной математики и информатики.

Ксения Радотич Хаджи-Манич – кандидат наук (биофизика растений и биохимия); профессор кафедры естественных наук.

Александр Савич – кандидат наук (физическая химия); научный сотрудник кафедры естественных наук.

Authors:

Olga V. Nedzvedz, senior lecturer at the department of medical and biological physics, pharmacy faculty.

olga_nedzved@tut.by

Sergey V. Ablameyko, academician of the National Academy of Sciences of Belarus, doctor of science (engineering), full professor; professor at the department of information systems management, faculty of applied mathematics and computer science.

ablameyko@bsu.by

Ksenija R. Hadži-Manić, PhD (plant biophysics and biochemistry); professor at the department of natural sciences.

xradotic@gmail.com

Aleksandar Savić, PhD (physical chemistry); researcher at the department of natural sciences.

asavic@imsi.rs

процесса за счет параллельных вычислений. Результатом работы алгоритма является построение векторных полей оптического потока в трехмерном пространстве. Использование трех различных типов изображений позволяет определить деформацию, химический сдвиг и поворот волокон. По результатам работы алгоритма можно оценить физиологические процессы, происходящие в деформированной ткани растения, а также проконтролировать результат работы математического моделирования.

Ключевые слова: оптический поток; микроскопические изображения; анализ структуры древесины.

Благодарность. Работа поддержана грантом 173017 Министерства образования, науки и технологий Республики Сербии. Изображения для анализа предоставлены Институтом междисциплинарных исследований (IMSI) Белградского университета (Сербия) и Институтом биологии растений Венгерской академии наук как результат выполнения проекта «Структурная анизотропия клеточных стенок растений различного происхождения и их составных полимеров с использованием дифференциально-поляризованной лазерной сканирующей микроскопии (DP-LSM)». Описанный алгоритм разработан в рамках двустороннего проекта «Расширенный анализ микроскопических изображений в биологии и медицине», выполняемого IMSI и Институтом проблем информатики НАН Беларуси. Авторы выражают благодарность за предоставленные изображения и материалы Александре Митрович, Елене Богданович-Пристовой и Ясне Симонович из IMSI и Габору Штайнбаху из Центра биологических исследований Венгерской академии наук (Сегед).

MICROSCOPIC IMAGES PROCESSING FOR THE WOOD STRUCTURE ANALYSIS

O. V. NEDZVEDZ^a, S. V. ABLAMEYKO^b, K. R. HADŽI-MANIĆ^c, A. SAVIĆ^c

^a*Belarusian State Medical University, 83 Dzierżyńska Avenue, Minsk 220116, Belarus*

^b*Belarusian State University, 4 Niezależności Avenue, Minsk 220030, Belarus*

^c*Institute for Multidisciplinary Research, University of Belgrade,
142 Stefana Bulevar, Belgrad 11060, Serbia*

Corresponding author: O. V. Nedzvedz (olga_nedzved@tut.by)

An algorithm for analysis of wood fibers displacement and changes of the wood structure during deformation is proposed. This algorithm is intended for determination of changes in the structure of plant cells under stress and for study the mechanical properties of fibers. The algorithm is based on determination of the shift between layers by calculation of the optical flows for a sequence of static microscopic images. The use of optical flows allows to identify the particular features of structural deformation within the volume of plant tissues. The algorithm consists of two parts, which makes it possible to accelerate the computational process through parallel computations. The result of the algorithm is the construction of vector fields of the optical flow in three-dimensional space. Using three different types of images allows to determine the deformation, chemical shift and rotation of the fibers. The results of the algorithm allow to evaluate the physiological processes occurring in the deformed tissue of the plant and check the result of mathematical modeling.

Key words: optical flow; microscopic image; analysis of the wood structure.

Acknowledgements. This work was supported by grant 173017 from the Ministry of Education, Science and Technology of the Republic of Serbia. Images for analysis were provided by the Institute for Multidisciplinary Research (IMSI) of the University of Belgrade (Serbia) and the Institute of Plant Biology of the Hungarian Academy of Sciences as a result of the implementation of the project «Structural anisotropy of the plant cell walls of various origin and their constituent polymers, using differential-polarized laser scanning microscopy (DP-LSM)». The proposed algorithm was developed within the project «Advanced image analysis on micron scale in biology and medicine» between Belarus and Serbia, carried out by IMSI of the University of Belgrade (Serbia) and the United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus. Authors are grateful for the images and materials provided by Dr. Aleksandra Mitrovic, Dr. Jelena Bogdanovic-Pristov and Ms Jasna Simonovic of IMSI, and Dr. Gabor Steinbach of Biological Research Centre (Szeged).

Введение

Воздействие на растения различных абиотических факторов, таких как резкое изменение температуры, избыток или дефицит влаги, загрязнение почвы промышленными отходами, вызывает у растений ответную реакцию, которую принято называть стрессом. К стрессовым реакциям относится и механическая деформация, в процессе которой изменяются механические и химические свойства, а также морфология клеточных стенок волокон древесины [1; 2].

В настоящее время существует потребность в усовершенствовании методик для анализа микроскопических изображений деформированных волокон древесины в целях изучения распределения целлюлозы и лигнина в клеточных стенках древесины, что позволит лучше понять механические свойства волокон. В настоящей работе предложен алгоритм для анализа сжатия волокон древесины на основе определения изменения направления и структуры ее волокон при механической деформации.

Использование метода оптического потока позволяет быстро проанализировать смещение слоев древесины при деформации. Визуальное представление в виде цветного пространства или непосредственно в виде векторного поля значительно облегчает восприятие изменений в ткани. Комплексное использование различных видов микроскопии позволяет получить более полную информацию о структуре и ориентации волокон, а также определить функционально-морфологические изменения в клетках.

Особенности структуры волокон древесины при деформации на микроскопических изображениях

Основной объем мягкой древесины состоит из клеток, называемых волокнами или трахеидами. Эти полые клетки включают просвет, окруженный клеточной стенкой, строение которой определяет механические свойства клетки. Одним из основных компонентов клеточных стенок является целлюлоза, причем ее содержание в волокне изменяется в ходе роста растения. Другой важный компонент клеточных стенок – лигнин – представляет собой сложное полимерное соединение, характеризующее степень одревеснения стенки растительной клетки. Лигнин повышает прочность клеточной стенки и волокон древесины в целом.

Макромолекулы целлюлозы и лигнина в клеточных стенках организованы в микро- и макрофибриллы, состоящие из нескольких связанных между собой макромолекул. Физические и химические свойства клеточной стенки зависят от взаимного расположения микро- и макрофибрилл, структура которых неоднородна. На некоторых участках молекулы целлюлозы ориентированы параллельно друг другу, на других их расположение не упорядочено.

В результате стресса происходит изменение структуры волокон древесины, заметное на микроскопических изображениях. Отдельные клетки при этом также претерпевают деформацию, степень которой отличается для других клеток и зависит от их расположения. В деформированных клетках по сравнению с нормальными изменяется распределение лигнина в клеточных стенках и повышается степень одревеснения клеточных стенок [2].

Получение и подготовка изображений среза растений

Исходные объемные многослойные изображения были получены путем объединения микроскопических изображений последовательных срезов ствола растения, выполненных на микротоме через каждые 100 мкм. Каждый слой является отдельным полутоновым изображением [3].

Анализ изменения структуры ткани растения выполняется в трехмерном пространстве, так как деформация происходит во всех направлениях.

Изображения хранятся в базе данных в формате RGB (красный, зеленый и синий каналы), при этом каждому каналу соответствует изображение, которое обеспечивает оптическая, флуоресцентная и поляризационная микроскопия соответственно. После извлечения изображения разделяют и обрабатывают по отдельности.

Каналу В соответствует микроскопическое изображение, полученное при помощи светового микроскопа. Предел разрешения такого микроскопа достигает 0,2 мкм. Микроскопическое изображение позволяет изучить строение и слоистую структуру клеточной стенки, ее целлюлозный каркас, а также дает возможность исследовать изменение структуры клеточной стенки в результате деформации.

Изображение, соответствующее каналу G, создается при помощи поляризационного микроскопа. Изображения, полученные в поляризованном свете, позволяют изучать оптически анизотропные структуры, обладающие упорядоченной ориентацией и способные вращать плоскость поляризации. С помощью поляризационного микроскопа можно исследовать, например, расположение микро- и макрофибрилл целлюлозы в клеточной стенке растений, а также изменение их ориентации в процессе деформации, поскольку волокна целлюлозы оптически анизотропны и их оптические свойства изменяются в зависимости от ориентации относительно плоскости поляризации падающего света.

Исследуемые объекты в поляризационном микроскопе выглядят светящимися на темном фоне, причем яркость объекта на изображении зависит от угла поворота волокна по отношению к плоскости поляризации падающего света.

Каналу R соответствует изображение флуоресцентной микроскопии, которое позволяет сделать видимым распределение лигнина и целлюлозы в волокнах, так как они обладают флуоресцентными

свойствами. Флуоресценция препарата или введенного в него красителя возбуждается за счет освещения его синим или ультрафиолетовым светом, после чего веществом излучается свет большей длины волны. Флуоресцентная микроскопия может рассматриваться как метод контрастирования, она позволяет в сложном препарате визуализировать структуры, которые не видны в обычном световом микроскопе. Изображение представляет светящиеся объекты на темном фоне, яркость которых зависит от химического состава вещества. Флуоресцентная микроскопия позволяет исследовать структуру и функции клеточных микроструктур, определять функционально-морфологические изменения клеток, проводить количественную оценку физико-химических параметров внутриклеточной среды.

Таким образом, для дальнейшего анализа выполняется разделение исходного изображения на три канала (рис. 1).

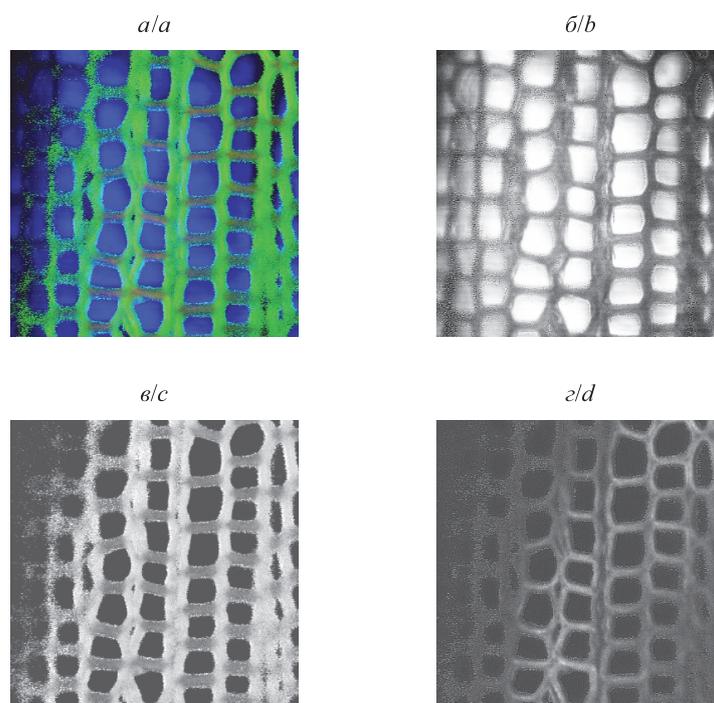


Рис. 1. Разделение изображения по каналам:
a – исходное изображение; *b* – изображение оптической микроскопии;
в – изображение флуоресцентной микроскопии;
г – изображение поляризационной микроскопии

Fig. 1. Splitting an image into channels:
a – the original image; *b* – image of optical microscopy;
c – an image of fluorescence microscopy; *d* – image of polarization microscopy

Сегментация изображений

Визуальный анализ изображений показывает, что на них видны в основном клеточные стенки. Таким образом, периодически расположенные на изображении полости не являются информативными при изучении деформации, поэтому при автоматизации анализа изображений их необходимо исключить. Целью сегментации в алгоритме, представленном в работе, является получение бинарной маски для определения областей, в которых будет проводиться анализ деформации.

Для получения изображений структуры среза ствола использовалась сегментация методом Отсу [3]. Данный алгоритм является оптимальным в связи с тем, что он определяет порог яркости по ее энтропии.

На любом оптическом изображении можно выделить постоянную компоненту (фон) и динамическую компоненту, которая изменяется при смене объектов или смещении камеры. Для получения реального откорректированного изображения прежде всего необходимо определить постоянную компоненту, которая содержит большинство постоянных дефектов и искажений. Существует проблема неоднородного фона, которая может быть решена с помощью определения порога в локальной области для каждого пикселя изображения, однако это требует больших временных затрат. Более быстрым является метод коррекции фона, но для него требуется предварительная подготовка изображения одного фона и калибровка микроскопа. Оба способа могут использоваться для решения данной задачи.

В простейшем случае изображение фона получается при помощи снимка пустого предметного стекла без объекта. В других случаях для построения изображения фона используются частотное преобразование Фурье и низкочастотная фильтрация, так как объекты и фон обычно разнесены в частотном спектре изображения. Низкочастотная фильтрация использует линейное ослабление сигнала относительно всего частотного диапазона за счет умножения каждой частоты на коэффициент C , который является функцией отклонения текущего значения частоты от максимального значения:

$$C(f) = \frac{f_{\max} - f}{f_{\max} - f_0},$$

где f_0 – минимальная частота; f_{\max} – максимальная частота.

Для получения изображения, наиболее близкого фону, выполняется низкочастотная фильтрация с максимальной частотой, составляющей в данном случае 6 % от всего спектрального диапазона.

В связи с тем что характеристики фона зависят от освещения, для калибровки использовались изображения с минимальным и максимальным освещением. Затем была выполнена традиционная операция коррекции фона [5; 6]:

$$C_{x,y} = \frac{(I_{x,y} - B_{x,y}) \cdot (W_{\max} - B_{x,y})}{W_{x,y} - B_{x,y}},$$

где $I_{x,y}$ – значение яркости пикселя исходного изображения; $B_{x,y}$ – значение пикселя для изображения фона; $W_{x,y}$ – значение пикселя для изображения фона при полном освещении; W_{\max} – мода в гистограмме яркости; $C_{x,y}$ – новое значение яркости пикселя в скорректированном изображении.

Подобная обработка позволяет скорректировать aberrации, обусловленные строением оптической системы микроскопа и ее неравномерным освещением.

Сегментация выполняется на цветном изображении в целях удаления участков, являющихся неинформативными на всех трех каналах. Для сегментации использовался метод Отсу [3], который заключается в переборе порогов с последующим определением оптимального порога. Цель метода состоит в том, чтобы выбрать порог, который минимизирует отношение объединенной дисперсии к дисперсии между классами, определяемыми разбиением гистограммы на участки по этому порогу. Общая дисперсия определяется как

$$\sigma_{\text{within}}^2(T) = n_B(T) \cdot \sigma_B^2(T) + n_0(T) \cdot \sigma_0^2(T),$$

где $n_B(T)$, $n_0(T)$ – количество элементов в классах; $\sigma_B^2(T)$, $\sigma_0^2(T)$ – дисперсия внутри классов; T – порог.

В результате получается изображение с большим набором разнотипных объектов. Для их классификации проводится определение геометрических свойств, и объекты, не попадающие в определенный интервал геометрических характеристик, удаляются (рис. 2, б). Дефекты формы объектов корректируются посредством морфологических операций открытия и замыкания (open/close) (см. рис. 2, в).

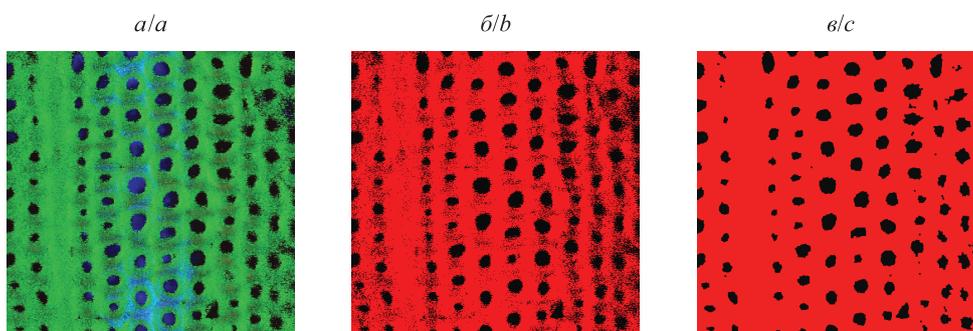


Рис. 2. Выделение информативных участков на изображении:
а – исходное изображение; б – результат сегментации методом Отсу;
в – результат коррекции формы методами математической морфологии

Fig. 2. Selection of informative areas in the image:
а – the original image; б – the result of segmentation by the Otsu method;
с – the result of correction of the form by methods of mathematical morphology

Анализ деформации

Для дальнейшего анализа изображения был разработан обобщенный алгоритм деформации. Изображения разделялись по каналам, так как каждый канал содержит уникальную информацию. Для описания деформации анализировалось смещение слоев древесины относительно друг друга посредством построения поля оптического потока. Обычно методы оптического потока применяются для анализа движения в видеопоследовательности, но в данном случае поток вычислялся между двумя статическими изображениями, которые соответствовали последовательным слоям микроскопического препарата в трехмерном пространстве.

Существуют различные методы вычисления оптических потоков. В целях получения более точного результата для дальнейшего анализа в работе были применены алгоритм Лукаса – Канаде и блочный метод [7–9]. При использовании первого метода информация о потоке определяется для окрестности каждой точки изображения, поэтому ее выгодно представить в виде вектора в цветном пространстве, где цвет характеризует направление вектора, а яркость – его величину. Цвет отображается посредством трех координат, чаще всего RGB. В цветовом пространстве каждому вектору оптического потока соответствует определенный цвет. Второй метод обеспечивает возможность непосредственного представления вектора смещения на изображении.

Оптический поток был рассчитан отдельно по каждому из трех каналов для изображений оптической, поляризационной и флуоресцентной микроскопии.

Построение оптического потока для канала В отражает изменение яркостно-геометрических характеристик между текущим и предыдущим изображением и, соответственно, позволяет оценить геометрическое смещение структуры клеточной стенки, ее целлюлозного каркаса при деформации. В результате было получено трехмерное представление оптического потока, отражающего деформацию между слоями (рис. 3).

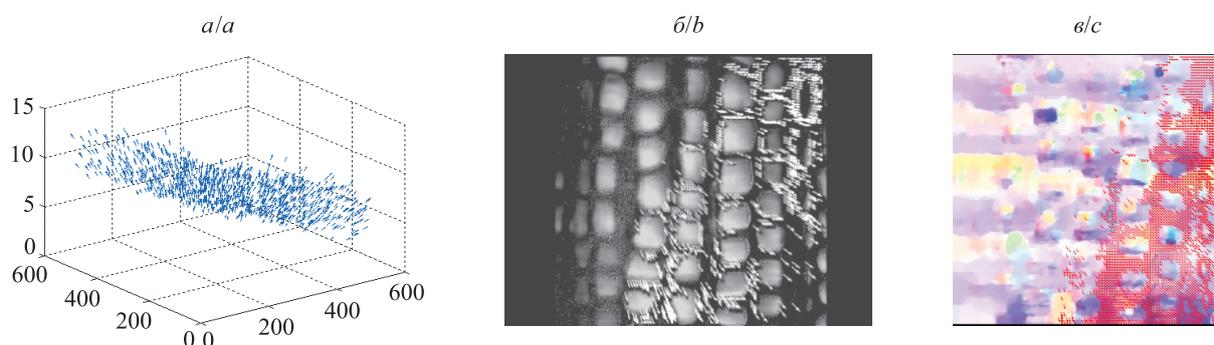


Рис. 3. Построение векторных полей деформации для оптических изображений на основе определения оптических потоков:
a – результат работы блочного метода в трехмерном пространстве;
б – наложение векторного поля для двух слоев на микроскопическое изображение; *в* – цветное представление оптического потока методом Лукаса – Канаде

Fig. 3. Construction of vector fields for optical images based on the determination of optical flows:
a – the result of the block method work in three-dimensional space;
b – superposition of a vector field for two layers on a microscopic image;
c – color representation of the optical flow by the Lucas – Kanade method

Яркость оптически анизотропных структур, какими являются волокна целлюлозы, зависит от ориентации волокон относительно плоскости поляризации света и изменяется в результате деформации. Угол поворота волокна определяется изменением яркости пикселя на изображении, оптический поток позволяет определить смещение точки волокна между слоями. Таким образом, оптический поток, построенный на основе поляризационных изображений, дает возможность получить модель деформации волокон и оценить их смещение и поворот (рис. 4). Отображение карты деформации может быть выполнено посредством цвета или векторов.

Оптический поток, построенный на основе флуоресцентных изображений, показывает перераспределение химических веществ при деформации (рис. 5).

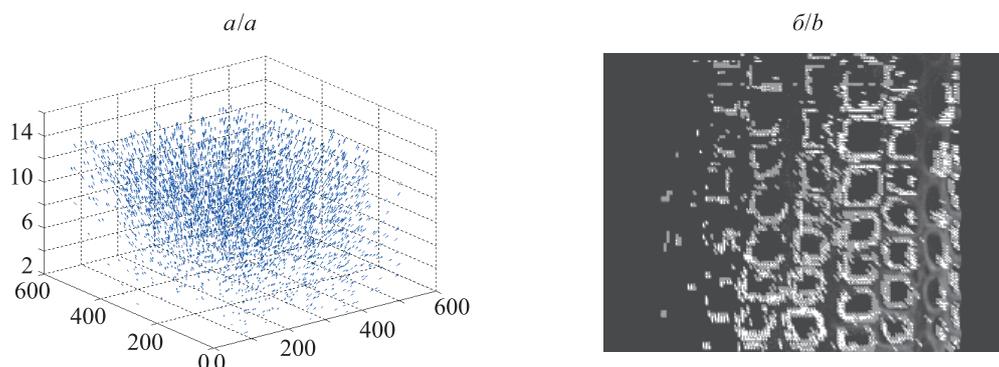


Рис. 4. Построение векторных полей деформации для изображений поляризации микроскопии на основе определения оптических потоков:
a – результат работы блочного метода в трехмерном пространстве;
б – наложение векторного поля для двух слоев на микроскопическое изображение
Fig. 4. Construction of vector fields for images of polarization microscopy based on the determination of optical flows:
a – the result of the block method work in three-dimensional space;
b – superposition of a vector field for two layers on a microscopic image

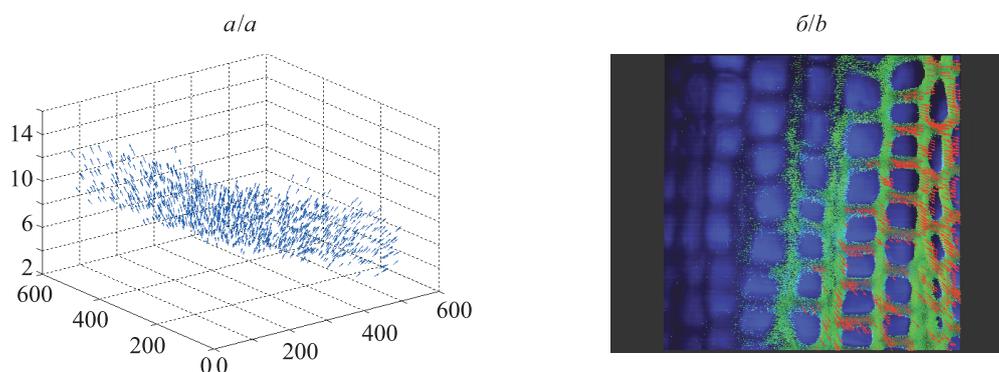


Рис. 5. Построение векторных полей деформации для изображений флуоресцентной микроскопии на основе определения оптических потоков:
a – результат работы блочного метода в трехмерном пространстве;
б – наложение векторного поля для двух слоев на микроскопическое изображение
Fig. 5. Construction of vector fields for fluorescence microscopy images based on the determination of optical flows:
a – the result of the block method work in three-dimensional space;
b – superposition of a vector field for two layers on a microscopic image

Описание алгоритма анализа деформации волокон древесины

Алгоритм состоит из двух этапов. Первый этап представляет собой сегментацию цветного изображения для выделения рабочей области, в которой определяются векторы деформации. Объединение рабочей области с изображением посредством конъюнкции помечает неинформативные области нулевым значением.

Второй этап работы алгоритма осуществляется непосредственно после разделения исходного цветного изображения на три канала [10–11]. Вычисление оптического потока выполняется по изображениям двух последовательных слоев. Потребность в изображении второго слоя реализована за счет обеспечения в цикле буфера хранения изображения. Для изображений поляризационной микроскопии дополнительно определяется поворот растительного волокна на основе анализа значений яркости (рис. 6).

Результатом работы алгоритма является получение трех векторных полей в трехмерном пространстве, определяющих смещение волокон, химический сдвиг и поворот волокна. Реализация данного алгоритма была выполнена в пакете Matlab на основе инструментария для обработки изображений, которые представлены в формате TIFF и находятся в общем для них каталоге (рис. 7). После завершения чтения изображений формируются наборы слоев, на основе которых получают 3D-изображение и три сечения этого изображения: слева, справа и сверху (аналогично сечению при компьютерной томографии).

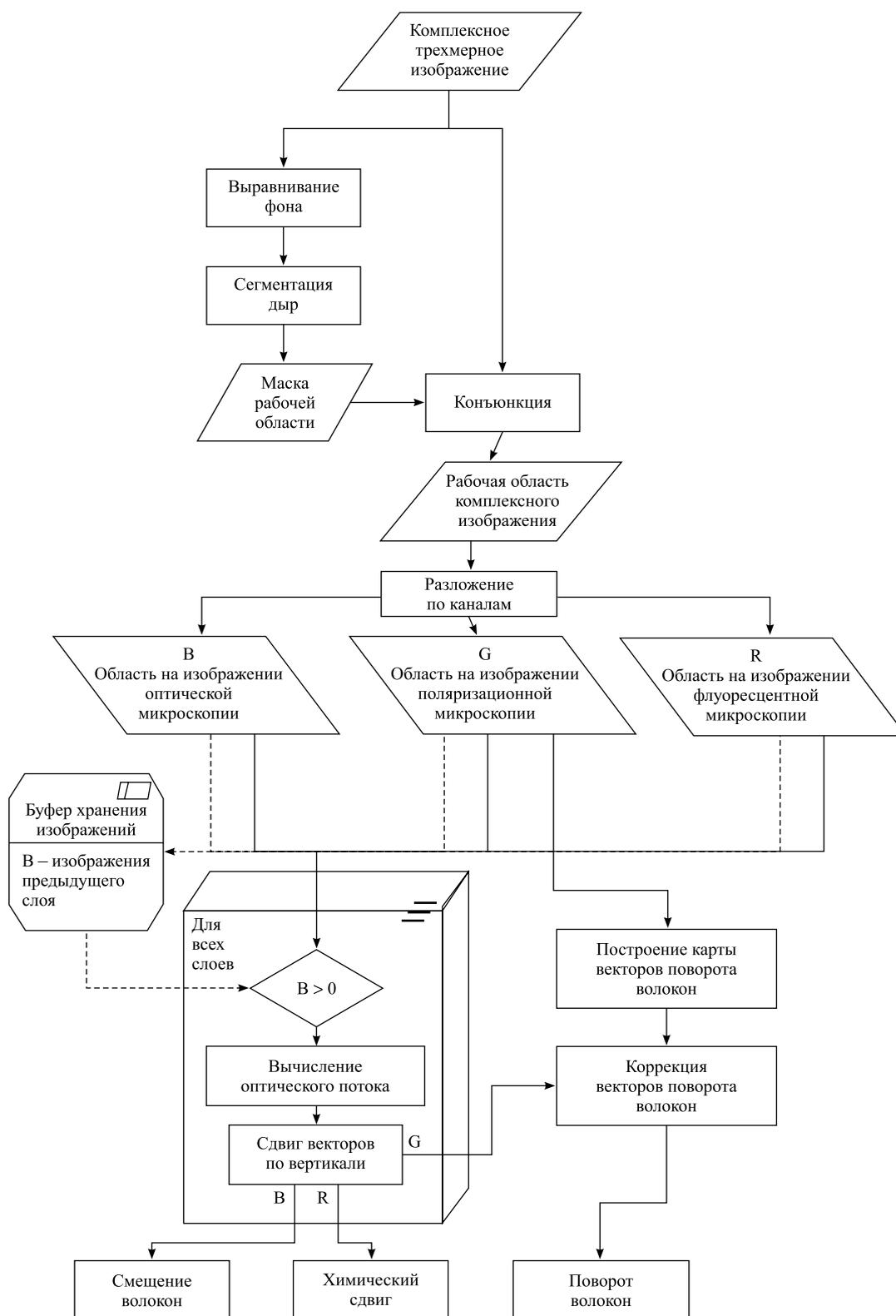


Рис. 6. Схема алгоритма определения изменений растительной структуры растения во время стресса
 Fig. 6. Scheme of algorithm for determination of changes in plant structure during plant stress

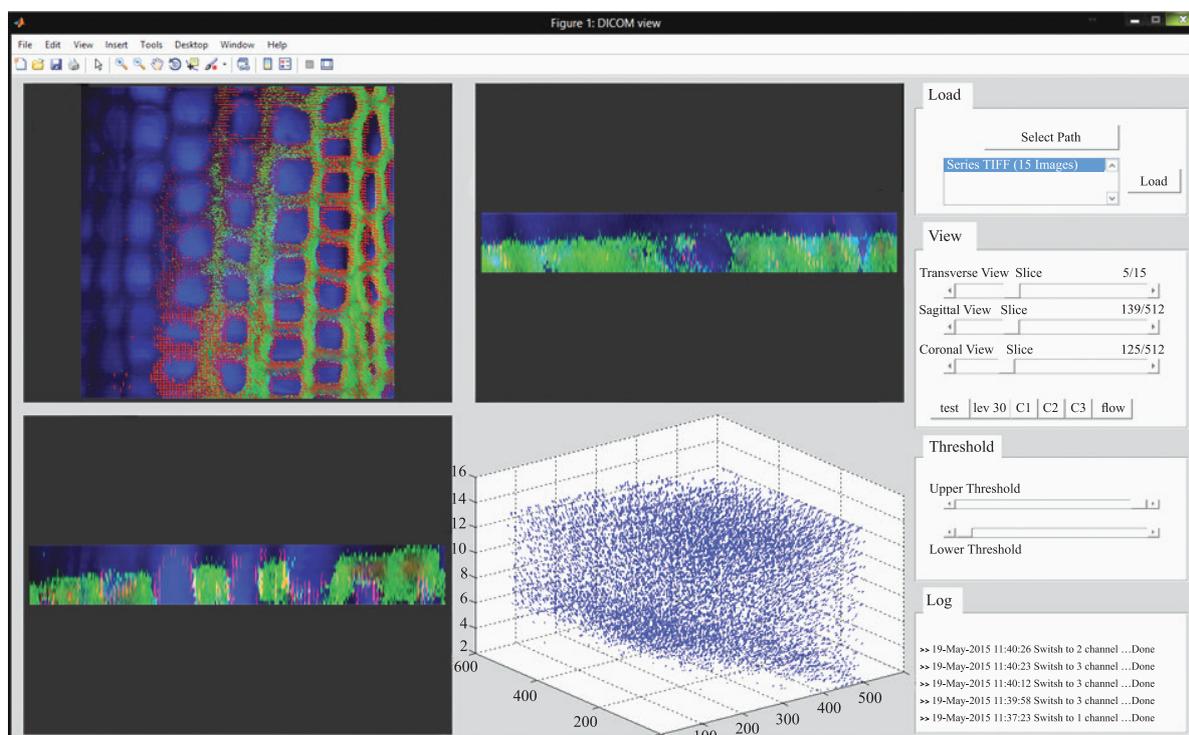


Рис. 7. Копия экрана приложения анализа деформации клеток при стрессе

Fig. 7. A copy of the screen for the application of the analysis of cells deformation under the stress

Дополнительные функции построения оптического потока для алгоритма Лукаса – Канаде реализованы на C++ с использованием библиотеки OpenCV. Они подключены в Matlab посредством технологии MEX.

Тестирование

Для тестирования алгоритма была разработана модель структуры, состоящая из девяти ячеек, на которую с левой стороны путем применения средств моделирования COMSOL Multiphysics оказывалось давление при помощи поверхности, наклоненной под разными углами. Для определения эффективности алгоритма оценивались равномерность распределения векторного потока по объему и соответствие его направления углу наклона плоскости. Проведенное тестирование показало, что при равномерном воздействии оптический поток также равномерно распределен по всему пространству с шагом, который задается в алгоритме. Соответствие угла наклона плоскости характеристике векторного потока представлено в таблице.

Соответствие наклона плоскости давления характеристикам векторного потока
Correlation between the slope of the pressure plane and the characteristics of the vector flow

| | | | | | | | | |
|--------------------------------------|----------|-----------|-----------|----------|----------|---------|---------|----------|
| Угол наклона плоскости, град | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 |
| Направление вектора в потоке, град | 50 | 65 | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 | 95 |
| Длина вектора в потоке, у. е. | 3,25 | 3,85 | 3,99 | 4,01 | 4,2 | 4,18 | 4,23 | 4,24 |
| Ошибка при определении длины вектора | 0,000 13 | 0,004 362 | 0,002 533 | 0,088 97 | 0,020 67 | 0,047 9 | 0,014 3 | 0,011 51 |

Дополнительно оценивалась длина вектора по расчетному значению, пропорциональному косинусу угла наклона по сдвигу областей. Разница полученных значений с реальной длиной вектора составила

ошибку. Анализ данной ошибки показал, что ее величина колеблется в пределах 0,1 пк. Она возникает в процессе дискретизации векторного пространства оптического потока. Данный результат является удовлетворительным и показывает эффективность вычислений, выполненных в ходе работы алгоритма.

Заключение

Представленный алгоритм предназначен для установления изменений в структуре клеток растений в состоянии стресса. Он основан на использовании трех типов изображений и позволяет определить деформацию, химический сдвиг и поворот волокон.

Алгоритм состоит из двух частей, что повышает скорость процесса за счет параллельных вычислений. По результатам работы алгоритма можно оценить физиологические процессы, происходящие в деформированной ткани растения, а также проконтролировать результат математического моделирования.

Данный алгоритм основан на использовании оптического потока для совокупности статических изображений. В отличие от традиционных методов послойного анализа применение оптического потока позволяет выявить особенности объемной деформации структур тканей растений.

Библиографические ссылки

1. Ortega J. K. E. Plant Cell Growth in Tissue // *Plant Physiol.* 2010. Vol. 154, issue 3. P. 1244–1253. DOI: 10.1104/pp.110.162644.
2. Selig B., Luengo Hendriks C. L., Bardage S., et al. Automatic measurement of compression wood cell attributes in fluorescence microscopy images // *J. Microscopy.* 2012. Vol. 246, issue 3. P. 298–308. DOI: 10.1111/j.1365-2818.2012.03621.x.
3. Meinhardt-Llopis E., Pérez J. S., Kondermann D. Horn-Schunck optical flow with a multi-scale strategy // *Image Process. On Line.* 2013. № 3. P. 151–172. DOI: 10.5201/ipol.2013.20.
4. Wayne R. O. *Light and Video Microscopy.* San Diego ; London ; Waltham : Academic Press, 2013.
5. Kanade T., Yin Z., Bise R., et al. Cell image analysis: Algorithms, system and applications // *Applications of Computer Vision : IEEE Workshop (Kona, 5–7 January, 2011).* Kona, 2011. P. 374–381.
6. Tao M., Bai J., Kohli P., et al. SimpleFlow: A Non-iterative, sublinear optical flow algorithm // *Comput. Graph. Forum.* 2012. Vol. 31. P. 345–353.
7. Sun D., Roth S., Black M. J. Secrets of optical flow estimation and their principles // *Computer Vision and Pattern Recognition : IEEE Comput. soc. conf. (San Francisco, 13–15 June, 2010).* San Francisco, 2010. P. 2432–2439.
8. Gonzalez R. C., Woods R. E. *Digital Image Processing.* 3rd ed. New Jersey : Prentice-Hall, 2008.

References

1. Ortega J. K. E. Plant Cell Growth in Tissue. *Plant Physiol.* 2010. Vol. 154, issue 3. P. 1244–1253. DOI: 10.1104/pp.110.162644.
2. Selig B., Luengo Hendriks C. L., Bardage S., et al. Automatic measurement of compression wood cell attributes in fluorescence microscopy images. *J. Microscopy.* 2012. Vol. 246, issue 3. P. 298–308. DOI: 10.1111/j.1365-2818.2012.03621.x.
3. Meinhardt-Llopis E., Pérez J. S., Kondermann D. Horn-Schunck optical flow with a multi-scale strategy. *Image Process. On Line.* 2013. No. 3. P. 151–172. DOI: 10.5201/ipol.2013.20.
4. Wayne R. O. *Light and Video Microscopy.* San Diego ; London ; Waltham : Academic Press, 2013.
5. Kanade T., Yin Z., Bise R., et al. Cell image analysis: Algorithms, system and applications. *Applications of Computer Vision : IEEE Workshop (Kona, 5–7 January, 2011).* Kona, 2011. P. 374–381.
6. Tao M., Bai J., Kohli P., et al. SimpleFlow: A Non-iterative, sublinear optical flow algorithm. *Comput. Graph. Forum.* 2012. Vol. 31. P. 345–353.
7. Sun D., Roth S., Black M. J. Secrets of optical flow estimation and their principles. *Computer Vision and Pattern Recognition : IEEE Comput. soc. conf. (San Francisco, 13–15 June, 2010).* San Francisco, 2010. P. 2432–2439.
8. Gonzalez R. C., Woods R. E. *Digital Image Processing.* 3rd ed. New Jersey : Prentice-Hall, 2008.

Статья поступила в редколлегию 27.11.2017.
Received by editorial board 27.11.2017.

ЮБИЛЕИ

JUBILEES

— — — — —

**Николай Николаевич
ТРУШ**

**Nikolai Nikolaevich
TRUSH**

— — — — —



Исполнилось 70 лет доктору физико-математических наук, профессору заведующему кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики БГУ Николаю Николаевичу Трушу.

Н. Н. Труш родился 23 февраля 1948 г. в д. Мостки Дрогичинского района Брестской области. Окончил среднюю школу в г. п. Антополь Дрогичинского района в 1966 г. Один год работал учителем математики восьмилетней школы в д. Великий Лес Дрогичинского района. В 1967 г. поступил на механико-математический факультет БГУ. В 1970 г. был переведен на факультет прикладной математики, который окончил в 1972 г. со специализацией по кафедре методов оптимального управления. В течение года работал инженером-программистом Вычислительного центра БГУ. В 1973 г. поступил

в аспирантуру БГУ, а затем был переведен в аспирантуру механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (МГУ) по специальности «Теория вероятностей и математическая статистика». После окончания аспирантуры работал ассистентом, старшим преподавателем, доцентом кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики (ФПМИ) БГУ. С 1981 по 1987 г. работал в должности заместителя декана ФПМИ.

В 1981 г. Н. Н. Труш защитил кандидатскую диссертацию на тему «Статистический спектральный анализ стационарных случайных процессов» в специализированном совете по математике № 1 МГУ по специальности «Теория вероятностей и математическая статистика».

Николай Николаевич с 1987 по 2008 г. являлся деканом факультета повышения квалификации по прикладной математике и ЭВМ и с этого же времени по 1991 г. – деканом спецфакультета по прикладной математике БГУ.

С 1989 по 2000 г. был заведующим кафедрой информационного и программно-математического обеспечения автоматизированных производств ФПМИ. С 2000 г. он – заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики ФПМИ.

В 1999 г. защитил докторскую диссертацию в совете БГУ на тему «Статистический спектральный анализ временных рядов» по специальности 01.01.05 «Теория вероятностей и математическая статистика».

Решением ученого совета БГУ и ВАК Республики Беларусь в 2000 г. Николай Николаевич избран профессором Белорусского государственного университета.

Под руководством Н. Н. Труша защищено 17 кандидатских диссертаций аспирантами из Сирии (1), Египта (1), Вьетнама (2), Китая (1), Беларуси (12). Николай Николаевич опубликовал более 160 научных работ, в том числе 4 монографии и 3 учебных пособия.

Он являлся руководителем ряда госбюджетных и хоздоговорных НИР.

Научные интересы Н. Н. Труша связаны с одним из перспективных направлений теории вероятностей и математической статистики – статистическим анализом временных рядов. Им предложена методика анализа оценок основных непараметрических характеристик стационарных многомерных временных рядов, основанная на исследовании их семиинвариантов и представлении последних в виде сингулярных интегралов. Исследованы асимптотическое поведение моментов оценок математического ожидания, взаимных ковариационных функций, взаимных спектральных плотностей, смешанных моментов, смешанных семиинвариантов и семиинвариантных спектральных плотностей высших порядков многомерных стационарных случайных процессов и полей в зависимости от ограничений на гладкость спектральных плотностей, окна просмотра данных и спектральные окна. Найдены

предельные распределения оценок. Построены и исследованы статистические свойства состоятельных в смысле сходимости по вероятности оценок спектральных плотностей устойчивых стационарных случайных процессов и однородных полей. Предложены оценки основных характеристик стационарных случайных процессов с нерегулярными наблюдениями и изучены их статистические свойства. Исследованы свойства процессов Леви и созданы алгоритмы их моделирования. Построены параметрические модели с устойчивыми возмущениями, разработаны алгоритмы их моделирования, оценки параметров и прогнозирования.

Основные результаты научной работы профессора Н. Н. Труша докладывались на семинарах трех кафедр (теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической статистики) и лаборатории математической статистики МГУ, лаборатории статистических методов Института математики и кибернетики АН ЛитССР, в научных центрах по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам Польши (Краковский университет, Гданьский университет, Естественно-гуманитарный университет в Седльце), Вьетнама (университет г. Хюэ), Англии (Ноттингемский университет), Кубы (Камагуэйский университет), Германии (Йенский университет, Дрезденский университет) и др. Николай Николаевич являлся участником многих международных научных конференций.

Входил в состав совета БГУ. Награжден нагрудными знаками «Отличник образования Республики Беларусь» и «Заслуженный работник Белорусского государственного университета».

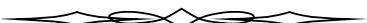
С 1993 по 2000 г. был ученым секретарем совета по защите кандидатских и докторских диссертаций БГУ, с 2000 г. по настоящее время является заместителем председателя совета по защите диссертаций в БГУ.

Коллектив кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики сердечно поздравляет Николая Николаевича с юбилеем, желает ему крепкого здоровья, успешных учеников и новых достижений в научных исследованиях.



**Виктор Владимирович
КРАСНОПРОШИН**

**Victor Vladimirovich
KRASNOPROSHIN**



Исполнилось 70 лет известному белорусскому ученому в области информатики, доктору технических наук, профессору заведующему кафедрой информационных систем управления факультета прикладной математики и информатики БГУ Виктору Владимировичу Краснопрошину.

В. В. Краснопрошин родился 23 ноября 1947 г. в г. Кобрине Брестской области. Окончил в 1966 г. Минский автомеханический техникум, служил в рядах Советской армии (1966–1969). После демобилизации поступил в БГУ на отделение прикладной математики математического факультета, которое вошло в состав образованного в 1970 г. факультета прикладной математики. В 1974 г. он успешно закончил обучение и получил распределение на кафедру математического обеспечения АСУ факультета прикладной математики, где работал сначала в должности стажера-преподавателя, а затем ассистента и доцента. В 1976 г. поступил в аспирантуру по специальности «Математическая кибернетика» (01.01.09), которую успешно окончил в 1979 г., защитил диссертацию и ему была присвоена ученая степень кандидата физико-математических наук, а в 1983 г. – ученое звание доцента. Прошел стажировку в Финляндии. В 1986 г. Виктор Владимирович был избран на должность заведующего кафедрой математического обеспечения АСУ (ныне – кафедра информационных систем управления (ИСУ)) факультета прикладной математики, которой с перерывом (1997–2002) руководит по настоящее время. В 2007 г. В. В. Краснопрошин защитил докторскую диссертацию по специальности «Теоретические основы информатики» (05.13.17) и ему была присвоена ученая степень доктора технических наук, а в 2008 г. – ученое звание профессора.

Научные интересы В. В. Краснопрошина были определены еще во время обучения в аспирантуре, где его научным руководителем был известный уче-

ный, математик, человек с широчайшей эрудицией, академик АН СССР Ю. И. Журавлев. В то время Ю. И. Журавлев занимался разработкой математической теории распознавания образов и все его ученики принимали участие в этих исследованиях. Тематика диссертационной работы В. В. Краснопрошина была связана с построением логических корректоров на базе эвристических (неточных) моделей алгоритмов распознавания. В процессе исследований им было получено несколько важнейших для развития теории распознавания результатов. В частности, разработан алгоритм построения оптимального корректора (в виде не всюду определенной функции трехзначной логики), а также эффективные (по быстродействию и требуемой памяти) алгоритмы упрощения корректирующих функций в классе ДНФ. Им предложен подход к построению двухуровневых моделей алгоритмов распознавания с логическим корректором, что тесно методологически связано с построенной Ю. И. Журавлевым в 1976–1978 гг. общей алгебраической теорией распознающих алгоритмов.

Значительная часть исследований В. В. Краснопрошина связана с информатикой. Им предложен универсальный подход к решению задач распознавания по прецедентам, основанный на формализованном и научно обоснованном понятийном каркасе (включающем определения: задача, данные, информация, знания, алгоритм, коммуникация, система). Также им разработана многоагентная технология построения компьютерных систем, основанных на знаниях (СОЗ), которая обеспечила возможность унифицировать процессы моделирования, извлечения, интеграции и использования распределенных экспертных знаний. Это позволило сформировать целостный взгляд на создание СОЗ и существенно снизить стоимость их разработки, что является важным для развития информатики.

Все исследования В. В. Краснопрошина всегда носили не только теоретический, но и прикладной характер. Им было создано несколько вариантов технологий для построения компьютерных систем распознавания. На их базе под его непосредственным руководством разработаны и внедрены в соответствующие учреждения и организации прикладные системы для решения задач в области охраны окружающей среды и рационального использования природных ресурсов, судебной медицины, диагностики и выбора тактики лечения для широкого спектра ортопедических заболеваний, проведения экстренных хирургических операций. Одна из систем («Орто-Эксперт») использовалась медицинской службой сборной команды Республики Беларусь при подготовке и непосредственно в период проведения Олимпийских игр в Пекине.

Профессор В. В. Краснопрошин опубликовал около 300 научных работ, в том числе 8 книг. Под его руководством защищено 14 кандидатских диссертаций. Ученики Виктора Владимировича работают в Беларуси, Голландии, Вьетнаме, Иордании и Китае. Результаты его научных исследований докладывались на крупных международных конференциях и симпозиумах. Для проведения совместных научных исследований и обмена опытом с зарубежными коллегами он неоднократно выезжал в университеты Германии, Испании, Вьетнама. За свою активную научную деятельность он получил широкое признание научного сообщества, что подтверждается его вхождением в различные республиканские и международные научные структуры. В частности, В. В. Краснопрошин – вице-председатель Белорусской ассоциации по анализу и распознаванию изображений (БААРИ), иностранный академик Испанской королевской академии экономики и финансов, член управляющих советов международных научных ассоциаций (AEDEM, AMSE, SIGEF), член государственного экспертного совета Республики Беларусь по информатизации, вычислительной технике и информационным технологиям, член экспертного совета Фонда фундаментальных исследований НАН Беларуси по информатике, член экспертного совета ВАК Республики Беларусь по техническим наукам, член совета по защите докторских диссертаций, член редколлегий научных изданий «Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика», «Таврический вестник информатики и математики», «Machine Graphics & Vision», «Fuzzy Economic Review», «Selguk Journal of Applied Mathematics».

Силами организованной В. В. Краснопрошиным при кафедре ИСУ научно-исследовательской лаборатории информационных технологий и компьютерной графики на протяжении ряда лет выполняются проекты по важнейшим республиканским и союзным научно-техническим программам, таким как «Научные основы информационных технологий и систем», «Защита от чрезвычайных ситуаций», «Триада», «Космос – ИТ», «Информатика и космос», «Мониторинг», «Информатика, космос и безопасность». Виктор Владимирович неоднократно также получал различные гранты Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

В. В. Краснопрошин ведет интенсивную педагогическую работу на факультете прикладной математики и информатики. Им разработан и на протяжении многих лет читается базовый курс «Исследование операций», по которому в 2013 г. совместно с Н. А. Лепешинским издано учебное пособие с грифом Министерства образования Республики Беларусь. Его лекции проводятся на высоком педагогическом уровне, привлекают неизменное внимание студентов. Стиль его общения со студентами и многочисленными учениками позволяет раскрыть талант каждого из них, дает им возможность стать действительно высококвалифицированными специалистами, выбрать правильное направление в науке, при этом сохраняя и приумножая традиции кафедры, университета. Виктор Владимирович принимал активное участие в создании и становлении специальностей «Информатика» и «Прикладная информатика».

За успешную работу В. В. Краснопрошин неоднократно удостоивался различных наград и почетных званий. Награжден знаками «Отличник образования Республики Беларусь», «Заслуженный работник БГУ», почетными грамотами Государственного комитета по науке и технологиям Республики Беларусь, НАН Беларуси, ВАК Республики Беларусь, а также грамотами Белорусского государственного университета. За вклад в науку и плодотворную педагогическую деятельность ему объявлена благодарность Президента Республики Беларусь, а также он награжден медалью Франциска Скорины.

Коллектив кафедры информационных систем управления факультета прикладной математики и информатики сердечно поздравляет Виктора Владимировича с юбилеем, желает ему крепкого здоровья, творческих успехов, талантливых учеников и новых достижений в научных исследованиях.

**Сергей Александрович
САМАЛЬ**

**Sergey Aleksandrovich
SAMAL'**



Исполнилось 60 лет доктору экономических наук, профессору кафедры общей математики и информатики БГУ Сергею Александровичу Самалю.

С. А. Самаль родился 31 октября 1957 г. в г. Молодечно. Окончил среднюю школу г. Минска № 19. Любовь к математике ему привил заслуженный учитель Беларуси Александр Маркович Фельдман. Учась в 10-м классе, С. А. Самаль стал одним из победителей олимпиады по математике, проводимой Белорусским государственным университетом.

В 1974–1979 гг., будучи студентом механико-математического факультета БГУ, С. А. Самаль специализируется по алгебре и математической логике под руководством доцента В. В. Горлова. В 1979–1981 гг., после окончания университета, Сергей Александрович, работая инженером-математиком, программистом в Институте математики АН БССР, начинает заниматься системным программированием на мини-ЭВМ PDP-11 (СМ-3,4). С 1981 г. С. А. Самаль работает в Научно-исследовательском институте проблем управления народным хозяйством Госплана БССР в должности старшего инженера в отделе математического обеспечения НИР, где активно занимается математическими методами и моделированием задач экономики.

После окончания целевой аспирантуры по кафедре экономико-математических методов и математического программирования Белорусского государственного института народного хозяйства имени В. В. Куйбышева он под руководством доктора физико-математических наук, профессора, лауреата Государственной премии БССР В. А. Емеличева и член-корреспондента АН БССР, доктора экономических наук, профессора В. Ф. Медведева успешно защитил кандидатскую диссертацию на тему «Моделирование региональных рекреационных систем» (08.00.13 – специальность «Матема-

тические методы и применение ЭВМ в экономических исследованиях, планировании и управлении народным хозяйством»), посвященную математическому моделированию задач рекреационной сферы, построению оптимальных туристских маршрутов и рациональному размещению административных учреждений.

С 1988 г. С. А. Самаль работал старшим преподавателем, доцентом, заместителем заведующего кафедрой, заведующим кафедрой высшей математики (1995–2002) и проректором по учебной работе Белорусского государственного экономического университета (2002–2004). В апреле 2004 г. Сергей Александрович защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора экономических наук по теме «Интеллектуальные модели социально-экономических систем» (08.00.13 – специальность «Инструментальные методы экономики») при научном консультировании доктора технических наук, профессора А. Н. Морозевича. В этот период в соавторстве с коллегами-математиками (Н. С. Коваленко, А. Ф. Корзюк, С. А. Минюк, Л. И. Шевченко и др.) им издан ряд учебников по высшей математике для студентов, обучающихся по экономическим специальностям, с грифом Министерства образования Республики Беларусь.

В 2004 г. С. А. Самаль был приглашен на должность ректора Белорусского института правоведения (частного учреждения высшего образования (УВО)), утвержден в ней министром образования Республики Беларусь. Во многом благодаря активной административной деятельности Сергея Александровича в течение 8 лет возглавляемое им УВО значительно расширило материальную базу и укрепило профессорско-преподавательский состав. В 2011 г. ему было присвоено звание профессора экономики. В 2012 г. С. А. Самаль по приглашению ректора Академии управления при

Президенте Республики Беларусь (далее – Академия) работает в должности директора Научно-исследовательского института теории и практики государственного управления (далее – Институт). За это время в Академии был издан сборник научных трудов сотрудников Института и выполнено коллективное научное исследование с украинскими коллегами по совместному гранту Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований и Украинского фонда фундаментальных исследований.

С 2014 г. и по настоящее время Сергей Александрович работает в должности профессора кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета БГУ. С. А. Самаль почти 20 лет является председателем комиссии по математике для поступающих в Институт криптографии, связи и информатики ФСБ России, а с 2000 г. – членом советов по защите диссертаций в Белорусском государственном экономическом университете, Институте экономики НАН Беларуси, Академии управления при Президенте Республики Беларусь и с 2015 г. – совета Д 02.01.15 при БГУ. Он – член редакционных коллегий журналов

«Вести Института предпринимательской деятельности», «Экономика. Управление. Инновации» из перечня ВАК Республики Беларусь и журнала «Механизм регулирования экономики» из перечня ВАК Украины.

В 1996 г. Сергей Александрович Самаль награжден Почетной грамотой Министерства образования Республики Беларусь, в 2002 г. – Почетной грамотой Министерства экономики Республики Беларусь, а в 2007 г. удостоен Почетной грамоты НАН Беларуси и знака «Отличник образования» Министерства образования Республики Беларусь.

Профессор С. А. Самаль – высокопрофессиональный педагог и опытный лектор, который пользуется уважением и авторитетом среди своих коллег и студентов БГУ. Поздравляем Сергея Александровича с 60-летием и желаем ему крепкого здоровья, дальнейших творческих успехов в научной, педагогической и общественной деятельности.

*В. А. Еровенко, Н. С. Коваленко, А. В. Лебедев,
Д. Г. Медведев, О. М. Матейко, С. В. Пономарева,
В. А. Прокашева, В. С. Романчик, А. А. Самодуров,
Н. И. Широконова, Н. Б. Яблонская, В. И. Яшкин*

ПАМ'ЯТИ УЧЕНОГО

TO THE MEMORY OF SCIENTIST

**Мікалаі Віктаравіч
ЛАЗАКОВІЧ**

**Mikalaj Viktaravich
LAZAKOVICH**



23 снежня 2017 г. не стала вядомага беларускага вучонага – доктара фізіка-матэматычных навук, прафесара Мікалая Віктаравіча Лазаковіча.

Нарадзіўся М. В. Лазаковіч 5 сакавіка 1954 г. у г. Бабруйску. У 1971 г. скончыў сярэдняю школу і паступіў на механіка-матэматычны факультэт БДУ. Пасля заканчэння навучання і атрымання дыплама з адзнакай у 1976 г. быў накіраваны ў аспірантуру Вільнюскага дзяржаўнага ўніверсітэта. У 1982 г. абараніў дысертацыю на атрыманне вучонай ступені кандыдата фізіка-матэматычных навук. З 1980 г. працаваў на кафедры функцыянальнага аналізу (з 1 верасня 2017 г. – кафедра функцыянальнага аналізу і аналітычнай эканомікі) БДУ, дзе прайшоў шлях ад асістэнта да прафесара. У 1996 г. абараніў дысертацыю «Дыферэнцыяльныя ўраўненні з выпадковымі функцыямі ў алгебрах абагульненых выпадковых працэсаў» на атрыманне вучонай ступені доктара фізіка-

матэматычных навук. Вучонае званне прафесара Мікалаю Віктаравічу было прысвоена ў 2004 г. Ён з'яўляўся вучоным сакратаром савета па абароне дысертацый пры БДУ і членам рэдакцыйных калегій двух навуковых часопісаў.

Асноўныя працы М. В. Лазаковіча прысвечаны лімітавым тэарэмам тэорыі імавернасцей, абагульненым выпадковым працэсам, стахастычным дыферэнцыяльным ураўненням. Навуковая дзейнасць Мікалая Віктаравіча была звязана з даследаваннем мнемафункцый. Прафесар М. В. Лазаковіч пабудаваў канструкцыі алгебр абагульненых выпадковых працэсаў, а на базе створанага апарату алгебр М. В. Лазаковіч распрацаваў новы навуковы накірунак у тэорыі стахастычных дыферэнцыяльных ураўненняў, заснаваны на тонкім аналізе рознасных ураўненняў, што апраксімуюць дадзенае стахастычнае дыферэнцыяльнае ўраўненне. Мікалаі Віктаравіч даследаваў новыя класы стахастычных

дыферэнцыяльных ураўненняў, дыферэнцыяльныя ўраўненні з абагульненымі каэфіцыентамі, дыферэнцыяльныя ўключэнні і інш.

Прафесар М. В. Лазаковіч актыўна ўдзельнічаў у падрыхтоўцы матэматыкаў. Пад яго кіраўніцтвам створана навуковая школа па тэорыі алгебр абагульненых выпадковых працэсаў і яе дастасаваннях. Падрыхтаваў 10 кандыдатаў фізіка-матэматычных навук.

Акрамя плённай навуковай працы, М. В. Лазаковіч займаўся актыўнай педагогічнай дзейнасцю, выкладаў курс «Тэорыя імавернасцей і матэматычная статыстыка», распрацаваў шэраг арыгінальных спецыяльных курсаў, кіраваў дыпломнымі, магістарскімі і аспіранцкімі працамі.

Мікалай Віктаравіч з'яўляўся вядомым спецыялістам па тэорыі імавернасцей, тэорыі выпадковых працэсаў, дыферэнцыяльных ураўненнях, у тым ліку стахастычных. Ён – аўтар больш чым 100 навуковых прац, у тым ліку падручніка з грыфам Міністэрства адукацыі Рэспублікі Беларусь «Тэорыя імавернасцей» (у 2013 г. выйшла

ў свет трэцяе выданне падручніка), «Руска-беларускага матэматычнага слоўніка», двух вучэбных дапаможнікаў.

За шматгадовую плённую навукова-педагогічную дзейнасць быў узнагароджаны граматамі БДУ, Граматай (2008) і Ганаровай граматай (2013) Міністэрства адукацыі Рэспублікі Беларусь.

Мікалай Віктаравіч быў знакамітым матэматыкам, высокакваліфікаваным лектарам, духоўна багатым чалавекам з вострым пачуццём гумару. Калектыў механіка-матэматычнага факультэта, кафедры функцыянальнага аналізу і аналітычнай эканомікі выказваюць шчырыя спачуванні родным і блізкім М. В. Лазаковіча. Светлая памяць аб ім застаецца ў нашых сэрцах.

*А. Б. Антаневіч, В. І. Бахцін, В. І. Бернік,
В. В. Гарохавік, В. І. Громак, А. М. Дудзін,
В. А. Еравенка, П. П. Забрэйка, Э. І. Звяровіч,
В. Р. Кротаў, А. У. Лебедзеў, А. А. Левакоў,
М. Х. Мазель, Д. Г. Мядзведзеў, В. І. Піндрык,
С. П. Сташулёнак, У. У. Шлыкаў, А. Л. Яблонскі*

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ В БГУ РАБОТ INDICATIVE ABSTRACTS OF THE PAPERS DEPOSITED IN THE BSU

УДК 519.8(075.8)

Овсянников А. В. **Исследование операций** [Электронный ресурс] : учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 07-03 «Прикладная информатика (веб-программирование и компьютерный дизайн)». Ч. 1 / А. В. Овсянников ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2017. 71 с. : ил. Библиогр.: с. 68–69. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/187327>. Загл. с экрана. Деп. 15.12.2017, № 009915122017.

Содержит сведения о методах решения многокритериальных задач, постановке и основных методиках решения задач дискретного программирования. Включает теоретический раздел с контрольными вопросами и заданиями для самостоятельного выполнения, материалы для проведения практических занятий, а также программу учебной дисциплины. Адресуется студентам специальности «Прикладная информатика (веб-программирование и компьютерный дизайн)». Может быть использован в процессе изучения методики проектной и организационной деятельности студентами других специальностей.

УДК 51(075.8)

Кондратенко И. И. **Методические рекомендации по выполнению контрольной работы по курсу высшей математики для студентов 1-го курса заочной формы обучения получения второго высшего образования специальностей «Бизнес-администрирование» и «Управление информационными ресурсами» факультета бизнеса** [Электронный ресурс] / И. И. Кондратенко ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2017. 65 с. : ил. Библиогр.: с. 65. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/189168>. Загл. с экрана. Деп. 19.01.2018, № 001019012018.

Методические рекомендации содержат варианты заданий двух контрольных работ по дисциплине «Высшая математика». Предназначены для студентов 1-го курса заочной формы обучения получения второго высшего образования специальностей «Бизнес-администрирование» и «Управление информационными ресурсами» факультета бизнеса Института бизнеса и менеджмента технологий Белорусского государственного университета. В учебном пособии рассмотрены подробные решения типовых задач контрольных работ.

УДК 082(06)

Сборник работ 74-й научной конференции студентов и аспирантов Белорусского государственного университета (Минск, 15–24 мая 2017 г.) : в 3 ч. [Электронный ресурс] / отв. за вып. С. Г. Берлинская ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2017. 1398 с. : ил., табл. Библиогр. в конце ст. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/190713>. Загл. с экрана. Деп. 08.02.2018, № 001108022018.

Приведены статьи по результатам докладов студентов и аспирантов по актуальным проблемам в области естественных и социально-гуманитарных наук, носящие как прикладной, так и теоретический характер. Ряд статей представлены на иностранных языках. Подготовка и издание сборника осуществлялись в соответствии с Положением о ежегодной конференции студентов и аспирантов БГУ, утвержденным приказом ректора от 13.09.2011 г. № 366-ОД.

СОДЕРЖАНИЕ

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

| | |
|---|----|
| <i>Щукин М. В.</i> 2-Однородные C^* -алгебры с пространством примитивных идеалов, гомеоморфным двумерному ориентируемому компактно связному многообразию, порожденные идемпотентами | 4 |
| <i>Мардвилко Т. С.</i> Интегральные неравенства для высших производных произведений Бляшке..... | 10 |

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

| | |
|---|----|
| <i>Спасков С. А., Хмызов А. К.</i> Краевая задача для системы конечно-разностных с осреднением уравнений..... | 17 |
| <i>Гладков А. Л., Кавитова Т. В.</i> О начально-краевой задаче для нелокального параболического уравнения с нелокальным граничным условием..... | 29 |

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

| | |
|---|----|
| <i>Павлив Д. А.</i> О гибридной модели временной структуры процентных ставок..... | 39 |
| <i>Терех В. С.</i> Применение умеренно устойчивых распределений в моделях GARCH(1, 1).... | 48 |
| <i>Сокол Э. Э.</i> Введение информационной функции Кульбака – Лейблера с помощью разбиений вероятностного пространства..... | 59 |
| <i>Харин А. Ю., Ту Т. Т.</i> О вычислении вероятностей ошибок усеченного последовательного критерия отношения вероятностей..... | 68 |

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

| | |
|--|----|
| <i>Королевич В. В., Медведев Д. Г.</i> Решение неосесимметричной стационарной задачи теплопроводности для полярно-ортотропной кольцевой пластины переменной толщины с теплоизолированными основаниями..... | 77 |
|--|----|

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

| | |
|---|----|
| <i>Васильков Д. Д.</i> Глобальная балансировка триангуляционной сети..... | 88 |
|---|----|

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

| | |
|--|----|
| <i>Недзьведь О. В., Абламейко С. В., Хаджи-Манич К. Р., Савич А.</i> Обработка микроскопических изображений волокон для анализа структуры древесины..... | 95 |
|--|----|

ЮБИЛЕИ

| | |
|---------------------------------------|-----|
| Николай Николаевич Труш..... | 105 |
| Виктор Владимирович Краснопрошин..... | 107 |
| Сергей Александрович Самаль..... | 109 |

ПАМЯТИ УЧЕНОГО

| | |
|--|-----|
| Мікалай Віктаравіч Лазаковіч | 111 |
| Аннотации депонированных в БГУ работ..... | 113 |

CONTENTS

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

| | |
|---|----|
| <i>Shchukin M. V.</i> 2-Homogeneous C^* -algebras with the space of primitive ideals homeomorphic to a two-dimensional oriented compact connected manifold generated by idempotents | 4 |
| <i>Mardvilka T. S.</i> Integrate inequalities for the higher derivatives of Blaschke product..... | 10 |

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

| | |
|---|----|
| <i>Spaskov S. A., Khmyzov A. K.</i> Boundary value problem for system of finite-difference with averaging equations..... | 17 |
| <i>Gladkov A. L., Kavtova T. V.</i> On the initial-boundary value problem for a nonlocal parabolic equation with nonlocal boundary condition..... | 29 |

THEORY OF PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

| | |
|---|----|
| <i>Pauliu D. A.</i> Hybrid term structure models | 39 |
| <i>Tserakh U. S.</i> Use of tempered stable distributions in GARCH(1, 1) models..... | 48 |
| <i>Sokal E. E.</i> Introduction of the Kullback – Leibler information function by means of partitions of the probability space..... | 59 |
| <i>Kharin A. Y., Tu T. T.</i> On error probabilities calculation for the truncated sequential probability ratio test..... | 68 |

MECHANICS OF DEFORMABLE SOLIDS

| | |
|---|----|
| <i>Karalevich U. V., Medvedev D. G.</i> The solution of the nonaxisymmetric stationary problem of heat conduction for the polar-orthotropic annular plate of variable thickness with thermal insulated bases..... | 77 |
|---|----|

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

| | |
|--|----|
| <i>Vasilkov D. D.</i> Global balancing of a triangular mesh..... | 88 |
|--|----|

INFORMATICS, COMPUTER SCIENCE AND MANAGEMENT

| | |
|---|----|
| <i>Nedzvedz O. V., Ablameyko S. V., Hadži-Manić K. R., Savić A.</i> Microscopic images processing for the wood structure analysis | 95 |
|---|----|

JUBILEES

| | |
|---|-----|
| Nikolai Nikolaevich Trush..... | 105 |
| Victor Vladimirovich Krasnoproshin..... | 107 |
| Sergey Aleksandrovich Samal' | 109 |

TO THE MEMORY OF SCIENTIST

| | |
|--|-----|
| Mikalaj Viktaravich Lazakovich | 111 |
|--|-----|

| | |
|--|-----|
| Indicative abstracts of the papers deposited in the BSU..... | 113 |
|--|-----|

Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области математики и информатики).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ).

**Журнал Белорусского
государственного университета.
Математика. Информатика.
№ 1. 2018**

Учредитель:
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск.

Почтовый адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск.

Тел. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: jmathinf@bsu.by

«Журнал Белорусского государственного
университета. Математика. Информатика»
издается с января 1969 г.
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»
(ISSN 1561-834X).

Редактор *Е. В. Павлова*
Технический редактор *В. В. Кильдишева*
Корректоры *Л. А. Меркуль, М. А. Подголина*

Подписано в печать 30.03.2018.

Тираж 165 экз. Заказ 103.

Республиканское унитарное предприятие
«Информационно-вычислительный центр
Министерства финансов Республики Беларусь».
ЛП № 02330/89 от 03.03.2014.
Ул. Кальварийская, 17, 220004, г. Минск.

© БГУ, 2018

**Journal
of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics.
No. 1. 2018**

Founder:
Belarusian State University

Registered address: 4 Niezaliežnasci Ave.,
Minsk 220030.

Correspondence address: 4 Niezaliežnasci Ave.,
Minsk 220030.

Tel. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: jmathinf@bsu.by

«Journal of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics»
published since January, 1969.
Until 2017 named «Vestnik BGU.
Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika»
(ISSN 1561-834X).

Editor *E. V. Pavlova*
Technical editor *V. V. Kil'disheva*
Proofreaders *L. A. Merkul', M. A. Podgolina*

Signed print 30.03.2018.

Edition 165 copies. Order number 103.

Republican Unitary Enterprise
«Informatsionno-vychislitel'nyi tsentr
Ministerstva finansov Respubliki Belarus'»
License for publishing No. 02330/89, 03 March, 2014.
17 Kal'varyjskaja Str., Minsk 220004.

© BSU, 2018