



БЕЛОРУССКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ЖУРНАЛ
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА ИНФОРМАТИКА

JOURNAL
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

MATHEMATICS and INFORMATICS

Издается с января 1969 г.
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)

Выходит три раза в год

1

2019

МИНСК
БГУ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

- Главный редактор** ХАРИН Ю. С. – доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси; директор Научно-исследовательского института прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: kharin@bsu.by
- Заместители
главного редактора** КРОТОВ В. Г. – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: krotov@bsu.by
- ДУДИН А. Н. – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий лабораторией прикладного вероятностного анализа факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: dudin@bsu.by
- Ответственный
секретарь** МАТЕЙКО О. М. – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: matseika@bsu.by
- Абламейко С. В.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Альтенбах Х. Магдебургский университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия.
Антоневич А. Б. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Беняш-Кривец В. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Берник В. И. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Гладков А. Л. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Головкин В. А. Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь.
Гороховик В. В. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Громак В. И. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Демида Г. Институт математики и информатики Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва.
Дымков М. П. Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь.
Забрейко П. П. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Егоров А. Д. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Жоландек Х. Институт математики Варшавского университета, Варшава, Польша.
Журавков М. А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Зубков А. М. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.
Кашин Б. С. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Княжище Л. Б. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Кожанов А. И. Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.
Котов В. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Краснопрошин В. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Макаров Е. К. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Мандрик П. А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Матус П. П. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Медведев Д. Г. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Михасев Г. И. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Сафонов В. Г. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Скиба А. Н. Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель, Беларусь.
Сотсков Ю. Н. Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Тузинов А. В. Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Чижик С. А. Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Янчевский В. И. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

EDITORIAL BOARD

- Editor-in-chief** **KHARIN Y. S.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor, corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus; director of the Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: kharin@bsu.by
- Deputy editors-in-chief** **KROTOV V. G.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: krotov@bsu.by
- DUDIN A. N.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the laboratory of applied probabilistic analysis, faculty of applied mathematics and computer science, Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: dudin@bsu.by
- Executive secretary** **MATEIKO O. M.**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of general mathematics and computer science, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: matseika@bsu.by
- Ablameyko S. V.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Altenbach H. Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany.
Antonevich A. B. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Beniash-Kryvets V. V. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Bernik V. I. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Gladkov A. L. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Golovko V. A. Brest State Technical University, Brest, Belarus.
Gorokhovich V. V. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Gromak V. I. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Dzemyda G. Institute of Mathematics and Informatics of the Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
Dymkov M. P. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Zabreiko P. P. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Egorov A. D. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Zoladek H. Mathematics Institute of the University of Warsaw, Warsaw, Poland.
Zhuravkov M. A. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Zubkov A. M. Lomonosov Moscow State University, Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
Kashin B. S. Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Knyazhishche L. B. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Kozhanov A. I. Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia.
Kotov V. M. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Krasnoproshin V. V. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Makarov E. K. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Mandrik P. A. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Matus P. P. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Medvedev D. G. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Mikhasev G. I. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Safonov V. G. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Skiba A. N. Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus.
Sotskov Y. N. United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Tuzikov A. V. Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Chizhik S. A. National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Yanchevskii V. I. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

MATHEMATICAL LOGIC, ALGEBRA AND NUMBER THEORY

УДК 511.42

О КОЛИЧЕСТВЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ В КОРОТКИХ ИНТЕРВАЛАХ, СОДЕРЖАЩИХ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ТОЧКИ

В. И. БЕРНИК¹⁾, Ф. ГЁТЦЕ²⁾, Н. И. КАЛОША¹⁾

¹⁾Институт математики НАН Беларуси, ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Беларусь

²⁾Университет Билефельда, Университетситрассе, 25, D-33615, г. Билефельд, Германия

В 2012 г. доказано, что действительные алгебраические числа распределены неравномерно, но регулярно согласно определениям Г. Вейля (1916) и А. Бейкера, В. Шмидта (1970). Особенно неравномерно они распределены в окрестностях рациональных чисел с малыми знаменателями. В данной статье впервые перечислены условия, которым должны удовлетворять короткие интервалы, чтобы им принадлежало много действительных алгебраических чисел. При выполнении таких условий распределение алгебраических чисел приобретает черты регулярности, что уже предполагает наличие законов приближения трансцендентных чисел алгебраическими числами. Это, в свою очередь, дает шансы на доказательство гипотезы Вирзинга о приближении действительных чисел алгебраическими и целыми алгебраическими числами.

Ключевые слова: алгебраическое число; диофантовы приближения; равномерное распределение; теорема Дирихле; теорема Хинчина.

Образец цитирования:

Берник ВИ, Гётце Ф, Калоша НИ. О количестве алгебраических чисел в коротких интервалах, содержащих рациональные точки. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;1:4–11. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-4-11>

For citation:

Bernik VI, Götze F, Kalosha NI. Counting algebraic numbers in short intervals with rational points. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;1:4–11. Russian. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-4-11>

Авторы:

Василий Иванович Берник – доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник отдела теории чисел.

Фридрих Гётце – доктор наук (математика), профессор математики.

Николай Иванович Калоша – кандидат физико-математических наук; научный сотрудник отдела теории чисел.

Authors:

Vasily I. Bernik, doctor of science (physics and mathematics), full professor; chief researcher at the department of number theory. bernik@im.bas-net.by

Friedrich Götze, doctor of science (mathematics), full professor. goetze@math.uni-bielefeld.de

Nikolai I. Kalosha, PhD (physics and mathematics); researcher at the department of number theory. kalosha@im.bas-net.by

COUNTING ALGEBRAIC NUMBERS IN SHORT INTERVALS WITH RATIONAL POINTS

V. I. BERNIK^a, F. GÖTZE^b, N. I. KALOSHA^a

^a*Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, 11 Surhanava Street, Minsk 220072, Belarus*

^b*Bielefeld University, 25 Universitätsstraße, Bielefeld D-33615, Germany*

Corresponding author: N. I. Kalosha (kalosha@im.bas-net.by)

In 2012 it was proved that real algebraic numbers follow a non-uniform but regular distribution, where the respective definitions go back to H. Weyl (1916) and A. Baker and W. Schmidt (1970). The largest deviations from the uniform distribution occur in neighborhoods of rational numbers with small denominators. In this article the authors are first to specify a general condition that guarantees the presence of a large quantity of real algebraic numbers in a small interval. Under this condition, the distribution of real algebraic numbers attains even stronger regularity properties, indicating that there is a chance of proving Wirsing's conjecture on approximation of real numbers by algebraic numbers and algebraic integers.

Key words: algebraic number; Diophantine approximation; uniform distribution; Dirichlet's theorem; Khinchine's theorem.

Introduction

A sequence of real numbers can satisfy a number of properties related to the evenness of its distribution. The simplest property of this type is everywhere density. A more restrictive property – uniform distribution – was defined by Weyl [1; 2], who proved the eponymous uniform distribution criterion. Weyl used this criterion to prove that the sequence $\{\alpha n\}$, $n = 1, 2, \dots$, where curly braces denote the fractional parts, is uniformly distributed on the segment $[0, 1)$ if and only if α is irrational.

The uniform distribution property is often too restrictive, which motivated Baker and Schmidt to introduce the concept of a regular distribution [3]. A regular sequence of numbers has the following property: for an arbitrary interval, we can choose sufficiently many numbers that lie in that interval from the first N members of sequence, and these numbers also satisfy a natural lower bound on the minimal distance between them.

Baker and Schmidt proved the regularity of the set of real algebraic numbers and found an exact lower bound for the Hausdorff measure of the set of real numbers with a given order of approximation by algebraic numbers [3; 4].

Regularity was instrumental towards proving analogues of Khinchine's theorem [5] for polynomials [6; 7], as well as nondegenerate curves and surfaces [8–10].

Preliminaries and methodology

We are going to show that the regularity property can be generalized for small intervals. We are going to consider first K numbers of a sequence $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K$ lying in the interval S of length $\mu S = K^{-l}$, $l > 0$. Our results are a natural generalization of the papers [11; 12].

Let $\deg P = n$ be the degree and $H = H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$ be the height of a polynomial

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n \neq 0.$$

For a sufficiently large Q , we define the class of polynomials

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \leq n, H(P) \leq Q\}.$$

Let $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ be the roots of $P(x)$. The constants c_1, c_2, \dots are assumed to depend on n but not on H or Q ; $\#A$ denotes the cardinality of a finite set A ; μB is the Lebesgue measure of a set $B \subset \mathbb{R}$. The set of all roots of the polynomials $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ will be denoted as $T_n(Q)$. Clearly, we have $\#\mathcal{P}_n(Q) \leq (2Q + 1)^{n+1}$, and $\#T_n(Q) \leq n(2Q + 1)^{n+1}$. A well-known result from [3], which is obvious for an odd degree n , states that $\#T_n(Q) \cap \mathbb{R} > c_1 Q^{n+1}$. The paper [12] proves that real algebraic numbers, ordered so that the height of the respective minimal polynomials is monotone nondecreasing, are uniformly distributed only if $n = 1$, i. e., if they are rational.

We are going to study the distribution of the numbers in the set $T_n(Q) \cap [0, 1)$ on short intervals $I \subset [0, 1)$, $\mu I = Q^{-\gamma}$, $\gamma > 1$. Any finite interval $[a, b)$ can be substituted for $[0, 1)$, but the formulas will become somewhat more complicated. Note that some of the theorems proved below can be generalized for the case where we replace polynomials with nondegenerate functions [8–10; 13].

Distribution of algebraic numbers in short intervals of the same length can vary dramatically. A recent article [11] proves that:

a) there exist intervals I_1 of length $\mu I_1 = 0.5Q^{-1}$ such that $T_n(Q) \cap I_1 = \emptyset$ for an arbitrary n ;

b) if the constant c_2 is sufficiently large, then for any interval I_2 , $\mu I_2 > c_2 Q^{-1}$, there exists a constant $c_3 > 0$ such that

$$\#T_n(Q) \cap I_2 > c_3 Q^{n+1} \mu I_2.$$

The statement a) can be proved by using rather basic properties of integer polynomials and their roots. However, the proof of the statement b) is more complex and is based on several recent theorems proved in metric Diophantine approximation [11].

It is easy to see that the number of intervals of type I_1 which do not contain algebraic numbers isn't large. Indeed, from [3] we know that

$$\#T_n(Q) \cap [0, 1) > c_5 Q^{n+1}.$$

Discussion and results, conclusion

In this paper we specify the condition on the intervals I of length $\mu I = Q^{-\gamma_1}$, where $\gamma_1 > 1$, which ensures that these intervals contain algebraic numbers from the class $T_n(Q)$. A similar condition for $\gamma_1 = \frac{3}{2}$ was proved in [14].

From Minkowski's theorem on linear forms [15] we have that for all $x \in [0, 1)$ and $Q > 1$ there exists an integer polynomial $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ such that

$$|P(x)| < 2(n+1)Q^{-n}.$$

The exponent $-n$ in the right-hand side of this inequality is optimal since for $x_1 = 2^{-\frac{1}{n+1}}$ we have $|P(x_1)| > c'_5 Q^{-n}$. From Sprindžuk's theorem [16] we have that the inequality $|P(x)| < Q^{-w}$, $w > n$, can be satisfied only if $x \in B_1 \subset [0, 1)$, $\mu B_1 < \varepsilon_1$ for all $\varepsilon_1 > 0$. Therefore, if the set B_2 consists of points $x \in [0, 1)$ satisfying the condition $|P_k(x)| < c'_5 Q^{-k-1}$ and Q is sufficiently large, then $\mu B_2 < \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 > 0$. Moreover, there is a known upper bound for this measure: $\mu B_2 < c_6 Q^{-\frac{1}{n}}$.

Let us prove several upper bounds for the quantity $\#T_n(Q) \cap I$.

Theorem 1. For $\mu I_2 = Q^{-\gamma_2}$, $0 \leq \gamma_2 < 1$ we have

$$\#T_n(Q) \cap I_2 < n^2 2^{n+5} Q^{n+1} \mu I_2.$$

Proof. Let us assume the opposite. Taking $c_7 = n^2 2^{n+5}$, we have

$$\#T_n(Q) \cap I_2 > c_7 Q^{n+1-\gamma_2}.$$

Take $\bar{b}_1 = (a_n, \dots, a_1)$, i. e., a vector formed from the coefficients of $P(x)$. Since $\#\{\bar{b}_1\} = (2Q+1)^n < 2^{n+1} Q^n$ for $Q > Q_0$, we can choose at least $l_1 = c_7 2^{-n-1} Q^{1-\gamma_2}$ polynomials with the same vector \bar{b}_1 in the class of polynomials $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ with roots $\alpha_i \in T_n(Q) \cap I_2$. The differences obtained by subtracting these polynomials from each other are nonzero integers. If α_{i_1} is a root of $P_i(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ lying in the interval I_2 , then a Taylor expansion of $P_i(x)$ on I_2 yields that

$$P_i(x) = P_i(\alpha_{i_1}) + P_i'(\alpha_{i_1})(x - \alpha_{i_1}) + \frac{1}{2} P_i''(\alpha_{i_1})(x - \alpha_{i_1})^2 + \dots, \quad 1 \leq i \leq l_1, \quad (1)$$

$$P_i(\alpha_{i_1}) = 0, \quad |P_i'(\alpha_{i_1})(x - \alpha_{i_1})| < n^2 Q^{1-\gamma_2},$$

where $Q > Q_0$. The absolute values of the remaining terms of the expansion (1) are bounded from above by $nQ^{1-\gamma_2}$, allowing us to write

$$|P_i(x)| < 2n^2Q^{1-\gamma_2}.$$

Consider the differences

$$R_j(x) = P_{j+1}(x) - P_1(x), \quad 1 \leq j \leq l_1 - 1.$$

The polynomials $R_j(x)$ are different nonzero integers satisfying the inequality

$$|R_j(x)| < 2n^2Q^{1-\gamma_2}.$$

For a sufficiently large l_1 , one of them must be larger than $2n^2Q^{1-\gamma_2}$ in absolute value, which contradicts the previous inequality.

Sprindzhuk showed [16] that metric theorems on integer polynomials also hold if we go from $P(x)$ to the polynomials $P_1(x) = P(x - m)$, $m \in \mathbb{Z}$, or to $P_2(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$. Using these substitutions, we can transition from arbitrary polynomials to ones satisfying the condition

$$|a_n| > c_8 H(P). \quad (2)$$

The condition (2) makes it easy to prove that for all roots α_i , $1 \leq i \leq n$, of the polynomial $P(x)$ we have $|\alpha_j| < c_9$ [7; 16]. From now on, we can assume that the polynomials $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ satisfy the condition (2), and that all roots of these polynomials are bounded in absolute value by a constant that depends on n but doesn't depend on H or Q .

Let us introduce a classification of our intervals. An interval I of length $|I| = Q^{-\gamma_1}$ is called a (k, v) -interval if it contains a real algebraic number β_1 of degree $\deg \beta_1 = k < n$ and height $H(\beta_1) \leq Q^v$, $0 \leq v \leq 1$.

Theorem 2. For $\gamma_1 > k + nv$, (k, v) -intervals I contain no real algebraic points α_1 , $\deg \alpha_1 = n$, $H(\alpha_1) \leq Q$.

Proof. Let $T_1(x) = b_k x^k + \dots + b_1 x + b_0$ denote the minimal polynomial of an algebraic number β_1 , and $T_2(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ be the minimal polynomial of α_1 . The polynomials $T_1(x)$ and $T_2(x)$ have no common roots and their leading coefficients satisfy (2). Therefore, the roots β_1, \dots, β_k of the polynomials $T_1(x)$, as well as the roots $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ of $T_2(x)$, are bounded in absolute value by a certain constant c_9 . This implies that their resultant is nonzero, $R(T_1, T_2) \neq 0$. The root $\beta_1 \in I$ defines the type of the interval I . Let $\alpha_1 \in I$, then

$$1 \leq |R(T_1, T_2)| = a_n^k b_k^n \prod_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k} (\alpha_i - \beta_j) \ll_n Q^{k+nv} |\alpha_1 - \beta_1| \ll_n Q^{k+nv-\gamma_1}. \quad (3)$$

By the conditions of the theorem, the exponent in the right-hand side of (3) is negative, and the inequality (3) is contradictory for a sufficiently large Q .

If $\gamma_1 < k + nv$, then the interval I_1 can contain algebraic numbers, however, there is an upper bound on their quantity.

Theorem 3. For $\gamma_3 > 1 + v$, an interval I_3 of length $|I_3| = Q^{-\gamma_3}$ contains at most $2^{n+7} Q^{n+1-\gamma_3}$ algebraic numbers β_1 , $\deg \beta_1 = n$, $H(\beta_1) \leq Q$.

Proof. Assume the opposite, i. e.,

$$\#\{\beta_1 \in I_3 : P(\beta_1) = 0, P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)\} > 2^{n+7} Q^{n+1-\gamma_3}.$$

Let the vector $\bar{b}_2 = (a_n, \dots, a_2)$ made up from the coefficients of $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ be fixed. Clearly, we have

$$\#\{\bar{b}_2\} = (2Q + 1)^{n-1} < 2^n Q^{n-1}, \quad Q > Q_0(n).$$

Thus at least $l_2 = 2^7 Q^{2-\gamma_3}$ polynomials have an identical vector \bar{b}_2 . For all of these polynomials $P_j(x)$, $1 \leq j \leq l_2$, let us write Taylor expansions on the interval I_3 with respect to the root $\beta_1 = \beta_{1j}$, and let us estimate $P(x)$ from above.

$$P_j(x) = P(\beta_1) + P'(\beta_1)(x - \beta_1) + \frac{1}{2} P''(\beta_1)(x - \beta_1)^2 + \dots + \frac{1}{n!} P^{(n)}(\beta_1)(x - \beta_1)^n,$$

$$|P_j(x)| \leq n^2 Q^{1-\gamma_3} + n \frac{1}{n} Q^{1-\gamma_3} < 2n^2 Q^{1-\gamma_3}, \quad Q > Q_0.$$

Consider the differences

$$R_j(x) = P_{j+1}(x) - P_1(x), \quad 1 \leq j \leq l_2 - 1 \geq \frac{l_2}{2} = 2^6 Q^{2-\gamma_3}. \quad (4)$$

The number of different polynomials in (4) is at least $2^6 Q^{2-\gamma_3}$. We also have $\deg R_j \leq 1$, $H(R_j) \leq 2Q$, and

$$|a_j x + b_j| = |R_j(x)| < 4n^2 Q^{1-\gamma_3}, \quad 1 \leq j \leq l_2 - 1 \geq \frac{l_2}{2} = 2^6 Q^{2-\gamma_3}. \quad (5)$$

From (5) we have

$$\left| x + \frac{b_j}{a_j} \right| < 4n^2 Q^{1-\gamma_3} |a_j|^{-1} \leq 4n^2 Q^{1-\gamma_3}.$$

If among $2^6 Q^{2-\gamma_3}$ polynomials $R_j(x) = a_j x + b_j$ there exists at least one such that its root $-\frac{b_i}{a_i}$ is different from $\beta_1 = -\frac{b_0}{a_0}$, let us consider the resultant of this polynomial $a_i x + b_i$ and the polynomial $R_0 = a_0 x + b_0$ that defines the type of the interval I_3 .

$$1 \leq |R(R_0, R_j)| = \left| a_0 a_i \left(\frac{b_i}{a_i} - \frac{b_0}{a_0} \right) \right| \leq 8n^2 Q^{1+v-\gamma_3}. \quad (6)$$

The inequality (6) is contradictory for $\gamma_3 > 1 + v$ and $Q > Q_0$. If all linear polynomials $R_j(x)$ are different but have the same root $-\frac{b_0}{a_0}$, they can be written as

$$k(a_0 x + b_0), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Since $|a_0| > 0.5Q^v$, and we can take k to be larger than $k_0 = \frac{l_2}{8}$, we must also have

$$|a_0 k_0| > 8Q^{v+2-\gamma_3},$$

$$|a_0 k_0| < 4Q,$$

which is impossible for $\gamma_3 > 1 + v$. This concludes the proof.

Consider an interval I of length $|I| = Q^{-\gamma}$ which isn't a $(1, v)$ -interval. Let $S(I)$ denote the number of algebraic numbers β of degree $\deg \beta = n$ and height $H(\beta) \leq Q$ lying in the interval I .

Theorem 4. *The number $S(I)$ can be estimated from below as*

$$S(I) \geq cQ^{n+1-\gamma}$$

for some constant $c = c(n)$.

To prove theorem 4, we are going to use the following lemmas.

Lemma 1. *Let α_1 be the root of the polynomial $P(x)$ closest to x . Then for $P'(x) \neq 0$ and $P'(\alpha_1) \neq 0$ we have*

$$\begin{aligned} |x - \alpha_1| &\leq n |P(x)| |P'(x)|^{-1}, \\ |x - \alpha_1| &\leq 2^{n-1} |P(x)| |P'(\alpha_1)|^{-1}. \end{aligned}$$

Lemma 1 is quite well-known [7; 16].

Lemma 2. *Let $P_1(x)$ and $P_2(x)$ be integer polynomials without common roots such that*

$$\deg P_1 \leq n, \quad \deg P_2 \leq n, \quad H(P_1) \leq Q, \quad H(P_2) \leq Q,$$

and on an interval J , $\mu J = Q^{-\eta}$, $\eta > 0$, we have the inequalities

$$\max(|P_1(x)|, |P_2(x)|) < Q^{-\tau},$$

where $\tau > 0$. Then for any $\delta > 0$ and a sufficiently large $Q > Q_0(\delta)$ we have the inequality

$$\tau + 1 + 2\max(\tau + 1 - \eta, 0) < 2n + \delta.$$

A proof of lemma 2 can be found in [6].

Let $P_1(x), \dots, P_m(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ denote polynomials with roots in the interval I . Let us order their roots as follows [16]:

$$|\alpha_1(P) - \alpha_2(P)| \leq |\alpha_1(P) - \alpha_3(P)| \leq \dots \leq |\alpha_1(P) - \alpha_n(P)|.$$

Let $\varepsilon > 0$ and $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{100}$. For $\varepsilon_1 > 0$ consider an ε_1 -sieve for the quantities $|\alpha_1(P) - \alpha_j(P)|$, $j = 2, 3, \dots, n$, denoting $T = \lceil \varepsilon_1^{-1} \rceil + 1$:

$$|\alpha_1(P) - \alpha_j(P)| = Q^{-p_j(P)}, \quad \frac{l_j - 1}{N} < p_j \leq \frac{l_j}{T}, \quad l_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Clearly, the number of vectors $\bar{l} = (l_2, l_3, \dots, l_n)$ is finite, depends only on ε_1 and doesn't depend on Q . Take $m_1 = c_4 m$ polynomials $P_j(x)$, and for each of them denote

$$\sigma(P) = \{x \in I : |P(x)| < Q^{-n}\}.$$

The set $\sigma(P)$ consists of at most n intervals of length

$$c_4 Q^{-n-1+p_1(P)}, \quad p_1(P) = \frac{l_2 + l_3 + \dots + l_n}{T}.$$

If

$$m_1 < c_5 Q^{n+1-p_1-\gamma},$$

then the measure of the set

$$B = I \cap \bigcup_{P_j, 1 \leq j \leq n} \sigma(P)$$

is larger than $0.5|I|$. Since we have

$$|P(x)| < Q^{-n}, \quad p_1 < \varepsilon_1,$$

the lemma above and the inequality $|x - \alpha_1| < c_6 Q^{-n-1+\varepsilon_1}$ imply the existence of an algebraic number $\alpha_1 = \alpha_1(P)$.

We can construct at least $c_7 Q^{n+1-\gamma-\varepsilon_1}$ such algebraic numbers $\alpha_1(P_j)$ in the interval I .

Now let $m_1 > c_5 Q^{-n-1+\varepsilon_1}$. Assume that

$$0 \leq \{m_1\} < 0.5\varepsilon_1,$$

where $\{m_1\}$ denotes the fractional part of the number m_1 , and the integer part is denoted as $[m_1]$.

From Dirichlet's principle, if the constant c_5 is sufficiently large, then the interval I contains at least $m_2 = c_8 Q^{n+1-\gamma-p_1}$ polynomials $P_j(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ with identical leading coefficients $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-[m_1]}$. Consider Taylor expansions of the polynomials $P_j(x)$ in the interval I with respect to the roots α_{1j} :

$$P_j(x) = P_j(\alpha_{1j}) + P_j'(\alpha_{1j})(x - \alpha_{1j}) + \frac{1}{2} P_j''(\xi_j)(x - \alpha_{1j})^2, \quad \xi_j \in (x, \alpha_{1j}).$$

Since

$$P_j(\alpha_{1j}) = 0, \quad |P_j'(\alpha_{1j})(x - \alpha_{1j})| < c_9 Q^{1-\gamma-p_1+(n-1)\varepsilon_1},$$

$$\left| \frac{1}{2} P_j''(\xi_j)(x - \alpha_{1j})^2 \right| < c_{10} Q^{1-2\gamma},$$

for all $x \in I$ we have

$$|P_j(x)| < c_{11} Q^{1-p_1-\gamma+(n-1)\varepsilon_1}.$$

Consider $m_1 - 1$ differences $R_j(x)$ formed by subtracting $P_1(x)$ from the rest of the polynomials $P_j(x)$. Then $R_j(x)$ satisfy the inequalities:

$$|R_{j+1}(x)| = |P_{j+1}(x) - P_1(x)| < 2c_{11} Q^{1-p_1-\gamma+(n-1)\varepsilon_1},$$

$$\deg R_{j+1} \leq n - [m_1] = p_1 + \gamma - 1.$$

There exist at least $Q^{\varepsilon/2}$ such polynomials $R_{j+1}(x)$. Consider the resultant of $R_{j+1}(x)$ and the polynomial $T(x)$:

$$1 \leq \left| R(R_{j+1}, T) \right| < c_{12} Q^{\lambda(p_1 + \gamma - 1) + n_1 - \gamma - p_1}. \quad (7)$$

If

$$\gamma + p_1 > \lambda(p_1 + \gamma - 1) + n_1, \quad (8)$$

then the inequality (7) is contradictory.

For $n_1 = 1$, the inequality (8) can be written as

$$\gamma + p_1 > \lambda(p_1 + \gamma - 1) + 1. \quad (9)$$

Since we have $0 \leq \lambda < 1$ and $p_1 \geq 0$, the inequality (9) follows from the inequality $\gamma \geq \lambda(\gamma - 1) + 1$, which holds if $1 \leq \gamma < 2$. Thus the assumption $m_1 > cQ^{n+1-p_1-\gamma}$ is contradictory, which proves theorem 4.

Библиографические ссылки

1. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. *Mathematische Annalen*. 1916;77(3):313–352. DOI: 10.1007/BF01475864.
2. Kuipers L, Niederreiter H. *Uniform distribution of sequences*. New York: Wiley; 1974. 390 p.
3. Baker A, Schmidt WM. Diophantine approximation and Hausdorff dimension. *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1970;21:1–11. DOI: 10.1112/plms/s3-21.1.1.
4. Bernik VI. Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations. *American Mathematical Society Translations*. 1988;40:15–44.
5. Khintchine A. Einige sätze über kettenbrüche, mit anwendungen auf die theorie der Diophantischen approximationen. *Mathematische Annalen*. 1924;92(1–2):115–125. DOI: 10.1007/BF01448437.
6. Берник ВИ. О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов. *Acta Arithmetica*. 1989; 53(1):17–28.
7. Bernik VI, Dodson MM. *Metric Diophantine Approximation on Manifolds*. Cambridge: Cambridge University Press; 1999. 172 p. (Cambridge Tracts in Mathematics; 137).
8. Beresnevich VV, A Groshev type theorem for convergence on manifolds. *Acta Mathematica Hungarica*. 2002;94(1–2):99–130.
9. Bernik VI, Kleinbock D, Margulis GA. Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions. *International Mathematics Research Notices*. 2001;9:453–486.
10. Beresnevich VV, Bernik VI, Kleinbock D, Margulis GA. Metric Diophantine approximation: The Khintchine – Groshev theorem for nondegenerate manifolds. *Moscow Mathematical Journal*. 2002;2(2):203–225.
11. Bernik VI, Götze F. Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals. *Izvestiya: Mathematics*. 2015; 79(1):18–39. DOI: 10.1070/IM2015v079n01ABEH002732.
12. Каляда ДУ. Аб размеркаванні рэчаісных алгебраічных лікаў дадзенай ступені. *Доклады Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі*. 2012;56(3):28–33.
13. Bugeaud Y. *Approximation by Algebraic Numbers*. Cambridge: Cambridge University Press; 2004. 290 p. (Cambridge Tracts in Mathematics; 160). DOI: 10.2277/0521823293.
14. Bernik VI, Götze F, Gusakova AG. On points with algebraically conjugate coordinates close to smooth curves. *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*. 2016;6(2–3):57–100.
15. Cassels JWS. *An Introduction to Diophantine Approximation*. Cambridge: Cambridge University Press; 1957. 168 p. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics; 45).
16. Спринджук ВГ. *Проблема Малера в метрической теории чисел*. Минск: Наука и техника; 1967. 184 с.

References

1. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. *Mathematische Annalen*. 1916;77(3):313–352. DOI: 10.1007/BF01475864.
2. Kuipers L, Niederreiter H. *Uniform distribution of sequences*. New York: Wiley; 1974. 390 p.
3. Baker A, Schmidt WM. Diophantine approximation and Hausdorff dimension. *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1970;21:1–11. DOI: 10.1112/plms/s3-21.1.1.
4. Bernik VI. Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations. *American Mathematical Society Translations*. 1988;40:15–44.
5. Khintchine A. Einige sätze über kettenbrüche, mit anwendungen auf die theorie der Diophantischen approximationen. *Mathematische Annalen*. 1924;92(1–2):115–125. DOI: 10.1007/BF01448437.
6. Bernik VI. O tochnom poryadke priblizheniya nulya znacheniyami tselochislennykh mnogochlenov [The exact order of approximating zero by values of integral polynomials]. *Acta Arithmetica*. 1989;53(1):17–28. Russian.
7. Bernik VI, Dodson MM. *Metric Diophantine Approximation on Manifolds*. Cambridge: Cambridge University Press; 1999. 172 p. (Cambridge Tracts in Mathematics; 137).
8. Beresnevich VV. A Groshev type theorem for convergence on manifolds. *Acta Mathematica Hungarica*. 2002;94(1–2):99–130.

9. Bernik VI, Kleinbock D, Margulis GA. Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions. *International Mathematics Research Notices*. 2001;9:453–486.
10. Beresnevich VV, Bernik VI, Kleinbock D, Margulis GA. Metric Diophantine approximation: The Khintchine – Groshev theorem for nondegenerate manifolds. *Moscow Mathematical Journal*. 2002;2(2):203–225.
11. Bernik VI, Götze F. Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals. *Izvestiya: Mathematics*. 2015;79(1):18–39. DOI: 10.1070/IM2015v079n01ABEH002732.
12. Kaliada D. Ab razmerkavanni rjechaisnyh algebraichnyh likav dadzenaj stupeni [Distribution of real algebraic numbers of a given degree]. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi*. 2012;56(3):28–33. Belarusian.
13. Bugeaud Y. *Approximation by Algebraic Numbers*. Cambridge: Cambridge University Press; 2004. 290 p. (Cambridge Tracts in Mathematics; 160). DOI: 10.2277/0521823293.
14. Bernik VI, Götze F, Gusakova AG. On points with algebraically conjugate coordinates close to smooth curves. *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*. 2016;6(2–3):57–100.
15. Cassels JWS. *An Introduction to Diophantine Approximation*. Cambridge: Cambridge University Press; 1957. 168 p. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics; 45).
16. Sprindzhuk VG. *Problema Malera v metricheskoj teorii chisel* [Mahler's problem in metric number theory]. Minsk: Nauka i tekhnika; 1967. 184 p. Russian.

Received by editorial board 25.11.2018.

УДК 512.542

О ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП С КОММУТАНТАМИ B -ПОДГРУПП

Е. В. ЗУБЕЙ¹⁾

¹⁾Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины,
ул. Советская, 104, 246007, г. Гомель, Беларусь

Конечная ненильпотентная группа называется B -группой, если в ее факторгруппе по подгруппе Фраттини все собственные подгруппы нильпотентны. Устанавливается r -разрешимость группы, в которой некоторая силовская r -подгруппа перестановочна с коммутантами 2-нильпотентных (или 2-замкнутых) B -подгрупп четного порядка группы, а также разрешимость группы, у которой коммутанты 2-замкнутых и 2-нильпотентных B -подгрупп четного порядка перестановочны.

Ключевые слова: конечная группа; r -разрешимая группа; силовская подгруппа; B -группа; коммутант; перестановочные подгруппы.

ON THE PERMUTABILITY OF SYLOW SUBGROUPS WITH DERIVED SUBGROUPS OF B -SUBGROUPS

E. V. ZUBEI^a

^aFrancisk Skorina Gomel State University, 104 Saveckaja Street, Gomel 246007, Belarus

A finite non-nilpotent group G is called a B -group if every proper subgroup of the quotient group $G/\Phi(G)$ is nilpotent. We establish the r -solvability of the group in which some Sylow r -subgroup permutes with the derived subgroups of 2-nilpotent (or 2-closed) B -subgroups of even order and the solvability of the group in which the derived subgroups of 2-closed and 2-nilpotent B -subgroups of even order are permutable.

Key words: finite group; r -solvable group; Sylow subgroup; B -group; the derived subgroup; permutable subgroups.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Начало изучения таких групп положила работа О. Ю. Шмидта [1]. Обзоры результатов о свойствах групп Шмидта, существовании подгрупп Шмидта и их некоторых приложениях в теории классов конечных групп приведены в [2; 3].

Одной из первых работ, посвященных перестановочности некоторых подгрупп с подгруппами Шмидта, является статья Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика [4]. Их результаты получили развитие в исследованиях В. Н. Княгиной и В. С. Монахова [5–7]. Группы с ограничениями на некоторые подгруппы Шмидта изучались в [8–13].

Образец цитирования:

Зубей ЕВ. О перестановочности силовских подгрупп с коммутантами B -подгрупп. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;1: 12–17.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-12-17>

For citation:

Zubei EV. On the permutability of Sylow subgroups with derived subgroups of B -subgroups. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;1:12–17. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-12-17>

Автор:

Екатерина Владимировна Зубей – аспирантка кафедры алгебры и геометрии факультета математики и технологий программирования. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор В. С. Монахов.

Author:

Ekaterina V. Zubei, postgraduate student at the department of algebra and geometry, faculty of mathematics and programming technologies.
ekaterina.zubey@yandex.ru

Я. Г. Беркович предложил называть B -группой группу, у которой факторгруппа по подгруппе Фраттини является группой Шмидта [14, с. 461]. Начальные свойства B -группы установлены в [15]. Ее строение во многом схоже со строением группы Шмидта: B -группа бипримарна, одна из силовских подгрупп нормальна, а другая – циклическая (см. лемму 1). Но есть и отличия: в группе Шмидта подгруппа Фраттини нормальной силовской подгруппы содержится в центре группы, а в B -группе это свойство нарушается. Примером служит диэдральная группа порядка 18, она является B -группой и не является группой Шмидта.

В настоящей работе устанавливается r -разрешимость группы при условии, что некоторая силовская r -подгруппа перестановочна с коммутантами 2-нильпотентных (или 2-замкнутых) B -подгрупп четного порядка группы, а также разрешимость группы, у которой коммутанты 2-замкнутых и 2-нильпотентных B -подгрупп четного порядка перестановочны.

Вспомогательные результаты

Все используемые обозначения и определения соответствуют [16; 17].

Полупрямое произведение нормальной в G подгруппы A и подгруппы B записывается так:

$$G = [A]B.$$

Через $Z(G)$, $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются центр, подгруппа Фиттинга и подгруппа Фраттини группы G соответственно, а через H^G – наименьшая нормальная в G подгруппа, содержащая подгруппу H .

Группа G с нормальной силовской p -подгруппой G_p называется p -замкнутой. Если в группе G имеется нормальная подгруппа $G_{p'}$, такая, что $G = [G_{p'}]G_p$, то группа G называется p -нильпотентной. Если порядок подгруппы H делится на простое число p , то говорят, что H – pd -подгруппа.

Следуя [3], будем использовать обозначение $S_{\langle p, q \rangle}$ для группы Шмидта с нормальной силовской p -подгруппой и ненормальной силовской q -подгруппой. B -группу, у которой $B/\Phi(B)$ является $S_{\langle p, q \rangle}$ -группой, будем называть $B_{\langle p, q \rangle}$ -группой. Ясно, что любая $S_{\langle p, q \rangle}$ -группа является $B_{\langle p, q \rangle}$ -группой.

Лемма 1 [15, лемма 2.2]. Пусть B – $B_{\langle p, q \rangle}$ -группа, P и Q – ее силовские p - и q -подгруппы. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) $B = [P]Q$;

(2) $P \cap \Phi(B) = \Phi(P)$, $P = B'$ и $P/\Phi(P)$ – главный фактор группы B порядка p^m , где m – показатель числа p по модулю q ;

(3) $Q = \langle y \rangle$ – циклическая подгруппа и $y^q \in Z(B)$. Кроме того, $\Phi(B) = \Phi(P) \times \langle y^q \rangle$ и $Z(B) \leq \Phi(B)$;

(4) если H – нормальная в B подгруппа и $H \neq B$, то H нильпотентна;

(5) если M – максимальная в B подгруппа, то либо M нормальна в B и $M = P \times \langle y^q \rangle$, либо $M = [\Phi(P)]Q^x$ для некоторого $x \in B$.

Лемма 2 [15, лемма 2.5]. Пусть U – нормальная в группе V подгруппа и V/U является $B_{\langle p, q \rangle}$ -группой. Если H – наименьшая в V подгруппа такая, что $HU = V$, то H будет $B_{\langle p, q \rangle}$ -группой.

Лемма 3. Если в группе G нет $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгрупп для всех $q \in \pi(G)$, то группа G p -нильпотентна.

Доказательство (индукцией по порядку группы). Если H – собственная в G подгруппа, то H удовлетворяет условию леммы и по индукции она p -нильпотентна. Теперь по [16, IV.5.4] группа G либо p -нильпотентна, либо является p -замкнутой группой Шмидта, а следовательно, и B -группой. Последнее исключается условием леммы. Лемма доказана.

Лемма 4. Если в группе G нет 2-нильпотентных B -подгрупп четного порядка, то группа G 2-замкнута.

Доказательство. По условию в группе G нет 2-нильпотентных B -подгрупп четного порядка. Поэтому в ней нет и 2-нильпотентных подгрупп Шмидта четного порядка. Значит, группа G 2-замкнута по [18, следствие 3.1]. Лемма доказана.

Обозначим: $S(G)$ – разрешимый радикал группы G , т. е. наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G ; $S_r(G)$ – наибольшая нормальная r -разрешимая подгруппа группы G для простого r .

Далее используется понятие X -перестановочности подгрупп, которое в 2003 г. предложил А. Н. Скиба [19] (см. также [20]). Пусть X – непустое подмножество группы G . Подгруппы A и B называются X -перестановочными, если существует элемент $x \in X$ такой, что $AB^x = B^xA$. Если $X = 1$ – единичная подгруппа, то 1-перестановочные подгруппы – это в точности перестановочные подгруппы. Ясно, что перестановочные подгруппы будут X -перестановочными для любого непустого множества X .

Лемма 5 [20, лемма 2.1]. Пусть A, B и X – подгруппы группы G , N – нормальная в G подгруппа. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) если A X -перестановочна с B , то B X -перестановочна с A ;
- (2) если A X -перестановочна с B , то AN/N XN/N -перестановочна с BN/N ;
- (3) если A X -перестановочна с B и X – нормальная подгруппа группы G , то AX/X перестановочна с BX/X ;
- (4) если A X -перестановочна с B и $X \leq Y \leq G$, то A Y -перестановочна с B ;
- (5) если A X -перестановочна с B и $X \leq A$ либо $X \leq B$, то A перестановочна с B .

Напомним, что подгруппа, порожденная коммутаторами всех элементов группы G , называется коммутантом группы G и обозначается G' . Таким образом, $G' = \langle [a, b] \mid a, b \in G \rangle$. Нам понадобятся следующие свойства коммутантов.

Лемма 6. (1) Если $H \leq G$, то $H' \leq G'$ [17, лемма 4.2].

(2) Пусть $N \triangleleft G$. Тогда $(G/N)' = G'N/N$ [17, лемма 4.6].

(3) Если $G = HN$ и $N \triangleleft G$, то $G'N = H'N$ [17, лемма 5.8].

Лемма 7. Если подгруппа U группы G перестановочна с коммутантом каждой $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппы группы G , то подгруппа U^x , $x \in G$, также перестановочна с коммутантом каждой $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппы группы G .

Доказательство. Пусть B – $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппа группы G . Тогда B^x тоже $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппа группы G и $(B^x)' = (B')^x$ для любого $x \in G$. По условию $U(B')^{x^{-1}} = (B')^{x^{-1}}U$. Тогда $(U(B')^{x^{-1}})^x = U^xB' = ((B')^{x^{-1}}U)^x = B'U^x$. Лемма доказана.

Лемма 8. Предположим, что в группе G силовская r -подгруппа перестановочна с коммутантом каждой $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппы.

(1) Если $U \leq G$, то силовская r -подгруппа из U перестановочна с коммутантом каждой $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппы из U .

(2) Если N – нормальная в G подгруппа, то силовская r -подгруппа из факторгруппы G/N перестановочна с коммутантом каждой $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппы из G/N .

(3) Если $U \leq G$ и N – нормальная в U подгруппа, то в U/N силовская r -подгруппа перестановочна с коммутантом каждой $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппы из U/N .

Доказательство. (1) Пусть R_1 – силовская r -подгруппа в U . Тогда существует такая силовская r -подгруппа R в G , что $R_1 \leq R$. Пусть S' – коммутант $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппы S из U . По условию $RS' = S'R$. По тождеству Дедекинда $U \cap RS' = (U \cap R)S' = R_1S' = S'R \cap U = S'(R \cap U) = S'R_1$.

(2) Пусть R – силовская r -подгруппа группы G . Тогда RN/N – силовская r -подгруппа в G/N . Пусть B/N – $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппа из G/N . По лемме 2 $B = B_1N$, где B_1 – $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппа. По условию $B_1'R = RB_1'$, а так как нормальная подгруппа перестановочна с любой подгруппой, то $RB_1'N = B_1'NR$. По утверждению (3) леммы 6 $B_1'N = B_1'N$. Значит,

$$R(B'N) = R(B_1'N) = (B_1'N)R = (B'N)R. \quad (1)$$

По утверждению (2) леммы 6

$$(B/N)' = B'N/N. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем

$$(RN/N)(B/N)' = (RN/N)(B'N/N) = (B'N/N)(RN/N) = (B/N)'(RN/N).$$

(3) Утверждение (3) следует из (1) и (2). Лемма доказана.

Замечание 1. Если в условии леммы 8 вместо $B_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппы рассмотреть $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппу, то аналог утверждения (1) будет выполняться, а (2) и (3) – нарушаться.

Признаки r -разрешимости группы

Теорема 1. Если некоторая силовская r -подгруппа группы G $S_r(G)$ -перестановочна со всеми коммутантами 2-нильпотентных B -подгрупп четного порядка, не содержащимися в $S_r(G)$, то группа G r -разрешима.

Доказательство (индукцией по порядку группы). Предположим, что $X = S_r(G) \neq 1$. Если факторгруппа G/X не содержит 2-нильпотентных B -подгрупп четного порядка, то она 2-замкнута по лемме 4, а значит, разрешима. В этом случае группа G r -разрешима и утверждение верно. Следовательно, в факторгруппе G/X содержится 2-нильпотентная B -подгруппа четного порядка B/X .

Пусть R – силовская r -подгруппа группы G , тогда RX/X – силовская r -подгруппа в G/X . По лемме 2 минимальное добавление L к X в B является 2-нильпотентной B -подгруппой четного порядка. Если L содержится в X , то $B = XL$ тоже содержится в X и $B/X = 1$, т. е. получено противоречие. Следовательно, L не содержится в X .

По условию RX -перестановочна с L' . По утверждению (3) леммы 5 RX/X перестановочна с $L'X/X$. Используя лемму 6, получаем

$$\begin{aligned} (RX/X)(B/X)' &= (RX/X)(B'X/X) = (RX/X)(L'X/X) = \\ &= (L'X/X)(RX/X) = (B'X/X)(RX/X) = (B/X)'(RX/X). \end{aligned}$$

Следовательно, RX/X перестановочна с коммутантом $(B/X)' = L'X/X$ 2-нильпотентной B -подгруппы четного порядка B/X и условия теоремы наследуются факторгруппой G/X . По индукции факторгруппа G/X r -разрешима, а значит, r -разрешима и группа G .

Теперь предположим, что $S_r(G) = 1$, и надо доказать следующее утверждение: если силовская r -подгруппа группы G перестановочна со всеми коммутантами 2-нильпотентных B -подгрупп четного порядка, то группа G r -разрешима. Докажем это утверждение индукцией по порядку группы G . Пусть U – собственная подгруппа группы G . По утверждению (1) леммы 8 в подгруппе U силовская r -подгруппа перестановочна с коммутантом каждой 2-нильпотентной B -подгруппы четного порядка. Значит, условия утверждения выполняются для собственной подгруппы U из группы G . Следовательно, по индукции подгруппа U r -разрешима.

Пусть R – силовская r -подгруппа и D – 2-нильпотентная B -подгруппа четного порядка группы G . По лемме 7 $R^x D' = D' R^x$ для любого $x \in G$. Тогда по лемме Кегеля [16, VI.4.10] имеем, что либо $R^G \neq G$, либо $(D')^G \neq G$. Значит, группа G непростая.

Рассмотрим факторгруппу G/N , $N \neq 1$. Тогда RN/N – силовская r -подгруппа в G/N . Пусть B/N – 2-нильпотентная B -подгруппа четного порядка из G/N . Используя утверждение (2) леммы 8, получим $(RN/N)(B/N)' = (B/N)'(RN/N)$. По индукции G/N r -разрешима, следовательно, G r -разрешима. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если некоторая силовская r -подгруппа группы G $S_r(G)$ -перестановочна со всеми коммутантами 2-замкнутых B -подгрупп четного порядка, не содержащимися в $S_r(G)$, то группа G r -разрешима.*

Доказательство. Применим индукцию к порядку группы G . Предположим, что $X = S_r(G) \neq 1$. Если в факторгруппе G/X нет 2-замкнутых B -подгрупп четного порядка, то она 2-нильпотентна по лемме 3, а значит, разрешима. В этом случае группа G r -разрешима и утверждение верно. Следовательно, в факторгруппе G/X содержится 2-замкнутая B -подгруппа четного порядка B/X . Далее, повторяя соответствующую часть доказательства теоремы 1, заменив в нем только 2-нильпотентность B -подгруппы на 2-замкнутость, получаем, что группа G r -разрешима.

Теперь предположим, что $S_r(G) = 1$, и надо доказать следующее утверждение: если силовская r -подгруппа группы G перестановочна со всеми коммутантами 2-замкнутых B -подгрупп четного порядка, то группа G r -разрешима. Доказательство проведем индукцией по порядку группы G . Пусть U – собственная подгруппа группы G . Тогда по утверждению (1) леммы 8 силовская r -подгруппа из U перестановочна с коммутантами 2-замкнутых B -подгрупп четного порядка из U . По индукции подгруппа U r -разрешима.

Пусть R – силовская r -подгруппа и D – 2-замкнутая B -подгруппа четного порядка группы G . По лемме 7 $R^x D' = D' R^x$ для любого $x \in G$. Тогда по лемме Кегеля [16, VI.4.10] получаем, что либо $R^G \neq G$, либо $(D')^G \neq G$. Значит, группа G непростая. Рассмотрим факторгруппу G/N , $1 \neq N \triangleleft G$. По утверждению (2) леммы 8 силовская RN/N r -подгруппа перестановочна с коммутантом 2-замкнутой B -подгруппы четного порядка из G/N . Тогда по индукции подгруппа G/N r -разрешима. Следовательно, группа G r -разрешима. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если в группе G коммутант каждой не содержащейся в $S(G)$ 2-замкнутой B -подгруппы четного порядка $S(G)$ -перестановочен с коммутантом каждой не содержащейся в $S(G)$ 2-нильпотентной B -подгруппы четного порядка, то группа G разрешима.*

Доказательство. Применим индукцию к порядку группы G . Пусть N – нормальная в G подгруппа, U/N и V/N – 2-замкнутая и 2-нильпотентная B -подгруппы четного порядка из G/N , не содержащиеся в $S(G/N)$. По лемме 2 $U = U_1N$ и $V = V_1N$, где U_1 и V_1 – 2-замкнутая и 2-нильпотентная B -подгруппы четного порядка соответственно. Если $U_1 \leq S(G)$, то $U/N = U_1N/N \leq S(G/N)$. Получено противоречие. Поэтому $U_1 \not\leq S(G)$, аналогично $V_1 \not\leq S(G)$.

По условию $U_1'V_1' = V_1'U_1'$. Так как нормальная подгруппа перестановочна с любой подгруппой, то

$$(U_1'N)(V_1'N) = (V_1'N)(U_1'N).$$

По лемме 6 $U_1'N = U'N$ и $V_1'N = V'N$, поэтому $(U'N)(V'N) = (V'N)(U'N)$. Также по лемме 6

$$(U/N)'(V/N)' = (V/N)'(U/N)'.$$

Таким образом, условия теоремы выполняются для факторгруппы G/N . Если $N \neq 1$, то по индукции G/N разрешима. Поэтому надо считать, что $S(G) = 1$.

Докажем, что группа G непростая. Пусть $H = [H_2]H_2$ – 2-замкнутая B -подгруппа четного порядка и $D = [D_2]D_2$ – 2-нильпотентная B -подгруппа четного порядка группы G . По условию $H_2D_2 = D_2H_2$ и подгруппа H_2D_2 разрешима как бипримарная группа. По лемме 7 $H_2D_2^x = D_2^xH_2$ для любого $x \in G$, в частности $G \neq H_2D_2$. По лемме Кегеля [16, VI.4.10] получаем, что либо $H_2^G \neq G$, либо $D_2^G \neq G$. Значит, группа G непростая.

Рассмотрим собственную подгруппу Y группы G . Пусть T и S – 2-замкнутая и 2-нильпотентная B -подгруппы четного порядка из Y соответственно. По условию $S'T' = T'S'$. Следовательно, для собственной подгруппы Y условия теоремы выполняются и по индукции Y разрешима.

Так как группа G непростая, то в ней существует отличная от единицы собственная нормальная подгруппа N . Подгруппа N и факторгруппа G/N разрешимы. Следовательно, группа G разрешима. Теорема доказана.

Замечание 2. Согласно теореме Буриченко [21], для любой группы X существует группа G и ее абелева нормальная подгруппа N такая, что $G/N \cong X$ и все подгруппы простых порядков и порядка 4 из G содержатся в подгруппе N . Так как в коммутанте каждой подгруппы Шмидта все неединичные элементы имеют простые порядки и порядок 4, то в группе G из теоремы Буриченко коммутанты всех подгрупп Шмидта содержатся в подгруппе N . В частности, в G коммутанты 2-нильпотентных и 2-замкнутых подгрупп Шмидта четного порядка перестановочны. Поэтому в теоремах 1–3 заменить B -подгруппу на подгруппу Шмидта нельзя.

Библиографические ссылки

1. Шмидт ОЮ. Группы, все подгруппы которых специальные. *Математический сборник*. 1924;31(3–4):366–372.
2. Кузенный НФ, Левищенко СС. Конечные группы Шмидта и их обобщения. *Український математичний журнал*. 1991; 43(7–8):963–968.
3. Монахов ВС. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения. В: *Труды Украинского математического конгресса: сборник трудов*. Киев: Институт математики НАН Украины; 2002. с. 81–90.
4. Беркович ЯГ, Пальчик ЭМ. О перестановочности подгрупп конечной группы. *Сибирский математический журнал*. 1967;8(4):741–753.
5. Княгина ВН, Монахов ВС. О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта. *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2010;16(3):130–139.
6. Княгина ВН, Монахов ВС. О перестановочности максимальных подгрупп с подгруппами Шмидта. *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2011;17(4):126–133.
7. Княгина ВН, Монахов ВС. О перестановочности n -максимальных подгрупп с подгруппами Шмидта. *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2012;18(3):125–130.
8. Монахов ВС. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта. *Математические заметки*. 1995;58(5):717–722.
9. Княгина ВН, Монахов ВС. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта. *Сибирский математический журнал*. 2004;45(6):1316–1322.
10. Княгина ВН, Монахов ВС. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта. *Алгебра и логика*. 2007;46(4): 448–458.
11. Ведерников ВА. Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта. *Алгебра и логика*. 2007;46(6):669–687.
12. Kniashina VN, Monakhov VS. Finite groups with Hall Schmidt subgroups. *Publicationes Mathematicae Debrecen*. 2012;81(3–4): 341–350.
13. Al-Sharo KhA, Skiba AN. On finite groups with σ -subnormal Schmidt subgroups. *Communications in Algebra*. 2017;45(10): 4158–4165. DOI: 10.1080/00927872.2016.1236938.

14. Berkovich Y, Janko Z. *Groups of Prime Power Order. Volume 3*. Berlin: Walter de Gruyter; 2011.
15. Княгина ВН. О произведении B -группы и примарной группы. *Проблемы физики, математики и техники*. 2017;3(32): 52–57.
16. Huppert B. *Endliche Gruppen I*. Berlin: Springer-Verlag; 1967. DOI: 10.1007/978-3-642-64981-3.
17. Монахов ВС. *Введение в теорию конечных групп и их классов*. Минск: Вышэйшая школа; 2006.
18. Монахов ВС. О подгруппах Шмидта конечных групп. *Вопросы алгебры*. 1998;13:153–171.
19. Скиба АН. H -permutable subgroups. *Известия Гомельского государственного университета*. 2003;4:37–39.
20. Guo W, Shum KP, Skiba AN. X -semipermutable subgroups of finite groups. *Journal of Algebra*. 2007;315(1):31–41. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2007.06.002.
21. Буриченко ВП. О группах, элементы малых порядков которых порождают малую подгруппу. *Математические заметки*. 2012;92(3):361–367. DOI: 10.4213/mzm8972.

References

1. Shmidt OJu. [Groups, whose all subgroups are special]. *Matematicheskii sbornik*. 1924;31(3–4):366–372. Russian.
2. Kuzennyi NF, Levishhenko SS. Schmidt's finite groups and their generalizations. *Ukrains'kyj matematychnyj zhurnal*. 1991; 43(7–8):963–968. Russian.
3. Monakhov VS. [The Schmidt subgroups, its existence, and some of their classes]. In: *Trudy Ukrainського математического конгресса: sbornik trudov*. Kiev: Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine; 2002. p. 81–90. Russian.
4. Berkovich YaG, Pal'chik JeM. [On the commutability of subgroups of a finite group]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal*. 1967; 8(4):741–753. Russian.
5. Knyagina VN, Monakhov VS. On permutability of Sylow subgroups with Schmidt subgroups. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdelenija Rossijskoj akademii nauk*. 2010;16(3):130–139. Russian.
6. Knyagina VN, Monakhov VS. On the permutability of maximal subgroups with Schmidt subgroups. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdelenija Rossijskoj akademii nauk*. 2011;17(4):126–133. Russian.
7. Knyagina VN, Monakhov VS. On the permutability of n -maximal subgroups with Schmidt subgroups. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdelenija Rossijskoj akademii nauk*. 2012;18(3):125–130. Russian.
8. Monakhov VS. [Finite groups with a given set of Schmidt subgroups]. *Matematicheskie zametki*. 1995;58(5):717–722. Russian.
9. Kniagina VN, Monakhov VS. [Finite groups with subnormal Schmidt subgroups]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal*. 2004; 45(6):1316–1322. Russian.
10. Kniagina VN, Monakhov VS. [Finite groups with seminormal Schmidt subgroups]. *Algebra i logika*. 2007;46(4):448–458. Russian.
11. Vedernikov VA. [Finite groups with subnormal Schmidt subgroups]. *Algebra i logika*. 2007;46(6):669–687. Russian.
12. Kniagina VN, Monakhov VS. Finite groups with Hall Schmidt subgroups. *Publicationes Mathematicae Debrecen*. 2012;81(3–4): 341–350.
13. Al-Sharo KhA, Skiba AN. On finite groups with σ -subnormal Schmidt subgroups. *Communications in Algebra*. 2017;45(10): 4158–4165. DOI: 10.1080/00927872.2016.1236938.
14. Berkovich Y, Janko Z. *Groups of Prime Power Order. Volume 3*. Berlin: Walter de Gruyter; 2011.
15. Kniagina VN. On the product of a B -group and a primary group. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*. 2017;3(32): 52–57. Russian.
16. Huppert B. *Endliche Gruppen I*. Berlin: Springer-Verlag; 1967. DOI: 10.1007/978-3-642-64981-3.
17. Monakhov VS. *Vvedenie v teoriju konechnyh grupp i ih klassov* [Introduction to the theory of finite groups and their classes]. Minsk: Vyshhejskaja shkola; 2006. Russian.
18. Monakhov VS. [On Schmidt subgroups of finite groups]. *Voprosy algebry*. 1998;13:153–171. Russian.
19. Skiba AN. H -permutable subgroups. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta*. 2003;4:37–39.
20. Guo W, Shum KP, Skiba AN. X -semipermutable subgroups of finite groups. *Journal of Algebra*. 2007;315(1):31–41. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2007.06.002.
21. Burichenko VP. [On groups whose small- order elements generate a small subgroup]. *Matematicheskie zametki*. 2012;92(3): 361–367. Russian. DOI: 10.4213/mzm8972.

Статья поступила в редколлегию 27.08.2018.
Received by editorial board 27.08.2018.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

УДК 517.925

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО И ПЯТОГО ПОРЯДКОВ

Б. С. КАЛИТИН¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Исследуются задачи устойчивости нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений методом знакопостоянных функций Ляпунова. Выделены типы скалярных нелинейных дифференциальных уравнений четвертого и пятого порядков общего вида, для которых определены знакопостоянные вспомогательные функции. Для таких уравнений получены достаточные условия устойчивости в целом. Результаты совпадают с необходимыми и достаточными условиями в соответствующем линейном случае. Отмечаются преимущества в использовании знакоположительных функций по сравнению с классическим методом применения определительно-положительных функций Ляпунова.

Ключевые слова: скалярное дифференциальное уравнение; равновесие; устойчивость; знакопостоянная функция Ляпунова.

Образец цитирования:

Калитин БС. Устойчивость некоторых дифференциальных уравнений четвертого и пятого порядков. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2019;1:18–27.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-18-27>

For citation:

Kalitin BS. Stability of some differential equations of the fourth-order and fifth-order. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;1:18–27. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-18-27>

Автор:

Борис Сергеевич Калитин – кандидат физико-математических наук, доцент; профессор кафедры аналитической экономики и эконометрики экономического факультета.

Author:

Boris S. Kalitine, PhD (physics and mathematics), docent; professor at the department of analytical economics and econometrics, faculty of economy.
kalitine@yandex.by

STABILITY OF SOME DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FOURTH-ORDER AND FIFTH-ORDER

B. S. KALITINE^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

The article is devoted to the study of the problem of stability of nonlinear ordinary differential equations by the method of semi-definite Lyapunov's functions. The types of fourth-order and fifth-order scalar nonlinear differential equations of general form are singled out, for which the sign-constant auxiliary functions are defined. Sufficient conditions for stability in the large are obtained for such equations. The results coincide with the necessary and sufficient conditions in the corresponding linear case. Studies emphasize the advantages in using the semi-positive functions in comparison with the classical method of applying Lyapunov's definite positive functions.

Key words: scalar differential equation; equilibrium; stability; semi-definite Lyapunov's function.

Введение

Устойчивость решений скалярных дифференциальных уравнений четвертого порядка рассматривалась в работах А. И. Огурцова [1–3]. Подробное изложение и анализ этих результатов содержатся в монографии [4]. Работа [5] посвящена исследованию устойчивости решений скалярных дифференциальных уравнений пятого и шестого порядков. Во всех этих публикациях представлено решение задачи об устойчивости в целом (глобальная асимптотическая устойчивость) с использованием прямого метода Ляпунова [6], подразумевающего построение определенно-положительной функции V с неположительной производной по времени \dot{V} . Критерием качества полученных достаточных условий устойчивости в целом (а именно оценка близости достаточных условий к необходимым) служит тот факт, что в соответствующем линейном случае такие условия являются необходимыми и достаточными для асимптотической устойчивости. В работах [7, гл. 2; 8; 9] решается задача об устойчивости равновесия скалярных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков на основании теории знакопостоянных функций Ляпунова [7].

Предлагаемая статья является продолжением исследований [7–9] для скалярных нелинейных дифференциальных уравнений четвертого и пятого порядков.

Пусть \mathbb{R}^n – вещественное n -мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f(0) = 0, \quad (1)$$

где $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, удовлетворяющая условиям, обеспечивающим единственность решений в пространстве \mathbb{R}^n . Решение (1), проходящее через точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в момент времени $t = 0$, будем обозначать $x(x_0, t)$, т. е. $x(x_0, 0) = x_0$. Система (1) обладает тривиальным решением $x = 0$.

Напомним следующие понятия и определения теории устойчивости [10, с. 18–20]. Решение $x = 0$ системы (1) является:

- устойчивым, если $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) (\forall x_0 \in B_\delta) \Rightarrow \|x(x_0, t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$;
- притягивающим, если $(\exists \sigma > 0) (\forall \alpha > 0) (\exists T > 0) (\forall x_0 \in B_\sigma) \Rightarrow \|x(x_0, t)\| < \alpha \quad \forall t \geq T$;
- асимптотически устойчивым, если оно устойчивое и притягивающее;
- устойчивым в целом, если оно асимптотически устойчиво и для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$ решение $x(x_0, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$;
- неустойчивым, если $(\exists \varepsilon > 0) (\forall \delta > 0) (\exists x_0 \in B_\delta) (\exists t^* \geq 0) \Rightarrow \|x(x_0, t^*)\| \geq \varepsilon$.

Пусть \mathbb{R}^+ – множество неотрицательных действительных чисел, $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ – множество непрерывно дифференцируемых функций из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^+ . Если $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$, то через

$$\dot{V}(x_0) = \frac{dV(x_0)}{dt} = \left\langle \frac{\partial V(x_0)}{\partial x}, f(x_0) \right\rangle$$

обозначают производную по времени функции V в силу системы (1) в точке x_0 .

На основании теорем 3.3.2 и 3.3.3 [11, с. 151–152] о глобальной асимптотической устойчивости компактного положительно инвариантного множества динамической системы сформулируем соответствующее утверждение относительно свойств устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений (1).

Теорема 1 [11, с. 151–152]. *Предположим, что для системы (1) существует функция $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ такая, что:*

$$1) V(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, V(0) = 0;$$

$$2) \dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

3) множество $Y_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$ не содержит ограниченных отрицательных полутраекторий, кроме нулевой;

4) все решения системы (1) ограничены при $t \geq 0$.

Тогда решение $x = 0$ системы (1) устойчиво в целом.

В исследованиях, проводимых ниже, понадобится также следующая лемма.

Лемма. Пусть задана система дифференциальных уравнений $\dot{x} = Ax + f(t)$, где A – постоянная $n \times n$ -матрица; $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция. Предположим, что:

1) все характеристические корни $\lambda_j(A)$ матрицы A имеют отрицательные действительные части, $\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0, j = 1, n$;

2) функция $f(t)$ ограничена при $t \geq 0$.

Тогда все решения системы $\dot{x} = Ax + f(t)$ ограничены при $t \geq 0$.

Доказательство. Для произвольного решения $x(t)$, $x(0) = x_0$, заданной системы дифференциальных уравнений при $t > 0$ справедлива формула [12, с. 193]

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds, \quad t > 0.$$

Отсюда можно записать неравенство для нормы решения:

$$\|x(t)\| \leq \|e^{At}\| \|x_0\| + \int_0^t \|e^{A(t-s)}\| \|f(s)\| ds, \quad t > 0.$$

Заметим, что для нормы матрицы имеет место следующая оценка: $\|e^{At}\| \leq Ne^{-\alpha t}, t \geq 0$ [13, с. 282], где $N > 0, 0 < \alpha < -\max_j \operatorname{Re}(\lambda_j(A))$. Кроме того, по предположению ограниченности вектор-функции $f(t)$ существует число $M > 0$, для которого $\|f(t)\| \leq M$ при всех $t \geq 0$. В результате для решения $x(t)$ получаем оценку в виде

$$\|x(t)\| \leq Ne^{-\alpha t} \|x_0\| + NM \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} ds = Ne^{-\alpha t} \|x_0\| + \frac{NM}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}), \quad t > 0.$$

Это и доказывает ограниченность решения $x(t)$.

Теорема 1 и лемма будут использованы для решения проблемы Айзермана (см. [4]).

Пусть $x(t)$ ($x: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$) – скалярная k раз непрерывно дифференцируемая функция. Для краткости положим

$$\dot{x} = x^{(1)} = \frac{dx}{dt}, \ddot{x} = x^{(2)} = \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, x^{(k)} = \frac{d^k x}{dt^k} \quad (x^{(0)} = x)$$

для производных по времени высших порядков функции $x(t)$.

Уравнения четвертого порядка

1. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$x^{(4)} + (p + \alpha)\ddot{x} + (q + \alpha p + \beta)\dot{x} + (\alpha q + \beta p)x + \beta q x = 0, \quad (2)$$

где α, β и q – постоянные; $p = p(x, \dot{x}, \ddot{x})$ – непрерывная функция, обеспечивающая единственность решений уравнения (2) для всех $x \in \mathbb{R}$.

Перейдем от (2) к соответствующей системе дифференциальных уравнений с использованием следующей замены переменных:

$$y = \dot{x}, \quad z = \ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x, \quad u = \ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta\dot{x}. \quad (3)$$

Отсюда получаем

$$\dot{y} = \ddot{x} = -\beta x - \alpha y + z, \quad \dot{z} = u.$$

Кроме того, согласно (2) имеем равенство $\dot{u} + pu + qz = 0$, т. е. дифференциальное уравнение по переменной u . Из предыдущего следуют также равенства

$$\ddot{x} = -\beta\dot{x} - \alpha\dot{y} + \dot{z} = -\beta y - \alpha(-\beta x - \alpha y + z) + u = \alpha\beta x + (\alpha^2 - \beta)y - \alpha z + u.$$

Таким образом, в результате замены (3) приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\beta x - \alpha y + z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -qz - \varphi(x, y, z, u)u, \end{cases} \quad (4)$$

где положено

$$\varphi(x, y, z, u) = p(x, y, -\beta x - \alpha y + z, \alpha\beta x + (\alpha^2 - \beta)y - \alpha z + u). \quad (5)$$

Рассмотрим знакопостоянную функцию

$$V(x, y, z, u) = 0,5qz^2 + 0,5u^2. \quad (6)$$

Ее производная по времени в силу системы (4) равна

$$\dot{V}(x, y, z, u) = -\varphi(x, y, z, u)u^2.$$

Для утверждения об устойчивости в целом предположим, что выполнены условия

$$\begin{aligned} \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad q > 0; \\ \varphi(x, y, z, u) > 0 \quad \forall (x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4. \end{aligned} \quad (7)$$

Согласно условию 3) теоремы 1 потребуем, чтобы множество $Y_\infty \setminus \{0\}$, где производная $\dot{V}(x, y, z, u) = 0$, не содержало ограниченных отрицательных полутраекторий. Действительно, если бы такая полутраектория $\gamma^- = \gamma^-(x, y, z, u) \neq \{0\}$ существовала, то вдоль нее компонента $u(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$, а значит, и ее производная по времени $\dot{u}(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$. Вдоль полутраектории γ^- система (4) трансформируется следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\beta x - \alpha y + z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -qz - \varphi(x, y, z, u)u, \\ u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\beta x - \alpha y + z, \\ \dot{z} = 0, \\ 0 = -qz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\beta x - \alpha y + z, \\ z = 0. \end{cases}$$

То есть вдоль γ^- система (4) сводится к упрощенной линейной системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\beta x - \alpha y. \end{cases}$$

Согласно критерию Гурвица (см. [4]), асимптотическая устойчивость нулевого решения этой системы определяется неравенствами $\alpha > 0, \beta > 0$, гарантированными требованием (7). Следовательно, такая линейная система дифференциальных уравнений не может содержать отличных от нулевой ограниченных отрицательных полутраекторий, и мы приходим к противоречию с существованием γ^- . Таким образом, функция (6) удовлетворяет условию 3) теоремы 1.

Покажем теперь, что всякое решение $(x(t), y(t), z(t), u(t))$ системы (4) ограничено при $t > 0$. Действительно, так как $q > 0$, то наличие знакоположительной функции (6) со знакоотрицательной производной

по времени означает, что решение $(x(t), y(t), z(t), u(t))$ системы (4) ограничено по координатам $(z(t), u(t))$. Покажем ограниченность по остальным координатам.

Рассмотрим два первых уравнения системы (4), предполагая, что $z(t)$ – компонента решения $(x(t), y(t), z(t), u(t))$. Имеем

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\beta x - \alpha y + z(t). \end{cases} \quad (8)$$

В силу требования $\alpha > 0, \beta > 0$ матрица однородной системы $\dot{x} = y, \dot{y} = -\beta x - \alpha y$ обладает лишь характеристическими корнями с отрицательными действительными частями. Кроме того, мы показали ограниченность функции $z(t)$. Следовательно, для системы дифференциальных уравнений (8) выполнены все условия леммы, которая дает ограниченность по координатам $(x(t), y(t))$.

Таким образом, выполнены все требования теоремы 1, определяющей устойчивость в целом нулевого решения системы (4).

Поскольку множество точек $(x, y, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$ положительно инвариантно, то неустойчивость решения $x = y = 0$ системы (8) влечет неустойчивость решения $x = y = z = u = 0$ исходной системы (4).

В результате приходим к справедливости следующей теоремы.

Теорема 2. Нулевое решение $x = \dot{x} = \ddot{x} = \ddot{\ddot{x}} = 0$ скалярного дифференциального уравнения (2) с постоянными α, β, q и функцией $p = p(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}})$ устойчиво в целом, если выполнены условия (7), где функция $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ определена соотношениями (3) и (5).

Если же $\beta < 0$ или $\beta \geq 0, \alpha < 0$, то нулевое решение уравнения (2) неустойчиво.

Замечание 1. Для линейного дифференциального уравнения (2) проблема Айзермана имеет положительное решение относительно коэффициента p .

2. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$x^{(4)} + (\alpha + s)\ddot{x} + (\beta + \alpha s)\ddot{x} + (\beta s + \gamma)\dot{x} + \gamma s x = 0, \quad (9)$$

где α, β и γ – постоянные; $s = s(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}})$ – непрерывная функция, обеспечивающая единственность решений для всех $x \in \mathbb{R}$.

Перейдем от уравнения (9) к соответствующей системе дифференциальных уравнений с помощью замены переменных

$$y = \dot{x}, \quad z = \dot{y}, \quad u = \ddot{x} + \alpha \ddot{x} + \beta \dot{x} + \gamma x. \quad (10)$$

Тогда с учетом представления (9) получим дифференциальное уравнение $\dot{u} + su = 0$ относительно переменной u .

Выведем дифференциальное уравнение относительно переменной z . Из (10) имеем

$$\dot{z} = \ddot{y} = \ddot{\ddot{x}} = -\gamma x - \beta \dot{x} - \alpha \ddot{x} + u = -\gamma x - \beta y - \alpha z + u.$$

Из предыдущего следует также, что $\ddot{x} = \dot{y} = z$. Таким образом, в результате использования новых переменных (10) приходим к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -\gamma x - \beta y - \alpha z + u, \\ \dot{u} = -\varphi(x, y, z, u)u, \end{cases} \quad (11)$$

где положено

$$\varphi(x, y, z, u) = s(x, y, z, -\gamma x - \beta y - \alpha z + u). \quad (12)$$

Рассмотрим знакопостоянную функцию с соответствующей производной по времени в силу системы (11):

$$V(x, y, z, u) = 0,5u^2, \quad \dot{V}(x, y, z, u) = -\varphi(x, y, z, u)u^2. \quad (13)$$

Потребуем, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} \alpha > 0, \quad \alpha\beta > \gamma > 0; \\ \varphi(x, y, z, u) > 0 \quad \forall (x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4. \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда производная \dot{V} будет неположительной.

Согласно условию 3) теоремы 1 потребуем, чтобы множество $Y_\infty \setminus \{0\}$, где производная $\dot{V}(x, y, z, u) = 0$, не содержало ограниченных отрицательных полутраекторий. Действительно, если бы такая полутраектория $\gamma^- = \gamma^-(x, y, z, u) \neq \{0\}$ существовала, то вдоль нее компонента $u(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$, а значит, и ее производная по времени $\dot{u}(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$. Вдоль полутраектории γ^- система (11) преобразуется в систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -\gamma x - \beta y - \alpha z. \end{cases} \quad (15)$$

На основании критерия Гурвица нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда $\alpha > 0$, $\alpha\beta > \gamma > 0$, что обеспечено условием (14). Следовательно, линейная система (15) не может содержать отличных от нулевой ограниченных отрицательных полутраекторий, что приводит к противоречию с существованием γ^- . Таким образом, функция (13) удовлетворяет условию 3) теоремы 1.

Покажем теперь выполнение условия 4) теоремы 1, т. е. что все решения системы (14) ограничены. Действительно, наличие знакоположительной функции (13) со знакоотрицательной производной означает, что всякое решение $(x(t), y(t), z(t), u(t))$ системы (11) ограничено по координате $u(t)$. Покажем ограниченность по остальным координатам. С этой целью рассмотрим первые три уравнения системы дифференциальных уравнений (11):

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -\gamma x - \beta y - \alpha z + u(t), \end{cases}$$

где $u(t)$ – компонента решения $(x(t), y(t), z(t), u(t))$. С учетом требования $\alpha > 0$, $\alpha\beta > \gamma > 0$ матрица соответствующей однородной системы имеет лишь характеристические корни с отрицательными действительными частями. Кроме того, показана ограниченность функции $u(t)$. Следовательно, выполнены все условия леммы, из которой следует ограниченность решений системы (11) и по координатам $(x(t), y(t), z(t))$.

Таким образом, удовлетворены все требования теоремы 1, и мы приходим к следующей теореме.

Теорема 3. Нулевое решение $x = \dot{x} = \ddot{x} = \ddot{\ddot{x}} = 0$ скалярного дифференциального уравнения (9) с постоянными α , β , γ и функцией $s = s(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}})$ устойчиво в целом, если выполнены условия (14), где функция $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ определена соотношениями (11) и (12).

Если же нулевое решение линейной системы (15) неустойчиво, то нулевое решение уравнения (9) неустойчиво.

Здесь утверждение о неустойчивости следует из того факта, что множество точек $(x, y, z, 0) \in \mathbb{R}^4$ системы (11) положительно инвариантно.

Замечание 2. Для линейного дифференциального уравнения (9) проблема Айзермана имеет положительное решение относительно коэффициента s .

Дифференциальные уравнения пятого порядка

1. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$x^{(5)} + (p + \alpha)x^{(4)} + (q + \alpha p + \beta)\ddot{x} + (\alpha q + \beta p + \gamma)\ddot{x} + (\beta q + p\gamma)\dot{x} + \gamma q x = 0, \quad (16)$$

где α, β, γ, q – постоянные; $p = p(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, x^{(4)})$ – непрерывная функция, обеспечивающая единственность решений для $x \in \mathbb{R}$.

Характеристическое уравнение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $\alpha, \beta, \gamma, p, q$, соответствующего уравнению (16), можно представить в виде

$$(\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma)(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0. \quad (17)$$

Отсюда, согласно критерию Гурвица, следует, что корни характеристического уравнения линейного уравнения (16) будут иметь отрицательные вещественные части тогда и только тогда, когда наряду с неравенствами $p > 0$, $q > 0$ выполняются неравенства

$$\alpha > 0, \alpha\beta > \gamma > 0. \quad (18)$$

Отметим, что характеристическое уравнение любого линейного дифференциального уравнения пятого порядка может быть записано в форме (17) вне зависимости от его корней (вещественных или комплексных).

Перейдем от уравнения (16) к соответствующей системе дифференциальных уравнений с использованием замены переменных

$$y = \dot{x}, z = \ddot{x}, u = \ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x + \gamma x, w = x^{(4)} + \alpha\ddot{x} + \beta\dot{x} + \gamma\dot{x}. \quad (19)$$

Отсюда следует, что

$$\dot{z} = \ddot{x} = -\gamma x - \beta y - \alpha z + u, \dot{u} = w.$$

Кроме того, согласно (16) имеем равенство $\dot{w} + pw + qu = 0$, т. е. дифференциальное уравнение по переменной w .

Запишем вытекающее из (19) представление производной $x^{(4)}$:

$$\begin{aligned} x^{(4)} &= w - \alpha\ddot{x} - \beta\dot{x} - \gamma\dot{x} = w - \alpha(u - \alpha z - \beta y - \gamma x) - \beta z - \gamma y = \\ &= \alpha\gamma x + (\alpha\beta - \gamma)y + (\alpha^2 - \beta)z - \alpha u + w. \end{aligned}$$

Таким образом, в результате замены переменных (19) приходим к системе из пяти дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -\gamma x - \beta y - \alpha z + u, \\ \dot{u} = w, \\ \dot{w} = -qu - \varphi(x, y, z, u, w)w, \end{cases} \quad (20)$$

где положено

$$\varphi(x, y, z, u, w) = p(x, y, z, -\gamma x - \beta y - \alpha z + u, \alpha\gamma x + (\alpha\beta - \gamma)y + (\alpha^2 - \beta)z - \alpha u + w). \quad (21)$$

Рассмотрим знакопостоянную функцию

$$V(x, y, z, u, w) = 0,5qu^2 + 0,5w^2. \quad (22)$$

Ее производная по времени в силу (20) равна

$$\dot{V}(x, y, z, u, w) = -\varphi(x, y, z, u, w)w^2.$$

Наряду с условиями (18) потребуем выполнение неравенств

$$q > 0 \text{ и } \varphi(x, y, z, u, w) > 0 \quad \forall (x, y, z, u, w) \in \mathbb{R}^5. \quad (23)$$

Тогда функция V будет знакоположительной, а ее производная \dot{V} – знакоотрицательной, значит, будут выполнены условия 1) и 2) теоремы 1.

На множестве Y_∞ , где $\dot{V}(x, y, z, u, w) = 0$, справедливы равенства $u = 0, w = 0$. Аналогично рассуждениям, используемым при исследовании системы четвертого порядка (4), можно показать, что функция (22) удовлетворяет условию 3) теоремы 1, если редуцированная система (20), а именно линейная система дифференциальных уравнений третьего порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -\gamma x - \beta y - \alpha z, \end{cases} \quad (24)$$

имеет асимптотически устойчивое нулевое решение. По критерию Гурвица последнее будет выполняться тогда и только тогда, когда коэффициенты системы (24) подчинены требованиям (18).

Таким образом, неравенства (18) и (23) обеспечивают выполнение условия 3) теоремы 1.

Наконец, для выполнения условия 4) теоремы 1 покажем, что всякое решение $(x(t), y(t), z(t), u(t), w(t))$ системы (20) ограничено при $t > 0$. Действительно, так как $q > 0$, то наличие знакоположительной функции (22) со знакоотрицательной производной по времени означает, что решение

$(x(t), y(t), z(t), u(t), w(t))$ системы (20) ограничено по координатам $(u(t), w(t))$. Рассмотрим первые три уравнения системы (20) с функцией $u(t)$, являющейся компонентой решения $(x(t), y(t), z(t), u(t), w(t))$. Имеем

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -\gamma x - \beta y - \alpha z + u(t). \end{cases} \quad (25)$$

С учетом требования (18) матрица системы (25) (при отсутствии ее неоднородной части $u(t)$) имеет лишь характеристические корни с отрицательными действительными частями. Кроме того, показана ограниченность функции $u(t)$. Следовательно, выполнены все условия леммы, из которой следует ограниченность и по координатам $(x(t), y(t), z(t))$.

Таким образом, на основании теоремы 1 условия (18) и (23) дают устойчивость в целом нулевого решения системы (20).

Теорема 4. Нулевое решение $x = \dot{x} = \ddot{x} = \ddot{\ddot{x}} = x^{(4)} = 0$ скалярного дифференциального уравнения (16) с постоянными α, β, γ, q и функцией $p = p(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, x^{(4)})$ устойчиво в целом, если выполнены условия (18) и (23), где функция $\varphi : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ определена соотношениями (19) и (21).

Если нулевое решение линейной системы (24) неустойчиво, то нулевое решение уравнения (16) неустойчиво.

Здесь утверждение о неустойчивости следует из свойства положительной инвариантности множества точек $(x, y, z, 0, 0) \in \mathbb{R}^5$ системы (20).

Замечание 3. Для линейного дифференциального уравнения (16) проблема Айзермана имеет положительное решение относительно постоянного коэффициента p .

2. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$x^{(5)} + (\alpha + s)x^{(4)} + (\alpha s + \beta)\ddot{x} + (\beta s + \gamma)\dot{x} + (\delta + s\gamma)\dot{x} + \delta s x = 0, \quad (26)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – постоянные; $s = s(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, x^{(4)})$ – непрерывная функция, обеспечивающая единственность решений при всех $x \in \mathbb{R}$.

Перейдем от уравнения (26) к соответствующей системе дифференциальных уравнений с помощью замены переменных

$$y = \dot{x}, z = \dot{y}, u = \dot{z}, w = x^{(4)} + \alpha\ddot{x} + \beta\dot{x} + \gamma\dot{x} + \delta x. \quad (27)$$

Выведем дифференциальное уравнение относительно переменной w . Из (26) следует, что $\dot{w} + sw = 0$. Такое равенство получается дифференцированием последнего уравнения (27) и путем детального рассмотрения левой части уравнения (26) с выделением в нем выражений для w и \dot{w} .

Остается определить дифференциальное уравнение относительно переменной u . Согласно (27) $\dot{u} = \ddot{z} = \ddot{\dot{y}} = x^{(4)}$. Кроме того, последнее равенство (27) дает

$$x^{(4)} = w - \alpha\ddot{x} - \beta\dot{x} - \gamma\dot{x} - \delta x = w - \alpha u - \beta z - \gamma y - \delta x.$$

Поэтому получаем

$$\dot{u} = w - \alpha u - \beta z - \gamma y - \delta x.$$

Таким образом, в результате замены переменных (27) приходим к системе из пяти дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u + w, \\ \dot{w} = -\varphi(x, y, z, u, w)w, \end{cases} \quad (28)$$

где положено

$$\varphi(x, y, z, u, w) = s(x, y, z, u, -\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u + w). \quad (29)$$

Рассмотрим знакопостоянную функцию с соответствующей производной по времени в силу системы (28)

$$V = 0,5w^2, \dot{V} = -\varphi(x, y, z, u, w)w^2. \quad (30)$$

Потребуем выполнение условий

$$\begin{aligned} \alpha > 0, \alpha\beta > \gamma, \alpha\beta\gamma - \alpha^2\delta - \gamma^2 > 0, \delta > 0; \\ \varphi(x, y, z, u, w) > 0 \quad \forall (x, y, z, u, w) \in \mathbb{R}^5. \end{aligned} \quad (31)$$

Тогда функция V – знакоположительна, ее производная \dot{V} – знакоотрицательна, а значит, выполнены условия 1) и 2) теоремы 1.

На множестве Y_∞ , где $\dot{V}(x, y, z, u, w) = 0$, выполняется равенство $w = 0$. Аналогично рассуждениям, проведенным при исследовании системы четвертого порядка (11), можно показать, что функция (30) удовлетворяет условию 3) теоремы 1, если редуцированная система (28), а именно линейная система дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u, \end{cases} \quad (32)$$

имеет асимптотически устойчивое нулевое решение. По критерию Гурвица последнее будет достигнуто тогда и только тогда, когда для коэффициентов системы (24) выполнены требования (31). Таким образом, если имеют место неравенства (31), то функция (30) удовлетворяет условию 3) теоремы 1.

Наконец, покажем, что всякое решение $(x(t), y(t), z(t), u(t), w(t))$ системы (28) ограничено при $t > 0$. Действительно, наличие знакоположительной функции (30) со знакоотрицательной производной по времени означает, что решение $(x(t), y(t), z(t), u(t), w(t))$ ограничено по координате $w(t)$. Рассмотрим первые четыре уравнения системы (28) с компонентой $w(t)$ решения $(x(t), y(t), z(t), u(t), w(t))$. Имеем

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u + w(t). \end{cases} \quad (33)$$

В силу (31) матрица соответствующей однородной системы для (33) (отсутствие неоднородной части $w(t)$) имеет лишь характеристические корни с отрицательными действительными частями. Кроме того, показана ограниченность функции $w(t)$. Значит, выполнены все условия леммы, из которой следует ограниченность и по остальным координатам $(x(t), y(t), z(t), u(t))$.

Таким образом, условия (31) обеспечивают выполнение всех требований теоремы 1 и имеет место следующий результат.

Теорема 5. Нулевое решение $x = \dot{x} = \ddot{x} = \ddot{\ddot{x}} = x^{(4)} = 0$ скалярного дифференциального уравнения (26) с постоянными $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и функцией $s = s(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, x^{(4)})$ устойчиво в целом, если выполнены условия (31), где функция $\varphi : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ определена соотношениями (27) и (29).

Если нулевое решение системы (32) неустойчиво, то нулевое решение уравнения (26) неустойчиво.

Здесь утверждение о неустойчивости следует из того факта, что множество точек $(x, y, z, u, 0) \in \mathbb{R}^5$ системы (28) положительно инвариантно.

Замечание 4. Для линейного дифференциального уравнения (26) проблема Айзермана имеет положительное решение относительно постоянного коэффициента s .

Заключение

Достаточные условия устойчивости в целом, полученные в теоремах 2 и 4 относительно коэффициента p и в теоремах 3 и 5 относительно коэффициента s , совпадают с необходимыми и достаточными условиями асимптотической устойчивости в соответствующем линейном случае скалярных дифференциальных уравнений (2), (16) и (9), (26). Это указывает на общепринятую качественную оценку полученных результатов задачи устойчивости в целом.

Отметим также, что для каждого из двух пар исследованных скалярных дифференциальных уравнений четвертого и пятого порядков задача Айзермана имеет следующую особенность ее решения. В отличие от традиционной постановки проблемы Айзермана [4] постоянный коэффициент в соответствующем линейном случае можно заменить функцией, зависящей от всех фазовых переменных соответствующей системы дифференциального уравнения, и при этом сохраняется свойство устойчивости в целом.

Библиографические ссылки

1. Огурцов АИ. Об устойчивости в целом решений нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. *Известия вузов. Математика*. 1958;1(2):124–129.
2. Огурцов АИ. Об устойчивости решений двух нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. *Прикладная математика и механика*. 1959;23(1):179–181.
3. Огурцов АИ. Об устойчивости решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. *Известия вузов. Математика*. 1959;3:200–209.
4. Барбашин ЕА. *Функции Ляпунова*. Москва: Наука; 1970. 240 с.
5. Огурцов АИ. Об устойчивости решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений пятого и шестого порядков. *Математические записки*. 1962;3(2):78–93.
6. Ляпунов АМ. *Общая задача об устойчивости движения*. Москва: Гостехиздат; 1950. 472 с.
7. Калитин БС. *Устойчивость дифференциальных уравнений (Метод знакопостоянных функций Ляпунова)*. Саарбрюккен: LAP; 2012. 223 с.
8. Калитин БС. Об устойчивости уравнения Лъенара. *Известия вузов. Математика*. 2018;10:17–28.
9. Калитин БС. Об устойчивости дифференциальных уравнений третьего порядка. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2018;2:25–33.
10. Руш Н, Абетс П, Лалуа М. *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости*. Москва: Мир; 1980. 300 с.
11. Калитин БС. *Устойчивость динамических систем (Метод знакопостоянных функций Ляпунова)*. Саарбрюккен: LAP; 2013. 259 с.
12. Амелькин ВВ. *Дифференциальные уравнения*. Минск: БГУ; 2012. 288 с.
13. Демидович БП. *Лекции по математической теории устойчивости*. Москва: Наука; 1967. 472 с.

References

1. Ogurtsov AI. On the stability in general of solutions of third-order and fourth-order non-linear differential equations. *Izvestiya vuzov. Matematika*. 1958;1(2):124–129. Russian.
2. Ogurtsov AI. On the stability of solutions of two non-linear differential equations of the third and fourth orders. *Applied Mathematics and Mechanics*. 1959;23(1):179–181. Russian.
3. Ogurtsov AI. On the stability of solutions of certain third-order and fourth-order non-linear differential equations. *Izvestiya vuzov. Matematika*. 1959;3:200–209. Russian.
4. Barbashin EA. *Funktsii Lyapunova* [Lyapunov functions]. Moscow: Nauka; 1970. 240 p. Russian.
5. Ogurtsov AI. On the stability of solutions of certain nonlinear differential equations of the fifth and sixth orders. *Matematicheskie zapiski*. 1962;3(2):78–93. Russian.
6. Lyapunov AM. *Obshchaya zadacha ob ustoychivosti dvizheniya* [The general problem of the stability of motion]. Moscow: Gostekhizdat; 1950. 472 p. Russian.
7. Kalitine BS. *Ustoychivost' differentsial'nykh uravnenii (Metod znakopostoyannykh funktsii Lyapunova)* [Stability of differential equations (Lyapunov's method of constant-valued functions)]. Saarbrücken: LAP; 2012. 223 p. Russian.
8. Kalitine BS. On the stability of the Liénard equation. *Izvestiya vuzov. Matematika*. 2018;10:17–28. Russian.
9. Kalitine BS. On the stability of third order differential equations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2018;2:25–33. Russian.
10. Rouche N, Habets P, Laloy M. *Stability theory by Lyapunov's direct method*. Berlin: Springer; 1977. 300 p. Russian edition: Rouche N, Habets P, Laloy M. *Pryamoi metod Lyapunova v teorii ustoychivosti*. Moscow: Mir; 1980. 300 p.
11. Kalitine BS. *Ustoychivost' dinamicheskikh sistem (Metod znakopostoyannykh funktsii Lyapunova)* [Stability of dynamical systems (Lyapunov's method of constant-valued functions)]. Saarbrücken: LAP; 2013. 259 p.
12. Amel'kin VV. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. Minsk: Belarusian State University; 2012. 288 p. Russian.
13. Demidovich BP. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoychivosti* [Lectures on the mathematical theory of stability]. Moscow: Nauka; 1967. 472 p. Russian.

Статья поступила в редколлегию 26.10.2017.
Received by editorial board 26.10.2017.

УДК 517.926.4

О СПЕКТРАХ ВЕРХНИХ ЧАСТОТ СЕРГЕЕВА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. С. ВОЙДЕЛЕВИЧ¹⁾

¹⁾Институт математики НАН Беларуси,
ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Беларусь

Известно, что спектры (множества значений) верхних и нижних частот Сергеева нулей, знаков и корней линейного дифференциального уравнения порядка выше двух с непрерывными коэффициентами принадлежат классу суслинских множеств неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой. Более того, для спектров верхних частот уравнений третьего порядка ранее доказано обращение этого результата в предположении принадлежности спектрам нуля. В настоящей работе получено обращение сформулированного утверждения для уравнений четвертого порядка и выше. А именно для произвольного содержащего нуль суслинского подмножества S неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой и натурального числа n , большего 3, построено линейное дифференциальное уравнение порядка n , спектры верхних частот Сергеева нулей, знаков и корней которого совпадают с множеством S .

Ключевые слова: линейное дифференциальное уравнение; спектр верхних частот Сергеева нулей; спектр верхних частот Сергеева знаков; спектр верхних частот Сергеева корней; суслинское множество.

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор № Ф17-102).

ON SPECTRA OF UPPER SERGEEV FREQUENCIES OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. S. VAIDZELEVICH^a

^aInstitute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus,
11 Surhanava Street, Minsk 220072, Belarus

It is known that the spectra (ranges) of upper and lower Sergeev frequencies of zeros, signs, and roots of a linear differential equation of order greater than two with continuous coefficients belong to the class of Suslin sets on the nonnegative half-line of the extended real line. Moreover, for the spectra of upper frequencies of third-order equations this result was inverted under the assumption that the spectra contain zero. In the present paper we obtain an inversion of the above statement for equations of the fourth order and higher. Namely, for an arbitrary zero-containing Suslin subset S on the nonnegative half-line of the extended real line and a positive integer number n greater than three a n order linear differential equation is constructed, which spectra of the upper Sergeev frequencies of zeros, signs, and roots coincide with the set S .

Key words: linear differential equation; spectrum of the upper Sergeev frequencies of zeros; spectrum of the upper Sergeev frequencies of signs; spectrum of the upper Sergeev frequencies of roots; Suslin set.

Acknowledgements. The work was performed with financial support from the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (agreement No. Ф17-102).

Образец цитирования:

Войделевич АС. О спектрах верхних частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;1:28–32.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-28-32>

For citation:

Vaidzelevich AS. On spectra of upper Sergeev frequencies of linear differential equations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;1:28–32. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-28-32>

Автор:

Алексей Сергеевич Войделевич – кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений.

Author:

Aliaksei S. Vaidzelevich, PhD (physics and mathematics); senior researcher at the department of differential equations.
voidzelevich@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-7466-4761>

Введение

Для заданного натурального n через $\tilde{\mathcal{E}}^n$ обозначим множество линейных однородных дифференциальных уравнений n -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \stackrel{\text{def}}{=} [0, +\infty), \quad (1)$$

с непрерывными коэффициентами $a_i(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$. Будем отождествлять уравнение (1) и строку $a = a(\cdot) = (a_1(\cdot), \dots, a_n(\cdot))$ его коэффициентов и поэтому обозначать уравнение (1) также через a . Пусть $S(a)$ – множество решений уравнения a , $S_*(a)$ – множество его ненулевых решений, т. е. $S_*(a) = S(a) \setminus \{0\}$.

Для ненулевого решения $y(\cdot)$ уравнения (1) точка $t \in \mathbb{R}_+$ называется точкой смены знака, если в любой окрестности этой точки функция $y(\cdot)$ принимает значения разных знаков. Нуль t функции $y(\cdot)$ называется корнем кратности k , если в точке t ее первые $k - 1$ производных равны нулю, а k -я производная отлична от нуля.

Символом \varkappa обозначим величину, принимающую значения во множестве $\{0, -, +\}$. Для ненулевого решения $y(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$ через $v^\varkappa(y(\cdot); t)$ обозначим число нулей, если $\varkappa = 0$; число смен знака, если $\varkappa = -$; сумму кратностей корней, если $\varkappa = +$, функции $y(\cdot)$ на полуинтервале $[0, t)$. Очевидно, что величины $v^\varkappa(y(\cdot); t)$ при любом $t \geq 0$ конечны.

Определение 1 [1; 2]. Верхней частотой Сергеева нулей ($\hat{v}^0[y]$), знаков ($\hat{v}^- [y]$) и корней ($\hat{v}^+ [y]$) решения $y(\cdot) \in S_*(a)$ уравнения (1) называется величина

$$\hat{v}^\varkappa [y] \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} v^\varkappa(y(\cdot); t), \quad (2)$$

где символ \varkappa равен 0, $-$ и $+$ соответственно.

Определение 2. Спектрами $\hat{v}^0(S_*(a))$, $\hat{v}^-(S_*(a))$ и $\hat{v}^+(S_*(a))$ верхних частот Сергеева нулей, знаков и корней уравнения (1) называются множества, состоящие из верхних частот Сергеева нулей, знаков и корней всех решений из $S_*(a)$ соответственно.

Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется [3, с. 213; 4, с. 489] суслинским множеством прямой \mathbb{R} , если оно является непрерывным образом множества иррациональных чисел, рассматриваемого в естественной топологии. Множество $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ – суслинское множество расширенной числовой прямой, если оно представимо в виде объединения суслинского множества прямой \mathbb{R} и некоторого (в том числе и пустого) подмножества множества $\{-\infty, +\infty\}$.

Как следует из теоремы Штурма и отмечено в [1; 2], спектры верхних частот Сергеева нулей, знаков и корней уравнения первого порядка содержат только нуль, а уравнения второго порядка совпадают между собой и состоят из одного неотрицательного числа. В работе [5] доказано, что спектры верхних частот Сергеева нулей, знаков и корней линейного дифференциального уравнения порядка выше двух принадлежат классу суслинских множеств неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой, и получено обращение этого утверждения для спектров верхних частот уравнений третьего порядка в предположении принадлежности спектрам нуля.

Естественно возникает вопрос, насколько точным является приведенное в [5] описание спектров верхних частот Сергеева уравнений порядка выше трех. В настоящей работе в предположении принадлежности спектрам нуля установлена точность указанного описания.

Результаты и их обсуждение

Для доказательства основного результата приведем и докажем ряд вспомогательных утверждений.

Утверждение 1. Пусть $x(\cdot)$ – решение уравнения

$$x^{(n)}(t) = b_0(t) + \sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1}(t)x^{(j)}(t), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где $b_j(\cdot)$, $j = \overline{0, n}$, – непрерывные функции, определенные при $t \geq 0$ и принимающие положительные значения.

Тогда если $x^{(j)}(0) > 0$, $j = \overline{0, n-1}$, то при всех $t \geq 0$ верны неравенства $x^{(i)}(t) > 0$, $i = \overline{0, n}$, и

$$x(t) \geq \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} b_0(t_{n-1}) dt_{n-1}. \quad (4)$$

Доказательство. Из равенства (3) следует, что $x^{(n)}(0) > 0$. Через T обозначим множество всех моментов времени $t > 0$, для которых существует такое $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, зависящее от t , что $x^{(k)}(t) = 0$. Докажем, что множество T пусто. Предположим противное. Нетрудно видеть, что T является замкнутым, а значит, корректно определен момент времени $t^* = \min T$. Так как $t^* \in T$, то $x^{(k)}(t^*) = 0$ для некоторого $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Более того, $x^{(i)}(t) > 0$, $i = \overline{0, n}$, при $t \in [0, t^*)$. Из равенства (3) следует, что $k < n$. Так как $x^{(k)}(t^*) = x^{(k)}(0) + \int_0^{t^*} x^{(k+1)}(\tau) d\tau$, то $x^{(k)}(t^*) \geq x^{(k)}(0) > 0$. Данное противоречие показывает, что $x^{(i)}(t) > 0$, $i = \overline{0, n}$, при всех $t \geq 0$. Наконец, проинтегрировав n раз неравенство $x^{(n)}(t) \geq b_0(t)$, получаем неравенство (4).

Утверждение 2. Для произвольной локально ограниченной функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ существует такая бесконечно дифференцируемая функция $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что $g(t) > f(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Для произвольного целого числа k через $g_k(\cdot)$ обозначим такую функцию из класса $C^\infty(\mathbb{R})$, что $g_k|_{\mathbb{R} \setminus (k-1, k+2)} \equiv 0$, $g_k|_{[k, k+1]} \equiv 1$, а на интервалах $(k-1, k)$ и $(k+1, k+2)$ функция $g_k(\cdot)$ строго монотонно возрастает и убывает соответственно. Существование функции $g_k(\cdot)$ следует из [6, с. 54]. Через M_k обозначим $\sup_{t \in [k, k+1]} f(t)$. Так как функция $f(\cdot)$ локально ограничена, то $M_k \in \mathbb{R}$. Наконец, рассмотрим функцию

$$g(t) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} M_k g_k(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Непосредственная проверка показывает, что функция $g(\cdot)$ корректно определена, $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ и при всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $g(t) > f(t)$.

Лемма. Для заданных функций $x_i \in C^n(\mathbb{R}_+)$, $i = \overline{1, n}$, вронскиан $W(x_1, x_2, \dots, x_n)(\cdot)$ которых отличен от нуля в каждой точке неотрицательной полуоси \mathbb{R}_+ , существует такая положительная функция $x \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x_i(t)}{x(t)} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \text{и} \quad W(x_1, x_2, \dots, x_n, x)(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Доказательство. Для произвольной функции $y \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ разложим определитель Вронского системы функций x_1, x_2, \dots, x_n, y по последнему столбцу:

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = c_n y^{(n)} + c_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + c_0 y,$$

где $c_i(\cdot)$ – непрерывные на \mathbb{R}_+ функции, $i = \overline{0, n}$, при этом $c_n(\cdot) \equiv W(x_1, x_2, \dots, x_n)(\cdot)$.

Через $b_i(\cdot)$, $i = \overline{1, n}$, обозначим бесконечно дифференцируемую функцию, заданную на \mathbb{R}_+ , для которой справедливо неравенство $b_i(t) \geq \max(1, -c_{i-1}(t)c_n^{-1}(t))$ при всех $t \geq 0$. Пусть $h(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ – функция, удовлетворяющая при всех $t \geq 0$ неравенству $h(t) \geq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i(t)|$. Выберем функцию $b_0(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ из условия $b_0(t) \geq \max(1, (t^{n+1} h(t))^n)$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$. Существование функций $h(\cdot)$ и $b_i(\cdot)$, $i = \overline{0, n}$, следует из утверждения 2.

Пусть $x(\cdot)$ – произвольное решение уравнения (3) с положительными начальными данными. Тогда в силу утверждения 1 имеем

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n, x) = c_n \left(x^{(n)} + \frac{c_{n-1}}{c_n} x^{(n-1)} + \dots + \frac{c_0}{c_n} x \right) = c_n \left(b_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \left(b_{j+1} + \frac{c_j}{c_n} \right) x^{(j)} \right) \neq 0.$$

Более того, из неравенства (4) следует неравенство $x(t) \geq t^{n+1}h(t)$ при всех $t \geq 0$, а значит, и равенство $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x_i(t)}{x(t)} = 0$, $i = \overline{1, n}$. Наконец, так как коэффициенты уравнения (3) принадлежат классу $C^\infty(\mathbb{R}_+)$, то этому классу гладкости принадлежит и его решение $x(\cdot)$.

Утверждение 3. Для произвольных различных действительных чисел k_1, k_2 и натурального числа $n > 2$ найдется такая функция $x(\cdot) \in C^\infty([0, 1])$, что

$$\dot{x}(0) = k_1, \dot{x}(1) = k_2, x^{(i)}(0) = x^{(i)}(1) = 0, i = \overline{2, n}, \text{ и } \ddot{x}(t) \neq 0 \text{ при } t \in (0, 1).$$

Доказательство. Прямой проверкой легко убедиться, что функция

$$x(t) \stackrel{\text{def}}{=} k_1 t + \frac{k_2 - k_1}{B(n, n)} \int_0^t d\tau \int_0^\tau \xi^{n-1} (1 - \xi)^{n-1} d\xi, \quad t \in [0, 1],$$

где $B(n, n)$ – значение бета-функции, равное $\frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!}$, обладает необходимыми свойствами.

Перейдем к формулировке и доказательству основного результата работы.

Теорема. Для произвольного суслинского множества $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}_+}$, содержащего нуль, и натурального числа $n \geq 3$ существует уравнение $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$, спектры верхних частот Сергеева нулей, знаков и корней которого совпадают с множеством \mathcal{A} .

Доказательство. Зафиксируем какое-либо суслинское множество $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}_+}$, содержащее нуль. Методом математической индукции по n – порядку дифференциального уравнения – докажем более сильное утверждение. А именно покажем, что для любых натуральных чисел $m \geq n \geq 3$ найдется такое уравнение $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$, удовлетворяющее условию теоремы, что все его решения принадлежат классу $C^m(\mathbb{R}_+)$.

С помощью утверждения 3 база индукции при $n = 3$ может быть установлена построениями, аналогичными приведенным в работе [5].

Предположим, что для некоторого n и произвольного $m \geq n$ построено такое уравнение $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$, что $\hat{v}^0(S_*(a)) = \hat{v}^-(S_*(a)) = \hat{v}^+(S_*(a)) = \mathcal{A}$ и $S_*(a) \subset C^m(\mathbb{R}_+)$. Пусть $m \geq n + 1$. Выберем произвольную фундаментальную систему $\{x_1(\cdot), x_2(\cdot), \dots, x_n(\cdot)\} \subset C^m(\mathbb{R}_+)$ решений уравнения a . Следуя доказанной лемме, дополним выбранную систему функцией $x_{n+1}(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$. Так как вронсиан $W(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})(t)$ отличен от 0 при $t \geq 0$, то существует уравнение $b \in \tilde{\mathcal{E}}^{n+1}$ с фундаментальной системой решений $\{x_1(\cdot), x_2(\cdot), \dots, x_{n+1}(\cdot)\}$. Докажем равенства

$$\hat{v}^0(S_*(b)) = \hat{v}^-(S_*(b)) = \hat{v}^+(S_*(b)) = \mathcal{A}. \quad (5)$$

Так как произвольное решение $x(\cdot)$ уравнения a является решением уравнения b , то имеют место включения $\mathcal{A} \subset \hat{v}^0(S_*(b))$, $\mathcal{A} \subset \hat{v}^-(S_*(b))$ и $\mathcal{A} \subset \hat{v}^+(S_*(b))$. Пусть $x(\cdot)$ – произвольное решение уравнения b , которое не является решением уравнения a . Тогда существуют такие постоянные c_1, c_2, \dots, c_{n+1} , для

которых справедливо равенство $x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_{n+1} x_{n+1}$, при этом $c_{n+1} \neq 0$. Так как $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x_i(t)}{x_{n+1}(t)} = 0$,

$i = \overline{1, n}$, то при всех достаточно больших $t \geq 0$ значение $x(t)$ отлично от 0. Следовательно, $\hat{v}^0[x] = \hat{v}^-[x] = \hat{v}^+[x] = 0$. Поэтому из принадлежности $0 \in \mathcal{A}$ следуют равенства (5). Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. Сергеев ИН. Определение характеристических частот линейного уравнения. *Дифференциальные уравнения*. 2004; 40(11):1573.
2. Сергеев ИН. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения. В: *Труды семинара им. И. Г. Петровского. Выпуск 25*. Москва: Издательство Московского университета; 2006. с. 249–294.

3. Хаусдорф Ф. *Теория множеств*. Москва: ОНТИ; 1937.
4. Куратовский К. *Топология. Том 1*. Москва: Мир; 1966. 594 с.
5. Барабанов ЕА, Войделевич АС. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II. *Дифференциальные уравнения*. 2016;52(12):1595–1609.
6. Гелбаум Б, Олмстед Дж. *Контрпримеры в анализе*. Голубов БИ, переводчик. Москва: Мир; 1967.

References

1. Sergeev IN. Definition of characteristic frequencies of linear equation. *Differentsial'nye uravneniya*. 2004;40(11):1573. Russian.
2. Sergeev IN. The determination and properties of characteristic frequencies of linear equations. In: *Trudy seminara im. I. G. Petrovskogo. Vypusk 25*. Moscow: Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta; 2006. p. 249–294. Russian.
3. Hausdorff F. *Teoriya mnozhestv* [Set theory]. Moscow: Ob'edinennoe nauchno-tehnicheskoe izdatel'stvo; 1937. Russian.
4. Kuratowski K. *Topology. Volume 1*. Jaworowski J, translator. New York: Academic Press; 1966. Co-published by the PWN-Polish Scientific Publishers.
Russian edition: Kuratowski K. *Topologiya. Tom 1*. Moscow: Mir; 1966. 594 p.
5. Barabanov EA, Voidelevich AS. Remark on the theory of Sergeev frequencies of zeros, signs, and roots for solutions of linear differential equations: II. *Differentsial'nye uravneniya*. 2016;52(12):1595–1609. Russian.
6. Gelbaum B, Olmsted J. *Counterexamples in analysis*. San Francisco: Holden-day; 1964. 200 p.
Russian edition: Gelbaum B, Olmsted J. *Kontrprimery v analize*. Golubov BI, translator. Moscow: Mir; 1967.

Статья поступила в редколлегию 21.06.2018.
Received by editorial board 21.06.2018.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ
LETTER TO THE EDITORS

В статью А. Л. Гладкова и Т. В. Кавитовой «О начально-краевой задаче для нелокального параболического уравнения с нелокальным граничным условием», опубликованную в издании «Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика» (2018, № 1), необходимо внести исправления, не влияющие на приведенные в ней результаты. Текст после формулы (13) и до конца доказательства теоремы 2 следует изложить в новой редакции:

«Применяя принцип сравнения для решений задачи (8) при $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, получим $u_{\varepsilon_1} \leq u_{\varepsilon_2}$. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в (13) и используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, можно сделать вывод, что функция $u_m(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t)$ удовлетворяет в Q_T уравнению

$$u_m(x, t) = \int_{\Omega} G(x, y; t) u_0(y) dy + \\ + \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) \left(a(y, \tau) u_m^r(y, \tau) \int_{\Omega} u_m^p(\eta, \tau) d\eta - b(y, \tau) u_m^q(y, \tau) \right) dy d\tau - \\ - \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, \xi; t - \tau)}{\partial n} \int_{\Omega} k(\xi, y, \tau) u_m^l(y, \tau) dy dS_\xi d\tau.$$

В силу свойств функции Грина функция $u_m(x, t)$ является решением задачи (1)–(3) в Q_T . Несложно показать, что $u_m(x, t)$ – максимальное решение задачи (1)–(3) в Q_T . Теорема доказана».

Доказательство теоремы 3 следует изложить в новой редакции:

«Пусть $w(x, t) = \bar{u}(x, t) - \underline{u}(x, t)$ и $T_0 \in (0, T)$. Тогда $w(x, t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\left\{ \begin{array}{l} w_t \geq \Delta w + a(x, t) \left\{ r\theta_1^{r-1}(x, t) w \int_{\Omega} \bar{u}^p(y, t) dy + p\underline{u}^r \int_{\Omega} \theta_2^{p-1}(y, t) w(y, t) dy \right\} - \\ - b(x, t) (\bar{u}^q - \underline{u}^q), (x, t) \in Q_{T_0}, \\ w(x, t) \geq l \int_{\Omega} k(x, y, t) \theta_3^{l-1}(y, t) w(y, t) dy, (x, t) \in S_{T_0}, \\ w(x, 0) \geq 0, x \in \Omega, \end{array} \right. \quad (14)$$

где $\theta_i(x, t)$ ($i = 1, 2, 3$) – неотрицательные непрерывные в \bar{Q}_{T_0} функции, удовлетворяющие в силу условий теоремы соотношению

$$\sup_{Q_{T_0}} (r\theta_1^{r-1}(x, t) + p\theta_2^{p-1}(x, t) + l\theta_3^{l-1}(x, t)) \leq \theta, \quad (15)$$

здесь θ – некоторая положительная постоянная. Отметим, что справедливы неравенства

$$0 \leq a(x, t) \leq M, \quad 0 \leq \underline{u}(x, t) \leq M, \quad 0 \leq \bar{u}(x, t) \leq M, \quad (x, t) \in \bar{Q}_{T_0}, \quad (16)$$

где M – некоторая положительная постоянная.

Предположим, что функция $\psi(x) \in C^2(\bar{\Omega})$ и постоянная λ обладают следующими свойствами:

$$0 < \psi(x) \leq 1 \text{ в } \bar{\Omega}, \quad \psi(x) \equiv 1 \text{ на } \partial\Omega, \\ l \int_{\Omega} k(x, y, t) \theta_3^{l-1}(y, t) \psi(y) dy < 1 \text{ на } \bar{S}_{T_0}, \quad (17) \\ \lambda > M^{p+1} \theta |\Omega| + \max_{\bar{\Omega}} \frac{\Delta \psi(x) + M^{r+1} \theta |\Omega|}{\psi(x)},$$

где $|\Omega|$ – мера Лебега множества Ω .

Положим

$$w(x, t) = \exp(\lambda t) \psi(x) h(x, t). \quad (18)$$

Докажем, что $w(x, t) \geq 0$ в \bar{Q}_{T_0} . Предположим, что это неверно. Тогда существует точка $(x_1, t_1) \in \Omega \times (0, T_0]$ такая, что $\min_{\bar{Q}_{T_0}} h(x, t) = h(x_1, t_1) < 0$. Если $x_1 \in \Omega$, то

$$h_t(x_1, t_1) \leq 0, \quad \nabla h(x_1, t_1) = \vec{0}, \quad \Delta h(x_1, t_1) \geq 0.$$

Учитывая последние соотношения и (15)–(17), подставив выражение для $w(x, t)$ из (18) в первое неравенство из (14), в точке (x_1, t_1) получим

$$\begin{aligned} 0 \geq h_t &\geq -\lambda h + \frac{\Delta \psi}{\psi} h + \Delta h + 2 \frac{\nabla \psi \nabla h}{\psi} + M^{p+1} \theta |\Omega| h + \frac{M^{r+1} \theta |\Omega|}{\psi} h - \frac{b}{\psi} \exp(-\lambda t_1) (\bar{u}^q - \underline{u}^q) \geq \\ &\geq \left(-\lambda + \frac{\Delta \psi}{\psi} + M^{p+1} \theta |\Omega| + \frac{M^{r+1} \theta |\Omega|}{\psi} \right) h > 0. \end{aligned}$$

Если $x_1 \in \partial \Omega$, то в силу (17), (18) и второго неравенства из (14) имеем

$$h(x_1, t_1) \geq l \int_{\Omega} k(x_1, y, t_1) \theta_3'^{-1}(y, t_1) \psi(y) dy \cdot h(x_1, t_1) > h(x_1, t_1).$$

Так как T_0 можно выбрать произвольным в промежутке $(0, T)$, то полученные выше противоречия доказывают утверждение теоремы. Теорема доказана».

А. Л. Гладков¹, Т. В. Кавитова²

¹*Александр Львович Гладков* – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой математической кибернетики механико-математического факультета БГУ.

Alexander L. Gladkov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University.
gladkoyal@bsu.by

²*Татьяна Валерьевна Кавитова* – старший преподаватель кафедры геометрии и математического анализа факультета математики и информационных технологий ВГУ имени П. М. Машерова.

Tatiana V. Kavítova, senior lecturer at the department of geometry and mathematical analysis, faculty of mathematics and information technologies, Vitebsk State University named after P. M. Masherov.
kavitovatv@tut.by

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

THEORY OF PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

УДК 519.2

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ ОТНОШЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ ПРОВЕРКИ МНОГИХ ПРОСТЫХ ГИПОТЕЗ О ПАРАМЕТРАХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ТРЕНДОМ

Т. Т. ТУ¹⁾, А. Ю. ХАРИН¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассмотрена проблема последовательного тестирования многих простых гипотез о параметрах временных рядов с трендом. Для построения последовательного теста использованы два подхода, в том числе M -нарный последовательный критерий отношения вероятностей и матричный последовательный критерий отношения вероятностей. Даны достаточные условия конечных завершений теста и существования конечных моментов их времени остановки. Получены верхние оценки для среднего числа наблюдений. При подходящих порогах эти тесты могут принадлежать некоторым определенным классам статистических тестов. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: тестирование многих гипотез; M -нарный последовательный критерий отношения вероятностей; матричный последовательный критерий отношения вероятностей; временные ряды с трендом.

Образец цитирования:

Ту ТТ, Харин АЮ. Последовательный критерий отношения вероятностей для проверки многих простых гипотез о параметрах временных рядов с трендом. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2019;1:35–45.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-35-45>

For citation:

Tu TT, Kharin AYu. Sequential probability ratio test for many simple hypotheses on parameters of time series with trend. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;1:35–45. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-35-45>

Авторы:

Тон Тхат Ту – аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики.

Алексей Юрьевич Харин – доктор физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики.

Authors:

Ton That Tu, postgraduate student at the department of probability theory and mathematical statistics, faculty of applied mathematics and computer science.
tthattu@gmail.com

Alexey Yu. Kharin, doctor of science (physics and mathematics), docent; head of the department of probability theory and mathematical statistics, faculty of applied mathematics and computer science.
kharinAY@bsu.by

SEQUENTIAL PROBABILITY RATIO TEST FOR MANY SIMPLE HYPOTHESES ON PARAMETERS OF TIME SERIES WITH TREND

T. T. TU^a, A. Yu. KHARIN^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: T. T. Tu (tthattu@gmail.com)

The problem of sequential test for many simple hypotheses on parameters of time series with trend is considered. Two approaches, including M -ary sequential probability ratio test and matrix sequential probability ratio test are used for constructing the sequential test. The sufficient conditions of finite terminations of the test and the existence of finite moments of their stopping times are given. The upper bounds for the average numbers of observations are obtained. With the thresholds chosen suitably, these tests can belong to some specified classes of statistical tests. Numerical examples are presented.

Key words: multiple hypothesis testing; M -ary sequential probability ratio test; matrix sequential probability ratio test; time series with trend.

Introduction

Sequential probability ratio test (SPRT) proposed by Wald [1] is an effective approach for testing two simple hypotheses, and it has many applications in practical problems because of the optimal properties [2]. The test characteristics of SPRT are well studied in the case of independent identically distributed observations [1; 3–5]. If the hypothetical model is distorted, robustness of sequential tests is studied in [6], and an approach to robust sequential test construction is developed in [7]. However, in practice there are several situations, where it is natural to consider more than two hypotheses. For example, in the clinical trials, deciding which of several possible medical treatments is the most effective as quick as possible is a multihypothesis sequential problem. Most researches on this problem are based on two approaches: (1) construct a recursive solution to the optimization problem to get the optimal sequential test in a Bayesian setting [8]; and (2) extend and generalize the SPRT to the case of more than two hypotheses [5; 9–11]. Among the generalized versions of SPRT, M -ary sequential probability ratio test (MSPRT) and matrix sequential probability ratio test (MaSPRT) seem to be much simpler to construct and implement. Optimal properties of these methods have been well studied in the case of independent identically distributed observations [5; 11]. In many applied problems, the observed data can come from more complicated resources, such as time series. Sequential test for time series with trend has also been studied by Kharin and Tu [12–14]. In this paper, we will use MSPRT and MaSPRT for sequentially testing parameters of time series with trend.

Mathematical model

Let x_1, x_2, \dots be the observations of time series with trend in the following form [15]:

$$x_t = \theta^T \psi(t) + \xi_t, \quad t \geq 1, \quad (1)$$

where $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_m(t))^T$, $t \geq 1$ are the vectors of basic functions of trend, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)^T \in \mathbb{R}^m$ is an unknown vector of coefficients, and $\{\xi_t, t \geq 1\}$ is a sequence of independent identically distributed random variables, $\xi \sim N(0, \sigma^2)$.

Consider M simple hypotheses:

$$\mathcal{H}_i : \theta = \theta^i, \quad i \in T, \quad (2)$$

where $\theta^i \in \mathbb{R}^m$, $i \in T$, are known vectors, $T = \{1, 2, \dots, M\}$ and $\theta^i \neq \theta^j$ if $i \neq j$.

Firstly, we consider the called M -ary SPRT [11] for testing the multiple hypotheses (2). Assume that the prior probabilities of the hypotheses are known. Put $\pi_i = P(\theta = \theta^i)$, $i \in T$, and for $n \geq 1$, $p_n = (p_n^1, p_n^2, \dots, p_n^M)^T$, where $p_n^j = P(\theta = \theta^j | x_1, x_2, \dots, x_n)$ is the posterior probability of the hypothesis \mathcal{H}_j given n observations x_1, x_2, \dots, x_n .

The stopping time N_a and the final decision d_a for the MSPRT $\delta_a = (N_a, d_a)$ can be described as follows:

$$N_a = \inf \left\{ n \geq 1, p_n^k > \frac{1}{1 + A_k} \text{ for at least one } k \right\}, \quad (3)$$

$$d_a = \mathcal{H}_m, m = \arg \max_{1 \leq j \leq M} p_{N_a}^j, \quad (4)$$

where $A_k, k \in T$, are specified constants, $A_k \in (0, 1]$.

Remark 1. Note that $\sum_{k=1}^M p_n^k = 1$ and $\frac{1}{1 + A_k} \geq \frac{1}{2}, \forall k \in T$. Thus, there is at most one index $k \in T$ such that $p_n^k > \frac{1}{1 + A_k}$.

When $M = 2$, the test δ_a can be rewritten as follows:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{accept } H_1, \quad \prod_{i=1}^n \frac{n_1(x_i; (\theta^2)^T \Psi(i), \sigma^2)}{n_1(x_i; (\theta^1)^T \Psi(i), \sigma^2)} < \frac{\pi_1 A_1}{\pi_2}, \\ \text{accept } H_2, \quad \prod_{i=1}^n \frac{n_1(x_i; (\theta^2)^T \Psi(i), \sigma^2)}{n_1(x_i; (\theta^1)^T \Psi(i), \sigma^2)} > \frac{\pi_1}{\pi_2 A_2}. \end{array} \right.$$

This is the Wald's sequential probability ratio test.

Let $B = \{b_{ij}\}_{M \times M}$ be a fixed square matrix of size M , whose elements are positive except for the diagonal elements which are zero. Next, we define the matrix SPRT δ_b by building $\frac{M(M-1)}{2}$ one-sided SPRTs between hypotheses \mathcal{H}_i and $\mathcal{H}_j, i, j \in T, j \neq i$, as follows [5]:

$$\text{stop at the first } n > 0 \text{ such that, for some } i, \Lambda_n(i, j) > b_{ij} \text{ for all } j \neq i, \quad (5)$$

and accept \mathcal{H}_i , where i is the unique index satisfying these inequalities, and

$$\Lambda_n(i, j) = \ln \left(\prod_{k=1}^n \frac{n_1(x_k; (\theta^i)^T \Psi(k), \sigma^2)}{n_1(x_k; (\theta^j)^T \Psi(k), \sigma^2)} \right).$$

For the test $\delta = (N, d)$ let $\alpha_{ij}(\delta) = P_i(d = j), i \neq j, i, j \in T$, be the error probabilities of the test δ , and $\bar{\alpha}_i(\delta), i \in T$, be the probabilities of accepting hypothesis \mathcal{H}_i incorrectly. Note that the probabilities of rejecting the hypothesis \mathcal{H}_i when it is true, $\alpha_i(\delta) = \sum_{j \neq i} \alpha_{ij}(\delta), i \in T$, are also of interest. In addition, we are interested in the weighted error probabilities defined as $\beta_j(\delta) = \sum_{i \in T} w_{ij} P_i(d = j)$, where $\{w_{ij}\}_{M \times M}$ is a given matrix of weights, all positive except for the diagonal elements w_{ii} which are zero. We introduce four classes of tests:

$$\mathbf{C}^0(\bar{\alpha}) = \{ \delta : P(\text{accept } \mathcal{H}_i \text{ incorrectly}) \leq \bar{\alpha}_i, i \in T \},$$

$$\mathbf{C}^1([\alpha_{ij}]) = \{ \delta : \alpha_{ij}(\delta) \leq \alpha_{ij}, i, j \in T, i \neq j \},$$

$$\mathbf{C}^2(\alpha) = \{ \delta : \alpha_i(\delta) \leq \alpha_i, i \in T \}, \quad \mathbf{C}^3(\beta) = \{ \delta : \beta_i(\delta) \leq \beta_i, i \in T \},$$

where $[\alpha_{ij}]$ is a matrix of given error probabilities that are positive numbers less than 1, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M)^T$, $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_M)^T$ are two vectors of positive numbers less than 1, and $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M)^T$ is a vector of positive numbers.

Remark 2. There are some relations between four classes of tests defined above.

- i) $C^0(\alpha) = C^3(\alpha)$ if $w_{ij} = \pi_i \text{sign}(|i - j|)$, $i, j \in T$;
- ii) $C^1([\alpha_{ij}]) \subset C^0(\alpha)$ if $\alpha_{ij} \leq \frac{\alpha_j}{(M-1)\pi_i}$, $i, j \in T$, $i \neq j$;
- iii) $C^1([\alpha_{ij}]) \subset C^2(\alpha)$ if $\alpha_i \geq \sum_{j \neq i} \alpha_{ij}$;
- iv) $C^1([\alpha_{ij}]) \subset C^3(\beta)$ if $w_{ij} \leq \frac{\beta_j}{(M-1)\alpha_{ij}}$, $i, j \in T$, $i \neq j$.

Lemma 1 [16]. For positive semidefinite matrices A and B of the same order

$$0 \leq \text{tr}(AB) \leq \text{tr}(A)\text{tr}(B).$$

Lemma 2 [17]. If X is a non-negative, integer valued random variable, then

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n).$$

Lemma 3 [17]. Let $r > 0$, and suppose that X is a non-negative random variable. Then the following inequalities hold:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{r-1} P(X \geq n) \leq E(X^r) \leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n^{r-1} P(X \geq n),$$

and

$$E(|X|^r) < \infty \text{ if and only if } \sum_{n=1}^{+\infty} n^{r-1} P(X \geq n) < \infty.$$

Main results

M-ary sequential probability ratio test. Using Bayes' rule, the posterior probabilities can be rewritten as:

$$p_n^k = \frac{\pi_k \prod_{i=1}^n n_1(x_i; (\theta^k)^T \psi(i), \sigma^2)}{\sum_{j=1}^M \pi_j \prod_{i=1}^n n_1(x_i; (\theta^j)^T \psi(i), \sigma^2)}, \quad n \geq 1, k \in T,$$

where $n_1(x; \mu, \sigma^2)$ is the probability density function of the normal distribution $N(\mu, \sigma^2)$.

In practice, we can use the following recurrent formula for calculating the values of p_n^k :

$$p_{n+1}^k = P(\theta = \theta^k | x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = \frac{p_n^k n_1(x_{n+1}; (\theta^k)^T \psi(n+1), \sigma^2)}{\sum_{j=1}^M p_n^j n_1(x_{n+1}; (\theta^j)^T \psi(n+1), \sigma^2)}, \quad n \geq 0,$$

where $p_0^k = \pi_k$, $k \in T$.

Clearly, the condition $p_n^k > \frac{1}{1 + A_k}$ can be rewritten as follows:

$$\sum_{j \neq k} \frac{\pi_j}{\pi_k} \prod_{i=1}^n \frac{n_1(x_i; (\theta^j)^T \psi(i), \sigma^2)}{n_1(x_i; (\theta^k)^T \psi(i), \sigma^2)} < A_k.$$

Denote $\Gamma_{ij} = (\theta^i - \theta^j)(\theta^i - \theta^j)^T$, $i, j \in T$, and $H_n = \sum_{i=1}^n \psi(i)\psi^T(i)$, $n \geq 1$. The following theorem will give us a sufficient condition for the finite termination of the test (2)–(4).

Theorem 1. If $\text{tr}(\Gamma_{ij}H_n) \rightarrow +\infty$ as $n \rightarrow +\infty$ for all $i, j \in T, i \neq j$, then the test (2)–(4) will terminate finitely with probability 1.

Proof. Let $k \in T$ be a fixed value. We have:

$$\begin{aligned} P_k(N_a > n) &= P_k \left(\bigcap_{l=1}^n \bigcap_{l \in T} \left\{ \sum_{j \in T \setminus \{l\}} \frac{\pi_j}{\pi_l} \prod_{i=1}^l \frac{n_1(x_i; (\theta^j)^\top \Psi(i), \sigma^2)}{n_1(x_i; (\theta^l)^\top \Psi(i), \sigma^2)} \geq A_l \right\} \right) \leq \\ &\leq P_k \left(\bigcap_{l \in T} \left\{ \sum_{j \in T \setminus \{l\}} \frac{\pi_j}{\pi_l} \prod_{i=1}^n \frac{n_1(x_i; (\theta^j)^\top \Psi(i), \sigma^2)}{n_1(x_i; (\theta^l)^\top \Psi(i), \sigma^2)} \geq A_l \right\} \right) \leq P_k \left(\sum_{j \in T \setminus \{k\}} \frac{\pi_j}{\pi_k} \prod_{i=1}^n \frac{n_1(x_i; (\theta^j)^\top \Psi(i), \sigma^2)}{n_1(x_i; (\theta^k)^\top \Psi(i), \sigma^2)} \geq A_k \right) \leq \\ &\leq P_k \left(\bigcup_{j \in T \setminus \{k\}} \left\{ \frac{\pi_j}{\pi_k} \prod_{i=1}^n \frac{n_1(x_i; (\theta^j)^\top \Psi(i), \sigma^2)}{n_1(x_i; (\theta^k)^\top \Psi(i), \sigma^2)} \geq \frac{A_k}{M-1} \right\} \right) \leq \sum_{j \in T \setminus \{k\}} P_k \left(\prod_{i=1}^n \frac{n_1(x_i; (\theta^j)^\top \Psi(i), \sigma^2)}{n_1(x_i; (\theta^k)^\top \Psi(i), \sigma^2)} \geq \frac{\pi_k}{\pi_j} \frac{A_k}{M-1} \right) = \\ &= \sum_{j \in T \setminus \{k\}} P_k(\Lambda_n(j, k) \geq \gamma(k, j)), \end{aligned}$$

where $\gamma(k, j) = \ln \left(\frac{\pi_k}{\pi_j} \frac{A_k}{M-1} \right)$.

Obviously, for $k, j \in T, k \neq j$,

$$\Lambda_n(j, k) = -\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ 2 \sum_{i=1}^n x_i (\theta^k - \theta^j)^\top \Psi(i) + (\theta^j)^\top H_n \theta^j - (\theta^k)^\top H_n \theta^k \right\},$$

and under the hypothesis \mathcal{H}_k , statistic $\Lambda_n(j, k)$ has the normal distribution with the following parameters:

$$E^{(k)}(\Lambda_n(j, k)) = -\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ 2(\theta^k - \theta^j)^\top H_n \theta^k + (\theta^j)^\top H_n \theta^j - (\theta^k)^\top H_n \theta^k \right\} = -\frac{\text{tr}(\Gamma_{jk} H_n)}{2\sigma^2},$$

$$D^{(k)}(\Lambda_n(j, k)) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left((\theta^k - \theta^j)^\top \Psi(i) \right)^2 = \frac{\text{tr}(\Gamma_{jk} H_n)}{\sigma^2}.$$

Under the conditions of this theorem we get:

$$P_k(\Lambda_n(j, k) \geq \gamma(k, j)) = 1 - \Phi \left(\frac{\gamma(k, j) - E^{(k)}(\Lambda_n(j, k))}{\sqrt{D^{(k)}(\Lambda_n(j, k))}} \right) \rightarrow 0, \text{ as } n \rightarrow +\infty, \forall j \in T \setminus \{k\},$$

which implies $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_k(N_a > n) = 0$. This completes the proof.

Corollary 1. The conditional expectations of stopping time N_a satisfy the following inequalities:

$$E^{(k)}(N_a) \leq 1 + \sum_{j \in T \setminus \{k\}} \sum_{n=1}^{+\infty} \Phi \left(-\frac{2\sigma^2 \gamma(k, j) + \text{tr}(\Gamma_{jk} H_n)}{2\sigma \sqrt{\text{tr}(\Gamma_{jk} H_n)}} \right), k \in T.$$

Proof. This is directly derived from the proof of theorem 1 and lemma 2.

Remark 3. Under the theorem 1 conditions, we have

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Psi_j^2(i) \rightarrow +\infty, \text{ as } n \rightarrow +\infty.$$

Proof. This is directly derived from lemma 1 and the fact that $\text{tr}(H_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Psi_j^2(i)$.

Theorem 2. *If there exist positive constants κ_{ij} , $i, j \in T$, $i \neq j$, such that $\frac{\text{tr}(\Gamma_{ij} H_n)}{n^{\kappa_{ij}}} \rightarrow +\infty$ as $n \rightarrow +\infty$, then the stopping time N_a has finite moments of all orders.*

Proof. Let $k \in T$ be a fixed value. From the proof of theorem 1 and Markov's inequality we have:

$$\begin{aligned} P_k(N_a > n) &\leq \sum_{j \in T \setminus \{k\}} P_k \left(\prod_{i=1}^n \frac{n_1(x_i; (\theta^j)^\top \Psi(i), \sigma^2)}{n_1(x_i; (\theta^k)^\top \Psi(i), \sigma^2)} > \frac{\pi_k A_k}{\pi_j M - 1} \right) \leq \\ &\leq \sum_{j \in T \setminus \{k\}} \sqrt{\frac{\pi_j(M-1)}{\pi_k A_k}} E^{(k)} \left(\sqrt{\prod_{i=1}^n \frac{n_1(x_i; (\theta^j)^\top \Psi(i), \sigma^2)}{n_1(x_i; (\theta^k)^\top \Psi(i), \sigma^2)}} \right) = \\ &= \sum_{j \in T \setminus \{k\}} \sqrt{\frac{\pi_j(M-1)}{\pi_k A_k}} \prod_{i=1}^n E^{(k)} \left(\sqrt{\frac{n_1(x_i; (\theta^j)^\top \Psi(i), \sigma^2)}{n_1(x_i; (\theta^k)^\top \Psi(i), \sigma^2)}} \right). \end{aligned}$$

On the other hand,

$$\begin{aligned} E^{(k)} \left(\sqrt{\frac{n_1(x_i; (\theta^j)^\top \Psi(i), \sigma^2)}{n_1(x_i; (\theta^k)^\top \Psi(i), \sigma^2)}} \right) &= E^{(k)} \exp \left\{ -\frac{2x_i(\theta^k - \theta^j)^\top \Psi(i) + ((\theta^j)^\top \Psi(i))^2 - ((\theta^k)^\top \Psi(i))^2}{4\sigma^2} \right\} = \\ &= \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{4\sigma^2} \left[((\theta^j)^\top \Psi(i))^2 - ((\theta^k)^\top \Psi(i))^2 \right] \right\}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{x(\theta^k - \theta^j)^\top \Psi(i) + (x - (\theta^k)^\top \Psi(i))^2}{2\sigma^2} \right\} dx = \\ &= \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{4\sigma^2} \left[((\theta^j)^\top \Psi(i))^2 - ((\theta^k)^\top \Psi(i))^2 \right] \right\}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{x^2 - x(\theta^k + \theta^j)^\top \Psi(i) + ((\theta^k)^\top \Psi(i))^2}{2\sigma^2} \right\} dx = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{4\sigma^2} \left[((\theta^j)^\top \Psi(i))^2 - ((\theta^k)^\top \Psi(i))^2 \right] \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[((\theta^k)^\top \Psi(i))^2 - \frac{1}{4}((\theta^k + \theta^j)^\top \Psi(i))^2 \right] \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{((\theta^j - \theta^k)^\top \Psi(i))^2}{8\sigma^2} \right\}. \end{aligned}$$

Therefore,

$$P_k(N_a > n) \leq \sum_{j \in T \setminus \{k\}} \sqrt{\frac{\pi_j(M-1)}{\pi_k A_k}} \exp \left\{ -\frac{\text{tr}(\Gamma_{jk} H_n)}{8\sigma^2} \right\}. \quad (6)$$

The result is derived from lemma 3 and the last inequality above.

Remark 4. The results of theorem 1 can be derived directly from the inequality (6).

The relations between thresholds A_i , $i \in T$, of the test δ_a and its error probabilities are shown in theorem 4.2 [11]. This theorem is still valid for the model of general independent observations. Now we can restate this result with our notation above as follows.

Theorem 3 [11]. *If the test (3)–(4) terminates finitely with probability one, then the following inequalities hold:*

$$a) \bar{\alpha}_k(\delta_a) = \sum_{j \in T, j \neq k} \pi_j \alpha_{j,k}(\delta_a) \leq \pi_k A_k \text{ for all } k;$$

$$b) \bar{\alpha}(\delta_a) = \sum_k \bar{\alpha}_k(\delta_a) \leq \sum_k \pi_k A_k;$$

$$c) \text{ if, in addition, } A_1 = A_2 = \dots = A_M = A, \text{ then } \bar{\alpha}(\delta_a) \leq \frac{A}{1+A}.$$

Corollary 2. *Under the theorem 3 conditions the following inequality holds:*

$$\alpha(\delta_a) \leq \frac{A_{\max} M \pi_{\max}}{A_{\max} \pi_{\max} + \pi_{\min}},$$

where $\alpha(\delta_a) = \sum_{i=1}^M \alpha_i(\delta_a)$; $A_{\max} = \max\{A_i, i \in T\}$; $\pi_{\max} = \max\{\pi_i, i \in T\}$; $\pi_{\min} = \min\{\pi_i, i \in T\}$.

Proof. From the proof of theorem 4.2 in [11] we have $\alpha_{kk}(\delta_a) \geq \frac{\bar{\alpha}_k(\delta_a)}{\pi_k A_k}$, $k \in T$, which implies

$$1 - \alpha_k(\delta_a) \geq \frac{\pi_{\min}}{A_{\max} \pi_{\max}} \sum_{j \neq k} \alpha_{jk}(\delta_a), \quad k \in T.$$

Taking summation over k we get:

$$M - \alpha(\delta_a) \geq \frac{\pi_{\min}}{A_{\max} \pi_{\max}} \sum_{k=1}^M \sum_{j \neq k} \alpha_{jk}(\delta_a) = \frac{\pi_{\min}}{A_{\max} \pi_{\max}} \alpha(\delta_a).$$

This completes the proof.

Remark 5.

• If we choose the thresholds $A_k = \min\left\{1, \frac{\bar{\alpha}_k^0}{\pi_k}\right\}$, $k \in T$, then $\delta_a \in \mathbf{C}^0(\bar{\alpha}^0)$, where $\bar{\alpha}^0 = (\bar{\alpha}_1^0, \dots, \bar{\alpha}_M^0)^\top$.

• If we set the maximum of total probability $\bar{\alpha}(\delta_a)$ of an incorrect decision to be $\alpha_0 \in (0, 1)$ in advance, then

we can select $A_k = \min\left\{1, \frac{\alpha_0}{M \pi_k}\right\}$, $k \in T$, or $A_k = \alpha_0$, $k \in T$.

• If we set the maximum of total probability $\alpha(\delta_a)$ of rejecting a hypothesis when it is true to be $\alpha_0 \in (0, M)$

in advance, then we can select $A_k = \min\left\{1, \frac{\alpha_0 \pi_{\min}}{\pi_{\max} (M - \alpha_0)}\right\}$, $k \in T$.

Matrix sequential probability ratio test. Denote $\tau_i = \inf\{n \in \mathbb{N} : \Lambda_n(i, j) > b_{ij}, \text{ for all } j \in T \setminus \{i\}\}$, $i \in T$.

Then, for the test $\delta_b = (N_b, d_b)$ the stopping time N_b and the final decision d_b can be rewritten as:

$$N_b = \min\{\tau_i, i \in T\}, \quad d_b = i \text{ if } N_b = \tau_i. \quad (7)$$

Theorem 4. *Under the theorem 1 conditions the test (7) will terminate finitely with probability one.*

Proof. For each $i \in T$ and $n \geq 1$, we have:

$$P_i(\tau_i > n) = P_i\left(\bigcap_{k=1}^n \bigcup_{j \in T \setminus \{i\}} \{\Lambda_k(i, j) \leq b_{ij}\}\right) \leq P_i\left(\bigcup_{j \in T \setminus \{i\}} \{\Lambda_n(i, j) \leq b_{ij}\}\right) \leq \sum_{j \in T \setminus \{i\}} P_i(\Lambda_n(i, j) \leq b_{ij}).$$

Under hypothesis \mathcal{H}_i , statistic $\Lambda_n(i, j)$ has the normal distribution with the following parameters:

$$E^{(i)}(\Lambda_n(i, j)) = -\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ 2(\theta^j - \theta^i)^\top H_n \theta^i + (\theta^i)^\top H_n \theta^i - (\theta^j)^\top H_n \theta^j \right\} = \frac{\text{tr}(\Gamma_{ij} H_n)}{2\sigma^2},$$

$$D^{(i)}(\Lambda_n(i, j)) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n \left((\theta^i - \theta^j)^\top \Psi(k) \right)^2 = \frac{\text{tr}(\Gamma_{ij} H_n)}{\sigma^2}.$$

From that we get $P_i(\tau_i > n) \leq \sum_{j \in T \setminus \{i\}} \Phi \left(\frac{b_{ij} - E^{(i)}(\Lambda_n(i, j))}{\sqrt{D^{(i)}(\Lambda_n(i, j))}} \right) \rightarrow 0$, as $n \rightarrow +\infty$. Therefore, $P_i(N_b > n) \leq P_i(\tau_i > n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow +\infty$. This completes the proof.

Corollary 3. *The conditional expectations of stopping time N_b satisfy the following inequalities:*

$$E^{(i)}(N_b) \leq 1 + \sum_{j \in T \setminus \{i\}} \sum_{n=1}^{+\infty} \Phi \left(\frac{2\sigma^2 b_{ij} - \text{tr}(\Gamma_{ij} H_n)}{2\sigma \sqrt{\text{tr}(\Gamma_{ij} H_n)}} \right), i \in T.$$

Proof. This is directly derived from the proof of theorem 4 and lemma 2.

Theorem 5. *Under the theorem 2 conditions the stopping time N_b has finite moments of all orders.*

Proof. Denote $f(x) = \Phi(x) - \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$. We have $f'(x) = (1+x)\varphi(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Therefore, $\Phi(x) < \varphi(x) \forall x < -1$. Under the theorem conditions, we get:

$$\frac{1}{n^{\kappa_{ij}}} \left(\frac{b_{ij} - E^{(i)}(\Lambda_n(i, j))}{\sqrt{D^{(i)}(\Lambda_n(i, j))}} \right)^2 \rightarrow +\infty, \forall i, j \in T, i \neq j, \text{ as } n \rightarrow +\infty,$$

and there exists an index $n_0 \in \mathbb{N}$ such that

$$\frac{b_{ij} - E^{(i)}(\Lambda_n(i, j))}{\sqrt{D^{(i)}(\Lambda_n(i, j))}} < -1, \forall i, j \in T, i \neq j, n \geq n_0.$$

From the proof of theorem 4 we obtain:

$$P_i(N_b > n) \leq \sum_{j \in T \setminus \{i\}} \varphi \left(\frac{b_{ij} - E^{(i)}(\Lambda_n(i, j))}{\sqrt{D^{(i)}(\Lambda_n(i, j))}} \right), i \in T, n > n_0.$$

The rest part of proof is derived directly from lemma 3.

The following known results are very useful to choose the threshold matrix B so that the test δ_b can belong to one of the classes $\mathbf{C}^1([\alpha_{ij}])$, $\mathbf{C}^2(\alpha)$, or $\mathbf{C}^3(\beta)$ mentioned above.

Lemma 4 [5]. *The following assertions hold:*

i) $\alpha_{ij}(\delta_b) \leq e^{-b_{ij}}, i, j \in T, i \neq j;$

ii) $\alpha_i(\delta_b) \leq \sum_{j \neq i} e^{-b_{ij}}, i \in T;$

iii) $\beta_i(\delta_b) \leq \sum_{j \neq i} w_{ij} e^{-b_{ij}}, i \in T.$

Remark 6 [5]. We have the following implications:

i) $b_{ij} = \ln \left(\frac{1}{\alpha_{ji}} \right), i, j \in T, i \neq j$ implies $\delta_b \in \mathbf{C}^1([\alpha_{ij}]);$

ii) $b_{ij} = b_j = \ln \left(\frac{M-1}{\alpha_j} \right), i, j \in T, i \neq j$ implies $\delta_b \in \mathbf{C}^2(\alpha);$

iii) $b_{ij} = b_j = \ln \left(\sum_{k \neq j} \frac{w_{kj}}{\beta_j} \right), i, j \in T, i \neq j$ implies $\delta_b \in \mathbf{C}^3(\beta).$

Numerical examples

The model (1) is considered and the hypotheses (2) is tested with the following parameters:

$$M = 3, m = 4, \sigma = 10, \psi(t) = \left(1, \frac{t}{10}, \frac{t^2}{100}, \frac{1}{t}\right)^T,$$

$$\theta^0 = (1, 1, 1, 1)^T, \theta^1 = (2, 2, 1, 1)^T, \theta^3 = (3, 3, 1, 1)^T.$$

With these values of parameters it is easy to check the conditions $\text{tr}(\Gamma_{ij} H_n) \rightarrow +\infty$ as $n \rightarrow +\infty$ for all $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, e. g. the tests δ_a and δ_b terminate finitely with probability 1. Denote the Monte-Carlo estimate of a characteristic γ by $\hat{\gamma}$. The number of experiments used in Monte-Carlo method is 50 000.

For the test δ_a , from remark 5 we can use the thresholds $A_i = \min\left(1, \frac{\bar{\alpha}_i^0}{\pi_i}\right)$, $i \in T$, with different vectors $\bar{\alpha}^0 = (\bar{\alpha}_1^0, \dots, \bar{\alpha}_M^0)$ and the fixed prior probabilities $\pi = (0.2, 0.3, 0.5)$. In this case the test δ_a will be in class $C^0(\bar{\alpha}^0)$. The Monte-Carlo estimates of error probabilities $\alpha_{21}(\delta_a)$, $\alpha_{31}(\delta_a)$, and conditional average number of observations $t_1(\delta_a) = E(N_a | \mathcal{H}_1)$ are given in table 1, where $\hat{\alpha}_1(\delta_a) = \pi_2 \hat{\alpha}_{21}(\delta_a) + \pi_3 \hat{\alpha}_{31}(\delta_a)$ is an estimate of P (accept \mathcal{H}_1 incorrectly).

Table 1

Monte-Carlo estimates for the characteristics of the test δ_a

$\bar{\alpha}^0$	$\hat{\alpha}_{21}(\delta_a)$	$\hat{\alpha}_{31}(\delta_a)$	$\hat{\alpha}_1(\delta_a)$	$\hat{t}_1(\delta_a)$	$E^{(1)}(N_a) \leq$
(0.1, 0.1, 0.1)	0.20986	0.01258	0.06925	0.11148	63.58791
(0.05, 0.1, 0.1)	0.10484	0.00222	0.03256	0.14548	71.33009
(0.01, 0.1, 0.1)	0.01984	0.00006	0.00598	0.17368	85.48740
(0.05, 0.05, 0.1)	0.11448	0.00176	0.03522	0.0765	71.33009
(0.05, 0.01, 0.1)	0.11854	0.00224	0.03668	0.02822	71.33009
(0.05, 0.01, 0.05)	0.12136	0.00212	0.03747	0.01452	71.33009

In table 1, the inequality $\hat{\alpha}_1(\delta_a) \leq \bar{\alpha}_1^0$ is satisfied with all given values of vector $\bar{\alpha}^0$. With the same levels of $\bar{\alpha}_2^0, \bar{\alpha}_3^0$ the decrease of $\bar{\alpha}_1^0$ leads to the decrease of A_1 , and as a result the conditional average number of observations $t_1(\delta_a)$ increases. The changes in probability $\bar{\alpha}_1(\delta_a) = P$ (accept \mathcal{H}_1 incorrectly) and probability $\alpha_1(\delta_a)$ of rejecting hypothesis \mathcal{H}_1 when it is true are likely to be the opposite. Additionally, with the same levels of $\bar{\alpha}_1^0$, the value of $\hat{\alpha}_1(\delta)$ changes negligibly with respect to $\bar{\alpha}_2^0, \bar{\alpha}_3^0$. Using corollary 1, we can get the upper bounds for the conditional expected values of number of observations $E^{(k)}(N_a)$, $k \in T$. Because the dependence of the upper bound of $E^{(k)}(N_a)$ on the index k is expressed only by A_k and Γ_{kj} , $j \neq k$, this value will not change if we fix k -th element in vector $\bar{\alpha}^0$.

For the test δ_b we choose the matrix of thresholds B according to remark 6 as follows:

$$B = \{b_{ij}\}_{3 \times 3}, b_{ij} = b_j = \ln\left(\frac{M-1}{\alpha_j}\right), i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j.$$

In this case the test δ_b will be in class $C^2(\alpha^0)$, where $\alpha^0 = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)$ is a given vector of upper bounds for the error probabilities $\alpha_i(\delta_b)$, $i = \overline{1, 3}$. The Monte-Carlo estimates of error probabilities $\alpha_1(\delta_b)$, $\alpha_2(\delta_b)$ and conditional average number of observations $t_1(\delta_b) = E(N_b | \mathcal{H}_1)$, $t_2(\delta_b) = E(N_b | \mathcal{H}_2)$ are presented in table 2 with different vectors α^0 .

Table 2

Monte-Carlo estimates for the characteristics of the test δ_b

α^0	$\hat{\alpha}_1(\delta_b)$	$\hat{\alpha}_2(\delta_b)$	$\hat{\alpha}_3(\delta_b)$	$\hat{t}_1(\delta_b)$	$\hat{t}_2(\delta_b)$	$\hat{t}_3(\delta_b)$	$E^{(i)}(N_b) \leq$
(0.1, 0.1, 0.1)	0.021 22	0.073 32	0.020 56	44.480 80	55.164 92	44.588 76	74.509 47
(0.05, 0.1, 0.1)	0.011 92	0.069 42	0.020 16	44.790 36	57.141 22	44.553 26	74.509 47
(0.01, 0.1, 0.1)	0.002 72	0.072 38	0.016 42	45.040 42	61.639 28	44.714 20	74.509 47
(0.05, 0.05, 0.1)	0.010 94	0.034 28	0.019 18	49.036 96	58.239 30	48.827 16	78.331 66
(0.05, 0.01, 0.1)	0.011 00	0.006 66	0.020 26	57.040 46	59.004 56	56.735 46	85.742 48
(0.05, 0.01, 0.05)	0.010 88	0.006 22	0.010 70	57.090 78	60.861 86	57.018 48	88.113 51

In table 2 the inequalities $\hat{\alpha}_i(\delta_b) \leq \alpha_i^0$, $i = \overline{1, 3}$, are satisfied with all given values of vector α^0 . If we fix two elements in vector α^0 , the increase or decrease of the rest one leads to the change of conditional average number of observations under corresponding hypothesis in the opposite direction. Comparing with the results of the test δ_a in table 1, the test δ_b need more observations to get the final decision, but it seems to have much less error probabilities of rejecting a hypothesis when this hypothesis is true. Furthermore, we can use the results in corollary 3 to get the upper bounds for $E^{(k)}(N_b)$, $k \in T$. Note that from the expressions of the upper bounds for $E^{(k)}(N_b)$, $k \in T$, these values are independent of the index k , e. g. they do not change with respect to k -th element of vector α^0 .

Библиографические ссылки

1. Wald A. *Sequential analysis*. New York: John Wiley and Sons; 1947.
2. Айвазян СА. Сравнение оптимальных свойств критериев Неймана – Пирсона и Вальда. *Теория вероятностей и ее применения*. 1959;4(1):86–93.
3. Харин АЮ. *Робастность байесовских и последовательных статистических решающих правил*. Минск: БГУ; 2013.
4. Харин АЮ. Об одном подходе к анализу последовательного критерия отношения правдоподобия для различения простых гипотез. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика*. 2002;1:92–96.
5. Tartakovsky A, Nikiforov I, Basseville M. *Sequential analysis: hypothesis testing and changepoint detection*. Boca Raton: CRC Press; 2015.
6. Kharin A. Performance and robustness evaluation in sequential hypotheses testing. *Communications in Statistics. Theory and Methods*. 2016;45(6):1693–1709. DOI: 10.1080/03610926.2014.944659.
7. Kharin АYu. Robustness of sequential testing of hypotheses on parameters of M-valued random sequences. *Journal of Mathematical Sciences*. 2013;189(6):924–931. DOI: 10.1007/s10958-013-1233-9.
8. Sobel M, Wald A. A sequential design procedure for choosing one of three hypotheses concerning the unknown mean of normal distribution. *Annals of Mathematical Statistics*. 1949;20:502–522.
9. Tartakovskii AG. Sequential testing of many simple hypotheses with independent observations. *Problems of Information Transmission*. 1989;24(4):299–309.
10. Armitage P. Sequential analysis with more than two alternative hypotheses and its relation to discriminant function analysis. *Journal of the Royal Statistical Society*. 1947;9:250–263.
11. Baum CW, Veeravalli VV. A sequential procedure for multihypothesis testing. *IEEE Transactions on Information Theory*. 1994;40(6):1994–2007. DOI: 10.1109/18.340472.
12. Харин АЮ, Ту ТТ. Последовательная статистическая проверка гипотез о параметрах временных рядов с трендом при пропусках наблюдений. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2016;3:38–46.
13. Харин АЮ, Ту ТТ. О вычислении вероятностей ошибок усеченного последовательного критерия отношения вероятностей. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2018;1:68–76.
14. Kharin A, Ton That Tu. Performance and robustness analysis of sequential hypotheses testing for time series with trend. *Austrian Journal of Statistics*. 2017;46(3–4):23–36. DOI: 10.17713/ajs.v46i3-4.668.
15. Андерсон Т. *Статистический анализ временных рядов*. Москва: Мир; 1976.
16. Coope ID. On matrix trace inequalities and related topics for products of Hermitian matrices. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1994;188:999–1001. DOI: 10.1006/jmaa.1994.1475.
17. Gut A. *Probability: A Graduate Course*. New York: Springer-Verlag; 2005.

References

1. Wald A. *Sequential analysis*. New York: John Wiley and Sons; 1947.
2. Aivazian SA. [A comparison of the optimal properties of the Neuman – Pearson and the Wald sequential probability ratio tests]. *Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya*. 1959;4(1):86–93. Russian.
3. Kharin AY. *Robastnost' baiesovskikh i posledovatel'nykh statisticheskikh reshayushchikh pravil* [Robustness of Bayesian and sequential statistical decisions]. Minsk: Belarusian State University; 2013. Russian.

4. Kharin AY. [An approach to performance analysis of the sequential probability ratio test for simple hypotheses]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika*. 2002;1:92–96. Russian.
5. Tartakovsky A, Nikiforov I, Basseville M. *Sequential analysis: hypothesis testing and changepoint detection*. Boca Raton: CRC Press; 2015.
6. Kharin A. Performance and robustness evaluation in sequential hypotheses testing. *Communications in Statistics. Theory and Methods*. 2016;45(6):1693–1709. DOI: 10.1080/03610926.2014.944659.
7. Kharin AY. Robustness of sequential testing of hypotheses on parameters of M-valued random sequences. *Journal of Mathematical Sciences*. 2013;189(6):924–931. DOI: 10.1007/s10958-013-1233-9.
8. Sobel M, Wald A. A sequential design procedure for choosing one of three hypotheses concerning the unknown mean of normal distribution. *Annals of Mathematical Statistics*. 1949;20:502–522.
9. Tartakovskii AG. Sequential testing of many simple hypotheses with independent observations. *Problems of Information Transmission*. 1989;24(4):299–309.
10. Armitage P. Sequential analysis with more than two alternative hypotheses and its relation to discriminant function analysis. *Journal of the Royal Statistical Society*. 1947;9:250–263.
11. Baum CW, Veeravalli VV. A sequential procedure for multihypothesis testing. *IEEE Transactions on Information Theory*. 1994;40(6):1994–2007. DOI: 10.1109/18.340472.
12. Kharin AY, Tu TT. Sequential statistical hypotheses testing on parameters of time series with trend under missing values. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2016;3:38–46. Russian.
13. Kharin AY, Tu TT. On error probabilities calculation for the truncated sequential probability ratio test. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2018;1:68–76. Russian.
14. Kharin A, Ton That Tu. Performance and robustness analysis of sequential hypotheses testing for time series with trend. *Austrian Journal of Statistics*. 2017;46(3–4):23–36. DOI: 10.17713/ajs.v46i3-4.668.
15. Anderson T. *Statistical analysis of time series*. New York: John Wiley & Sons; 1971. 704 p.
Russian edition: Anderson T. *Statisticheskii analiz vremennykh ryadov*. Moscow: Mir; 1976.
16. Coope ID. On matrix trace inequalities and related topics for products of Hermitian matrices. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1994;188:999–1001. DOI: 10.1006/jmaa.1994.1475.
17. Gut A. *Probability: A Graduate Course*. New York: Springer-Verlag; 2005.

Received by editorial board 13.11.2018.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

УДК 531/534:[57+61]

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СРЕДНЕГО УХА, ПОДВЕРГНУТОГО ТОТАЛЬНОЙ ТИМПАНОПЛАСТИКЕ И ОССИКУЛОПЛАСТИКЕ, ПРИ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ПОДВИЖНОСТИ ПОДНОЖНОЙ ПЛАСТИНЫ СТРЕМЕНИ

С. М. БОСЯКОВ¹⁾, Г. И. МИХАСЕВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Патологические изменения колебательной системы среднего уха могут привести к снижению порога восприимчивости слухового анализатора к звуковым колебаниям и вследствие этого – к частичной или полной потере слуха. Для реконструкции тимпанальной мембраны наиболее часто используются хрящевые имплантаты, поскольку они позволяют избежать осложнений после лечения. Наиболее важным при анализе качества операций, улучшающих слуховую проводимость, и выработке дальнейших рекомендаций по оптимальному протезированию является нахождение динамических характеристик (собственных форм и частот колебаний) реконструированного среднего уха. Цель настоящей работы – определение частот свободных колебаний среднего уха после протезирования на основании математической модели, предусматривающей поперечные колебания хрящевого

Образец цитирования:

Босьяков СМ, Михасев ГИ. Свободные колебания среднего уха, подвергнутого тотальной тимпанопластике и оссикулопластике, при функциональной подвижности подножной пластины стремени. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2019;1:46–57. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-46-57>

For citation:

Bosiakov SM, Mikhasev GI. Free oscillations of the middle ear after total tympanoplasty and ossiculoplasty with functional mobility of the foot plate of stapes. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;1:46–57. Russian. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-46-57>

Авторы:

Сергей Михайлович Босьяков – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры теоретической и прикладной механики механико-математического факультета.
Геннадий Иванович Михасев – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой биомеханики и наномеханики механико-математического факультета.

Authors:

Sergei M. Bosiakov, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of theoretical and applied mechanics, faculty of mechanics and mathematics. bosiakov@bsu.by
Gennadi I. Mikhasev, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of biomechanics and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics. mikhasev@bsu.by

трансплантата и движение протеза, соединяющего реконструированную тимпанальную мембрану и основание подножной пластины стремени. Значения собственных частот вычислены для различных положений узловых линий, усредненных геометрических параметров и упругих свойств тимпанальной мембраны, а также подножной пластины стремени и протеза.

Ключевые слова: среднее ухо; реконструкция; тимпанопластика; протез типа TORP; свободные колебания; собственная частота.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция» (задание 1.8.01.1).

FREE OSCILLATIONS OF THE MIDDLE EAR AFTER TOTAL TYMPANOPLASTY AND OSSICULOPLASTY WITH FUNCTIONAL MOBILITY OF THE FOOT PLATE OF STAPES

S. M. BOSIAKOV^a, G. I. MIKHASEV^a

^a*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

Corresponding author: S. M. Bosiakov (bosiakov@bsu.by)

Pathological changes in the oscillating system of the middle ear can lead to a decrease of the susceptibility threshold of the auditory analyser to sound vibrations and, consequently, to partial or complete hearing loss. Cartilage implants are most often used for the reconstruction of the tympanic membrane, since they help to avoid complications after treatment. Evaluation of the dynamic characteristics (eigenmodes and eigenfrequencies) of the reconstructed middle ear is the most important problem for analysing the quality of operations that improve the auditory conductivity and develop further recommendations for optimal prosthetics. The aim of this study is to estimate the eigenfrequencies of the middle ear free oscillations after prosthetics on the basis of a mathematical model involving transverse vibrations of the cartilage graft and movement of the prosthesis connecting the reconstructed tympanic membrane and the base of the foot stapes plate. The values of natural frequencies are evaluated for different positions of the nodal lines, averaged geometrical parameters and elastic properties of the tympanic membrane, as well as the foot plate of stapes and prosthesis.

Key words: middle ear; reconstruction; tympanoplasty; TORP prosthesis; free oscillations; natural frequency.

Acknowledgements. The study was supported by the State Program of Scientific Research «Convergence» (instruction 1.8.01.1).

Введение

Для улавливания звуковых волн у человека развита сложная система органов и рецепторов, позволяющая передавать их от ушной раковины в улитку с кохlearной жидкостью, а затем преобразовывать в электрические сигналы, поступающие в мозг [1]. Как правило, выделяют три части уха человека: внешнее, среднее и внутреннее ухо. Функциональное назначение колебательной системы среднего уха заключается в преобразовании звуковых сигналов, улавливаемых наружным ухом, в механические колебания тимпанальной мембраны и цепи слуховых косточек *молоточек – наковальня – стремя*, передающих осцилляции в улитку внутреннего уха [2]. Патологические изменения одного или нескольких элементов колебательной системы среднего уха могут привести к снижению порога восприимчивости слухового анализатора к акустическим сигналам и вследствие этого – к частичной или полной потере слуха, для улучшения или восстановления которого в этом случае прибегают к хирургической реконструкции среднего уха, заключающейся во введении имплантатов и протезов, заменяющих поврежденные компоненты [3]. Для реконструкции тимпанальной мембраны наиболее часто применяются хрящевые имплантаты, поскольку они позволяют избежать осложнений после лечения. Однако динамические свойства реконструированного среднего уха, в котором вместо тимпанальной мембраны используется хрящевой имплантат, довольно сильно отличаются от таковых среднего уха в норме [3]. Поэтому, как правило, сохраняются остатки тимпанальной мембраны, на которые накладывается имплантат. Устанавливаемый при тимпанопластике протез соединяет реконструированную тимпанальную мембрану с головкой или основанием стремени [4].

Наиболее важным при анализе качества тимпаноластики (и других операций, улучшающих слуховую проводимость) и выработке дальнейших рекомендаций по оптимальному протезированию является нахождение динамических характеристик (собственных форм и собственных частот колебаний) реконструированного среднего уха [5]. Цель настоящей работы – определение частот свободных колебаний среднего уха после тимпаноластики на основании математической модели, описывающей изгибные колебания кольцевой пластинки, моделирующей восстановленную барабанную перепонку, и плоскостные движения протеза, замещающего звено *молоточек – наковальня* и соединяющего реконструированную тимпанальную мембрану с подвижным основанием подножной пластины стремени.

Материалы и методы

В соответствии с [2; 4] введем глобальную систему координат $(Cxyz)$, начало которой располагается в центре реконструированной тимпанальной мембраны. Ось Cz перпендикулярна ее плоскости и направлена в сторону внешнего слухового прохода. Центр основания протеза совпадает с началом C глобальной системы координат; конец стержня протеза закреплен шарнирно на подножной пластине стремени в точке $S(x_S, y_S, z_S)$. Считаем, что протез является недеформируемым твердым телом. Формы собственных колебаний механической системы *тимпанальная мембрана – протез – подножная пластина стремени* можно классифицировать исходя из возможных форм колебаний круглой кольцевой пластинки, моделирующей восстановленную тимпанальную мембрану с учетом жесткого срачивания пластинки с круглым основанием протеза по его контуру. Из всех форм колебаний пластинки мы будем рассматривать лишь те, которые сопровождаются образованием не более чем одного узлового (неподвижного) диаметра. Формы колебаний с образованием двух и более узловых диаметров на пластинке не стимулируют движение присоединенного протеза и поэтому не представляют интереса. Пусть Cy' – один из таких узловых диаметров, вокруг которого протез совершает повороты. Обозначим через ψ угол между осями Cy' и Cy и введем новую систему координат $(Cx'y'z')$. При исследовании малых низкочастотных колебаний системы движением основания протеза в плоскости пластины, жесткость которой велика, можно пренебречь. Тогда с учетом принятой формы колебаний пластинки перемещения протеза можно разложить на два элементарных – поступательное перемещение W_p вдоль оси Cz и угловое перемещение Θ_p относительно оси Cy' . В результате данного перемещения конец ствола протеза (точка S) занимает новое положение. Исходное и конечное положения колебательной системы *тимпанальная мембрана – протез – подножная пластина стремени* после элементарного перемещения – поворота на угол Θ_p – показаны на рис. 1 (в точку S_Θ переходит точка S после указанного поворота протеза).

Уравнение малых колебаний круглой упругой кольцевой пластинки, моделирующей реконструированную тимпанальную мембрану, имеет вид

$$D\Delta^2 W(r, \varphi, t) + \rho h \frac{d^2 W(r, \varphi, t)}{dt^2} = 0, \quad (1)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластины, h – толщина пластины, E и ν – модуль Юнга

и коэффициент Пуассона хрящевого трансплантата соответственно; Δ – оператор Лапласа в полярной системе координат; $W(r, \varphi, t)$ – прогиб пластины, r и φ – полярные координаты (φ – угол, отсчитываемый в плоскости $x'Sy'$ от оси Cx' против часовой стрелки); ρ – плотность пластины.

Граничные условия на внешнем и внутреннем контурах кольцевой пластины, совершающей малые колебания, описываются уравнениями

$$\begin{aligned} W(b, \varphi, t) &= W_p(t) + b\Theta_p(t)\cos\varphi, \quad W(a, \varphi, t) = 0, \\ \left. \frac{\partial W(r, \varphi, t)}{\partial r} \right|_{r=b} &= \Theta_p(t)\cos\varphi, \quad \left. \frac{\partial W(r, \varphi, t)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где a и b – радиусы внешних контуров тимпанальной мембраны и протеза соответственно.

Пусть

$$W_p = w_p \sin \omega t, \quad \Theta_p = \theta_p \sin \omega t, \quad (3)$$

где w_p и θ_p – амплитуды поступательного и вращательного движений протеза соответственно; ω – искомая частота свободных колебаний системы.

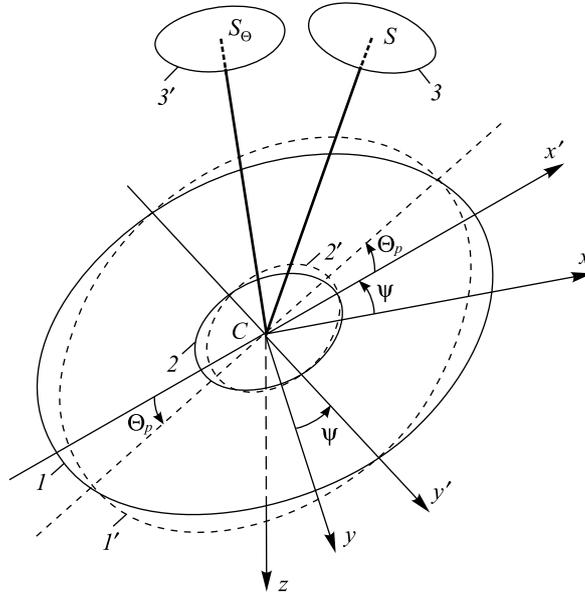


Рис. 1. Положения пластинки и протеза до и после элементарного перемещения – поворота на угол Θ_p .
Исходное расположение: 1 – реконструированная тимпанальная мембрана; 2 – основание протеза;
3 – основание стремени. Конечное расположение: 1' – реконструированная тимпанальная мембрана;
2' – основание протеза; 3' – основание стремени

Fig. 1. Initial and final positions of the plate and the prosthesis after an elementary displacement, which is a rotation on the Θ_p angle: C is the center of the reconstructed tympanic membrane and the base of the prosthesis; 1 and 2 are the initial positions of the reconstructed tympanic membrane and the base of the prosthesis; 3 is the initial position of the base of foot stapes plate; 1' and 2' are the locations of the reconstructed tympanic membrane and the base of the prosthesis after rotation on the angle Θ_p ; 3' is the location of base of the foot stapes plate after turning the base of the prosthesis on the angle Θ_p .

Решение уравнения (1) с граничными условиями (2), (3) можно представить как

$$W(r, \varphi, t) = (w_0(r) + w_1(r) \cos \varphi) \sin \omega t,$$

где w_0 и w_1 – амплитуды колебаний пластины при поступательном и вращательном движениях протеза, а соответствующие граничные условия для этих функций есть

$$w_0(b) = w_p, w_0(a) = 0, w_1(b) = b\theta_p, w_1(a) = 0, \\ \left. \frac{\partial w_0(r)}{\partial r} \right|_{r=b} = 0, \left. \frac{\partial w_1(r)}{\partial r} \right|_{r=b} = \theta_p, \left. \frac{\partial w_0(r)}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial w_1(r)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0. \quad (4)$$

С учетом (4) функции $w_0(r)$ и $w_1(r)$ представимы в виде

$$w_0(r) = A_1 I_0(k_0 r) + A_2 J_0(k_0 r) + A_3 Y_0(k_0 r) + A_4 K_0(k_0 r), \\ w_1(r) = B_1 I_1(k_0 r) + B_2 J_1(k_0 r) + B_3 Y_1(k_0 r) + B_4 K_1(k_0 r),$$

где $k_0^4 = \frac{h\rho\omega^2}{D}$; $I_n(k_0 r)$ и $K_n(k_0 r)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода n -го порядка, $J_n(k_0 r)$ и $Y_n(k_0 r)$ – функции Бесселя первого и второго рода n -го порядка ($n = 0, 1$); неизвестные константы A_k и B_k ($k = 1, 4$) находятся из граничных условий (4).

Рассмотрим колебания протеза, основание которого (круглая пластинка радиусом b) жестко скреплено с кольцевой пластинкой по внутреннему контуру, а другой конец шарнирно закреплен на подножной пластине стремени. Обозначим силы и моменты, действующие на протез в результате его поступательного перемещения вдоль оси Cz и поворота вокруг оси Cy' , следующим образом: Q_{10} – перерезывающие силы, возникающие при смещении протеза по нормали к его поверхности; Q_{1p} и M_{1p} –

перерезывающие силы и изгибающие моменты, возникающие при повороте протеза на угол Θ_p ; F_x и F_z – компоненты реакции F подножной пластины стремени, действующие на протез со стороны основания стремени вдоль осей Cx' и Cz соответственно. С учетом принятых обозначений уравнения движения протеза примут вид

$$2 \int_0^\pi \left[(M_{1p} + Q_{1p} b) \cos(\varphi) r \right]_{r=b} d\varphi + F_x z_{S'} - F_z y_{S'} = J \frac{d^2 \Theta_p}{dt^2},$$

$$2 \int_0^\pi [Q_{10} r]_{r=b} d\varphi + F_z = m \frac{d^2 W_p}{dt^2}.$$
(5)

Здесь m – масса протеза; J – момент инерции протеза относительно оси Cy' , определяемый по формуле

$$J = \frac{1}{4} m_1 r_1^2 + \frac{1}{24} m_2 \left((4l^2 + 9r_2^2 + (4l^2 - 3r_2^2) \cos 2\beta) \cos 2\beta \right) \cos^2 \alpha +$$

$$+ 2 \left((4l^2 + 3r_2^2) \sin^2 \alpha \right) \cos^2 \psi + 2 \left(6r_1^2 \cos^2 \beta + (4l^2 + 3r_2^2) \sin^2 \beta \right) \sin^2 \psi,$$

где m_1 и m_2 – масса основания и ствола протеза соответственно ($m = m_1 + m_2$ – масса протеза); r_1 и r_2 – радиус основания и ствола протеза соответственно; $l = \sqrt{(x_s - x_c)^2 + (y_s - y_c)^2 + (y_s - y_c)^2}$ – длина ствола протеза; $\cos \alpha = \frac{x_s}{l}$ – косинус угла между стволом и осью Cx ; $\cos \beta = \frac{y_s}{l}$ – косинус угла между стволом и осью Cy .

Перерезывающие силы и моменты, действующие на основание протеза со стороны пластинки, равны

$$M_{1p} = D \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{v}{r^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi^2} \right) \sin \omega t,$$

$$Q_{10} = -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2} \right) \sin \omega t,$$

$$Q_{1p} = -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi^2} \right) \sin \omega t.$$

С учетом гармонического характера колебаний и преобразования координат из системы $(Cx'y'z)$ в систему $(Cxyz)$ и в предположении малости угла Θ_p имеем

$$F_x = f_x \sin \omega t, \quad F_z = f_z \sin \omega t, \tag{6}$$

$$x_{S'} = x_s \cos \psi - y_s \sin \psi + \Theta_p z_s,$$

$$y_{S'} = x_s \sin \psi + y_s \cos \psi, \tag{7}$$

$$z_{S'} = \Theta_p (y_s \sin \psi - x_s \cos \psi) + z_s + W_p.$$

Тогда уравнения (5) запишутся в виде

$$2D \int_0^\pi \left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} - \frac{v w_1}{r^2} - b \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} - \frac{w_1}{r^2} \right) r \right]_{r=b} \cos^2 \varphi d\varphi +$$

$$+ f_x \left(\Theta_p (y_s \sin \psi - x_s \cos \psi) + z_s + w_p \right) - f_z (x_s \sin \psi + y_s \cos \psi) + J \omega^2 \Theta_p = 0,$$

$$- 2D \int_0^\pi \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) r \right]_{r=b} d\varphi + f_z + m \omega^2 w_p = 0,$$

или

$$\begin{aligned} & \pi D \left[r \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} - \frac{v w_1}{r^2} - b \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} - \frac{w_1}{r^2} \right) \right) \right]_{r=b} + \\ & + f_x (\theta_p (y_S \sin \psi - x_S \cos \psi) + z_S + w_p) - \\ & - f_z (x_S \sin \psi + y_S \cos \psi) + J \omega^2 \theta_p = 0, \\ & - 2\pi D \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \right]_{r=b} + f_z + m \omega^2 w_p = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Центр тяжести подножной пластины стремени при движении протеза также смещается в точку S' с координатами $(\xi_{S'}, \eta_{S'}, \zeta_{S'})$ в локальной системе координат $(S'\xi\eta\zeta)$, связанной с подножной пластиной стремени, совершая повороты α_ξ , α_η и α_ζ относительно координатных осей $S'\xi$, $S'\eta$ и $S'\zeta$. На рис. 2 обозначены компоненты F_x и F_z реакции F стержня протеза, действующие на основание стремени со стороны стержня протеза вдоль осей Cx' и Cz соответственно ($x_{S'}$, $y_{S'}$ и $z_{S'}$ – координаты точки S' в системе координат $(Cx'y'z)$).

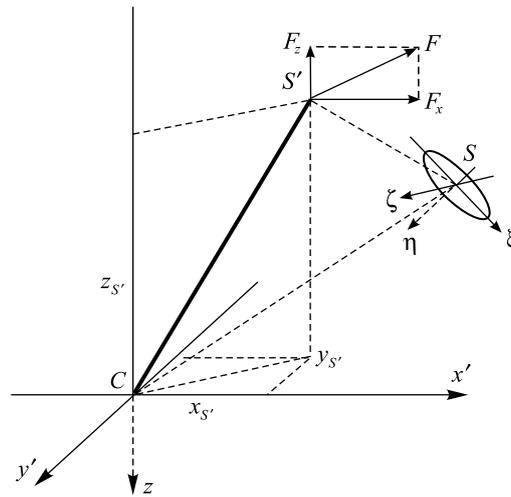


Рис. 2. Силы, действующие на подножную пластину стремени
Fig. 2. The forces acting on the base of the foot stapes plate

С учетом действующих на подножную пластину стремени сил уравнения движения основания стремени можно представить в виде

$$\begin{aligned} F_x + F_\xi \cos(\delta_{x''\xi}) + F_\eta \cos(\delta_{x''\eta}) + F_\zeta \cos(\delta_{x''\zeta}) &= m_{pp} \frac{d^2 x'(t)}{dt^2}, \\ F_y + F_\xi \cos(\delta_{y''\xi}) + F_\eta \cos(\delta_{y''\eta}) + F_\zeta \cos(\delta_{y''\zeta}) &= m_{pp} \frac{d^2 y'(t)}{dt^2}, \\ F_z + F_\xi \cos(\delta_{z''\xi}) + F_\eta \cos(\delta_{z''\eta}) + F_\zeta \cos(\delta_{z''\zeta}) &= m_{pp} \frac{d^2 z(t)}{dt^2}, \\ m_\xi &= J_\xi \frac{d^2 \alpha_\xi}{dt^2}, \quad m_\eta = J_\eta \frac{d^2 \alpha_\eta}{dt^2}, \quad m_\zeta = J_\zeta \frac{d^2 \alpha_\zeta}{dt^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где F_ξ , F_η и F_ζ – проекции реакции связки овального окна, возникающие при колебаниях протеза и направленные на оси координат $S'\xi$, $S'\eta$ и $S'\zeta$ соответственно; m_{pp} – масса основания стремени; $\delta_{x''\xi}$, $\delta_{x''\eta}$ и $\delta_{x''\zeta}$ – углы между осью Cx' и осями $S'\xi$, $S'\eta$ и $S'\zeta$ соответственно; $\delta_{y''\xi}$, $\delta_{y''\eta}$ и $\delta_{y''\zeta}$ – углы между осью Cy'

и осями $S\xi$, $S\eta$ и $S\zeta$ соответственно; $\delta_{z''\xi}$, $\delta_{z''\eta}$ и $\delta_{z''\zeta}$ – углы между осью Cz и осями $S\xi$, $S\eta$ и $S\zeta$ соответственно; m_ξ , m_η и m_ζ – реактивные моменты относительно осей $S\xi$, $S\eta$ и $S\zeta$ соответственно; $J_\xi = \frac{m_{pp} a^2}{2}$, $J_\eta = \frac{m_{pp} b^2}{2}$ и $J_\zeta = \frac{m_{pp}(a^2 + b^2)}{2}$ – главные центральные моменты инерции подножной пластины стремени относительно осей $S\xi$, $S\eta$ и $S\zeta$ соответственно (a и b – полуоси эллиптической подножной пластины стремени).

Реактивные силы и моменты, действующие со стороны связки овального окна, выразим следующим образом [2; 4]:

$$\begin{aligned} F_\xi &= c_{\text{ref}} (c_{11}\xi_{S'} + c_{12}\eta_{S'} + c_{13}\zeta_{S'} + c_{14}\alpha_\xi + c_{15}\alpha_\eta + c_{16}\alpha_\zeta), \\ F_\eta &= c_{\text{ref}} (c_{21}\xi_{S'} + c_{22}\eta_{S'} + c_{23}\zeta_{S'} + c_{24}\alpha_\xi + c_{25}\alpha_\eta + c_{26}\alpha_\zeta), \\ F_\zeta &= c_{\text{ref}} (c_{31}\xi_{S'} + c_{32}\eta_{S'} + c_{33}\zeta_{S'} + c_{34}\alpha_\xi + c_{35}\alpha_\eta + c_{36}\alpha_\zeta), \\ m_\xi &= c_{\text{ref}} (c_{41}\xi_{S'} + c_{42}\eta_{S'} + c_{43}\zeta_{S'} + c_{44}\alpha_\xi + c_{45}\alpha_\eta + c_{46}\alpha_\zeta), \\ m_\eta &= c_{\text{ref}} (c_{51}\xi_{S'} + c_{52}\eta_{S'} + c_{53}\zeta_{S'} + c_{54}\alpha_\xi + c_{55}\alpha_\eta + c_{56}\alpha_\zeta), \\ m_\zeta &= c_{\text{ref}} (c_{61}\xi_{S'} + c_{62}\eta_{S'} + c_{63}\zeta_{S'} + c_{64}\alpha_\xi + c_{65}\alpha_\eta + c_{66}\alpha_\zeta). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь c_{ref} – коэффициент, определяющий общую жесткость связки овального окна. Коэффициенты c_{ij} описывают жесткостные свойства связки и образуют симметричную матрицу [2; 4]:

$$C = \begin{pmatrix} 51,4 & -0,24 & -1,37 & 0,04 \text{ мм} & 9,66 \text{ мм} & 0,35 \text{ мм} \\ -0,24 & 49,2 & -0,6 & -7,87 \text{ мм} & -1,01 \text{ мм} & -8,4 \text{ мм} \\ -1,34 & -0,6 & 27,8 & 0,37 \text{ мм} & 17,1 \text{ мм} & 0,96 \text{ мм} \\ 0,04 \text{ мм} & -7,87 \text{ мм} & 0,37 \text{ мм} & 8,29 \text{ мм}^2 & 0,58 \text{ мм}^2 & 2,6 \text{ мм}^2 \\ 9,66 \text{ мм} & -1,01 \text{ мм} & 17,1 \text{ мм} & 0,58 \text{ мм}^2 & 29,7 \text{ мм}^2 & 1,6 \text{ мм}^2 \\ 0,35 \text{ мм} & -8,4 \text{ мм} & 0,96 \text{ мм} & 2,6 \text{ мм}^2 & 1,6 \text{ мм}^2 & 12,9 \text{ мм}^2 \end{pmatrix}.$$

Косинусы углов между осями координат Cx' , Cy' , Cz и $S\xi$, $S\eta$, $S\zeta$ при колебаниях протеза определим следующим образом (в предположении малости угла Θ_p):

$$\begin{aligned} \cos \delta_{x''\xi} &= -\cos(\beta_y) \cos(\psi) \sin(\beta_x) \sin(\beta_z) - \cos(\psi) \sin(\beta_y) \sin(\beta_z) \Theta_p - \\ &- \cos(\beta_z) \sin(\beta_x) \sin(\psi) + \cos(\beta_x) (\cos(\beta_z) \cos(\psi) - \cos(\beta_y) \sin(\beta_z) \sin(\psi)), \\ \cos \delta_{x''\eta} &= \cos(\beta_x) \cos(\psi) \sin(\beta_z) + \cos(\beta_z) \cos(\psi) \sin(\beta_y) \Theta_p - \\ &- \sin(\beta_x) \sin(\beta_z) \sin(\psi) + \cos(\beta_y) \cos(\beta_z) (\cos(\psi) \sin(\beta_x) + \cos(\beta_x) \sin(\psi)), \\ \cos \delta_{x''\zeta} &= \cos(\psi) \sin(\beta_x) \sin(\beta_z) - \cos(\beta_y) \cos(\psi) \Theta_p + \cos(\beta_x) \sin(\beta_y) \sin(\psi), \\ \cos \delta_{y''\xi} &= -\cos(\psi) \sin(\beta_x) \sin(\beta_z) - \cos(\beta_z) \sin(\psi) (\cos(\beta_y) \sin(\beta_x) + \\ &+ \sin(\beta_y) \Theta_p) + \cos(\beta_x) (\cos(\beta_y) \cos(\beta_z) \cos(\psi) - \sin(\beta_z) \sin(\psi)), \\ \cos \delta_{y''\eta} &= \cos(\beta_x) \cos(\psi) \sin(\beta_z) + \cos(\beta_z) \cos(\psi) \sin(\beta_y) \Theta_p - \\ &- \sin(\beta_x) \sin(\beta_z) \sin(\psi) + \cos(\beta_y) \cos(\beta_z) (\cos(\psi) \sin(\beta_x) + \cos(\beta_x) \sin(\psi)), \\ \cos \delta_{y''\zeta} &= \cos(\beta_x) \cos(\psi) \sin(\beta_z) + \cos(\beta_z) \cos(\psi) \sin(\beta_y) \Theta_p - \\ &- \sin(\beta_x) \sin(\beta_z) \sin(\psi) + \cos(\beta_y) \cos(\beta_z) (\cos(\psi) \sin(\beta_x) + \cos(\beta_x) \sin(\psi)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \delta_{y''\zeta} &= \cos(\psi) \sin(\beta_x) \sin(\beta_y) - \cos(\beta_y) \cos(\psi) \Theta_p + \cos(\beta_x) \sin(\beta_y) \sin(\psi), \\ \cos \delta_{z''\xi} &= \sin(\beta_y) \sin(\beta_z) + \Theta_p (\cos(\beta_x) \cos(\beta_z) - \cos(\beta_y) \sin(\beta_x) \sin(\beta_z)), \\ \cos \delta_{z''\eta} &= \cos(\beta_x) \sin(\beta_z) \Theta_p + \cos(\beta_z) (\cos(\beta_y) \sin(\beta_x) \sin(\theta_p) - \sin(\beta_y)), \\ \cos \delta_{z''\zeta} &= \cos(\beta_y) + \sin(\beta_x) \sin(\beta_y) \Theta_p,\end{aligned}$$

где β_x , β_y и β_z – углы Эйлера, определяющие связь между системами координат $(S\xi\eta\zeta)$ и $(Cxyz)$.

Подставим в уравнения движения (9) выражения для координат точки S' в локальной системе координат $(C\xi\eta\zeta)$ (в предположении малости угла Θ_p):

$$\begin{aligned}\xi &= x_S \cos \psi - y_S \sin \psi + z_S \Theta_p - x_S, \\ \eta &= x_S \sin \psi + y_S \cos \psi - y_S, \\ \zeta &= W_p - \Theta_p (x_S \cos \psi - y_S \sin \psi).\end{aligned}\tag{11}$$

После соответствующих преобразований с учетом соотношений между координатами (7) уравнения движения (9) примут вид

$$\begin{aligned}F_x + F_\xi \cos \delta_{x''\xi} + F_\eta \cos \delta_{x''\eta} + F_\zeta \cos \delta_{x''\zeta} &= m_{pp} z_S \frac{d^2 \Theta_p(t)}{dt^2}, \\ F_\xi \cos \delta_{y''\xi} + F_\eta \cos \delta_{y''\eta} + F_\zeta \cos \delta_{y''\zeta} &= 0, \\ F_z + F_\xi \cos \delta_{z''\xi} + F_\eta \cos \delta_{z''\eta} + F_\zeta \cos \delta_{z''\zeta} &= \\ &= m_{pp} (y_S \sin \psi - x_S \cos \psi) \frac{d^2 \Theta_p(t)}{dt^2} + m_{pp} \frac{d^2 W_p(t)}{dt^2}, \\ m_\xi &= J_\xi \frac{d^2 \alpha_\xi}{dt^2}, \quad m_\eta = J_\eta \frac{d^2 \alpha_\eta}{dt^2}, \quad m_\zeta = J_\zeta \frac{d^2 \alpha_\zeta}{dt^2}.\end{aligned}\tag{12}$$

Здесь проекции реакции на оси координатной системы $(S\xi\eta\zeta)$ и моменты сил относительно соответствующих координатных осей ввиду (10) и (11) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}F_\xi &= c_{\text{ref}} (c_{11} (x_S \cos \psi - y_S \sin \psi + z_S \Theta_p - x_S) + c_{12} (x_S \sin \psi + y_S \cos \psi - y_S) + \\ &+ c_{13} (z_S - \Theta_p (x_S \cos \psi - y_S \sin \psi) - z_S + W_p) + c_{14} \alpha_\xi + c_{15} \alpha_\eta + c_{16} \alpha_\zeta), \\ F_\eta &= c_{\text{ref}} (c_{21} (x_S \cos \psi - y_S \sin \psi + z_S \Theta_p - x_S) + c_{22} (x_S \sin \psi + y_S \cos \psi - y_S) + \\ &+ c_{23} (z_S - \Theta_p (x_S \cos \psi - y_S \sin \psi) - z_S + W_p) + c_{24} \alpha_\xi + c_{25} \alpha_\eta + c_{26} \alpha_\zeta), \\ F_\zeta &= c_{\text{ref}} (c_{31} (x_S \cos \psi - y_S \sin \psi + z_S \Theta_p - x_S) + c_{32} (x_S \sin \psi + y_S \cos \psi - y_S) + \\ &+ c_{33} (z_S - \Theta_p (x_S \cos \psi - y_S \sin \psi) - z_S + W_p) + c_{34} \alpha_\xi + c_{35} \alpha_\eta + c_{36} \alpha_\zeta), \\ m_\xi &= c_{\text{ref}} (c_{41} (x_S \cos \psi - y_S \sin \psi + z_S \Theta_p - x_S) + c_{42} (x_S \sin \psi + y_S \cos \psi - y_S) + \\ &+ c_{43} (z_S - \Theta_p (x_S \cos \psi - y_S \sin \psi) - z_S + W_p) + c_{44} \alpha_\xi + c_{45} \alpha_\eta + c_{46} \alpha_\zeta), \\ m_\eta &= c_{\text{ref}} (c_{51} (x_S \cos \psi - y_S \sin \psi + z_S \Theta_p - x_S) + c_{52} (x_S \sin \psi + y_S \cos \psi - y_S) + \\ &+ c_{53} (z_S - \Theta_p (x_S \cos \psi - y_S \sin \psi) - z_S + W_p) + c_{54} \alpha_\xi + c_{55} \alpha_\eta + c_{56} \alpha_\zeta),\end{aligned}$$

$$m_\zeta = c_{\text{ref}} \left(c_{61} (x_s \cos \psi - y_s \sin \psi + z_s \Theta_p - x_s) + c_{62} (x_s \sin \psi + y_s \cos \psi - y_s) + \right. \\ \left. + c_{63} (z_s - \Theta_p (x_s \cos \psi - y_s \sin \psi) - z_s + W_p) + c_{64} \alpha_\xi + c_{65} \alpha_\eta + c_{66} \alpha_\zeta \right).$$

Выполним преобразование и линеаризацию системы уравнений (8), (12) с учетом выражений (6) для реакций F_x и F_z , а также соотношений для перемещений и углов поворота

$$\alpha_\xi = \alpha_{\xi A} \sin \omega t, \quad \alpha_\eta = \alpha_{\eta A} \sin \omega t, \quad \alpha_\zeta = \alpha_{\zeta A} \sin \omega t.$$

В результате будем иметь систему 7 уравнений относительно неизвестных амплитудных значений f_x , f_z , w_p , θ_p и $\alpha_{\xi A}$, $\alpha_{\eta A}$, $\alpha_{\zeta A}$:

$$8bf_x z_s - 8bf_z (y_s \cos \psi + x_s \sin \psi) + \theta_p (8bJ\omega^2 - \\ - bB_1 Dk_0 \pi (3b^2 k_0^2 - 4(2 + \nu)) I_0(bk_0) - 8B_1 D\pi (2 + \nu) I_1(bk_0) + \\ + 8bB_1 Dk_0 \pi I_2(bk_0) - 4b^3 B_1 Dk_0^3 \pi I_2(bk_0) + 4bB_1 Dk_0 \pi \nu I_2(bk_0) - \\ - b^3 B_1 Dk_0^3 \pi I_4(bk_0) + 8bB_2 Dk_0 \pi J_0(bk_0) + 3b^3 B_2 Dk_0^3 \pi J_0(bk_0) + \\ + 4bB_2 Dk_0 \pi \nu J_0(bk_0) - 16B_2 D\pi J_1(bk_0) - 8B_2 D\pi \nu J_1(bk_0) - \\ - 8bB_2 Dk_0 \pi J_2(bk_0) - 4b^3 B_2 Dk_0^3 \pi J_2(bk_0) - 4bB_2 Dk_0 \pi \nu J_2(bk_0) + \\ + b^3 B_2 Dk_0^3 \pi J_4(bk_0) - 8bB_4 Dk_0 \pi K_0(bk_0) + 3b^3 B_4 Dk_0^3 \pi K_0(bk_0) - \\ - 4bB_4 Dk_0 \pi K_0(bk_0) - 16B_4 D\pi K_1(bk_0) - 8B_4 D\pi \nu K_1(bk_0) - \\ - 8bB_4 Dk_0 \pi K_2(bk_0) + 4b^3 B_4 Dk_0^3 \pi K_2(bk_0) - 4bB_4 Dk_0 \pi \nu K_2(bk_0) + \\ + b^3 B_4 Dk_0^3 \pi K_4(bk_0) + 8bB_3 Dk_0 \pi Y_0(bk_0) + 3b^3 B_3 Dk_0^3 \pi Y_0(bk_0) + \\ + 4bB_3 Dk_0 \pi \nu Y_0(bk_0) - 16B_3 D\pi Y_1(bk_0) - 8B_3 D\pi \nu Y_1(bk_0) - \\ - 8bB_3 Dk_0 \pi Y_2(bk_0) - 4b^3 B_3 Dk_0^3 \pi Y_2(bk_0) - \\ - 4bB_3 Dk_0 \pi \nu Y_2(bk_0) + b^3 B_3 Dk_0^3 \pi Y_4(bk_0)) = 0. \tag{13}$$

$$2bf_z + w_p (2bm_{pp} \omega^2 - 2A_1 b Dk_0^2 \pi I_0(bk_0) + A_1 Dk_0 (4 - 3b^2 k_0^2) \pi I_1(bk_0) - \\ - 2A_1 b Dk_0^2 \pi I_2(bk_0) - A_1 b^2 Dk_0^3 \pi I_3(bk_0) + 2A_2 b Dk_0^2 \pi J_0(bk_0) - \\ - 4A_2 Dk_0 \pi J_1(bk_0) - 3A_2 b^2 Dk_0^3 \pi J_1(bk_0) - 2A_2 b Dk_0^2 \pi J_2(bk_0) + \\ + A_2 b^2 Dk_0^3 \pi J_3(bk_0) - 2A_4 b Dk_0^2 \pi K_0(bk_0) - 4A_4 Dk_0 \pi K_1(bk_0) + \\ + 3A_4 b^2 Dk_0^3 \pi K_1(bk_0) - 2A_4 b Dk_0^2 \pi K_2(bk_0) + A_4 b^2 Dk_0^3 \pi K_3(bk_0) + \\ + 2A_3 b Dk_0^2 \pi Y_0(bk_0) - 4A_3 Dk_0 \pi Y_1(bk_0) - 3A_3 b^2 Dk_0^3 \pi Y_1(bk_0) - \\ - 2A_3 b Dk_0^2 \pi Y_2(bk_0) + A_3 b^2 Dk_0^3 \pi Y_3(bk_0)) = 0, \tag{14}$$

$$\frac{f_x}{c_{\text{ref}}} + w_p (c_{33} \cos \delta_{x''\zeta} + c_{33} \cos \delta_{x''\eta} + c_{13} \cos \delta_{x''\xi}) + \\ + \alpha_{\xi A} (c_{34} \cos \delta_{x''\zeta} + c_{34} \cos \delta_{x''\eta} + c_{14} \cos \delta_{x''\xi}) + \\ + \alpha_{\eta A} (c_{35} \cos \delta_{x''\zeta} + c_{35} \cos \delta_{x''\eta} + c_{15} \cos \delta_{x''\xi}) + \\ + \alpha_{\zeta A} (c_{36} \cos \delta_{x''\zeta} + c_{36} \cos \delta_{x''\eta} + c_{16} \cos \delta_{x''\xi}) +$$

$$+ \left(z_S (c_{13} \cos \delta_{x''\zeta} + c_{13} \cos \delta_{x''\eta} + c_{11} \cos \delta_{x''\xi}) - \right. \\ \left. - x_S (c_{33} \cos \delta_{x''\zeta} + c_{33} \cos \delta_{x''\eta} + c_{13} \cos \delta_{x''\xi}) + \frac{m_{pp}}{c_{ref}} z_S \omega^2 \right) \theta_p = 0, \quad (15)$$

$$\frac{f_z}{c_{ref}} + (2 \cos \delta_{x''\zeta} + \cos \delta_{x''\eta}) (c_{33} w_p + c_{34} \alpha_{\xi A} + c_{35} \alpha_{\eta A} + c_{36} \alpha_{\zeta A} + \\ + \theta_p (c_{13} z_S - c_{33} x_S)) + \frac{m_{pp}}{c_{ref}} \omega^2 (w_p + \theta_p (y_S \sin \psi - x_S \cos \psi)) = 0, \quad (16)$$

$$c_{34} w_p + c_{45} \alpha_{\eta A} + c_{46} \alpha_{\zeta A} + (c_{14} z_S - c_{46} x_S) \theta_p + \left(c_{44} + \frac{J_{\xi}}{c_{ref}} \omega^2 \right) \alpha_{\xi A} = 0, \quad (17)$$

$$c_{35} w_p + c_{45} \alpha_{\xi A} + c_{56} \alpha_{\zeta A} + (c_{15} z_S - c_{35} x_S) \theta_p + \left(c_{55} + \frac{J_{\eta}}{c_{ref}} \omega^2 \right) \alpha_{\eta A} = 0, \quad (18)$$

$$c_{36} w_p + c_{46} \alpha_{\xi A} + c_{56} \alpha_{\eta A} + (c_{16} z_S - c_{36} x_S) \theta_p + \left(c_{66} + \frac{J_{\zeta}}{c_{ref}} \omega^2 \right) \alpha_{\zeta A} = 0. \quad (19)$$

Результаты и их обсуждение

Из условия совместности системы (13)–(19) следует характеристическое уравнение, определяющее собственные частоты свободных колебаний (уравнение не приводится в силу громоздкости). Его решение найдем численно для следующих геометрических и материальных постоянных [4; 6; 7]:

$$x_C = y_C = z_C = 0, \quad x_S = 3,637 \text{ мм}, \quad y_S = -1,500 \text{ мм}, \quad z_S = -6,499 \text{ мм}, \\ a = 4,75 \text{ мм}, \quad b = 2,00 \text{ мм}, \quad h = 0,30 \text{ мм}, \quad \beta_x = 11,047^\circ, \quad \beta_y = -20,623^\circ, \quad \beta_z = 3,366^\circ, \\ E = 2,8\text{--}3,4 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,4, \quad c_{ref} = 0,035\text{--}0,050 \text{ Н/м}.$$

Величины полуосей эллиптической подножной пластины стремени и ее массы, согласно экспериментальным данным [8–12], приведены в табл. 1.

Таблица 1

Полуоси эллиптической подножной пластины стремени и ее масса

Table 1

The semi-axes of the elliptical fbase of the foot stapes plate and its mass

Параметры модели	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]
a_0 , мм	2,64	3,12	2,40	2,50	3,36
b_0 , мм	1,32	1,53	1,21	1,38	1,66
m_{pp} , мг	1,93	–	–	2,24	2,05–4,35

В табл. 2 указаны значения собственных частот свободных колебаний системы, состоящей из мембраны среднего уха с протезом и подножной пластины стремени. При расчете частот используются усредненные данные для упругих свойств и геометрических параметров компонент этой системы ($E = 3,1 \text{ МПа}$, $c_{ref} = 0,0425 \text{ Н/м}$, $a_0 = 2,732 \text{ мм}$, $b_0 = 1,324 \text{ мм}$, $m_{pp} = 2,6425 \text{ мг}$, $a = 4,6705 \text{ мм}$).

С возрастанием угла ψ от 0 до $\pi/2$ соответствующие определенному номеру собственные частоты свободных колебаний убывают (см. табл. 2). Отличие между частотами возрастает с увеличением номера узловой линии. При достижении ψ значения $\pi/2$ собственные частоты существенно возрастают для каждого из номеров узловых линий.

В табл. 3 и 4 приведены значения собственных частот свободных колебаний реконструированной системы среднего уха для различных модулей упругости трансплантата и жесткостей связки овального окна соответственно. В первом случае полагается $c_{ref} = 0,0425 \text{ Н/м}$, во втором случае модуль упругости составляет 3,1 МПа. В обоих случаях угол ψ принимается равным $\pi/4$, $a_0 = 2,732 \text{ мм}$, $b_0 = 1,324 \text{ мм}$, $m_{pp} = 2,6425 \text{ мг}$ и $a = 4,6705 \text{ мм}$.

Таблица 2

Собственные частоты свободных колебаний тимпанальной мембраны среднего уха и подножной пластины стремени с установленным между ними протезом, кГц

Table 2

The eigenfrequencies of free oscillations of the middle ear tympanic membrane and the foot stapes plate with a prosthesis attached between them, kHz

Угол ψ	$\omega_1 (n_\psi = 0)$	$\omega_2 (n_\psi = 1)$	$\omega_3 (n_\psi = 2)$	$\omega_4 (n_\psi = 3)$
$\pi/6$	15,61	42,81	83,20	135,52
$\pi/4$	15,60	42,74	82,73	133,07
$\pi/3$	15,58	42,58	81,92	129,29
$\pi/2$	15,65	44,20	119,43	168,72

Примечание. n_ψ – соответствующие номера узловых линий.

Таблица 3

Собственные частоты свободных колебаний реконструированной системы среднего уха при различных модулях упругости трансплантата, кГц

Table 3

The eigenfrequencies of free oscillations of the reconstructed middle ear system with different elasticity moduli of the graft, kHz

Модуль упругости, МПа	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
2,8	14,83	40,67	78,85	127,37
2,9	15,10	41,37	80,17	129,32
3,0	15,35	42,06	81,46	131,22
3,1	15,60	42,74	82,73	133,07
3,2	16,17	43,40	83,97	134,87
3,3	16,42	44,06	85,19	136,62
3,4	16,67	44,70	86,38	138,33

Таблица 4

Собственные частоты свободных колебаний реконструированной системы среднего уха при различных значениях жесткости связки овального окна, кГц

Table 4

The eigenfrequencies of free oscillations of the reconstructed middle ear system for different values of the ligament stiffness of the oval window, kHz

Жесткость связки c_{ref} , Н/м	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
0,035	15,57	42,47	81,49	127,87
0,040	15,59	42,67	82,40	131,74
0,045	15,61	42,80	82,99	134,12
0,050	15,62	42,90	83,39	135,64

Заключение

Построена модель, описывающая свободные колебания реконструированного среднего уха, подвергнутого полной тимпанопластике и оссикулопластике в случае функциональной подвижности стремени. Из всех возможных форм изучены колебания, сопровождающиеся поступательным движением протеза вдоль нормали к тимпанальной мембране и поворотом вокруг узлового диаметра на мембране. Исследовано влияние модуля упругости хрящевого трансплантата и жесткости связки овального окна на собственные частоты колебаний системы. Установлено, что при увеличении модуля упругости

трансплантата и жесткости связки овального окна собственные частоты свободных колебаний реконструированной системы среднего уха также возрастают. В то же время изменение модуля упругости трансплантата оказывает более существенное влияние на изменение значений собственных частот, чем изменение жесткости овального окна.

Библиографические ссылки / References

1. Vollandri G, Di Puccio F, Forte P, Carmignani C. Biomechanics of the tympanic membrane. *Journal of Biomechanics*. 2011; 44:1219–1236. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2010.12.023.
2. Beer H-J, Bornitz M, Hardtke H-J, Schmidt R, Hofmann G, Vogel U, et al. Modeling of components of the human middle ear and simulation of their dynamic behavior. *Audiology and Neurootology*. 1999;4:156–162. DOI: 10.1159/000013835.
3. Mürbe D, Zahnert T, Bornitz M, Hüttenbrink KB. Acoustic properties of different cartilage reconstruction techniques of the tympanic membrane. *Laryngoscope*. 2002;112:1769–1776. DOI: 10.1097/00005537-200210000-00012.
4. Mikhasev G, Ermochenko S, Bornitz M. On the strain-stress state of the reconstructed middle ear after inserting a malleus-incus prosthesis. *Mathematical Medicine and Biology: A Journal of the IMA*. 2010;27(4):289–312. DOI: 10.1093/imammb/dqp020.
5. Zwislocki J. Analysis of the middle ear function. *Journal of Acoustical Society of America. Part I. Input Impedance*. 1962; 34(8):1514–1523. DOI: 10.1121/1.1918382.
6. Selyaninov AA, Yelovikov AM, Borodulina TS, Podgaets RM. Choice of parameters of the stapes prosthesis on the basis of eigenfrequencies at the stapedioplasty operation. *Russian Journal of Biomechanics*. 2009;13(4):40–50.
7. Zhao F, Koike T, Wang J, Sienz H, Meredith Rh. Finite-element analysis of the middle ear transfer functions and related pathologies. *Medical Engineering and Physics*. 2009;31(8):907–916. DOI: 10.1016/j.medengphy.2009.06.009.
8. Gan RZ, Feng B, Sun Q. Three-dimensional finite element modeling of human ear for sound transmission. *Annals of Biomedical Engineering*. 2004;32:847–859. DOI: 10.1023/B:ABME.0000030260.22737.53.
9. Koike T, Wada H, Kobayashi T. Modeling of the human middle ear using the finite-element method. *Journal of the Acoustical Society of America*. 2002;111(3):1306–1317. DOI: 10.1121/1.1451073.
10. Lee CF, Chen PR, Lee WJ, Chen JH, Liu TC. Three-dimensional reconstruction and modeling of middle ear biomechanics by high-resolution computed tomography and finite element analysis. *Laryngoscope*. 2006;116:711–716. DOI: 10.1097/01.mlg.0000204758.15877.34.
11. Sun Q, Chang KH, Dormer KJ, Dyer RKJr, Gan RZ. An advanced computer-aided geometric modeling and fabrication method for human middle ear. *Medical Engineering and Physics*. 2002;24(9):595–605.
12. Wever EG, Lawrence M. *Physiological acoustics*. Princeton: Princeton University Press; 1982. 454 p.

Статья поступила в редколлегию 10.12.2018.
Received by editorial board 10.12.2018.

УДК 517.968.73

К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРАНДТЛЯ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Г. А. РАСОЛЬКО¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Построены и обоснованы вычислительные схемы решения задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения Прандтля с сингулярным интегралом по отрезку действительной оси, понимаемым в смысле главного значения по Коши. Данное уравнение приводится к равносильным уравнениям Фредгольма второго рода с помощью обращения сингулярного интеграла в трех классах функций по Мухелишвили и применения спектральных соотношений для сингулярного интеграла. Одновременно исследуются условия разрешимости интегральных уравнений Фредгольма второго рода с логарифмическим ядром специального вида и такие уравнения приближенно решаются. Новые вычислительные схемы основаны на применении к интегралу, входящему в равносильное уравнение, спектральных соотношений для сингулярного интеграла. Получены равномерные оценки погрешностей приближенных решений.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение; уравнение Прандтля; численное решение; метод ортогональных многочленов.

Образец цитирования:

Расолько ГА. К численному решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;1: 58–68.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-58-68>

For citation:

Rasolko GA. To the numerical solution of singular integro-differential Prandtl equation by the method of orthogonal polynomials. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;1:58–68. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-58-68>

Автор:

Галина Алексеевна Расолько – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.

Author:

Galina A. Rasolko, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of web-technologies and computer modeling, faculty of mechanics and mathematics.
rasolka@bsu.by

TO THE NUMERICAL SOLUTION OF SINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL PRANDTL EQUATION BY THE METHOD OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS

G. A. RASOLKO^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

In the paper, computational schemes for solving the Cauchy problem for the singular integro-differential Prandtl equation with a singular integral over a segment of the real axis, understood in the sense of the Cauchy principal value, are constructed and justified. This equation is reduced to equivalent Fredholm equations of the second kind by inversion of the singular integral in three classes of Muskhelishvili functions and applying spectral relations for the singular integral. At the same time, we investigate the conditions for the solvability of integral Fredholm equations of the second kind with a logarithmic kernel of a special form and are approximately solved. The new computational schemes are based on applying the spectral relations for the singular integral to the integral entering into the equivalent equation. Uniform estimates of the errors of approximate solutions are obtained.

Key words: integro-differential equation; Prandtl equation; numerical solution; method of orthogonal polynomials.

Введение

В теории крыла конечного размаха, контактных задачах теории упругости и других задачах механики сплошной среды важную роль играет уравнение

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt = f(x), \quad -1 < x < 1, \quad (1)$$

которое называется уравнением Прандтля [1–3]. Здесь $B(x)$ и $f(x)$ – известные функции из класса $\mathbb{C}[-1, 1]$, $\Gamma(x)$ – искомая функция. К уравнению (1) присоединяются дополнительные условия

$$\Gamma(\pm 1) = 0. \quad (2)$$

Число работ, посвященных этому уравнению, огромно. Известно, что оно точно решается лишь в редких частных случаях [4]. В значительной части публикаций, начиная с самой первой, рассматриваются вопросы разработки и обоснования приближенных методов решения уравнения (1). Среди приближенных методов наиболее распространенным является метод Мультихуппа.

В настоящей работе предлагаются и обосновываются вычислительные схемы для численного решения уравнения (1). Первоначально уравнение сводится к равносильным уравнениям с логарифмической особенностью. Указываются условия разрешимости полученных уравнений. Новые вычислительные схемы основаны на применении к интегралу, входящему в уравнение, которое равносильно исходному, спектральных соотношений для сингулярного интеграла. Отметим, что в [5] предложена и обоснована вычислительная схема для уравнения (1), отличающаяся от описанной ниже.

Предварительные сведения

В данной работе использованы известные спектральные соотношения [6, с. 188]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} &= U_{n-1}(x), \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_{n-1}(t) \frac{dt}{t-x} &= -T_n(x), \quad -1 < x < 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

где $T_n(x)$, $U_{n-1}(x)$ – многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно.

При построении вычислительной схемы использован интерполяционный многочлен для функции $f(x)$ по узлам Чебышева первого рода, указанный в теореме 7.9 [7, с. 89]:

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j T_j(x), \quad (4)$$

где $c_j = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k)$, $j = 0, 1, \dots, n$, $x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Здесь и далее $\sum_{j=0}^n a_j = \frac{1}{2} a_0 + a_1 + \dots + a_n$.

Отметим, что в теореме 7.9 из [7] используется и другая – классическая – форма интерполяционного многочлена по узлам Чебышева первого рода, которая равносильна (4). Мы говорим, что (4) – это разложение функции $f(x)$ по многочленам Чебышева первого рода.

О классах функций по Мусхелишвили напомним следующее [8, с. 31]:

- функция $\psi(x)$ принадлежит классу $h(-1)$, если на отрезке $[-1, 1 - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, она удовлетворяет условию Гёльдера, а в окрестности точки $x = 1$ допускает интегрируемую особенность;
- функция $\psi(x)$ принадлежит классу $h(1)$, если на отрезке $[-1 + \varepsilon, 1]$, $\varepsilon > 0$, она удовлетворяет условию Гёльдера, а в окрестности точки $x = -1$ допускает интегрируемую особенность.

Класс функций $h(-1, 1)$ – класс ограниченных в окрестности точек $x = \pm 1$ функций.

Приведение уравнения (1) к уравнениям Фредгольма

Сведем уравнение (1) к уравнениям с логарифмической особенностью в трех классах функций по Мусхелишвили: $h(-1, 1)$, $h(1)$ и $h(-1)$.

Пусть

$$u(x) \triangleq -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt. \quad (5)$$

Обращение сингулярного интеграла в классе $h(-1, 1)$. Так как для интеграла (5) очевидно выполнены условия разрешимости $\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = 0$, применим формулы обращения сингулярного интеграла (5) в указанном классе функций – классе функций $h(-1, 1)$, ограниченных в окрестности точек $x = \pm 1$:

$$\Gamma'(x) = \sqrt{1-x^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{u(t)}{t-x} dt.$$

Отсюда при условии (2) имеем

$$\Gamma(x) = \int_{-1}^x \Gamma'(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_1(x, t) u(t) dt, \quad (6)$$

$$H_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \int_{-1}^x \left(\sqrt{1-\tau^2} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) = H_1^0(x, t) + H(x, t), \quad (7)$$

где

$$H_1^0(x, t) = \frac{-\sqrt{1-x^2} + t(\pi - \arccos x)}{\sqrt{1-t^2}}; \quad (8)$$

$$H(x, t) = \sqrt{1-t^2} \int_{-1}^x \left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) = \ln \frac{1-xt + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-t^2}}{|t-x|}. \quad (9)$$

Функция $H(x, t)$ симметрична и неотрицательна [5].

На основании (7) имеет место оценка

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 |H_1(x, t)| dt \leq \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 |H_1^0(x, t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) dt \leq 2 \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{\pi - \arccos x}{\pi} \right) < \pi.$$

Принимая во внимание (6), введем линейный оператор

$$K_1(u; x) = \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_1(x, t) u(t) dt = \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (H_1^0(x, t) + H(x, t)) u(t) dt. \quad (10)$$

Тогда граничная задача (1), (2) сводится к уравнению

$$u(x) + K_1(u; x) = f(x). \quad (11)$$

Учитывая (8)–(10), применим формулу интегрирования по частям в следующем интеграле:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_1(x, t) u(t) dt = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x}, \quad \Phi'(x) = u(x). \quad (12)$$

Отсюда с учетом теоремы Племеля – Привалова (см., например, [8, с. 58]) заключаем, что оператор $K_1(u; x)$ отображает пространство $\mathbb{C}[-1, 1]$ в себя, если функция $B^{-1}(x) \in \mathbb{C}[-1, 1]$ или даже $b^{-1}(x) \in \mathbb{C}[-1, 1]$, где $b(x) = \frac{B(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Кроме того,

$$\|K_1 u\|_{\mathbb{C}} \leq \rho_1 \|u\|_{\mathbb{C}}, \quad (13)$$

где

$$\rho_1 = \max_{|x| \leq 1} \frac{2 \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{\pi - \arccos x}{\pi} \right)}{|B(x)|}. \quad (14)$$

Теорема 1. Пусть функция $B(x)$, входящая в уравнение (1), удовлетворяет условию

$$\rho_1 < 1, \quad \rho_1 = \max_{|x| \leq 1} \frac{2 \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{\pi - \arccos x}{\pi} \right)}{|B(x)|}. \quad (15)$$

Тогда уравнение (11) с оператором (10), и вместе с ним граничная задача (1), (2), имеет единственное решение в классе функций $\Gamma'(x) \in h(-1, 1)$ при любой $f(x) \in \mathbb{C}[-1, 1]$.

Обращение сингулярного интеграла в классе $h(1)$. Применим формулы обращения сингулярного интеграла (5) в указанном классе (класс функций, ограниченных в окрестности точки $x = 1$) и получим

$$\Gamma'(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{u(t)}{t-x} dt.$$

Отсюда

$$\Gamma(x) = \int_{-1}^x \Gamma'(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^x H_2(x, t) u(t) dt, \quad (16)$$

где

$$H_2(x, t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \int_{-1}^x \left(\sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) = H_2^0(x, t) + H(x, t),$$

$$H_2^0(x, t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} (\pi - \arccos x), \quad H(x, t) = \ln \frac{1-xt + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-t^2}}{|t-x|}.$$

Очевидно, что функция $H_2(x, t)$ неотрицательна и имеет место оценка

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 |H_2(x, t)| dt \leq \pi - \arccos x + \sqrt{1-x^2} \leq \pi.$$

Тогда граничная задача (1), (2) сводится к уравнению

$$u(x) + K_2(u; x) = f(x), \quad (17)$$

где

$$K_2(u; x) = \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_2(x, t) u(t) dt. \quad (18)$$

Аналогично предыдущему пункту получим следующий результат: оператор $K_2(u; x)$ отображает пространство $\mathbb{C}[-1, 1]$ в себя, если функция $B^{-1}(x) \in \mathbb{C}[-1, 1]$ или даже $b^{-1}(x) \in \mathbb{C}[-1, 1]$, где $b(x) = \frac{B(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Кроме того,

$$\|K_2 u\|_{\mathbb{C}} \leq \rho_2 \|u\|_{\mathbb{C}}, \quad (19)$$

$$\rho_2 = \max_{|x| \leq 1} \frac{\pi - \arccos x + \sqrt{1-x^2}}{|B(x)|}. \quad (20)$$

Теорема 2. Пусть функция $B(x)$, входящая в уравнение (1), удовлетворяет условию

$$\rho_2 < 1, \quad \rho_2 = \max_{|x| \leq 1} \frac{\pi - \arccos x + \sqrt{1-x^2}}{|B(x)|}. \quad (21)$$

Тогда уравнение (17) с оператором (18), и вместе с ним граничная задача (1), (2), имеет единственное решение в классе функций $\Gamma'(x) \in h(1)$ при любой $f(x) \in \mathbb{C}[-1, 1]$.

Обращение сингулярного интеграла в классе $h(-1)$. Применим формулы обращения сингулярного интеграла (5) в указанном классе (класс функций, ограниченных в окрестности точки $x = -1$) и получим

$$\Gamma'(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \frac{u(t)}{t-x} dt.$$

Отсюда

$$\Gamma(x) = \int_{-1}^x \Gamma'(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^x H_3(x, t) u(t) dt, \quad (22)$$

$$H_3(x, t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \int_{-1}^x \left(\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) = H_3^0(x, t) + H(x, t),$$

$$H_3^0(x, t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} (\arccos x - \pi), \quad H(x, t) = \ln \frac{1-xt + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-t^2}}{|t-x|}.$$

Таким образом, уравнение (1) свелось к уравнению

$$u(x) + K_3(u; x) = f(x), \quad (23)$$

где

$$K_3(u; x) = \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_3(x, t) u(t) dt. \quad (24)$$

Имеет место оценка

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 |H_3(x, t)| dt \leq \pi - \arccos x + \sqrt{1-x^2} \leq \pi.$$

Как и в предыдущих пунктах, получим следующий результат: оператор $K_3(u; x)$ отображает пространство $\mathbb{C}[-1, 1]$ в себя, если функция $B^{-1}(x) \in \mathbb{C}[-1, 1]$ или даже $b^{-1}(x) \in \mathbb{C}[-1, 1]$, где $b(x) = \frac{B(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Кроме того,

$$\|K_3 u\|_{\mathbb{C}} \leq \rho_3 \|u\|_{\mathbb{C}}, \quad (25)$$

$$\rho_3 = \max_{|x| \leq 1} \frac{\pi - \arccos x + \sqrt{1-x^2}}{|B(x)|}. \quad (26)$$

Теорема 3. Пусть функция $B(x)$, входящая в уравнение (1), удовлетворяет условию

$$\rho_3 < 1, \rho_3 = \max_{|x| \leq 1} \frac{\pi - \arccos x + \sqrt{1-x^2}}{|B(x)|}. \quad (27)$$

Тогда уравнение (23) с оператором (24), и вместе с ним граничная задача (1), (2), имеет единственное решение в классе функций $\Gamma'(x) \in h(-1)$ при любой $f(x) \in \mathbb{C}[-1, 1]$.

Приближенное решение уравнения (1)

Схема 1. Решение в классе $h(-1, 1)$. На основании (11) и (5) приближенное решение уравнения (1) при условии (2) найдем как решение уравнения

$$u_n(x) + K_1(u_n; x) = F_n(x), \quad (28)$$

где $u_n(x)$ – интерполяционный многочлен (4) функции $u(x)$, построенный по узлам Чебышева первого рода:

$$u_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'_n(t)}{t-x} dt = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x), \quad (29)$$

c_k – пока неизвестные постоянные, $k = 0, 1, \dots, n$;

$$K_1(u_n; x) = \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_1(x, t) u_n(t) dt; \quad (30)$$

$F_n(x)$ – некоторая функция из класса $\mathbb{C}[-1, 1]$ такая, что $F_n(x_j) = f(x_j)$, $x_j = \cos \frac{2j+1}{2n+2}$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Очевидно, что для уравнения (28) с оператором (30), тождественным (10), имеет место аналог теоремы 1, т. е. вследствие (13)–(15) уравнение (28) также разрешимо.

Для обращения сингулярного интеграла (29) в классе ограниченных функций подчиним его условию разрешимости $\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0$, т. е. $\sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0$. Следовательно, $c_0 = 0$.

Используя (29) и учитывая (3), как и ранее, вычислим и упростим $\Gamma_n(x)$, а этим и $K_1(u_n; x)$.

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_1(x, t) u_n(t) dt = \sum_{k=1}^n c_k \gamma_k(x), \quad (31)$$

$$\gamma_k(x) = \int_{-1}^x \sin(k \arccos \tau) d\tau = \begin{cases} \frac{1}{4} (\pi + 2x\sqrt{1-x^2} + 2 \arcsin x), & k = 1, \\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \left(\frac{U_k(x)}{k+1} - \frac{U_{k-2}(x)}{k-1} \right), & k > 1, \end{cases} \quad (32)$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_1(x, t) u_n(t) dt &= \int_{-1}^x \left(\sqrt{1-\tau^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{u_n(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau = \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \int_{-1}^x \left(\sqrt{1-\tau^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_k(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau = \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \int_{-1}^x \sqrt{1-\tau^2} U_{k-1}(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^n c_k \int_{-1}^x \sin(k \arccos \tau) d\tau = \sum_{k=1}^n c_k \gamma_k(x). \end{aligned}$$

Поэтому из (30)–(32) следует, что

$$K_1(u_n; x) = \frac{1}{B(x)} \sum_{k=1}^n c_k \gamma_k(x). \quad (33)$$

Уравнение (28) с учетом (33) в заданном классе переходит в уравнение

$$\sum_{k=1}^n c_k \frac{1}{B(x)} \gamma_k(x) + \sum_{k=1}^n c_k T_k(x) = F_n(x). \quad (34)$$

В качестве внешних узлов x в (34) выберем узлы Чебышева первого рода, а именно $x_j = \cos \frac{2j+1}{2n+2}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Из (34) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n c_k \left(\frac{1}{B(x_j)} \gamma_k(x_j) + T_k(x_j) \right) = f(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (35)$$

Уравнение (34), а следовательно, и система (35), и интегральное уравнение (28) равносильны, так как, выполняя действия, приводящие (28) в (35), в обратном порядке, из (35) получим разрешимое уравнение (28). Значит, система (35) разрешима и имеет единственное решение c_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Приближенное решение задачи (1), (2) – функция $\Gamma_n(x)$ – вычисляется согласно (31).

Схема 2. Решение в классе $h(1)$. На основании (17) и (5) приближенное решение уравнения (1) при условии (2) найдем как решение уравнения

$$u_n(x) + K_2(u_n; x) = F_n(x), \quad (36)$$

где $u_n(x)$ – интерполяционный многочлен (4) функции $u(x)$, построенный по узлам Чебышева первого рода:

$$u_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma_n'(t)}{t-x} dt = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x), \quad (37)$$

c_k – пока неизвестные постоянные, $k = 0, 1, \dots, n$;

$$K_2(u_n; x) = \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_2(x, t) u_n(t) dt; \quad (38)$$

$F_n(x)$ – некоторая функция из класса $\mathbb{C}[-1, 1]$ такая, что $F_n(x_j) = f(x_j)$, $x_j = \cos \frac{2j+1}{2n+2}$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Очевидно, что для уравнения (36) с оператором (38), тождественным (18), имеет место аналог теоремы 2, т. е. вследствие (19)–(21) уравнение (36) также разрешимо.

Используя (37) и учитывая (3), как и ранее, вычислим и упростим $\Gamma_n(x)$, а этим и $K_2(u_n; x)$.

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_2(x, t) u_n(t) dt = \sum_{k=0}^n c_k \gamma_k(x), \quad (39)$$

$$\gamma_k(x) = \begin{cases} \int_{-1}^x \frac{\sqrt{1-\tau}}{\sqrt{1+\tau}} d\tau, & k=0, \\ \int_{-1}^x \sqrt{1-\tau^2} U_{k-1}(\tau) d\tau, & k>0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} + \pi - \arccos x, & k=0, \\ \frac{1}{\pi} (\pi + 2x\sqrt{1-x^2} + 2\arcsin x), & k=1, \\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \left(\frac{U_k(x)}{k+1} - \frac{U_{k-2}(x)}{k-1} \right), & k>1, \end{cases} \quad (40)$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_2(x, t) u_n(t) dt &= \int_{-1}^x \left(\sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{u_n(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1+\tau+t-\tau}{\sqrt{1-t^2}} T_k(t) \frac{dt}{t-\tau} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} \left((1+\tau) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-\tau} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right) d\tau = \sum_{k=0}^n c_k \gamma_k(x).$$

Поэтому из (38)–(40) следует, что

$$K_2(u_n; x) = \frac{1}{B(x)} \sum_{k=0}^n c_k \gamma_k(x). \quad (41)$$

Уравнение (36) с учетом (41) в заданном классе переходит в уравнение

$$\sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{B(x)} \gamma_k(x) + \sum_{k=0}^n c_k T_k(x) = F_n(x). \quad (42)$$

В качестве внешних узлов x в (42) выберем узлы Чебышева первого рода, а именно $x_j = \cos \frac{2j+1}{2n+2}$, $j = 0, 1, \dots, n$. Из (42) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^n c_k \left(\frac{1}{B(x_j)} \gamma_k(x_j) + T_k(x_j) \right) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (43)$$

Уравнение (42), а следовательно, и система (43), и интегральное уравнение (36) равносильны, так как, выполняя действия, приводящие (36) в (43), в обратном порядке, из (43) получим разрешимое уравнение (36). Значит, система (43) разрешима и имеет единственное решение c_k , $k = 0, 1, \dots, n$. Приближенное решение задачи (1), (2) – функция $\Gamma_n(x)$ – вычисляется согласно (39).

Схема 3. Решение в классе $h(-1)$. На основании (23) и (5) приближенное решение уравнения (1) при условии (2) найдем как решение уравнения

$$u_n(x) + K_3(u_n; x) = F_n(x), \quad (44)$$

где $u_n(x)$ – интерполяционный многочлен (4) функции $u(x)$, построенный по узлам Чебышева первого рода:

$$u_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma_n'(t)}{t-x} dt = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x), \quad (45)$$

c_k – пока неизвестные постоянные, $k = 0, 1, \dots, n$;

$$K_3(u_n; x) = \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_3(x, t) u_n(t) dt; \quad (46)$$

$F_n(x)$ – некоторая функция из класса $\mathbb{C}[-1, 1]$ такая, что $F_n(x_j) = f(x_j)$, $x_j = \cos \frac{2j+1}{2n+2}$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Очевидно, что для уравнения (44) с оператором (46), тождественным (24), имеет место аналог теоремы 3, т. е. вследствие (25)–(27) уравнение (44) также разрешимо.

Используя (45) и учитывая (3), вычислим и упростим $\Gamma_n(x)$, а этим и $K_3(u_n; x)$.

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_3(x, t) u_n(t) dt = \sum_{k=0}^n c_k \gamma_k(x), \quad (47)$$

$$\gamma_k(x) = \begin{cases} \int_{-1}^x \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} d\tau, & k=0, \\ \int_{-1}^x \sqrt{1-\tau^2} U_{k-1}(\tau) d\tau, & k>0 \end{cases} = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2} + 3\pi - \arccos x, & k=0, \\ \frac{1}{\pi} \left(\pi + 2x\sqrt{1-x^2} + 2\arcsin x \right), & k=1, \\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \left(\frac{U_k(x)}{k+1} - \frac{U_{k-2}(x)}{k-1} \right), & k>1, \end{cases} \quad (48)$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_3(x, t) u_n(t) dt &= \int_{-1}^x \left(\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \frac{u_n(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \left(\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \frac{T_k(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau = \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1-\tau-t+\tau}{\sqrt{1-t^2}} T_k(t) \frac{dt}{t-\tau} = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \left((1-\tau) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-\tau} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right) d\tau = \sum_{k=0}^n c_k \gamma_k(x). \end{aligned}$$

Поэтому из (46)–(48) следует, что

$$K_3(u_n; x) = \frac{1}{B(x)} \sum_{k=0}^n c_k \gamma_k(x). \quad (49)$$

Уравнение (44) с учетом (49) в заданном классе переходит в уравнение

$$\sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{B(x)} \gamma_k(x) + \sum_{k=0}^n c_k T_k(x) = F_n(x). \quad (50)$$

В качестве внешних узлов x в (50) выберем узлы Чебышева первого рода, а именно $x_j = \cos \frac{2j+1}{2n+2}$, $j = 0, 1, \dots, n$. Из (50) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^n c_k \left(\frac{1}{B(x_j)} \gamma_k(x_j) + T_k(x_j) \right) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (51)$$

Уравнение (50), а следовательно, и система (51), и интегральное уравнение (44) равносильны, так как, выполняя действия, приводящие (44) в (51), в обратном порядке, из (51) получим разрешимое уравнение (44). Значит, система (51) разрешима и имеет единственное решение c_k , $k = 0, 1, \dots, n$. Приближенное решение задачи (1), (2) – функция $\Gamma_n(x)$ – вычисляется согласно (47).

Обоснование сходимости

Рассмотрим вначале схему 1. Изучим структурные свойства функции $u(x)$, определяемой формулой (5) и удовлетворяющей уравнению (11). Для этого уравнение (11) на основании (7) и (12) запишем в виде

$$\begin{aligned} u(x) + \frac{1}{B(x)} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{-\sqrt{1-x^2} + t(\pi - \arccos x)}{\sqrt{1-t^2}} u(t) dt + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} \right) = f(x), \\ \Phi'(x) = u(x), \end{aligned} \quad (52)$$

и отметим, что сингулярный интеграл принадлежит классу $H(1/2)$. В самом деле,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi(t) - \Phi(1)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x},$$

и, поскольку в окрестности точки $t = 1$

$$\frac{\Phi(t) - \Phi(1)}{\sqrt{1-t^2}} \in H(1/2),$$

по теореме Племеля – Привалова в окрестности точки $x = 1$ и сингулярный интеграл принадлежит классу $H(1/2)$. Аналогичная ситуация имеет место и в окрестности точки $x = -1$. Из (52) вытекает, что если функции $B(x)$ и $f(x)$ из класса $H(\mu)$, $\mu \geq 1/2$, то $u(x) \in H(1/2)$, $-1 \leq x \leq 1$. Мы здесь учитываем также тот факт, что $\arccos x \in H(1/2)$, $-1 \leq x \leq 1$.

Далее имеет место следующее (см., например, [9, с. 318]).

Предложение. Если в качестве узлов интерполирования берутся нули многочлена Чебышева первого рода, т. е. точки $x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2}\pi$, $k = 0, 1, \dots, n$, то для констант Лебега λ_n справедлива оценка $\lambda_n = O(\ln n)$, $n = 2, 3, \dots$

Отсюда с учетом (6) и (31) получаем, что в любой точке $x \in [-1, 1]$ выполняется

$$\begin{aligned} \|\Gamma(x) - \Gamma_n(x)\|_{\mathbb{C}} &= \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_1(x, t)(u(t) - u_n(t)) dt \right\|_{\mathbb{C}} \leq \\ &\leq \|u(x) - u_n(x)\|_{\mathbb{C}} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_1(x, t) dt \right\|_{\mathbb{C}} \leq O(\ln n \cdot E_n(u)). \end{aligned}$$

Так как имеет место оценка $E_n(u) = O(n^{-\alpha})$, если $u(x) \in H(\alpha)$ на $[-1, 1]$ (см., например, [9, с. 391]), то, таким образом, получен следующий результат.

Теорема 4. Пусть функции $B(x)$ и $f(x)$, входящие в уравнение (1), принадлежат классу $H(\mu)$, $\mu \geq 1/2$, и выполнено условие (15). Тогда система (35) при любом натуральном n разрешима и приближенное решение $\Gamma_n(x)$ задачи (1), (2), полученное по формуле (31), сходится к точному $\Gamma(x)$, полученному по формуле (6), со скоростью

$$\|\Gamma(x) - \Gamma_n(x)\|_{\mathbb{C}} = O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right).$$

После аналогичных исследований функции $u(x)$, определяемой формулой (5), удовлетворяющей уравнениям (17) (с ядром (18)) и (23) (с ядром (24)), на основании которых получены вычислительные схемы 2 и 3, имеем следующие утверждения.

Теорема 5. Пусть функции $B(x)$ и $f(x)$, входящие в уравнение (1), принадлежат классу $H(\mu)$, $\mu \geq 1/2$, и выполнено условие (21). Тогда система (43) при любом натуральном n разрешима и приближенное решение $\Gamma_n(x)$ задачи (1), (2), найденное по формуле (39), сходится к точному $\Gamma(x)$, полученному по формуле (16), со скоростью

$$\|\Gamma(x) - \Gamma_n(x)\|_{\mathbb{C}} = O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right).$$

Теорема 6. Пусть функции $B(x)$ и $f(x)$, входящие в уравнение (1), принадлежат классу $H(\mu)$, $\mu \geq 1/2$, и выполнено условие (27). Тогда система (51) при любом натуральном n разрешима и приближенное решение $\Gamma_n(x)$ задачи (1), (2), найденное по формуле (47), сходится к точному $\Gamma(x)$, полученному по формуле (22), со скоростью

$$\|\Gamma(x) - \Gamma_n(x)\|_{\mathbb{C}} = O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right).$$

Численные эксперименты на модельном примере

В заключение приведем результаты численного эксперимента, выполненного по схемам 1–3. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt = B(x) \left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{2} \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\sqrt{2}}{1+x^2} + 1, \quad -1 < x < 1, \quad (53)$$

при $B(x) = 3\sqrt{1-x^2} \frac{1+32x^2}{1+2x^2}$. Известно, что решением задачи (53), (2) в данном случае является функция

$$\Gamma(x) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{2} \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}.$$

Как показывают расчеты, проведенные в среде компьютерной алгебры *MathCad 15*, уже при сравнительно небольших значениях n достигается достаточно высокая точность вычисления приближенного решения уравнения (53).

Схема 1. Решая систему (35) при $n = 10$ и $n = 34$, точное решение $\Gamma(x)$ отличается от приближенного $\Gamma_n(x)$, вычисленного по формуле (31) в системе точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$, не более чем на $5,7 \cdot 10^{-6}$ и $1,4 \cdot 10^{-15}$ соответственно. Число обусловленности матриц системы при этом $conde \leq 12$ и $conde \leq 50$ соответственно.

Схема 2. Решая систему (43) при $n = 10$ и $n = 34$, точное решение $\Gamma(x)$ отличается от приближенного $\Gamma_n(x)$, вычисленного по формуле (39) в системе точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$, не более чем на $5,6 \cdot 10^{-6}$ и $1,4 \cdot 10^{-15}$ соответственно. Число обусловленности матриц системы при этом $conde \leq 26$ и $conde \leq 36$ соответственно.

Схема 3. Решая систему (51) при $n = 10$ и $n = 34$, точное решение $\Gamma(x)$ отличается от приближенного $\Gamma_n(x)$, вычисленного по формуле (47) в системе точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$, не более чем на $5,7 \cdot 10^{-6}$ и $1,5 \cdot 10^{-15}$ соответственно. Число обусловленности матриц системы при этом $conde \leq 14$ и $conde \leq 37$ соответственно.

Замечание. Отметим, что в работе [10] предложена и обоснована вычислительная схема для уравнения (1), отличающаяся от описанной выше.

Библиографические ссылки

1. Prandtl L. Tragflügeltheorie. I. Mitteilungen. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen – Mathematisch-Physikalische Klasse*. 1918;1918:451–477.
2. Голубев ВВ. *Лекции по теории крыла*. Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы; 1949. 482 с.
3. Каландия АИ. *Математические методы двумерной упругости*. Москва: Наука; 1973.
4. Векуа ИН. О интегро-дифференциальном уравнении Прандтля. *Прикладная математика и механика*. 1945;9(2);143–150.
5. Шешко МА, Расолько ГА, Мاستяница ВС. К приближенному решению интегро-дифференциального уравнения Прандтля. *Дифференциальные уравнения*. 1993;29(9):1550–1560.
6. Бейтмен Г, Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Том 2*. Москва: Наука; 1966.
7. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева*. Москва: Наука; 1983.
8. Мухелишвили НИ. *Сингулярные интегральные уравнения*. Москва: Наука; 1968.
9. Суетин ПК. *Классические ортогональные многочлены*. Москва: Наука; 1979.
10. Расолько ГА. Численное решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2018;3:68–74.

References

1. Prandtl L. Tragflügeltheorie. I. Mitteilungen. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen – Mathematisch-Physikalische Klasse*. 1918;1918:451–477. German.
2. Golubev VV. *Lektsii po teorii kryla* [Lectures on the theory of the wing]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury; 1949. 482 p. Russian.
3. Kalandiya AI. *Matematicheskie metody dvumernoi uprugosti* [Mathematical methods of two-dimensional elasticity]. Moscow: Nauka; 1973. Russian.
4. Vekua IN. O integro-differentsial'nom uravnenii Prandtlya. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1945;9(2);143–150. Russian.
5. Sheshko MA, Rasolko GA, Mastyanitsa VS. To the approximate solution of the integro-differential Prandtl equation. *Differentsial'nye uravneniya*. 1993;29(9):1550–1560. Russian.
6. Bateman G, Erdei A. *Vysshie transsendentnye funktsii. Tom 2* [Higher transcendental functions. Volume 2]. Moscow: Nauka; 1966. Russian.
7. Pashkovsky S. *Vychislitel'nye primeneniya mnogochlenov i ryadov Chebysheva* [Computational applications of polynomials and Chebyshev series]. Moscow: Nauka; 1983. Russian.
8. Muskhelishvili NI. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow: Nauka; 1968. Russian.
9. Suetin PK. *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny* [Classical orthogonal polynomials]. Moscow: Nauka; 1979. Russian.
10. Rasolko GA. Numerical solution of singular integro-differential Prandtl equation by the method of orthogonal polynomials. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2018;3:68–74. Russian.

Статья поступила в редколлегию 28.06.2018.
Received by editorial board 28.06.2018.

УДК 519.63

ИТЕРАЦИОННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В МЕТОДЕ ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СО СМЕШАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В. М. ВОЛКОВ¹⁾, Е. В. ПРОКОНИНА¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассмотрена проблема построения эффективных разностных схем и итерационных методов для решения задач анизотропной диффузии в области произвольной геометрии. Для упрощения постановки краевых условий Неймана использован метод фиктивных областей. На примере модельной двумерной задачи о распределении потенциала в кольцевом изолированном анизотропном проводнике проведен сравнительный анализ эффективности некоторых перспективных разностных схем и итерационных методов с точки зрения их сочетаемости с методом фиктивных областей. На основе численных экспериментов получены эмпирические оценки асимптотики роста количества итераций метода бисопряженных градиентов с переобусловливателями Фурье – Якоби и неполной LU-факторизации при уменьшении шага сетки и величины малого параметра, определяющего продолжение ко-эффективности проводимости в методе фиктивных областей. Показано, что для одной из рассмотренных схем переобусловливатель Фурье – Якоби является спектрально оптимальным и позволяет устранить асимптотическую зависимость скорости сходимости как от величины шага сетки, так и от значения малого параметра в методе фиктивных областей.

Ключевые слова: разностные схемы; эллиптические уравнения; смешанные производные; итерационные методы; метод фиктивных областей.

ITERATIVE REALIZATION OF FINITE DIFFERENCE SCHEMES IN THE FICTITIOUS DOMAIN METHOD FOR ELLIPTIC PROBLEMS WITH MIXED DERIVATIVES

V. M. VOLKOV^a, A. U. PRAKONINA^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: A. U. Prakonina (helen.prokonina@mail.ru)

Development of efficient finite difference schemes and iterative methods for solving anisotropic diffusion problems in an arbitrary geometry domain is considered. To simplify the formulation of the Neumann boundary conditions, the method of fictitious domains is used. On the example of a two-dimensional model problem of potential distribution in an

Образец цитирования:

Волков ВМ, Проконина ЕВ. Итерационная реализация разностных схем в методе фиктивных областей для эллиптических задач со смешанными производными. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;1:69–76.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-69-76>

For citation:

Volkov VM, Prakonina AU. Iterative realization of finite difference schemes in the fictitious domain method for elliptic problems with mixed derivatives. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;1:69–76. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-69-76>

Авторы:

Василий Михайлович Волков – доктор физико-математических наук; профессор кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.

Елена Владимировна Проконина – старший преподаватель кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.

Authors:

Vasily M. Volkov, doctor of science (physics and mathematics); professor at the department of web-technologies and computer modeling, faculty of mechanics and mathematics.
v.volkov@tut.by

Alena U. Prakonina, senior lecturer at the department of web-technologies and computer modeling, faculty of mechanics and mathematics.
helen.prokonina@mail.ru

isolated anisotropic ring conductor a comparative efficiency analysis of some promising finite-difference schemes and iterative methods in terms of their compatibility with the fictitious domain method is carried out. On the basis of numerical experiments empirical estimates of the asymptotic dependence of the convergence rate of the bi-conjugate gradient method with Fourier – Jacobi and incomplete LU factorization preconditioners on the step size and the value of the small parameter determining the continuation of the conductivity coefficient in the fictitious domain method are obtained. It is shown, that for one of the considered schemes the Fourier – Jacobi preconditioner is spectrally optimal and allows to eliminate the asymptotical dependence of the iterations number to achieve a given accuracy both on the value of the step size and the value of the small parameter in the fictitious domain method.

Key words: finite-difference schemes; elliptic equations; mixed derivatives; iterative methods; fictitious domain method.

Введение

Один из эффективных подходов к решению дифференциальных краевых задач в области произвольной формы основан на использовании метода фиктивных областей. Его идея состоит в дополнении исходной области D до прямоугольного параллелепипеда D_0 ($D \subset D_0$) с последующей формулировкой краевых условий на внешней границе области D и таким продолжением коэффициентов задачи в дополняющей подобласти (между границами D и D_0), чтобы оригинальные краевые условия на границе области D выполнялись для модифицированной задачи естественным образом. Например, в случае задачи Неймана для уравнения диффузии с условиями непроницаемости на криволинейной границе естественно использовать на внешней границе области D_0 однородные условия Дирихле и бесконечно малые значения коэффициента диффузии – в дополняющей подобласти. Подробное описание данной методики приводится в работах [1–5].

Основная проблема метода фиктивных областей как одной из составляющих методики численного анализа дифференциальных прикладных задач связана с ухудшением свойств обусловленности матрицы системы сеточных уравнений [2; 5]. Как правило, рост числа обусловленности влечет за собой увеличение количества итераций для достижения заданной точности при итерационной реализации дискретной задачи [6]. Данный недостаток традиционно преодолевают путем применения неявных итерационных алгоритмов. Для этих целей хорошие результаты дает использование переменного треугольного метода [4], метода переменных направлений [3].

В настоящей работе показано, что в методе фиктивных областей для эллиптических уравнений со смешанными производными эффективность итерационной реализации зависит не только от выбора переобусловливателя, но и от способа аппроксимации смешанных производных. На основе численных экспериментов для двух разностных схем получены эмпирические оценки асимптотической зависимости числа итераций метода бисопряженных градиентов с переобусловливателями Фурье – Якоби и неполной LU-факторизации от количества узлов сетки и величины малого параметра, определяющего продолжение коэффициента диффузии в методе фиктивных областей. Показано, что для одной из рассмотренных схем использование переобусловливателя Фурье – Якоби практически устраняет нежелательную зависимость количества итераций как от числа узлов сетки, так и от величины малого параметра.

Постановка задачи

Распределение электрического потенциала в анизотропном изолированном проводнике описывается задачей Неймана для уравнения эллиптического типа со смешанными производными. Для простоты рассмотрим двумерный случай плоской непрямоугольной области D с границей Γ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_{yx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y), (x, y) \in D, \left. \frac{du}{d\mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{n} – вектор внешней нормали к Γ .

Коэффициенты тензора проводимости могут быть вычислены путем преобразования плоских вращений локальной системы ортогональных координат (\bar{x}, \bar{y}) , оси которой ориентированы вдоль направлений анизотропии. Например, для кольцевой области, в которой радиальная и тангенциальная проводимости равны соответственно σ_r, σ_t ($\sigma_r \neq \sigma_t$), компоненты тензора проводимости определяются следующим образом:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 \\ 0 & \sigma_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь φ – угловая полярная координата точки кольца: $D = \{(x, y), R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2\}$. Отношение коэффициентов диагонального тензора проводимости принято характеризовать коэффициентом анизотропии $\lambda = \frac{\sigma_r}{\sigma_t}$. В случае $\lambda \neq 1$ коэффициенты при смешанных производных знакопеременны. Тензор диффузии является симметричным и положительно определенным.

Для анализа рассмотренной задачи наиболее естественно использовать полярные координаты, в которых упрощается постановка краевых условий, поскольку $\frac{du}{d\mathbf{n}} = \frac{\partial u}{\partial r}$ и уравнение не содержит смешанных производных. С другой стороны, в общем случае можно применить метод фиктивных областей [1–5], дополнив область до квадрата

$$D_0 = \{(x, y), -L \leq x \leq L, -L \leq y \leq L, L > R_2\}, \quad (3)$$

полагая $\sigma_{xx}(x, y) = \sigma_{yy}(x, y) = \sigma_0 \ll 1$, $\sigma_{xy}(x, y) = \sigma_{yx}(x, y) = 0$ и $f(x, y) \equiv 0$ при $(x, y) \in D_0 \setminus D$. На границе Γ_0 квадратной области допустимо использовать как однородные условия Неймана, так и условия Дирихле. Наиболее удобны условия

$$u(x, y)|_{(x, y) \in \Gamma_0} = 0. \quad (4)$$

Близость решения задачи в методе фиктивных областей $\tilde{u}(x, y)$ к решению оригинальной задачи (1) определяется порядком малости коэффициента проводимости за пределами оригинальной области D [4]:

$$\|u - \tilde{u}\|_{W_2^1(D)} = O(\sigma_0^2), \quad \|u\|_{W_2^1(D)}^2 = \iint_D \left(u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy. \quad (5)$$

Согласно (5) для минимизации погрешности, связанной с использованием метода фиктивных областей, значение параметра σ_0 следует выбирать достаточно малым. С другой стороны, появление малого параметра сопряжено с ухудшением числа обусловленности матрицы дискретной задачи, что предъявляет повышенные требования к построению как разностной схемы, так и итерационных методов реализации системы сеточных уравнений.

Численный метод

Для разностной схемы решения задачи (1), (3), (5) используем равномерную сетку

$$\omega_h = \{(x_i, y_j), x_i = ih_x, y_j = jh_y, i = \overline{1, N_x}, j = \overline{1, N_y}\}.$$

Вторые производные уравнения аппроксимируем стандартным образом [6]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \cong h_x^{-2} \left[\sigma_{xx}^{i+0.5, j} U_{i+1, j} - (\sigma_{xx}^{i+0.5, j} + \sigma_{xx}^{i-0.5, j}) U_{i, j} + \sigma_{xx}^{i-0.5, j} U_{i-1, j} \right], \quad (6)$$

где $\sigma_{xx}^{i \pm 0.5, j} = \frac{\sigma_{xx}^{i, j} + \sigma_{xx}^{i \pm 1, j}}{2}$, $U_{i, j} = u(x_i, y_j)$.

Для аппроксимации смешанных производных рассмотрим два варианта разностных формул [7; 8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} &\cong \frac{1}{4h_x h_y} \left(\sigma_{xy}^{i+0.5, j} (U_{i+1, j+1} - U_{i+1, j-1} + U_{i, j+1} - U_{i, j-1}) - \right. \\ &\quad \left. - \sigma_{xy}^{i-0.5, j} (U_{i, j+1} - U_{i, j-1} + U_{i-1, j+1} - U_{i-1, j-1}) \right), \quad (7) \\ \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} &\cong \frac{1}{4h_x h_y} \left[\sigma_{xy}^{+(i+0.5, j)} (U_{i+1, j+1} - U_{i+1, j}) - \sigma_{xy}^{+(i-0.5, j)} (U_{i, j+1} - U_{i, j}) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{4h_x h_y} \left[\sigma_{xy}^{+(i+0.5, j)} (U_{i, j} - U_{i, j-1}) - \sigma_{xy}^{+(i-0.5, j)} (U_{i-1, j} - U_{i-1, j-1}) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4h_x h_y} \left[\sigma_{xy}^{-(i+0,5, j)} (U_{i+1, j} - U_{i+1, j-1}) - \sigma_{xy}^{-(i-0,5, j)} (U_{i, j} - U_{i, j-1}) \right] + \\
 & + \frac{1}{4h_x h_y} \left[\sigma_{xy}^{-(i+0,5, j)} (U_{i, j+1} - U_{i, j}) - \sigma_{xy}^{-(i-0,5, j)} (U_{i-1, j+1} - U_{i-1, j}) \right].
 \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $\sigma_{xy}^{\pm(i, j)} = \sigma_{xy}^{(i, j)} \pm |\sigma_{xy}^{(i, j)}|$.

Обе схемы – (6), (7) и (6), (8) – консервативны и обладают вторым порядком точности на достаточно гладких входных данных. Кроме того, как показано в [8; 9], при выполнении условий

$$\max \{k_1, k_2\} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \min \{k_3, k_4\}, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{|\sigma_{xy}^{(i-0,5, j)}| - \sigma_{xy}^{(i-0,5, j)} + |\sigma_{xy}^{(i+0,5, j)}| + \sigma_{xy}^{(i+0,5, j)} + 2|\sigma_{xy}^{(i, j-0,5)}|}{4\sigma_{yy}^{(i, j-0,5)}}, \\
 k_2 &= \frac{|\sigma_{xy}^{(i-0,5, j)}| + \sigma_{xy}^{(i-0,5, j)} + |\sigma_{xy}^{(i+0,5, j)}| - \sigma_{xy}^{(i+0,5, j)} + 2|\sigma_{yx}^{(i, j+0,5)}|}{4\sigma_{yy}^{(i, j+0,5)}}, \\
 k_3 &= \frac{4\sigma_{xx}^{(i-0,5, j)}}{2|\sigma_{xy}^{(i-0,5, j)}| + |\sigma_{xy}^{(i, j-0,5)}| - \sigma_{yx}^{(i, j-0,5)} + |\sigma_{yx}^{(i, j+0,5)}| + \sigma_{yx}^{(i, j+0,5)}}, \\
 k_4 &= \frac{4\sigma_{xx}^{(i+0,5, j)}}{2|\sigma_{xy}^{(i+0,5, j)}| + |\sigma_{yx}^{(i, j-0,5)}| + \sigma_{yx}^{(i, j-0,5)} + |\sigma_{yx}^{(i, j+0,5)}| - \sigma_{yx}^{(i, j+0,5)}}.
 \end{aligned}$$

разностная схема (6), (8) удовлетворяет сеточному принципу максимума и является монотонной. Следствие сеточного принципа максимума (монотонности) – гарантированное диагональное доминирование и положительная определенность разностного оператора задачи. Таковая позволяет предположить, что свойство монотонности может обеспечить преимущество данного класса схем при итерационной реализации соответствующей системы разностных уравнений в методе фиктивных областей.

Использование разностной аппроксимации (7) приводит к консервативной, но немонотонной дискретной модели. Тем не менее аппроксимация смешанных производных по формуле (7) представляется наиболее естественной. Несложно заметить, что аппроксимация внутренних производных в дивергентной записи уравнения (1), согласно формулам (6) и (7), имеет второй порядок точности в одних и тех же полуцелых точках сетки $(x_{i \pm 0,5}, y_j)$ и $(x_i, y_{j \pm 0,5})$. В этих же точках вычисляются коэффициенты уравнения, определяемые как диагональными, так и недиагональными компонентами тензора диффузии. В отличие от (7) для разностной аппроксимации (8) второй порядок аппроксимации достигается благодаря усреднению смешанных производных по диагонально симметричным ячейкам шаблона с центрами в точках $(x_{i \pm 0,5}, y_{j \pm 0,5})$ для положительных и в точках $(x_{i \pm 0,5}, y_{j \mp 0,5})$ для отрицательных значений недиагональных компонент тензора диффузии.

Рассмотренные варианты разностных схем (6), (7) и (6), (8) сводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$AU = f, \tag{10}$$

где A – 9-диагональная разреженная матрица для разностных схем на основе формулы (7) и 7-диагональная матрица для схемы (8). Как показано в работе [10], разностная схема (6), (7) имеет некоторое преимущество в скорости сходимости итерационных методов реализации системы сеточных уравнений (10). Исследуем, как соотносится эффективность рассматриваемых схем применительно к методу фиктивных областей.

Результаты численных экспериментов

Для реализации систем разностных уравнений (10) использован метод бисопряженных градиентов (BiCG) [11]. Количество итераций BiCG для достижения заданной точности возрастает пропорционально квадратному корню из числа обусловленности матрицы системы. Численные эксперименты подтверждают оценки скорости сходимости при масштабировании шага сетки. В частности, количество необходимых для достижения заданной точности итераций явного метода BiCG при реализации рассмотренных разностных схем возрастает обратно пропорционально шагу сетки, что полностью согласуется со спектральными свойствами разностного оператора Лапласа [6]. В методе фиктивных областей с малым параметром, определяющим продолжение коэффициента в дополняющую подобласть, грубые оценки допускают рост числа обусловленности пропорционально σ_0^{-1} .

Для ускорения сходимости применялся метод бисопряженных градиентов с переобусловливателями на основе неполной LU-факторизации (iLU) и комбинированный переобусловливатель Фурье – Якоби (FJ), в качестве которого используется стандартная диагональная матрица, построенная из диагональных элементов системной матрицы, и матрица однородной изотропной задачи, для эффективного обращения которой применимо быстрое дискретное преобразование Фурье. Итерации прекращались, когда относительная норма невязки ϵ достигала значений 10^{-12} – 10^{-11} .

На примере решения модельной задачи (1), (2) исследуем зависимости числа итераций от количества узлов сетки и величины малого параметра σ_0 , определяющего продолжение коэффициента проводимости в методе фиктивных областей. Кроме того, оценим эффективность рассмотренных переобусловливателей по количеству итераций и суммарным вычислительным затратам, необходимым для решения задачи.

Как видно из рис. 1, разностная схема (6), (7) демонстрирует качественно лучшие характеристики скорости сходимости, которая асимптотически не зависит от размера шага сетки и величины малого параметра. Для разностной схемы (6), (8) рост числа итераций при уменьшении малого параметра также стабилизируется при $\sigma_0 \leq 10^{-4}$, однако по общим вычислительным затратам данная схема примерно в два раза уступает схеме (6), (7). Асимптотика числа итераций в зависимости от количества узлов сетки для схемы (6), (8) оценивается величиной $O(\sqrt{N})$.

На рис. 2 и 3 приведены сравнительные характеристики эффективности переобусловливателей Фурье – Якоби и неполной LU-факторизации. Результаты для переобусловливателя Фурье – Якоби

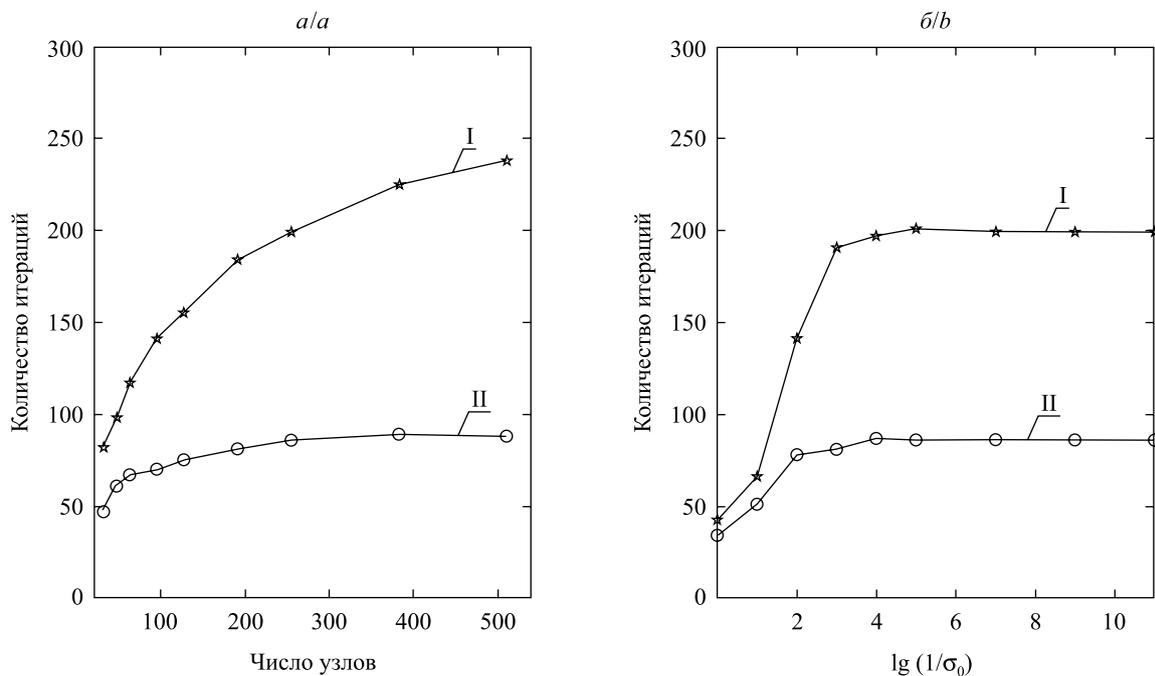


Рис. 1. Зависимости количества итераций метода BiCG с переобусловливателем Фурье – Якоби от числа узлов сетки (а) и величины малого параметра σ_0 (б) при $\lambda = 8$, $\epsilon = 10^{-12}$:
I – разностная схема (6), (8); II – разностная схема (6), (7)

Fig. 1. Dependence of the iterations number of BiCG method with Fourier – Jacobi preconditioner from the nodes number (a) and small parameter σ_0 value (b) with $\lambda = 8$, $\epsilon = 10^{-12}$:
I – finite-difference schemes (6), (8); II – finite-difference schemes (6), (7)

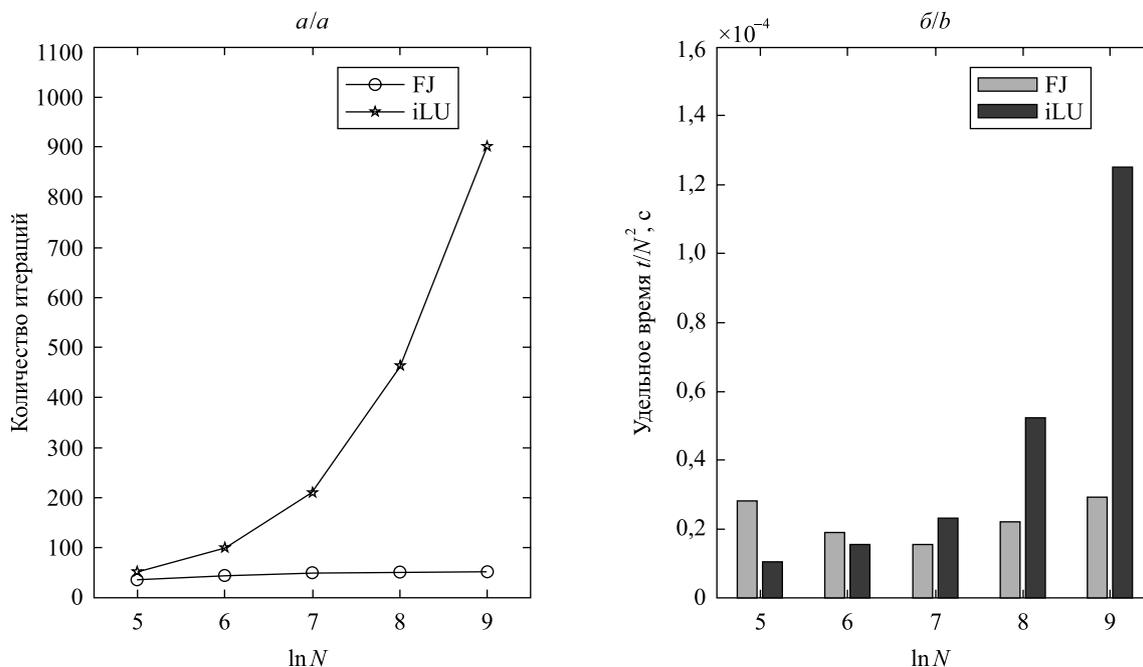


Рис. 2. Количество итераций (а) и удельное время (б) итерационной реализации систем сеточных уравнений (6), (7) на каждый узел сетки для метода BiCG с переобусловливателями Фурье – Якоби и неполной LU-факторизации при $\lambda = 4$, $\sigma_0 = 10^{-8}$, $\varepsilon = 10^{-11}$

Fig. 2. Dependence of the iterations number (a) and time (b) of the implementation of grid equations (6), (7) for each grid node for the BiCG method with Fourier – Jacobi and iLU preconditioners with $\lambda = 4$, $\sigma_0 = 10^{-8}$, $\varepsilon = 10^{-11}$

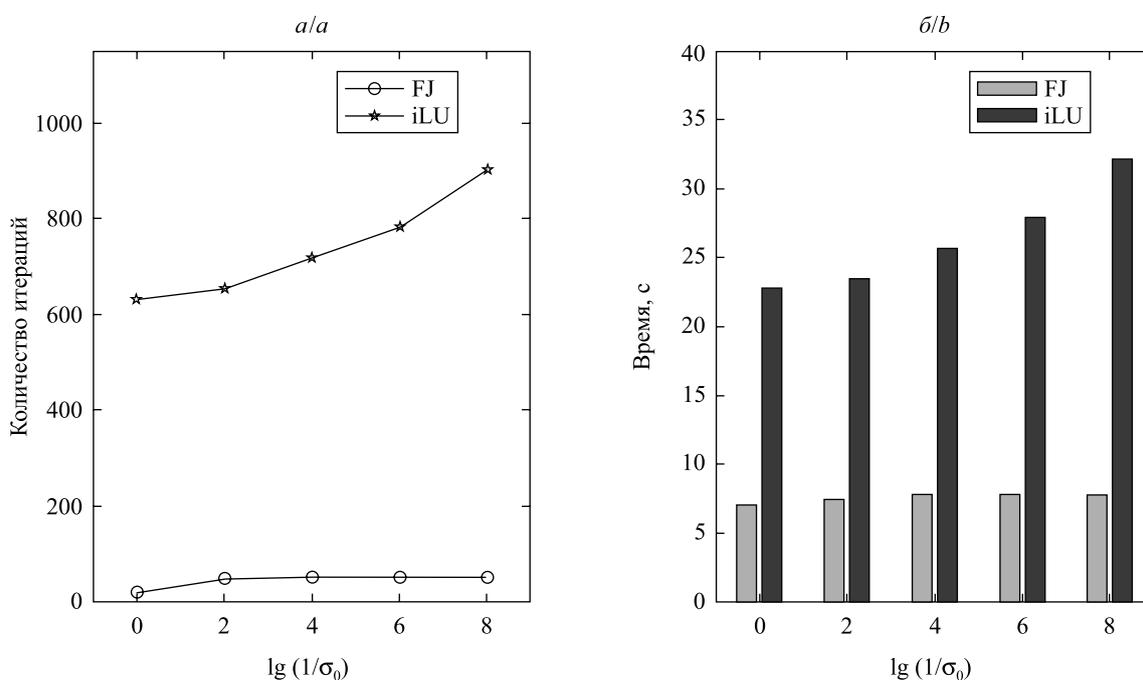


Рис. 3. Зависимости числа итераций (а) и времени реализации (б) метода BiCG с переобусловливателями Фурье – Якоби и неполной LU-факторизации от величины малого параметра, отвечающего за продолжение коэффициента проводимости в методе фиктивных областей для кольцевого проводника с коэффициентом анизотропии проводимости $\lambda = 4$, $N = 2^9$, $\varepsilon = 10^{-11}$

Fig. 3. Dependence of the iterations number (a) and implementation time (b) of BiCG with Fourier – Jacobi and iLU preconditioners from the small parameter σ_0 value, responsible for the continuation of the conductivity coefficient in the fictitious domain method for a circular conductor with a conductivity anisotropy coefficient $\lambda = 4$, $N = 2^9$, $\varepsilon = 10^{-11}$

получены на примерах итерационной реализации разностной схемы (6), (7), которая в предыдущих численных экспериментах зарекомендовала себя более перспективной по сравнению со схемой (6), (8). При неполной LU-факторизации разностная схема (6), (8) в ряде случаев демонстрирует несколько лучшие результаты, поэтому на рис. 2 и 3 представлены данные, соответствующие схеме с более высокой скоростью сходимости.

Результаты показывают, что при количестве узлов сетки по каждому координатному направлению $N \geq 2^7$ метод бисопряженных градиентов для схемы (6), (7) демонстрирует лучшие вычислительные качества совместно с переобусловливателем Фурье – Якоби. Метод неполной LU-факторизации не является спектрально оптимальным ни для одной из рассмотренных схем и характеризуется ростом числа итераций как при уменьшении величины малого параметра σ_0 , так и с увеличением количества узлов сетки. При $N = 512$ итерационный метод BiCG FJ обеспечивает примерно четырехкратное преимущество в скорости решения задачи по сравнению с BiCG iLU (см. рис. 2).

Заключение

Сравнительный анализ эффективности итерационной реализации разностных схем для задач анизотропной диффузии с использованием метода фиктивных областей позволяет сделать вывод, что скорость сходимости итераций и эффективность переобусловливателей во многом зависят от способа аппроксимации смешанных производных. По результатам численных экспериментов особое внимание привлекает разностная схема (6), (7). В ней использована естественная (консервативная, второго порядка точности) разностная аппроксимация смешанных производных на симметричном 6-точечном шаблоне. Для сравнения выбрана наиболее перспективная разностная схема (6), (8), которая при выполнении условия (9), наряду с консервативностью и вторым порядком аппроксимации, удовлетворяет сеточному принципу максимума (монотонна) [8; 9]. Данные численных экспериментов показывают, что по количественным и качественным критериям лучшие показатели демонстрирует схема (6), (7). В частности, только для этой схемы удается построить итерационный алгоритм на основе метода бисопряженных градиентов с переобусловливателем Фурье – Якоби, в котором устраняется рост числа итераций с уменьшением шага сетки, т. е. указанный тип переобусловливателя является спектрально оптимальным и данная итерационная техника качественно сопоставима с многосеточными итерационными методами [12]. В отличие от попеременно-треугольного метода [4] и метода BiCG iLU использование переобусловливателя Фурье – Якоби устраняет также асимптотический рост числа итераций в зависимости от малого параметра, отвечающего за продолжение коэффициента проводимости в методе фиктивных областей.

Благодаря отмеченным качественным особенностям разностной схемы (6), (7) эффективность ее итерационной реализации с использованием метода BiCG FJ оказывается существенно выше по сравнению с более перспективным (казалось бы) аналогом (6), (8). Последнее обстоятельство указывает на то, что сеточный принцип максимума не следует рассматривать в качестве критерия, определяющего безусловное преимущество разностной схемы в отношении эффективности ее итерационной реализации.

Библиографические ссылки

1. Коновалов АН. Метод фиктивных областей в задачах фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости с учетом капиллярных сил. *Численные методы механики сплошной среды*. 1972;3(5):52–68.
2. Коновалов АН, Коных ГВ, Цуриков НВ. О принципах построения итерационных процессов в методе фиктивных областей. В: *Вариационные методы в задачах численного анализа: сборник научных трудов*. Новосибирск: Сибирское отделение АН СССР; 1986. с. 37–52.
3. Коновалов АН. *Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости*. Новосибирск: Наука; 1988.
4. Вабищевич ПН, Гассиев РВ, Пулатов ПА. Вычислительная реализация метода фиктивных областей для эллиптических уравнений на основе попеременно-треугольного метода. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1987;27(9):1381–1387.
5. Вабищевич ПН. *Метод фиктивных областей в задачах математической физики*. Москва: УРСС; 2016.
6. Самарский АА. *Теория разностных схем*. Москва: Наука; 1989.
7. Turovets S, Volkov V, Zherdetsky A, Prakonina A, Malony AD. A 3D finite-difference BiCG iterative solver with the Fourier – Jacobi preconditioner for the anisotropic EIT/EEG forward problem. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. 2014;2014:12. DOI: 10.1155/2014/426902.
8. Самарский АА, Мажукин ВИ, Матус ПП, Шишкин ГИ. Монотонные разностные схемы для уравнений со смешанными производными. *Математическое моделирование*. 2001;13(2):17–26.
9. Rybak IV. Monotone and conservative difference schemes for elliptic equations with mixed derivatives. *Mathematical Modeling and Analysis*. 2004;9(2):169–178.
10. Волков ВМ, Прокопина ЕВ. Разностные схемы и итерационные методы для многомерных эллиптических уравнений со смешанными производными. *Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук*. 2018;54(4): 454–459. DOI: 10.29235/1561-2430-2018-54-4-454-459.

11. Barrett R, Berry M, Chan TF, Demmel J, Donato J, Dongarra J, et al. *Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods*. Philadelphia: SIAM; 1994. 143 p.

12. Мартыненко СИ. Универсальная многосеточная технология для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных на структурированных сетках. *Вычислительные методы и программирование*. 2000;1(1):83–102.

References

1. Konovalov AN. Fictitious domain method in filtration problems of a two-phase incompressible fluid, taking into account capillary forces. *Chislennyye metody mekhaniki sploshnoi sredy*. 1972;3(5):52–68. Russian.

2. Konovalov AN, Konuh GV, Tsurikov NV. About principles of building iterative processes in the fictitious domain method. In: *Variatsionnyye metody v zadachakh chislennogo analiza: sbornik nauchnykh trudov*. Novosibirsk: Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences; 1986. p. 37–52. Russian.

3. Konovalov AN. *Zadachi fil'tratsii mnogofaznoi neshhimaemoi zhidkosti* [Filtration problems of multi-phase incompressible fluid]. Novosibirsk: Nauka; 1988. Russian.

4. Vabishevich PN, Gassiev RV, Pulatov PA. Computational realization of fictitious domain method for elliptic equations on the basis of changing-triangular method. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*. 1987;27(9):1381–1387. Russian.

5. Vabishevich PN. *Metod fiktivnykh oblastei v zadachakh matematicheskoi fiziki* [Fictitious domain method in the problems of mathematical physics]. Moscow: URSS; 2016. Russian.

6. Samarsky AA. *Teoriya raznostnykh skhem* [The theory of finite-difference schemes]. Moscow: Nauka; 1989. Russian.

7. Turovets S, Volkov V, Zherdetsky A, Prakonina A, Malony AD. A 3D finite-difference BiCG iterative solver with the Fourier – Jacobi preconditioner for the anisotropic EIT/EEG forward problem. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. 2014;2014:12. DOI: 10.1155/2014/426902.

8. Samarskii AA, Mazhukin VI, Matus PP, Shishkin GI. Monotone difference schemes for equations with mixed derivatives. *Matematicheskoe modelirovanie*. 2001;13(2):17–26. Russian.

9. Rybak IV. Monotone and conservative difference schemes for elliptic equations with mixed derivatives. *Mathematical Modelling and Analysis*. 2004;9(2):169–178.

10. Volkov VM, Prakonina AU. Finite-difference schemes and iterative methods for multidimensional elliptic equations with mixed derivatives. *Vesci Nacyjanal'nej akademii navuk Belarusi. Seryja fizika-matjematychnyh navuk*. 2018;54(4):454–459. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2018-54-4-454-459.

11. Barrett R, Berry M, Chan TF, Demmel J, Donato J, Dongarra J, et al. *Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods*. Philadelphia: SIAM; 1994. 143 p.

12. Мартыненко СИ. Universal multigrid technology for the numerical solution of partial differential equations on structured grids. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye*. 2000;1(1):83–102. Russian.

Статья поступила в редакцию 14.10.2018.

Received by editorial board 14.10.2018.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

УДК 57.087.1

ОТБОР ИНФОРМАТИВНЫХ ПРИЗНАКОВ ЭКЗОНОВ ГЕНОВ ЧЕЛОВЕКА

А. В. ВОЛКОВ¹⁾, Н. Н. ЯЦКОВ¹⁾, В. В. ГРИНЕВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассмотрена задача сокращения размерности пространства признаков экзонов человека с целью определить их генную принадлежность. Для оценки эффективности алгоритмов отбора признаков проведены вычислительные эксперименты на примерах экзонов 14 известных генов человека. Установлено, что экзоны четко разделены относительно генной принадлежности. Алгоритмы автоматического отбора чувствительны к шумовым признакам и позволяют оценить количество таких признаков. Сокращение числа последних улучшает производительность вычислений и потребление памяти, а также позволяет получать значительно более простые прогностические модели и повышает их интерпретируемость. Показано, что тренировка алгоритмов индуктивного обучения на признаках фланкирующих интронов обеспечивает более высокую предсказательную способность в сравнении с обучением алгоритмов на признаках экзонов. Результаты представленной работы открывают новые возможности для изучения организации генов человека с помощью алгоритмов машинного обучения.

Ключевые слова: экзон; интрон; биоинформатика; отбор признаков; имитационное моделирование; алгоритм классификации.

Образец цитирования:

Волков АВ, Яцков НН, Гринев ВВ. Отбор информативных признаков экзонов генов человека. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;1:77–89.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-77-89>

For citation:

Volkau AU, Yatskou MM, Grinev VV. Selecting informative features of human gene exons. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;1:77–89. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-77-89>

Авторы:

Андрей Владимирович Волков – аспирант кафедры системного анализа и компьютерного моделирования факультета радиофизики и компьютерных технологий. Научный руководитель – Н. Н. Яцков.

Николай Николаевич Яцков – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры системного анализа и компьютерного моделирования факультета радиофизики и компьютерных технологий.

Василий Викторович Гринев – кандидат биологических наук, доцент; доцент кафедры генетики биологического факультета.

Authors:

Andrei U. Volkau, postgraduate student at the department of system analysis and computer simulation, faculty of radiophysics and computer technologies.

andrei@cybergizer.com

Mikalai M. Yatskou, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of system analysis and computer simulation, faculty of radiophysics and computer technologies.

yatskou@bsu.by

Vasily V. Grinev, PhD (biology), docent; associate professor at the department of genetics, faculty of biology.
grinev_vv@bsu.by

SELECTING INFORMATIVE FEATURES OF HUMAN GENE EXONS

A. U. VOLKAU^a, M. M. YATSKOU^a, V. V. GRINEV^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: A. U. Volkau (andrei@cybergizer.com)

Dimensionality reduction of the human gene exon feature space is considered with the aim of gene identification. To evaluate the performance of various feature selection algorithms, computational experiments were carried out using the examples of exons of 14 known human genes. It is proven that exons are clearly separable regarding gene affiliation. Feature selection algorithms are sensitive to noise features and allow to estimate their number. Reducing the number of features improves CPU-time, memory usage as well as reduces the complexity of a model and makes it easier to interpret. Our findings indicate that utilizing of features of flanking intronic sequences leads to better prediction models in comparison with utilizing of exon features. The results of the research provide new opportunities for study of human gene data using machine learning algorithms.

Key words: exon; intron; bioinformatics; feature selection; simulation modeling; classification algorithm.

Введение

Исследование организации и функционирования генов (в том числе и онкогенов) человека является важной задачей биоинформатики [1]. Гены состоят из экзонов и интронов. Особый интерес представляют экзоны, поскольку из них формируются зрелые молекулы РНК, а на основе последних происходит синтез белков в клетке.

Экзон может быть описан с помощью набора признаков. Признаками экзонов являются длины нуклеотидных последовательностей, биофизические свойства экзонов, измеренные экспериментальным путем, признаки фланкирующих нуклеотидных участков [2]. Экзон характеризуется большим количеством признаков (более 1000), в то же время число экзонов, принадлежащих гену, невелико (как правило, менее 200).

Проблема большого числа признаков и относительно малого числа объектов наблюдений характерна для всей области биоинформатики в целом. К примеру, для предсказания альтернативных транскриптов генов человека необходимо точно классифицировать экзоны согласно генной принадлежности [1], однако обучение алгоритмов классификации затрудняется «проклятием размерности». Возможным решением данной проблемы является использование алгоритмов снижения размерности пространства признаков [3].

Алгоритмы снижения размерности данных делятся на две группы: алгоритмы преобразования признаков (англ. *feature extraction*) и алгоритмы автоматического отбора признаков (англ. *feature selection*). Алгоритмы преобразования признаков проецируют исходное пространство признаков в новое пространство низкой размерности, которое часто является линейным или нелинейным преобразованием исходного пространства. Среди алгоритмов преобразования признаков следует выделить методы главных компонент, факторного анализа, многомерного шкалирования, линейного дискриминантного анализа, канонического корреляционного анализа и сингулярного разложения [4; 5]. Алгоритмы отбора признаков осуществляют непосредственный выбор наиболее релевантных признаков из исходного множества. Отсутствие каких-либо преобразований над исходными признаками позволяет сохранить их физический смысл. Данное свойство является особенно значимым в биоинформатических приложениях, поскольку каждый из признаков имеет уникальный биологический смысл, важный для эксперта в этой области. Применение алгоритмов отбора для выделения наиболее информативных признаков экзонов генов человека может существенно улучшить эффективность анализа геномных данных, а именно: увеличить производительность вычислений, повысить эффективность определения генной принадлежности экзонов, улучшить точность прогностических моделей [3].

Цель данного исследования – выяснение принципиальной возможности предсказания генной принадлежности экзонов по их признакам, выделение наиболее информативных признаков экзонов, определение эффективных алгоритмов отбора признаков индуктивного обучения в контексте решаемой задачи. В работе представлен краткий обзор существующих алгоритмов автоматического отбора признаков объектов, выполнен сравнительный анализ наиболее эффективных алгоритмов на примере экзонов 14 генов человека, выделены наилучшие по информативности группы признаков экзонов.

Алгоритмы автоматического отбора признаков объектов

Большинство алгоритмов отбора признаков основаны на принципе выбора более информативных (релевантных) признаков и удалении всех остальных. Интуитивно признак может считаться релевантным, если содержит некоторую информацию о метке класса характеризуемого объекта. Формальное определение предложено в работе [6] и может быть сформулировано следующим образом. Признак X является *строго релевантным*, если удаление признака X из обучающей выборки приводит к ухудшению предсказательной способности оптимального байесовского классификатора. Признак X имеет *слабую релевантность*, если он не является строго релевантным и при этом существует подмножество признаков S таких, что предсказательная способность оптимального байесовского классификатора, обученного на наборе признаков S , является менее точной по сравнению с предсказательной способностью при обучении на $S \cup X$. Признак следует считать *нерелевантным*, если он не является строго или слабо релевантным.

Помимо типов признаков на основе релевантности, используется определение избыточности. Ее строгое определение представлено в [7]: признак следует считать *избыточным*, если он имеет слабую релевантность и образует покрытие Маркова с подмножеством остальных признаков. Оптимальное подмножество признаков должно содержать все строго релевантные признаки и слабо релевантные признаки, которые не являются избыточными.

Алгоритмы автоматического отбора признаков можно разделить на семейства контролируемого и неконтролируемого отбора. При контролируемом отборе выбирается подмножество признаков с учетом метки классов объектов данных, в то время как при неконтролируемом отборе такая метка не учитывается [8]. В настоящей работе рассмотрены алгоритмы контролируемого отбора признаков.

Алгоритмы автоматического отбора признаков, в соответствии с используемой стратегией поиска релевантных наборов признаков, формируют четыре большие группы:

- фильтрующие (от англ. *filter*);
- оберточные (от англ. *wrapper*);
- встроенные (от англ. *embedded*);
- гибридные (от англ. *hybrid*) [9].

Фильтрующие алгоритмы выбирают подмножество признаков без применения процедуры индуктивного обучения, что позволяет эффективно использовать их в задачах анализа большого количества признаков (более 100). Однако вследствие данного подхода результирующие наборы признаков не являются в равной степени оптимальными для различных алгоритмов индуктивного обучения.

Оберточные алгоритмы итеративно используют процедуру индуктивного обучения для оценки точности предсказания на подмножествах признаков. Алгоритмы характеризуются высокой вычислительной сложностью и склонны к переобучению при анализе выборок небольших размеров.

Встроенные алгоритмы осуществляют отбор признаков непосредственно в ходе процесса индуктивного обучения, что способствует определению оптимального набора признаков для используемого индуктивного метода. В сравнении с оберточными алгоритмами встроенные алгоритмы имеют значительно большую вычислительную эффективность, поскольку не нуждаются в итеративной оценке наборов признаков.

Гибридные алгоритмы создаются на основе комбинации фильтрующих и оберточных алгоритмов. Автоматический отбор признаков выполняется в два шага. На первом шаге выбирается подмножество признаков с использованием процедуры фильтрующего алгоритма. На втором шаге осуществляется отбор признаков с помощью оберточного алгоритма. В гибридных алгоритмах сведены к минимуму недостатки фильтрующих и оберточных алгоритмов.

Алгоритмы отбора признаков подразделяются на унивариативные и мультивариативные. Мультивариативный подход учитывает отношения множества признаков значительно эффективнее унивариативного и позволяет устранять избыточность признаков [10].

По результатам проведенного литературного обзора в настоящей работе было принято решение об использовании фильтрующих алгоритмов, так как они:

- обладают высоким быстродействием, что обеспечивает проведение вычислительного эксперимента при малых вычислительных затратах;
- не зависят от типа алгоритма индуктивного обучения;
- относительно просты для программной реализации.

Алгоритмы Relief/ReliefF (на основе критерия Фишера и индекса Джини) были выбраны как репрезентативные представители группы фильтрующих алгоритмов.

Алгоритм на основе критерия Фишера относится к классу унивариативных алгоритмов. Наиболее информативными являются признаки, имеющие близкие значения для экзонов, принадлежащих

к одному гену, и отличные значения для экзонов, принадлежащих разным генам. Алгоритм позволяет ранжировать признаки по информативности для классификации. По причине того что алгоритм на основе критерия Фишера оценивает каждый признак независимо от остальных, он не может отфильтровать избыточные признаки.

Положим число признаков равным M . Оценка Фишера для признака f_i ($i = 1, 2, \dots, M$):

$$F(f_i) = \frac{\sum_{j=1}^c n_j (\mu_{i,j} - \mu_i)^2}{\sum_{j=1}^c n_j \sigma(i, j)^2},$$

где c – число классов; n_j – число наблюдений в классе j ; $\mu_{i,j}$ – среднее значение признака f_i для объектов наблюдения, соответствующих классу j ; μ_i – среднее значение признака f_i ; $\sigma(i, j)^2$ – значение дисперсии признака f_i для объектов наблюдения, соответствующих классу j . В качестве наилучших выбираются k признаков с наибольшими оценками Фишера.

Алгоритм Relief впервые предложен в работе [11] для анализа двухклассовых наборов данных и относится к классу мультивариативных. Положим, что l экзонов случайным образом выбраны среди n экзонов, тогда критерий *Relief* для признака f_i рассчитывается следующим образом:

$$Relief(f_i) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l d(X(j, i) - X(NM(j), i)) - d(X(j, i) - X(NH(j), i)),$$

где $d(\cdot)$ – метрика расстояния (наиболее часто используется расстояние Евклида); $X \in \mathbb{R}^{n \times M}$ – матрица данных с n экзонами и M признаками; $NM(j)$ – ближайшие соседние экзоны к экзону x_j для случая одного класса; $NH(j)$ – ближайшие соседние экзоны к экзону x_j для случая разных классов.

Алгоритм ReliefF представляет собой адаптацию алгоритма Relief к анализу многоклассовых данных с высоким уровнем шума [12]. Значение критерия *ReliefF* вычисляется как

$$ReliefF(f_i) = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^l \left(-\frac{1}{m_j} \sum_{x_r \in NH(j)} d(X(j, i) - X(r, i)) + \sum_{y \neq y_j} \frac{1}{h_{jy}} \frac{p(y)}{1 - p(y)} \sum_{x_r \in NM(j, y)} d(X(j, i) - X(r, i)) \right),$$

где c – число классов; $NH(j)$ – ближайшие экзоны к экзону x_j в рамках одного класса; m_j – размерность $NH(j)$; $d(\cdot)$ – метрика расстояния; $X \in \mathbb{R}^{n \times M}$ – матрица данных с n экзонами и M признаками; $NM(j, y)$ – ближайшие экзоны к экзону x_j в рамках разных классов; h_{jy} – размерность $NM(j, y)$; $p(y)$ – относительное количество объектов, имеющих метку класса y .

Алгоритм отбора признаков на основе индекса Джини является унивариативным [13]. Он определяет степень дискриминирующей способности признака по отношению к метке класса (генной принадлежности) с помощью критерия-индекса Джини. Выражение для индекса Джини:

$$G(r) = 1 - \sum_{j=1}^c [p(j|r)]^2,$$

где c – число классов; $p(j|r)$ – относительная частота j -го класса в узле дерева r (или по выделенному признаку).

Алгоритм оценивает каждый из признаков независимо, поэтому не может выделить избыточные признаки.

Программные реализации алгоритмов автоматического отбора признаков

Многие популярные алгоритмы автоматического отбора признаков входят в состав программного пакета для интеллектуального анализа данных *scikit-feature*. Среди них следует выделить алгоритмы на основе критериев Фишера, индекса Джини и прироста информации, ReliefF, минимальной избыточности – максимальной релевантности. Пакет разработан на языке программирования *Python* и тесно интегрирован с пакетами *scikit-learn*, *Numpy* и *Scipy*.

Сравнительный анализ алгоритмов отбора признаков экзонов генов является сложной задачей в связи с отсутствием априорной информации об оптимальном наборе релевантных признаков, наличием

избыточных, нерелевантных признаков, большим числом признаков, поэтому всестороннее исследование алгоритмов часто проводят на искусственно сгенерированных данных, для которых установлены наборы релевантных признаков. В работе [14] представлены результаты сравнительного анализа 7 фильтрующих, 2 оберточных и 2 встроенных алгоритмов на примерах 11 имитационно смоделированных наборов данных с нерелевантными (шумовыми) и избыточными признаками или с числом признаков, намного превышающим количество объектов наблюдения. Установлено, что алгоритм Relief/ReliefF в среднем дает наилучшие результаты для наборов данных с различными свойствами.

В работе [15] показано, что характеристики исследуемых наборов данных (такие как число признаков, число наблюдений и т. п.) сильно влияют на стабильность алгоритма отбора признаков. Для оценки последней выбран алгоритм расчета индекса стабильности [16].

Алгоритмы индуктивного обучения

Эффективность алгоритмов контролируемого отбора признаков определяется с помощью измерения информативности отбираемых наборов признаков, для оценки которой используется предсказательная способность алгоритма индуктивного обучения, обученного на отобранных признаках.

В работе рассмотрены три алгоритма индуктивного обучения: наивный байесовский классификатор, метод k ближайших соседей и машина опорных векторов с линейным ядром [17]. Выбор алгоритмов обусловлен их популярностью, разнородностью подходов к индуктивному обучению, отсутствием встроенных механизмов отбора признаков.

Предсказание вероятности принадлежности экзона к гену алгоритмом классификации позволяет использовать так называемые скоринговые правила (или правила счета) для оценки качества вероятностного прогноза. Строго корректные скоринговые правила, включая скоринговое правило Брайера и логарифмическое скоринговое правило, являются стандартными метриками вероятностных прогнозов [18]. В настоящей работе применяется скоринговое правило Брайера, которое для двухклассовых наборов данных имеет вид

$$\text{Оценка_Брайера} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (f_t - o_t)^2,$$

где N – число экзонов в тестовой выборке; f_t – вероятность принадлежности экзона t к заданному гену; o_t – метка принадлежности экзона t к заданному гену (единица означает принадлежность, нуль – отсутствие).

Скоринговое правило Брайера многоклассовых наборов данных (R классов) определяется следующим образом:

$$\text{Оценка_Брайера} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \sum_{i=1}^R (f_{ti} - o_{ti})^2,$$

где N – число экзонов в тестовой выборке; R – число генов; f_{ti} – вероятность принадлежности экзона t к гену i ; o_{ti} – метка принадлежности экзона t к гену i .

Минимальное значение скорингового правила Брайера соответствует наилучшему или более точному вероятностному прогнозу.

Экспериментальные данные

Экспериментальные данные получены из базы Ensembl [19] и содержат 1762 уникальных экзона, принадлежащих к 14 произвольно отобранным генам (названия генов обозначены в номенклатуре Ensembl): ENSG00000239665, ENSG00000166444, ENSG00000165795, ENSG00000205336, ENSG00000196628, ENSG00000226674, ENSG00000231898, ENSG00000237298, ENSG00000236172, ENSG00000228486, ENSG00000242808, ENSG00000228956, ENSG00000242086 и ENSG00000154556.

Каждый экзон был охарактеризован с помощью 1198 численных признаков: 429 признаков непосредственно самих экзонов и 769 признаков фланкирующих участков нуклеотидных последовательностей (длина цепи составляет 100 нуклеотидов). Различия между участками гена, соответствующими признакам экзонных нуклеотидных последовательностей, и участками гена, соответствующими признакам фланкирующих экзонов последовательностей интронов, показаны на рис. 1. Признаки фланкирующих экзонов нуклеотидных участков представляют особый интерес в ходе тестирования реализованных алгоритмов, так как интроны не содержат структурной информации о белке, но играют важную роль во время сплайсинга (соединения) экзонов, что, предположительно, должно позволить дополнительно проверить точность прогнозирования разработанных алгоритмов. Пример набора данных для генов ENSG00000239665 и ENSG00000237298 демонстрируется в табл. 1.

Число экзонов для каждого из изученных генов приведено в табл. 2. Индекс сбалансированности классов IR представляет собой отношение числа объектов наблюдения (в данном случае – экзонов) в доминирующем классе к числу объектов наблюдения в минорном классе [20].

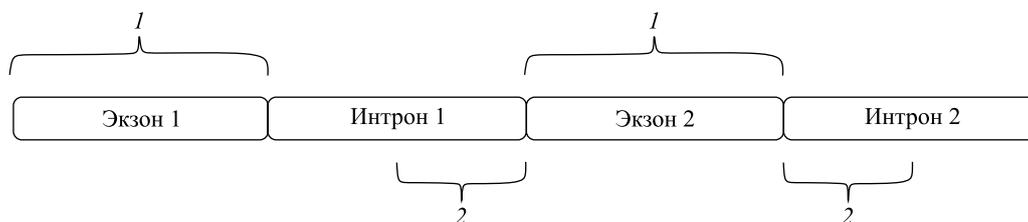


Рис. 1. Области соответствия признакам экзонных нуклеотидных последовательностей (1) и фланкирующих интронов (2)

Fig. 1. Regions of compliance with the features of exon nucleotide sequence (1) and of flanking introns (2)

Таблица 1

Примеры признаков экзонов генов человека

Table 1

Examples of exon features of human genes

Экзон	Признак			Ген
	phastCons_TE	phyloP_TE	Exon_length	
chr10:13631143-13631363	0,004 061 71	-0,394 81	221	ENSG00000239665
chr10:13631288-13631363	0,000 103 605	-0,532 445	76	ENSG00000239665
chr10:13631296-13631363	0,000 115 794	-0,623 316	68	ENSG00000239665
chr10:13631333-13631363	0	-0,654 904	31	ENSG00000239665
chr2:178764186-178764368	0,620 799	2,441 66	183	ENSG00000237298
chr2:178764186-178764612	0,464 401	1,987 85	427	ENSG00000237298
chr2:178773275-178773335	0,935 975	4,421 6	61	ENSG00000237298
chr2:178774227-178774319	0,916 519	4,305 95	93	ENSG00000237298
chr2:178774227-178774658	0,544 692	2,450 13	432	ENSG00000237298

Примечание. Признаки phastCons_TE и phyloP_TE показывают эволюционный консерватизм (неизменность в ходе эволюции) экзонов, рассчитаны с помощью алгоритмов phastCons и phyloP соответственно. Признак Exon_length является мерой длины экзона, выраженной в количестве нуклеотидов.

Таблица 2

Характеристики наборов данных, включающих по 2 гена, для случая бинарной классификации экзонов

Table 2

Characteristics of data sets comprising 2 genes each in case of binary exon classification

Номер пары генов	Составные гены	Число экзонов	IR	Совокупное число экзонов
1	ENSG00000239665	93	1,37	220
	ENSG00000237298	127		
2	ENSG00000166444	121	1,04	247
	ENSG00000226674	126		
3	ENSG00000165795	106	1,01	213
	ENSG00000236172	107		

Окончание табл. 2
Ending table 2

Номер пары генов	Составные гены	Число экзонов	IR	Совокупное число экзонов
4	ENSG00000205336	156	1,23	283
	ENSG00000231898	127		
5	ENSG00000228486	93	1,35	219
	ENSG00000226674	126		
6	ENSG00000242808	97	1,34	227
	ENSG00000154556	130		
7	ENSG00000228956	118	1,10	225
	ENSG00000236172	107		
8	ENSG00000239665	93	2,38	314
	ENSG00000242086	221		
9	ENSG00000196628	140	1,44	237
	ENSG00000242808	97		
10	ENSG00000166444	121	1,08	251
	ENSG00000154556	130		

Методология исследования

Блок-схема организации вычислительного эксперимента для исследования алгоритмов автоматического отбора признаков экзонов показана на рис. 2. Представленный подход позволяет исследовать зависимость оценки предсказательной способности алгоритмов индуктивного обучения по скоринговому правилу Брайера для ранжированного ряда признаков с помощью алгоритмов автоматического отбора.

В блоке 1 формируется набор данных для анализа. В ходе работы рассмотрены наборы данных с числом генов $M = 2, 3, \dots, 14$. Для каждого из экзонов указана принадлежность к модельному гену человека. В блоке 2 производится формирование выборки набора данных для M различных генов. Количество разных выборок установлено равным 10.

В блоке 3 осуществляется разбиение данных на подмножества тренировочной и тестируемой выборок, используемые далее для перекрестной проверки. В блоке 4 выполняется стандартизация тренировочного и тестового множеств.

В блоке 5 признаки ранжируются по значимости, рассчитанной на основе применения заданного алгоритма их автоматического отбора. В блоке 6 значение индекса N (количество наилучших признаков) полагается равным единице.

В блоке 7 осуществляется обучение алгоритма индуктивного обучения на N признаках и оценка релевантности выбранного набора признаков с помощью подсчета оценки Брайера. В блоке 8 проверяется условие исследования всех признаков. Если не все признаки исследованы, происходит переход к блоку 9, в котором значение счетчика индекса N увеличивается на единицу. В случае если все признаки исследованы, проверяется условие исследования всех множеств, сгенерированных для 10-кратной перекрестной проверки (блок 10). Если не все множества исследованы, осуществляется переход к блоку 3, если все множества исследованы – к блоку 11.

В блоке 11 производится проверка условия исследования всех выборок для M различных генов. Переход к блоку 2 для формирования новой выборки из M различных генов происходит, если не все выборки для M различных генов исследованы. Иначе осуществляется переход к блоку 12, в котором выполняется усреднение значений точности классификации, полученных для всех выборок из M генов.

В табл. 2 представлены характеристики десяти исследованных пар генов для случая бинарной классификации экзонов. Особенностью сформированных наборов является доминирование числа признаков над числом объектов данных (в среднем число признаков в 5 раз превосходит число объектов).

Сравнительный анализ алгоритмов отбора признаков с целью оценить стабильность такого отбора проведен с помощью алгоритма 10-кратной перекрестной проверки. Отбираемые на тренировочных множествах ранжированные ряды из 25 наилучших признаков поступали на вход алгоритма оценки стабильности отбора признаков. Для получения достоверных результатов эксперимент повторялся 10 раз для различных комбинаций генов, после чего данные усреднялись.

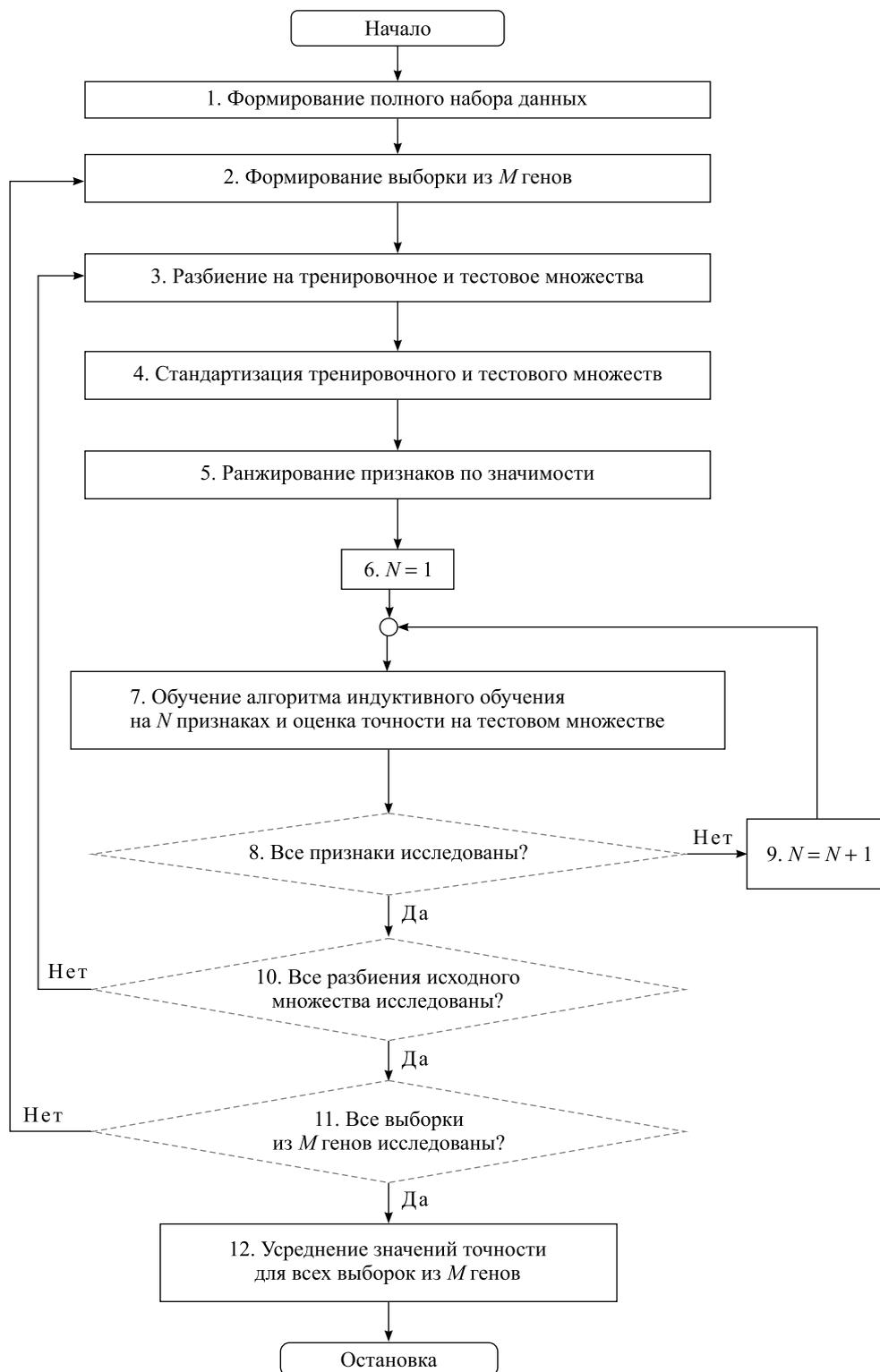


Рис. 2. Блок-схема организации вычислительного эксперимента
Fig. 2. Flow chart of the computing experiment

Компьютерная генерация дополнительных признаков экзонов

Для проверки релевантности признаков экзонов и чувствительности алгоритмов автоматического отбора нерелевантных признаков реализована имитационная модель [21]. В ней производится генерация дополнительных нерелевантных признаков, представляющих собой шумовые (здесь и далее используется прямой перевод термина с англ. *noisy features*) или неинформативные некоррелированные признаки.

Рассмотрим задачу генерации набора данных дополнительных признаков x_{ij} , $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, L$, представляющих единый кластер с центром μ и дисперсией D (разброс объектов) в пространстве признаков. Реализации дополнительных координат экзонов x_{ij} задаются выражением

$$x_{ij} = \mu + z\sigma,$$

где z – реализация нормальной стандартизированной случайной величины $N(0, 1)$.

Выбор нормального распределения для генерации шумовых признаков обусловлен тем, что большинство признаков экзонов имеют указанное распределение.

Результаты и их обсуждение

Выполнен сравнительный анализ алгоритмов случайного отбора признаков (алгоритмов на основе критерия Фишера, индекса Джини, Relief/ReliefF) при использовании алгоритмов индуктивного обучения (метод k ближайших соседей, алгоритм машины опорных векторов с линейным ядром и алгоритм наивной байесовской классификации) на примерах сформированных наборов данных (см. табл. 2). Под случайным отбором понимается выборка признаков, полученная случайным образом. Зависимость оценки по скоринговому правилу Брайера для ранжированных алгоритмами рядов признаков при варьировании алгоритмов индуктивного обучения представлена на рис. 3.

Для рассмотренных алгоритмов классификации характерно резкое убывание оценки ошибки до 50–100 признаков, затем слабое убывание (метод опорных векторов) или возрастание (k ближайших соседей и наивный байесовский классификатор) от 100 до 1200 признаков. Полученные значения оценок ошибок по скоринговому правилу Брайера позволяют сделать важный вывод о разделимости экзонов, принадлежащих различным генам. Достаточно первых 100 ранжированных признаков для точного предсказания геной принадлежности (оценка Брайера 0,02–0,04).

Наилучшую точность среди исследованных алгоритмов индуктивного обучения демонстрируют метод k ближайших соседей (1 ближайший сосед) и машина опорных векторов с линейным ядром. Минимальное достигаемое значение оценки по скоринговому правилу Брайера для обоих случаев составляет 0,02. Приведенные зависимости свидетельствуют о том, что автоматический отбор позволяет выбрать относительно небольшое число наиболее информативных признаков (до 50 признаков), приводящее к резкому уменьшению оценки Брайера и ее существенному отличию от случайного отбора выборок из такого же количества признаков. При увеличении числа признаков наблюдается лишь незначительное преимущество автоматического отбора признаков над случайным. Это свидетельствует о том, что абсолютное большинство признаков могут быть отнесены к классу избыточных. Следует отметить, что увеличение числа признаков приводит к небольшому ухудшению точности классификации алгоритмов k ближайших соседей и наивного байесовского классификатора. Среди исследованных алгоритмов классификации наихудшие результаты демонстрирует наивный байесовский классификатор, что обусловлено отсутствием учета корреляционных зависимостей между признаками в алгоритме классификатора.

На рис. 4 представлена зависимость оценок по скоринговому правилу Брайера для 100 наиболее информативных признаков при варьировании числа классов (генов) и алгоритма отбора признаков. При этом использованы алгоритмы индуктивного обучения, показывающие наилучшие результаты: машина опорных векторов с линейным ядром и метод одного ближайшего соседа. При увеличении числа классов характер зависимостей счетов Брайера сохраняется, однако значения изменяются от 0,1–0,14 для трех генов до 0,17–0,22 для шести генов, что обусловлено увеличением вероятности принятия классификатором неверного решения. Алгоритмы автоматического отбора признаков позволяют в среднем на 2,5 % точнее предсказывать геновую принадлежность экзонов в сравнении со случайным отбором признаков.

В результате анализа фланкирующих участков нуклеотидных последовательностей обнаружено (рис. 5), что более низкие значения оценок Брайера, равные 0,02–0,03, соответствуют обучению алгоритмов на признаках фланкирующих интронов в сравнении с величиной 0,07–0,08 для признаков экзонных нуклеотидных последовательностей.

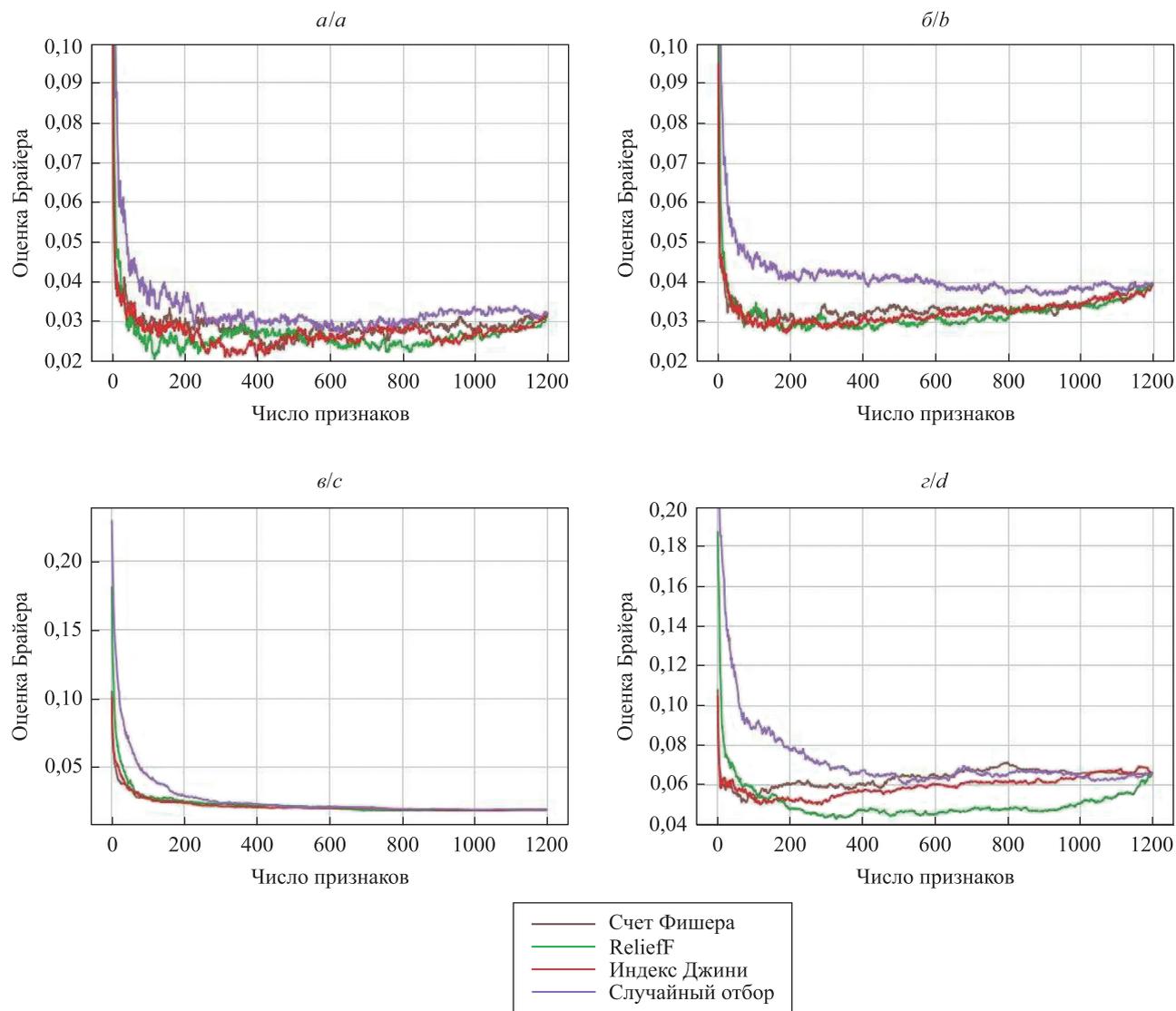


Рис. 3. Зависимость оценки по скоринговому правилу Брайера для ранжированного ряда признаков (2 гена):
 а – метод одного ближайшего соседа; б – метод трех ближайших соседей;
 в – машина опорных векторов с линейным ядром; г – наивный байесовский классификатор

Fig. 3. The Brier score for a ranked list of features (case of 2 genes):
 а – 1-nearest neighbor algorithm; б – 3-nearest neighbors algorithm;
 в – support vector machine with linear kernel; г – naive Bayes classifier

Рассмотрим работоспособность алгоритмов отбора признаков на примере добавления к экспериментальным данным дополнительных смоделированных признаков для 2 генов. В ходе анализа исследован набор 178 лучших признаков, отобранных экспертным путем, а также 1020 смоделированных шумовых признаков, сгенерированных с использованием нормального распределения $N(0, 1)$. Для рассмотренных закономерностей характерны три фазы на графике оценки ошибки (рис. 6):

- 1) резкое убывание ошибки до величины 0,03–0,04 для первых 20 признаков;
- 2) фаза участка «плато» для признаков 20–180, на котором значение ошибки остается практически неизменным: 0,03–0,05;
- 3) линейное увеличение ошибки 0,05–0,1 для признаков от 180 до 1198.

Фазы 1) и 2) хорошо согласуются с результатами анализа полного экспериментального набора признаков экзона без учета смоделированных шумовых признаков. Влиянием последних обусловлена фаза 3). Это позволяет предположить, что добавление шумовых, нерелевантных, некоррелированных признаков должно приводить к линейному увеличению ошибки, рассчитанной согласно скоринговому правилу Брайера.

Зависимость оценки ошибки для случайного отбора признаков имеет монотонно убывающий характер и значительно превышает среднюю величину оценки ошибки для алгоритмов автоматического отбора признаков. Значения ошибок для всех рассмотренных алгоритмов совпадают для итогового набора 1999 экспериментальных и смоделированных признаков. Различия ошибок для алгоритмов случайного и неслучайного отбора признаков позволяют сделать следующие выводы:

- реализованные алгоритмы отбора признаков крайне чувствительны к наличию шумовых признаков;
- признаки экзонов не являются шумовыми;
- наличие шумовых признаков приводит к линейному увеличению ошибки правила Брайера;
- количество шумовых признаков может быть оценено по графику ошибки Брайера и соответствует числу признаков, для которых наблюдается увеличение ошибки.

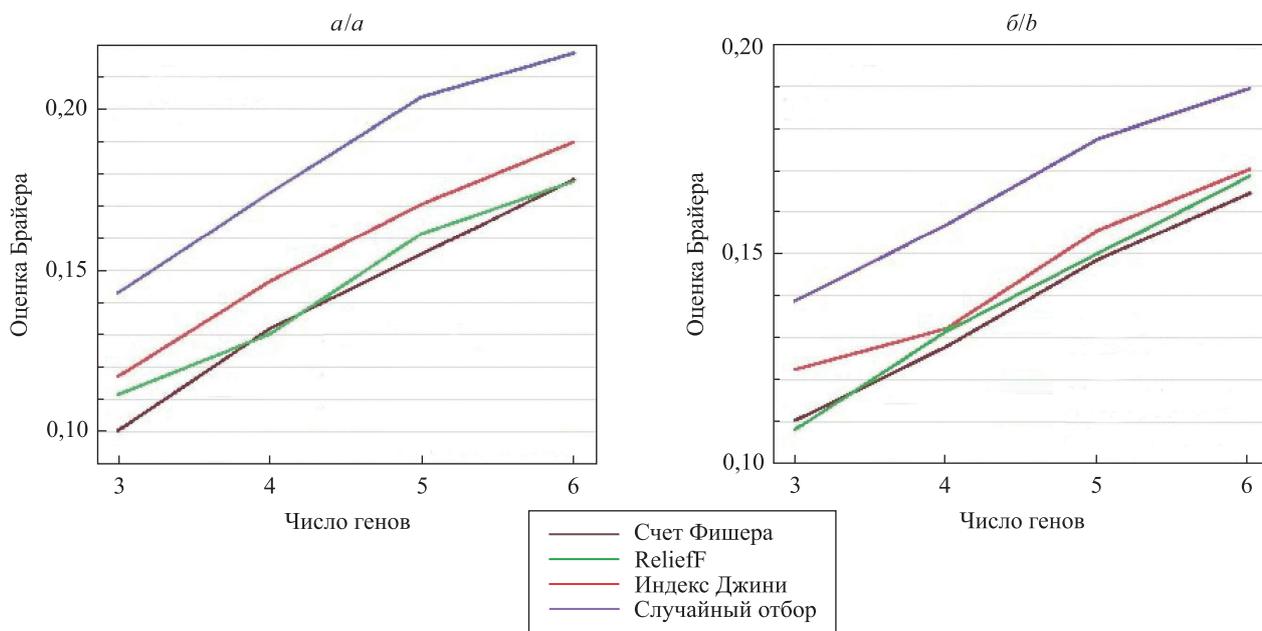


Рис. 4. Зависимость оценки по скоринговому правилу Брайера для 100 признаков при варьировании числа классов: *a* – машина опорных векторов с линейным ядром; *б* – метод одного ближайшего соседа

Fig. 4. The Brier score for 100 features versus the number of genes: *a* – support vector machine with linear kernel; *b* – 1-nearest neighbor algorithm

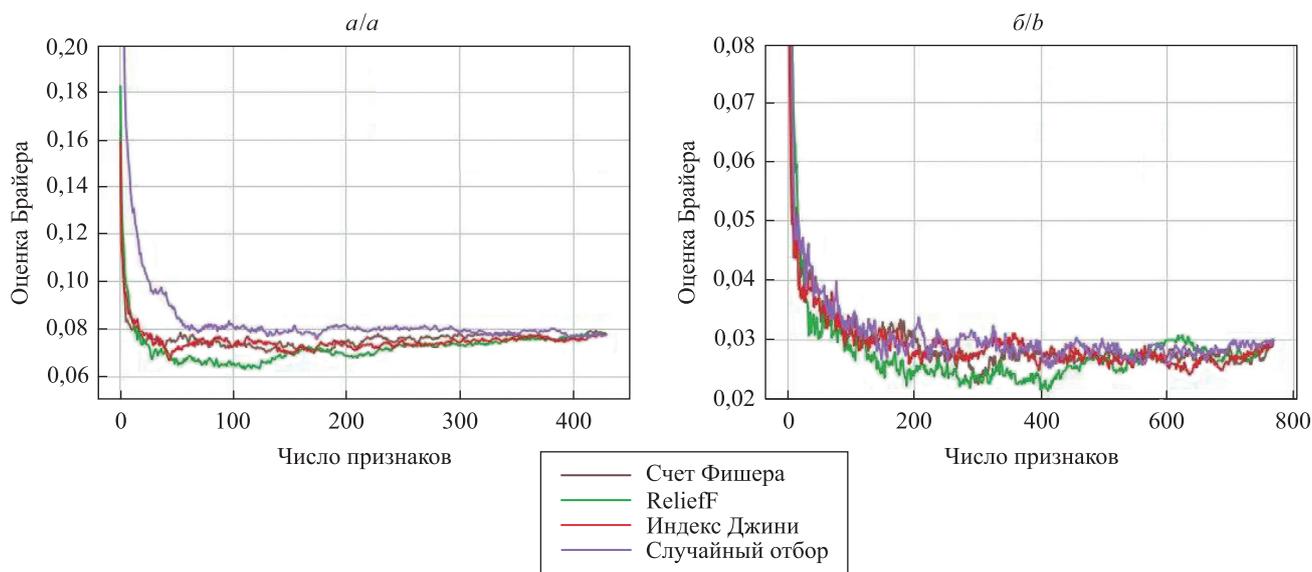


Рис. 5. Зависимость оценки по скоринговому правилу Брайера для ранжированного ряда признаков экзонов (*a*) и признаков фланкирующих интронов (*б*)

Fig. 5. The Brier score for a ranked list of exon features (*a*) and a ranked list of features of flanking nucleotide sequences (*b*)

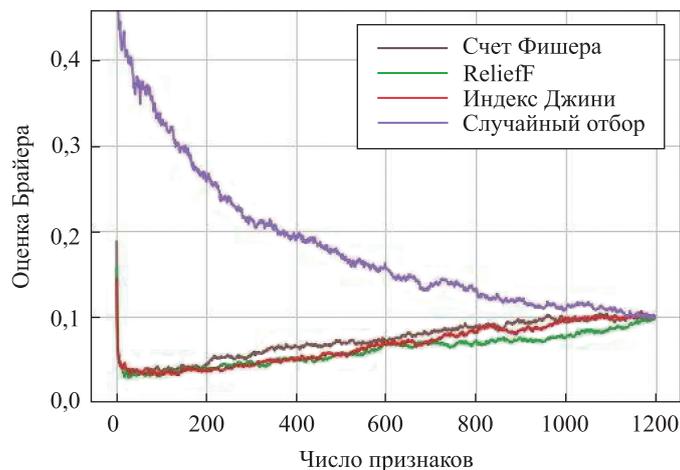


Рис. 6. Зависимость оценки по скоринговому правилу Брайера (метод одного ближайшего соседа) для ранжированного ряда признаков в случае добавления 1020 шумовых признаков

Fig. 6. The Brier score for a ranked list of features, when 1020 artificial noisy features are added

В завершение рассмотрим поведение индекса стабильности, рассчитанного в ходе анализа (табл. 3). Реализованные алгоритмы демонстрируют высокие значения (0,75–1) индекса стабильности для алгоритмов автоматического отбора признаков. Стабильность случайного отбора признаков равна нулю. Алгоритм на основе критерия Фишера и алгоритм отбора признаков на основе индекса Джини обладают наивысшими значениями индекса (0,85–1).

Таблица 3

Значения индексов стабильности

Table 3

Stability index values

Количество генов	Алгоритм на основе критерия Фишера	Relief/ReliefF	Индекс Джини
2	0,863	0,794	0,850
3	0,864	0,759	0,853
5	0,881	0,759	1
14	0,926	0,835	1

Заключение

Исследована эффективность алгоритмов отбора признаков (алгоритмы на основе критериев Фишера, Relief/ReliefF, индекса Джини) и алгоритмов индуктивного обучения (наивный байесовский классификатор, метод k ближайших соседей с одним и тремя ближайшими соседями, машина опорных векторов с линейным ядром) на примерах классификации экзонов генов человека. Установлен факт существенной разделимости между экзонами, принадлежащими разным генам. Наилучшая точность классификации достигается для наборов, состоящих из экзонов 2 генов, когда значение оценки по скоринговому правилу Брайера достигает 0,02.

Автоматический отбор признаков позволяет выбрать относительно небольшое число (до 100) наиболее информативных признаков. Среди исследованных алгоритмов отбора признаков алгоритм на основе критерия Фишера демонстрирует наивысшую вычислительную эффективность при практически идентичных показателях точности и, как следствие, является наилучшим для отбора признаков экзонов. В контексте стабильности отбора признаков экзонов наилучшим является алгоритм, основанный на вычислении индекса Джини.

В ходе работы проведено исследование наборов данных с добавлением смоделированных шумовых признаков. Установлено, что алгоритмы автоматического отбора признаков крайне чувствительны к наличию шумовых признаков, которое приводит к линейному увеличению ошибки по скоринговому

правилу Брайера. Количество шумовых признаков может быть определено по графику оценки Брайера и соответствует числу признаков, для которых наблюдается увеличение ошибки. При этом признаки экзонов в большинстве своем не являются шумовыми. Тренировка алгоритмов индуктивного обучения на признаках фланкирующих интронов обеспечивает более высокую предсказательную способность классификаторов по сравнению с обучением на признаках экзонов. Это наблюдение представляет большой интерес и требует дальнейшего детального изучения с помощью методов биоинформатики, а также экспериментальных методов молекулярной биологии.

Библиографические ссылки / References

1. Grinev VV, Migas AA, Kirsanova AD, Mishkova OA, Siomava N, Ramanouskaya TV, et al. Decoding of exon splicing patterns in the human RUNX1–RUNX1T1 fusion gene. *International Journal of Biochemistry & Cell Biology*. 2015;68:48–58. DOI: 10.1016/j.biocel.2015.08.017.
2. Zhang M. Statistical features of human exons and their flanking regions. *Human Molecular Genetics*. 1998;7(5):919–932. DOI: 10.1093/hmg/7.5.919.
3. Saeyns Y, Inza I, Larranaga P. A review of feature selection techniques in bioinformatics. *Bioinformatics*. 2007;23(19):2507–2517. DOI: 10.1093/bioinformatics/btm344.
4. Cox TF. Ch. 16. Multidimensional scaling in process control. *Handbook of Statistics*. 2003;22:609–623. DOI: 10.1016/s0169-7161(03)22018-6.
5. Martinez AM, Kak AC. PCA versus LDA. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 2001;23(2):228–233. DOI: 10.1109/34.908974.
6. John GH, Kohavi R, Pflieger K. Irrelevant Features and the Subset Selection Problem. In: Cohen WW, Hirsh H, editors. *Machine Learning Proceedings. Proceedings of the Eleventh International Conference; 1994 July 10–13; New Brunswick, Canada*. New Brunswick: Rutgers University; 1994. p. 121–129. DOI: 10.1016/b978-1-55860-335-6.50023-4.
7. Yu L, Liu H. Efficient feature selection via analysis of relevance and redundancy. *Journal of Machine Learning Research*. 2004; 5:1205–1224.
8. Ang JC, Mirzal A, Haron H, Hamed HNA. Supervised, unsupervised, and semi-supervised feature selection: a review on gene selection. *IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics*. 2016;13(5):971–989. DOI: 10.1109/tcbb.2015.2478454.
9. Belanche LA, Gonzalez FF. Review and evaluation of feature selection algorithms in synthetic problems [Internet]. [Cited 2018 September 12]. Available from: <http://arxiv.org/abs/1101.2320>.
10. Wang L, Lei Y, Zeng Y, Tong L, Yan B. Principal feature analysis: a multivariate feature selection method for fMRI data. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. 2013;2013:1–7. DOI: 10.1155/2013/645921.
11. Kira K, Rendell LA. A practical approach to feature selection. In: *Machine Learning Proceedings. Proceedings of the Ninth International Workshop on Machine Learning; 1992 July 1–3; Aberdeen, Scotland*. Aberdeen: ML; 1992. p. 249–256. DOI: 10.1016/b978-1-55860-247-2.50037-1.
12. Kononenko I. Estimating attributes: Analysis and extensions of RELIEF. In: *Machine Learning: ECML-94. European Conference; 1994 April 6–8; Catania, Italy*. Berlin: Springer; 1994. p. 171–182. DOI: 10.1007/3-540-57868-4_57.
13. Singh SR, Murthy HA, Gonsalves TA. Feature selection for text classification based on Gini coefficient of inequality. *The Fourth Workshop on Feature Selection in Data Mining*. 2010;10:76–85.
14. Bolón-Canedo V, Sánchez-Marroño N, Alonso-Betanzos A. A review of feature selection methods on synthetic data. *Knowledge and Information Systems*. 2012;34(3):483–519. DOI: 10.1007/s10115-012-0487-8.
15. Kalousis A, Prados J, Hilario M. Stability of Feature Selection Algorithms: a study on high dimensional spaces. *Knowledge and Information System*. 2007;12(1):95–116.
16. Nogueira S, Sechidis K, Brown G. On the stability of feature selection. *Journal of Machine Learning Research*. 2018;18(174):1–54.
17. Nilsson NJ. Artificial intelligence: A modern approach. *Artificial Intelligence. Elsevier BV*. 1996;82(1–2):369–380. DOI: 10.1016/0004-3702(96)00007-0.
18. Merkle EC, Steyvers M. Choosing a Strictly Proper Scoring Rule. *Decision Analysis*. 2013;10(4):292–304. DOI: 10.1287/deca.2013.0280.
19. Aken BL, Ayling S, Barrell D, Clarke L, Curwen V, Fairley S, et al. The Ensembl gene annotation system. *Database*. 2016; 2016:baw093. DOI: 10.1093/database/baw093.
20. Orriols-Puig A, Bernadó-Mansilla E. Evolutionary rule-based systems for imbalanced data sets. *Soft Computing*. 2008;13(3): 213–225. DOI: 10.1007/s00500-008-0319-7.
21. Qiu W, Joe H. Generation of Random Clusters with Specified Degree of Separation. *Journal of Classification*. 2006;23(2): 315–334. DOI: 10.1007/s00357-006-0018-y.

ЮБИЛЕИ

JUBILEES



**Петр Петрович
ЗАБРЕЙКО**

**Petr Petrovich
ZABREIKO**

Исполнилось 80 лет выдающемуся математику, доктору физико-математических наук профессору кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Петру Петровичу Забрейко.

Петр Петрович родился 3 февраля 1939 г. в Воронеже. В годы войны семья жила в селе Пески Воронежской области, затем переехала в украинское село Узин Киевской области, а в 1947 г. вернулась в Воронеж. После окончания школы в 1956 г. Петр Петрович поступил на механико-математический факультет Воронежского университета, который успешно окончил в 1961 г. Затем учеба в аспирантуре у известного специалиста в области функционального анализа М. А. Красносельского, с которым потом работал на протяжении многих лет. Завершил аспирантуру досрочно, в 1964 г. защитил кандидатскую диссертацию, а в 1968 г. – докторскую. Работал доцентом в Воронежском университете до конца 1966 г., с 1967 по 1971 г. – старшим научным сотрудником в Институте автоматики и телемеханики АН СССР (Институт проблем управления), с 1971 по 1981 г. – профессором, заведующим кафедрой и проректором в Ярославском государственном университете. В 1981 г. П. П. За-

брейко переехал в Минск, и с тех пор работает в Белорусском государственном университете. В 1988 г. он организовал кафедру математических методов теории управления, которой заведовал до 2003 г.

П. П. Забрейко известен во всем мире как ученый высокого класса и разносторонний специалист. Он опубликовал около 500 научных работ, 9 монографий, изданных и переизданных на английском языке, является членом редколлегии ряда журналов. Благодаря таланту, трудолюбию и великолепному математическому образованию внес основательный вклад в развитие ряда математических направлений. Вот краткий перечень некоторых фундаментальных результатов Петра Петровича.

Топология и геометрические методы анализа. Основные исследования связаны с развитием методов вычисления индекса особых точек различных классов векторных полей как в конечномерных, так и в бесконечномерных пространствах. Среди них – установление связи между задачей вычисления индекса особых точек плоских векторных полей и алгоритмом Евклида построения наибольшего общего делителя пары многочленов, что позволило описать простые схемы вычисления индекса практически во всех случаях; разра-

ботка метода редукции вычисления индекса особых точек вполне непрерывных векторных полей к аналогичной задаче для полей в конечномерных пространствах; выяснение алгебраических связей между вращениями векторных полей и итерациями операторов $I - A^k$. Наконец, следует отметить, что П. П. Забрейко и М. А. Красносельский – одни из создателей теории вращения векторных полей с уплотняющими операторами; ими было дано обоснование теории вращения Р. Каччиополи для фредгольмовых векторных полей. Также Петром Петровичем был внесен принципиальный вклад в теорию векторных полей с монотонными и квази-монотонными операторами.

Теория ветвления решений нелинейных операторных уравнений. Одной из важнейших была восходящая к А. М. Ляпунову задача о ветвлении (в частности, бифуркации и исчезновении) решений этих уравнений. Основным методом исследования таких задач – использование уравнений разветвления Ляпунова и Шмидта, которые в конкретных случаях, как правило, оказывались системами n уравнений с n неизвестными, сводящимися к системам алгебраических уравнений, а последние исследовались методами теории исключений. П. П. Забрейко и М. А. Красносельский обнаружили, что уравнения разветвления Ляпунова и Шмидта различны (хотя и имеют общие решения), а затем нашли, что если число уравнений в системе разветвления больше двух, то на практике теория исключения не позволяет описать все решения, поскольку некоторые решения при ее применении не «ловятся», но при этом иногда вычисляются «ложные» решения. Ими же был развит метод простых решений, позволяющий строить сколь угодно близкие приближения к невырожденным (т. е. некратным) решениям. Также был исследован основной случай в задаче о возмущениях точек ветвления, где метод простых решений оказался весьма эффективным.

Теория пространств функций и интегральных операторов. Стандартной схемой применения нелинейного функционального анализа к нелинейным интегральным (или функциональным) уравнениям долгое время являлась следующая: выбор подходящего пространства, в котором входящие в уравнения операторы можно было рассматривать как функции, и проверка «хороших» свойств этих операторов, обычно такая проверка сводилась к вычислениям норм тех или иных величин, связанных с уравнениями. В основе работ П. П. Забрейко лежала несколько иная идея – устанавливать нужные свойства операторов без вычислений норм, на основе геометрических и других свойств пространств, в которых это уравнение рассматривалось. Петром Петровичем был выделен и изучен класс идеальных пространств (как позднее выяснилось, в связи с другими задачами близкие

классы исследовались С. Банахом, В. А. Люксембургом и А. К. Зааненом, Г. Кёте и др.). Последний оказался весьма обширным и содержал классические пространства Лебега, пространства Орлича, Марцинкевича, Лоренца и многие другие (но не пространство непрерывных функций). Развитая теория позволила изучить общие свойства линейных и нелинейных интегральных операторов (в частности, операторов Гаммерштейна, Урысона, Ляпунова – Шмидта и т. д.): выяснить условия, гарантирующие их непрерывность, компактность, дифференцируемость, гладкость и др. В свою очередь, это позволило установить новые теоремы о разрешимости нелинейных интегральных уравнений, ветвлении их решений и т. д.

Приближенные методы. В теории приближенных методов решений линейных операторных уравнений второго рода П. П. Забрейко были получены явные формулы для ошибок в методе последовательных приближений (используемые на практике формулы для погрешности получаются из них при помощи элементарных числовых оценок), что позволило выяснить связь между поведением этих ошибок и поведением итераций операторов, а также поведением резольвенты $R(\lambda)$ оператора A при приближении λ к кругу сходимости. Эти связи объяснили открытые А. Н. Тихоновым и его коллегами явления, наблюдающиеся при решении некорректных уравнений. В теории приближенных методов решения нелинейных операторных уравнений Петром Петровичем и его учениками интенсивно изучался метод Ньютона – Канторовича. Для случая, когда левая часть рассматриваемого уравнения удовлетворяет условию Гёльдера, была открыта и изучена *terra incognita* – зона параметров, в которых метод Ньютона – Канторовича сходится, но эта сходимость не вытекает из классических теорем Б. А. Вертгейма, и в результате получены новые условия сходимости метода и выяснена скорость этой сходимости. Использование новых схем исследования позволило получить результаты о сходимости градиентных методов для уравнений в гильбертовом пространстве и первые теоремы о сходимости градиентных методов в банаховых пространствах (где само понятие градиента оказывается неясным).

Дифференциальные уравнения. Здесь наиболее интересными из результатов П. П. Забрейко являются общая теорема о единственности решений задачи Коши и первая и вторая теоремы об усреднении для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах в теории усреднения Боголюбова – Крылова. Вторая из этих теорем, как было выяснено, есть просто модифицированная теорема о неявных функциях. С первой ситуация оказалась совершенно иной – переход к уравнениям в банаховых пространствах показал, что ее справедливость

тесно связана со свойством уплотняемости соответствующего интегрального оператора; вопрос здесь остается не до конца ясным.

Среди других результатов в первую очередь следует отметить лемму о непрерывности полуаддитивного функционала, которая в качестве элементарных следствий содержит в себе теоремы Банаха о непрерывности замкнутого линейного оператора и все ее модификации и следствия, теоремы Крейна о несплюсненности воспроизводящего конуса и др. В настоящее время существует несколько учебников по функциональному анализу, в которых эта лемма положена в основу всего изложения. Также следует отметить теорему Лагранжа о среднем: несмотря на утверждения в учебниках анализа, что теорема Лагранжа на вектор-функции не переносится, Петр Петрович среди эквивалентных этой теореме утверждений обнаружил и доказал такое, которое оказывается справедливым и для вектор-функций со значениями в произвольном банаховом пространстве.

Научная деятельность П. П. Забрейко успешно сочетается с подготовкой кадров высшей квалификации. Более 33 (22 – во время работы в БГУ) его официальных учеников защитили кандидат-

ские диссертации. Помимо этого, много других диссертаций написаны при непосредственной неформальной помощи Петра Петровича. Среди его учеников – 7 докторов наук. Многие успешно работают в США, Великобритании, Германии, Сербии, России, есть ученики в странах Закавказья и Средней Азии.

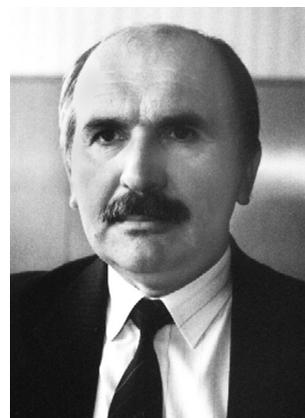
С преподавательской деятельностью П. П. Забрейко связана значительная часть его научных исследований. За время работы в высших учебных заведениях СССР и Беларуси Петр Петрович читал следующие курсы: «Функциональный анализ», «Математический анализ», «Геометрические методы анализа», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Методы оптимизации» и др. Из спецкурсов стоит отметить такие, как «История математики», «Элементы математической экономики», «Экономико-математические модели», «Философские вопросы математики». И нередко те задачи, которые он и его ученики исследуют, возникают прямо на лекциях и семинарах.

Друзья и коллеги сердечно поздравляют Петра Петровича с юбилеем, желают ему крепкого здоровья и неугасающего интереса к постижению тайн и законов Математической Вселенной.



Валентин Викентьевич ГОРОХОВИК

Valentin Vikent'evich GOROKHOVIK



Валентин Викентьевич Гороховик родился 29 марта 1949 г. в д. Хорошее Логойского района Минской области. В 1965 г. после окончания с серебряной медалью средней школы поступил на математический факультет Белорусского государственного университета, который с отличием окончил в 1970 г. Вся трудовая жизнь В. В. Гороховика неразрывно связана с Институтом математики НАН Беларуси и Белорусским государственным университетом. В сентябре 1969 г., еще до окончания университета, он был принят на работу в Институт математики АН БССР (ныне – Институт математики НАН Беларуси). Здесь он состоялся как ученый, пройдя путь от младшего до главного научного сотрудника. В 1996 г. В. В. Гороховик возглавил созданный в институте новый отдел – нелинейного анализа (с 2004 г. – нелинейного и стохастического анализа), которым руководит и в настоящее время. В июне 1973 г. Валентин Викентьевич защитил кандидатскую диссертацию, а в ноябре 1988 г. в Институте математики и механики Уральского отделения АН СССР – диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. В июле 1991 г. ВАК СССР присвоил В. В. Гороховику ученое звание профессора, в 2000 г. он был избран членом-корреспондентом АН Беларуси. Начиная с 1987 г. Валентин Викентьевич работает по совместительству на механико-математическом факультете Белорусского государственного университета, в настоящее время он – профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики.

В. В. Гороховик – известный ученый в области нелинейного анализа и математической теории оптимизации. Его основные научные интересы связаны с такими актуальными разделами современного анализа, как выпуклый, негладкий и многозначный анализ, и их приложениями к экстремаль-

ным задачам. Существенный вклад внес Валентин Викентьевич в разработку математических основ теории векторной оптимизации – нового научного направления, связанного с теоретическим обоснованием оптимального выбора по нескольким показателям качества.

В области *выпуклого анализа* В. В. Гороховик всесторонне изучил геометрическое строение полупространств (выпуклых подмножеств векторного пространства, дополнения к которым также выпуклы). Это позволило осуществить полную классификацию полупространств по типу и рангу и ввести двойственные полупространствам объекты – новые классы ступенчато-линейных и ступенчато-аффинных функций, распространив тем самым классическую двойственность между линейными функциями и гиперподпространствами и двойственность между аффинными функциями и гиперплоскостями до двойственности между полупространствами и ступенчато-аффинными функциями. На основе этих результатов В. В. Гороховик развил общую теорию отделимости выпуклых множеств ступенчато-аффинными функциями, которая обобщает один из основных принципов линейного анализа – классическую теорию отделимости выпуклых множеств гиперплоскостями. В качестве приложений этой теории Валентин Викентьевич предложил и разработал новый подход к исследованию выпуклых задач оптимизации, базирующийся не на классических схемах выпуклого анализа, а на отделимости выпуклых множеств полупространствами и соответствующими им ступенчато-аффинными функциями. Используя этот подход, В. В. Гороховик получил критерии оптимальности решений в нерегулярных выпуклых задачах оптимизации, включая нерегулярные задачи векторной оптимизации и нерегулярные классические задачи выпуклого

программирования. В теории упорядоченных векторных пространств В. В. Гороховик применил ступенчато-аффинные функции для аналитического представления отношений предпорядка, согласованных с алгебраическими операциями.

Целый цикл работ Валентина Викентьевича посвящен исследованиям *многозначных отображений*. Существенное место в этом цикле занимает изучение аффинных многозначных отображений, при этом под таковыми понимаются отображения, которые одновременно выпуклы и вогнуты. В. В. Гороховик установил, что каждому аффинному многозначному отображению однозначно соответствует сопряженное отображение, которое является однозначным разностно-сублинейным отображением. Справедливо и обратное: каждому однозначному разностно-сублинейному отображению, действующему в сопряженных пространствах, соответствует (не обязательно единственное) аффинное многозначное отображение в исходных пространствах. Таким образом, однозначные разностно-сублинейные отображения являются в некотором смысле «линейной частью» аффинных многозначных отображений.

Другим важным результатом, характеризующим аффинные многозначные отображения, действующие в конечномерных векторных пространствах, является доказательство В. В. Гороховиком того, что каждое аффинное многозначное отображение полностью определяется своими однозначными аффинными селекторами, совокупность которых образует выпуклый компакт. С другой стороны, произвольный выпуклый компакт однозначных аффинных отображений порождает, вообще говоря, лишь вогнутое многозначное отображение, которое может и не быть аффинным. Валентин Викентьевич установил необходимое и достаточное условие, при выполнении которого выпуклый компакт однозначных аффинных отображений состоит из аффинных селекторов некоторого аффинного многозначного отображения и полностью определяет его. В. В. Гороховик ввел понятия крайних и выступающих селекторов многозначных отображений и доказал, что в конечномерных пространствах каждое аффинное многозначное отображение есть выпуклая оболочка (соответственно замкнутая выпуклая оболочка) крайних (соответственно выступающих) аффинных селекторов. Эти утверждения распространяют на аффинные многозначные отображения такие важные классические теоремы выпуклого анализа, как теорема Минковского (Крейна – Мильмана) и теорема Страшевича.

Используя аффинные многозначные отображения в качестве локальных аппроксимаций, В. В. Гороховик ввел понятие дифференцируемости для многозначных отображений, распространяющее на последние классическую дифференцируемость

однозначных отображений – дифференцируемость в смысле Фреше. Им же был получен ряд характеристик введенной дифференцируемости многозначных отображений в терминах дифференцируемости их опорных функций.

Существенный вклад внес Валентин Викентьевич и в развитие *негладкого анализа*, т. е. анализа недифференцируемых в классическом смысле функций и отображений, а также множеств, граница которых не является гладким многообразием. К этому циклу следует отнести также его исследования по описанию глобальных характеристик кусочно-аффинных и положительно однородных функций и отображений, кусочно-полиэдральных и эпиплещицевых множеств. Естественным развитием данных исследований являются разработанные В. В. Гороховиком теории полиэдрального и аппроксимативного квазидифференцирования функций и отображений, основанные на использовании кусочно-линейных и разностно-сублинейных локальных аппроксимаций. В качестве нового инструмента для локального анализа множеств Валентин Викентьевич ввел понятие расширенных касательных векторов второго порядка к множеству, совокупность которых, как показали дальнейшие приложения к задачам оптимизации, является гораздо более информативной локальной аппроксимацией множества, нежели используемые ранее аппроксимации.

Разработанные методы анализа негладких функций и множеств В. В. Гороховик успешно применял к исследованию различных классов задач оптимизации, включая задачи векторной оптимизации, минимаксные задачи, задачи с ограничениями различных видов, задачи оптимального управления, при этом основные усилия были направлены на разработку необходимых, а также достаточных условий оптимальности первого, второго и более высокого порядков. Важные результаты получены Валентином Викентьевичем и по вопросам устойчивости решений задач векторной оптимизации, связанные, по существу, с исследованием топологических свойств специальных многозначных отображений.

Значительные усилия В. В. Гороховика были направлены также на прикладные исследования. Под его руководством выполнены важные проекты по договорам с рядом ведущих предприятий и организаций республики, в частности с объединениями «Интеграл», «Белорусская железная дорога» и др.

Валентин Викентьевич – участник многочисленных международных симпозиумов и конференций, автор около 200 научных работ, в том числе монографии «Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации» (Минск : Наука и техника, 1990) (переиздана в 2012 г. в России издательской

группой URSS). Под его руководством защищены 4 кандидатские диссертации.

В. В. Гороховик принимает активное участие в аттестации научных кадров. Более 30 лет он является членом, а в последние 15 лет – председателем совета по защите докторских диссертаций. С момента создания ВАК Республики Беларусь в течение 11 лет он – член экспертного совета ВАК по математике.

Валентин Викентьевич успешно сочетает научные исследования с педагогической деятельностью. Читает лекции на механико-математическом факультете по основным и специальным курсам, руководит работой студентов над курсовыми и дипломными проектами, магистерскими диссертациями. При создании новых специальностей на факультете участвовал в разработке ряда учебных программ и курсов лекций, в частности подготовил и издал книгу «Конечномерные

задачи оптимизации» (Минск : Изд. центр БГУ, 2007), которая рекомендована Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия для студентов математических специальностей. Неоднократно возглавлял работу государственных экзаменационных комиссий в БГУ и Гродненском государственном университете имени Янки Купалы.

Сердечно поздравляем Валентина Викентьевича с 70-летием, желаем ему крепкого здоровья, большого счастья и новых творческих достижений.

*В. В. Амелькин, А. Б. Антонец,
А. В. Арутюнов, В. И. Бахтин,
В. В. Беняш-Кривец, В. И. Берник, В. В. Бобков,
В. И. Громак, В. А. Еровенко, П. П. Забрейко,
В. И. Корзюк, В. Г. Кротов, А. В. Лебедев,
А. Р. Миротин, Ю. В. Трубников,
А. И. Шафаревич, Н. И. Юрчук*

ВЫДАЮЩИЕСЯ УЧЕНЫЕ

OUTSTANDING SCIENTISTS



— — — — —
**Василий Иванович
ВЕДЕРНИКОВ
(1919–1991)**

**Vasily Ivanovich
VEDERNIKOV
(1919–1991)**
— — — — —

Замечательной особенностью лучших представителей науки является не только глубина и перспективность их идей, но и высокая нравственность, культура, человечность. И если научные идеи подвержены суровой проверке временем и могут изменяться и уточняться, то яркие человеческие качества их творцов относятся к числу вечных непреходящих ценностей. Таким ученым был и остается в нашей благодарной памяти основатель научной геометрической школы в Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор Василий Иванович Ведерников.

Василий Иванович родился 11 февраля 1919 г. в Липецке в семье учителей. Заниматься геометрией начал на физико-математическом факультете Воронежского университета под руководством известного советского математика и прекрасного педагога Николая Владимировича Ефимова. Окончил университет в 1941 г. Далее – начало войны, зенитно-артиллерийские курсы в Москве, с 1943 г. – фронт. Участвовал в обороне Москвы, освобождении Украины, Молдавии и Румынии, награжден боевыми орденами и медалями. Лишь летом 1946 г. – долгожданная демобилизация.

И сразу же – аспирантура в геометрической школе Казанского университета под руководством профессора Александра Петровича Нордена. После успешной защиты в 1949 г. кандидатской диссертации работал в вузах Ижевска, Йошкар-Олы, Воронежа, Горького (ныне – Нижний Новгород), читал практически все (!) основные математические университетские курсы. Его воронежские ученики и студенты до сих пор вспоминают, что Василий Иванович (в ту пору доцент) был одним из самых квалифицированных преподавателей на математическом факультете Воронежского университета и мог ответить на трудные вопросы по любому из математических курсов. Одновременно он много и успешно занимался научными исследованиями. Будучи представителем классической геометрической школы, смело и эффективно привлекал для изучения глобальных вопросов в геометрии новые для того времени алгебро-топологические методы, постоянно проверяя принципиально новую технику на объектах классических теорий. Логическим следствием этой деятельности стала докторская диссертация «Симметрические пространства. Нормализованные и сопряженные связности». После

ее защиты В. И. Ведерников заслуженно вошел в ряд ведущих специалистов по современной дифференциальной геометрии в СССР.

В 1969 г. профессор В. И. Ведерников принял приглашение Белорусского государственного университета возглавить кафедру геометрии математического факультета. С этого момента начался качественно новый этап белорусской геометрической науки. Незабываема атмосфера многочисленных семинаров, которые сразу же организовал Василий Иванович, где вместе осваивали современные знания и совсем юные студенты, и аспиранты, и опытные доценты. Впечатляла удивительная непринужденность, с которой В. И. Ведерников читал серию сложных оригинальных спецкурсов. Ни одна из появляющихся в мире книг или крупных публикаций по близкой тематике не оставалась без внимания участников семинаров, а зачастую просто возникал еще один семинар. Все основные геометрические курсы на мехмате качественно изменились и ушли далеко за рамки бытовавших традиций. Как следствие, сформировалась группа студентов, которая была вовлечена Василием Ивановичем в активные научные исследования. Широта образования В. И. Ведерникова сказалась и на предлагаемой им тематике научных исследований: геометрия G -структур на гладких многообразиях, однородные пространства групп Ли, групповые свойства дифференциальных уравнений, обобщенные симметрические пространства (однородные Φ -пространства), глобальные пары и порождаемые ими геометрии и др.¹

В БГУ одним из первых в Советском Союзе был открыт специализированный совет по защитах диссертаций по специальности «Геометрия и топология», а Василий Иванович стал его председателем. Признанием заслуг белорусской геометрической школы стало проведение в Минске в 1979 г. VII Всесоюзной геометрической конференции (фактически она была международной, с участием известных специалистов из Болгарии, Германии, Румынии, Польши). Также Василий Иванович был членом специализированного совета по защитах докторских диссертаций по алгебре и членом бюро Всесоюзного геометрического семинара имени профессора Г. Ф. Лаптева при ВИНТИ в Москве.

Характерными чертами научного творчества Василия Ивановича были смелость и умение в использовании и развитии новых методов исследований, поразительная научная интуиция и исключительное обилие идей, которыми он щедро делился с учениками, коллегами, многими другими математиками. Один из московских математиков

удачно сравнил В. И. Ведерникова с мореплавателем, который любит открывать новые острова. И действительно, намечая лишь контуры новых направлений, Василий Иванович предлагал ученикам двигаться дальше. Так, одно из этих направлений (теория обобщенных симметрических пространств) активно развивается в настоящее время с разных точек зрения, при этом возникла серия интересных приложений. Другие же (например, теория морфизмов однородных пространств) лишь только начинают осознаваться как перспективные, позволяющие наряду с получением новых фактов дать простое и естественное толкование многим классическим результатам и теориям.

В. И. Ведерников имел совершенно индивидуальный научный стиль. Он писал свои работы в разговорном жанре, как бы рассказывая воображаемому собеседнику долгую и интересную математическую историю. Исподволь и как бы сами собой вводились определения в силу необходимости целесообразности и с мотивацией постулируемых свойств, а потому всегда носившие совершенно естественный характер. Затем снова как бы между делом доказывались десятки малых и больших теорем, причем со всеми основными деталями. При такой манере значительная информация занимала сравнительно небольшой объем. Всегда удивляла легкость, с которой он подводил слушателя или читателя к сложнейшим понятиям, а простота оперирования ими делала эти понятия доступными и как бы привычными. Такой стиль, пожалуй, можно назвать романтическим.

Василий Иванович обладал прекрасной реакцией, новое схватывал на лету, однако считал это качество совершенно необязательным для ученых, а иногда и губительным, особенно для молодых. При этом приводил массу примеров, когда вдумчивые ученые с замедленной реакцией получали выдающиеся результаты. Не любил крикливых и суетных в науке (да и в жизни), ему imponировали немногословные, думающие, «уменькие», как он иногда говорил. Не допускал мелочной опеки в науке, ценил самостоятельность в лучших ее проявлениях. Когда один молодой математик обратился с просьбой сформулировать для него какую-либо задачу, Василий Иванович не без гордости ответил: «Мои ученики сами ставят себе задачи». Многие поколения математиков ощущали благотворное влияние и получали помощь и поддержку В. И. Ведерникова в ситуациях разного свойства. Под его непосредственным руководством были защищены 14 кандидатских диссертаций (из них 12 – за период работы в Минске).

¹Основные направления научной деятельности В. И. Ведерникова, список его публикаций и прочитанных спецкурсов см. в источнике: Балащенко В. В., Ведерников С. В., Степанов Н. А., Феденко А. С. Научное наследие Василия Ивановича Ведерникова (11.02.1919–16.03.1991) // Итоги науки и техники. Сер.: Совр. матем. и ее приложения. Темат. обзоры. 1995. Т. 8. С. 37–58. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jmid=into&paperid=2&option_lang=rus.

Постоянно размышляя об университетском математическом образовании, Василий Иванович высказывал интересные мысли о необходимости присутствия в университетах профессионалов разной направленности. Считая, что университетский преподаватель обязательно должен заниматься наукой, выделял (условно) 3 категории специалистов. Он говорил, что бывают ученые, которые имеют выдающиеся результаты в достаточно узкой области, но не имеют широкого образования. Однако такие специалисты способны увлечь молодые таланты и довести их до самых современных проблем. Есть такие, которые имеют научные результаты хорошего уровня, при этом широко и разносторонне образованны. Наконец, есть те, которые хотя и не имеют значительных собственных научных результатов, однако достаточно широко и качественно образованны, а их наиболее сильной стороной является умение прекрасно рассказывать. Представители таких разных категорий преподавателей непременно должны работать в университетах.

В личности В. И. Ведерникова счастливо соединились и талант исследователя, и широкая математическая образованность, и качества увлекательного рассказчика. Не обладая громким голосом и броскими манерами, он притягивал к себе студентов во время лекций удивительной легкостью изложения материала любой сложности. Подчеркивал, что и экзамен должен иметь обучающий характер. К студентам относился неизменно уважительно и доброжелательно независимо от того, какую оценку выставлял. Неудивительно поэтому, что студенты его высоко ценили и уважали. Из-

вестны примеры, когда даже нерадивые усердно готовились к экзамену или зачету, поскольку не могли себе позволить слабый ответ Василию Ивановичу.

С особым вдохновением и заботой В. И. Ведерников руководил минским городским геометрическим семинаром. Здесь были представлены все поколения белорусских геометров, и многие именитые математики считали честью для себя выступить с докладом на этом семинаре, приезжая в Минск, как теперь говорят, из ближнего и дальнего зарубежья. Василий Иванович умел удивительным образом несколькими точными фразами так прокомментировать изложенную докладчиком подчас формальным, а потому трудным языком теорию, что сразу прояснялась суть дела. Этот семинар носит сейчас имя профессора В. И. Ведерникова, а его участники стараются сохранить лучшие традиции, заложенные в те годы.

Трудно описать словами яркую личность Василия Ивановича Ведерникова. Глубокое знание и удивительно тонкое восприятие поэзии, музыки, живописи, доброжелательность и уважительное отношение, высокая внутренняя культура и истинная интеллигентность, искренний интерес к жизни друзей, многочисленных учеников, коллег – все это притягивало к нему людей разных возрастов и профессий. Общение с Василием Ивановичем способствовало духовному обогащению всех, кому выпало счастье близко знать его.

*В. В. Балащенко, П. П. Забрейко,
С. Г. Кононов, Н. А. Степанов, В. В. Суворов*

МЕЖДУНАРОДНЫЙ СЕМИНАР ПО ДИНАМИКЕ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

INTERNATIONAL SEMINAR ON VISCOUS FLUID DYNAMICS

Течения вязкой жидкости со свободной поверхностью являются важной частью многих технологических процессов, например, они используются для организации тепло- и массообмена, встречаются при нанесении покрытий. На свободной поверхности возможно образование волн, эволюция возмущений определяется силами инерции, внешними массовыми и поверхностными силами, а также поверхностным натяжением. Для управления процессами волнообразования и неустойчивости необходимо иметь инструмент влияния на указанные силы, например создать переменное поле массовых сил с помощью вращения, поверхностные силы газовым потоком вдоль поверхности жидкости или переменное поверхностное натяжение с помощью добавления в жидкость поверхностно-активного вещества.

Решению некоторых задач управления процессами неустойчивости и определению фундаментальных механизмов, влияющих на характер течения, посвящены следующие научные проекты: «Гидродинамическая неустойчивость и волны в стекающей пленке при воздействии неравновесной адсорбции-десорбции летучего растворимого поверхностно-активного вещества (ПАВ)» (поддержан Российским фондом фундаментальных исследований, № 18-01-00762, руководитель – профессор В. Я. Шкадов); «Гидродинамические и тепловые процессы производства минеральных и металлических волокон для получения теплоизоляционной ваты, материалов дымоуловителей и фильтров ГРЭС и ТЭЦ, армирующих

добавок тормозных колодок большегрузных автомобилей» (поддержан государственной программой научных исследований Республики Беларусь «Энергетические системы, процессы и технологии 2.48», № 20161423, руководитель – профессор М. А. Журавков, ответственный исполнитель – доцент П. Н. Конон); «Стационарные и волновые капиллярные течения во вращающихся объемах жидкости» (поддержан Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований, № Ф18Р-225, и Российским фондом фундаментальных исследований, № 18-51-00006, соруководители – П. Н. Конон и Е. И. Могилевский).

Для координации исследований белорусской и российской сторонами был организован семинар по динамике вязких жидкостей на механико-математических факультетах БГУ и МГУ имени М. В. Ломоносова, проходивший в режиме видеоконференции под руководством профессора В. Я. Шкадова, доцентов А. Н. Белоглазкина, П. Н. Конона, Е. И. Могилевского, ассистента А. И. Алексюка¹.

В конце первого полугодия совместной работы, 7–8 декабря 2018 г., на механико-математическом факультете Белорусского государственного университета состоялся Международный семинар по динамике вязких жидкостей, который явился заключительным в 2018 г. В работе семинара принимали участие сотрудники МГУ имени М. В. Ломоносова, БГУ, Института тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова НАН Беларуси, а также аспиранты и студенты БГУ (рис. 1). Сделаны сообщения

¹Информация о видеосеминаре (программа заседаний, аннотации докладов) размещается в интернете по адресу: <http://new.math.msu.su/departament/aeromech/research.php?p=viscousfluidsdynamics>.



Рис. 1. Участники семинара
Fig. 1. Participants of the workshop

о последних результатах в области моделирования капиллярных течений вязкой жидкости. Доклады сотрудников и аспирантов МГУ имени М. В. Ломоносова и БГУ были посвящены течениям пленок и капель во вращающихся системах и общим подходам к моделированию подобных течений.

Ниже приводятся аннотации всех сообщений, заслушанных на семинаре.

А. И. Алексюк², В. Я. Шкадов² «Применение расширенного метода конечных элементов для расчета двухфазных течений со свободной поверхностью». Рассматриваются двухфазные течения неперемешивающихся вязких несжимаемых жидкостей с учетом поверхностного натяжения в поле силы тяжести. Движение каждой фазы описывается уравнениями Навье – Стокса. Численное решение начально-краевых задач проводится на основе стабилизированного метода конечных элементов (GLS-метод – Galerkin/Least-Squares), который ранее успешно применялся для решения двумерных и трехмерных задач обтекания тел потоком вязкой жидкости (газа)³. Пространства пробных и весовых функций дополняются функциями, которые допускают разрывы параметров потока внутри ячеек, содержащих границу раздела (extended finite element method)⁴. Для отслеживания перемещений последней применяется метод функции уровня (level-set method). Все это позволяет моделировать течения с изменяющейся топо-

логией свободной поверхности на неподвижных расчетных сетках.

Проведено тестирование численных алгоритмов на различных течениях со свободной поверхностью. Получено хорошее соответствие результатов расчетов задач о всплытии «двумерного пузыря» (рис. 2, а) и о стекании пленки по плоской вертикальной стенке (рис. 2, б) с данными других исследователей⁴. В качестве примера задачи с изменяющейся топологией границы раздела представлены расчеты развития неустойчивости Рэлея – Тейлора из состояния равновесия (рис. 2, в): покоящийся слой жидкости находится под слоем более тяжелой жидкости.

А. Н. Белоглазкин², В. Я. Шкадов², А. Е. Кулаго⁵ «Формирование предельных волновых режимов при пространственном и при временном развитии течения стекающей пленки жидкости». Система эволюционных уравнений Капицы – Шкадова⁶, описывающая волновое течение жидких пленок, изначально допускает вариации во времени его интегральных характеристик, будь то средняя толщина или расход. Использование инвариантных свойств эволюционных уравнений позволяет производить расчеты течений пленки как для режимов постоянной толщины, так и для режимов постоянного расхода, что дает возможность установить соответствие между характеристиками регулярной волны, наблюдаемой в эксперименте или при численных расчетах течения

² МГУ имени М. В. Ломоносова.

³ *Aleksyuk A. I., Shkadov V. Ya.* Analysis of three-dimensional transition mechanisms in the near wake behind a circular cylinder // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2018. Vol. 72. P. 456–466 ; *Aleksyuk A. I., Osipov A. N.* Direct numerical simulation of energy separation effect in the near wake behind a circular cylinder // Int. J. Heat Mass Transf. 2018. Vol. 119. P. 665–677. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.11.133.

⁴ *Sauerland H., Fries T.-P.* The extended finite element method for two-phase and free-surface flows: A systematic study // J. Comput. Phys. 2011. Vol. 230, issue 9. P. 3369–3390. DOI: 10.1016/j.jcp.2011.01.033 ; *Nosoko T., Miyara A.* The evolution and subsequent dynamics of waves on a vertically falling liquid film // Phys. Fluids. 2004. Vol. 16, issue 4. P. 1118–1126. DOI: 10.1063/1.1650840.

⁵ Российский экономический университет (РЭУ) имени Г. В. Плеханова.

⁶ *Шкадов В. Я.* Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. Акад. наук СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 1. С. 43–51.

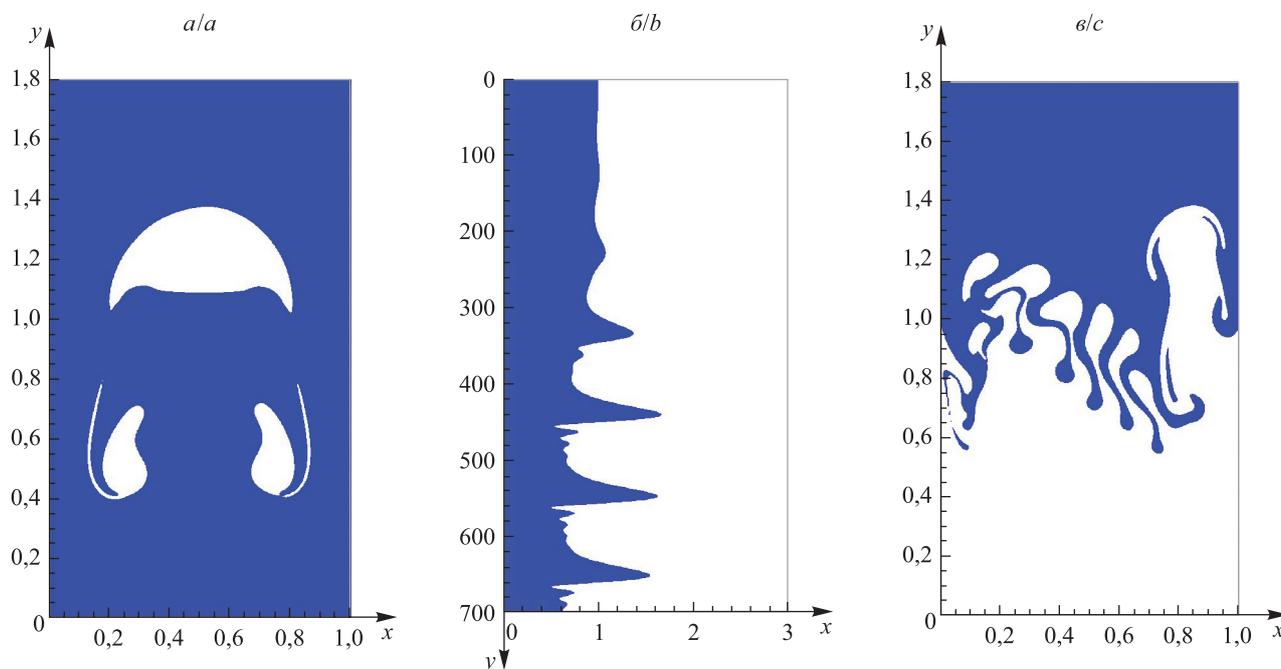


Рис. 2. Примеры тестовых расчетов: *a* – всплытие «двумерного пузыря»;
b – стекание пленки по вертикальной стенке; *c* – развитие неустойчивости Рэлея – Тейлора

Fig. 2. Examples of test calculations: *a* – the ascent of a «two-dimensional bubble»;
b – falling film on a vertical wall; *c* – development of Rayleigh – Taylor instability

для всей числовой оси, и периодическим по пространству предельным решением эволюционной системы уравнений.

На основе анализа глобального аттрактора (множества предельных решений динамической системы, соответствующих периодическим по пространству решениям системы эволюционных уравнений) проведено сравнение свойств волновых режимов и полученных характеристик регулярных волн с данными экспериментов по возбуждению волн на поверхности пленки жидкости заданной частотой, численного решения соответствующей пространственной краевой задачи.

Расчеты не только демонстрируют хорошее соответствие формы волны и характеристик возникающего пленочного течения, но и позволяют объяснить наблюдаемую в некоторых данных перестройку течения вблизи нейтрального значения возбуждаемой частоты. Представлена неединственность характеристик пленки жидкости при ее возбуждении частотой из области промежуточных семейств. Проведено сравнение с экспериментальными данными для тонкой пленки сильновязкой жидкости⁷.

Е. И. Могилевский⁸, П. Н. Конон⁹, А. Е. Кулаго¹⁰, В. Я. Шкадов⁸ «Равновесные формы капель во внешних полях». Рассматривается равновесие конечного объема жидкости под действием капиллярных сил и внешних полей: гравитационного, электрического (для модели идеального проводника), поля центробежной силы. Обсуждаются численные методы решения краевой задачи для уравнения Юнга – Лапласа.

На примере задачи о форме висящей капли показана возможность неединственного решения, для выбора физически реализуемого варианта используется критерий устойчивости¹¹.

Задача о равновесной форме капли идеального проводника в вертикальном постоянном электрическом поле решается с помощью итерационного метода, идея которого заключается в последовательном решении задачи электростатики для данного приближения формы поверхности и задачи о равновесии жидкости под действием гравитационных, капиллярных и максвелловских напряжений в предположении, что распределение заряда по поверхности – заданная функция¹². Показано, что неустойчивые равновесные формы

⁷Panga M. K. R., Mudunuri R. R., Balakotaiah V. Long-wavelength equation for vertically falling films // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71. P. 036310. DOI: 10.1103/PhysRevE.71.036310.

⁸МГУ имени М. В. Ломоносова.

⁹БГУ.

¹⁰РЭУ имени Г. В. Плеханова.

¹¹Гидродинамика невесомости / под ред. А. Д. Мышкиса. М. : Наука, 1976.

¹²Могилевский Е. И., Шкадов В. Я., Шутов А. А. Равновесные формы висящей капли в электростатическом поле // Изв. Рос. акад. наук. Механика жидкости и газа. 2012. № 5. С. 23–31.

не воспроизводятся при таком методе расчета. Обнаружено, что при наличии электрического поля становятся неустойчивыми формы капель, содержащие «шейку» (радиус пятна соприкосновения с твердой поверхностью меньше наибольшего радиуса горизонтального сечения).

Решена задача о равновесии капли на поверхности горизонтального вращающегося диска. Установлено, что достаточно большие капли под влиянием центробежной силы трансформируются из почти плоского слоя с закруглением на концах в сравнительно узкий обод с тонкой пленкой внутри. Для фиксированного объема жидкости равновесная форма капли существует только для значений угловой скорости, не превосходящих критическое. Определена зависимость критической угловой скорости от объема капли.

Приводятся результаты наблюдений поведения капли вязкой жидкости на вращающемся диске для докритических и сверхкритических угловых скоростей. При превышении критической скорости капли малого объема утекают в одну сторону, причем форма следа, оставляемого на поверхности диска, зависит от вязкости жидкости (определяется значением числа Экмана). При больших значениях объема капля разрывается на некоторое количество ручейков. Обсуждаются постановки задач, позволяющие предсказать число ручейков.

Получены неосесимметричные стационарные формы капель как возмущения осесимметричной. Показано, что в случае малой кривизны возмущения представляют собой линейную комбинацию функций Бесселя¹³. Выведено выражение для второй вариации энергии в окрестности осесимметричного решения. Предполагается, что возмущения, искажающие форму капли, отвечают наибольшему по модулю уменьшению энергии при фиксированном значении нормы возмущений в пространстве непрерывных функций. Так как возможны равновесные возмущения, выражающиеся через функции Бесселя, именно эту систему функций предлагается использовать в качестве базиса.

Рассматривается постановка задачи для уравнений Стокса, в которой не предполагается равновесие жидкости относительно подвижной вращающейся системы отсчета. Поле течений может быть найдено с помощью теории потенциала¹⁴, а для определения эволюции использован тот же метод,

что и при вычислении равновесной формы капли в электрическом поле.

Результаты работы могут применяться для оптимизации процессов нанесения покрытий, а также производства металлических волокон центробежным способом.

П. Н. Конон¹⁵, А. В. Жук¹⁵, В. Я. Шкадов¹⁶
«Неизотермическое возмущенное движение слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра». С целью изучить процессы центробежного литья металлов исследовано неизотермическое плоское движение слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности горизонтального вращающегося с постоянной угловой скоростью цилиндра в поле сил поверхностного натяжения, гравитации и инерции¹⁷.

Движение вязкой жидкости рассматривается в относительной полярной системе координат, связанной с вращающимся цилиндром, и описывается уравнениями Навье – Стокса. В уравнении энергии учтены конвективные составляющие и диссипативные члены. Для случая достаточно быстрого вращения цилиндра найдены уравнения первого приближения, подобные уравнениям пограничного слоя. Полученная система решается прямым методом с учетом граничных условий прилипания на поверхности цилиндра, отсутствия вязкого взаимодействия с окружающей средой на свободной поверхности и теплообмена по условиям 3-го рода.

В результате исследований получена и численно решена система дифференциальных уравнений в частных производных для определения эволюции свободной поверхности плоского слоя конечной толщины при умеренных и больших числах Рейнольдса Re в поле центробежных сил с учетом изменяющегося температурного поля в жидкости (рис. 3). Проведены сравнения с экспериментами и результатами исследования изотермической задачи. Найдена зависимость времени распада слоя на цилиндре от числа Re . Учет нелинейного взаимодействия возмущений позволил проследить за механизмом эволюции поверхности слоя. Основной причиной его распада на внутренней цилиндрической вращающейся поверхности является гравитационная неустойчивость, вызванная значительным влиянием силы тяжести по сравнению с центробежными силами.

¹³ Конон П. Н., Кулаго А. Е., Сицко Г. Н., Конон П. П. Экспериментальное и теоретическое исследование поведения слоя жидкости на вращающемся диске // Теорет. и прикл. механика : междунар. науч.-техн. сб. 2016. Вып. 31. С. 87–94.

¹⁴ Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М. : Наука, 1970.

¹⁵ БГУ.

¹⁶ МГУ имени М. В. Ломоносова.

¹⁷ Решение изотермической задачи рассмотрено в: Епихин В. Е., Конон П. Н., Шкадов В. Я. О возмущенном движении слоя вязкой жидкости на поверхности вращающегося цилиндра // Инж.-физ. журн. 1994. Т. 66, № 6. С. 689–694 ; Пухначев В. В. Движение жидкой пленки на поверхности вращающегося цилиндра в поле тяжести // Прикл. механика и техн. физика. 1977. № 3. С. 78–88 ; Конон П. Н., Жук А. В. Напряжения на внешней и внутренней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью // Механика машин и механизмов. 2013. № 4 (25). С. 32–37.

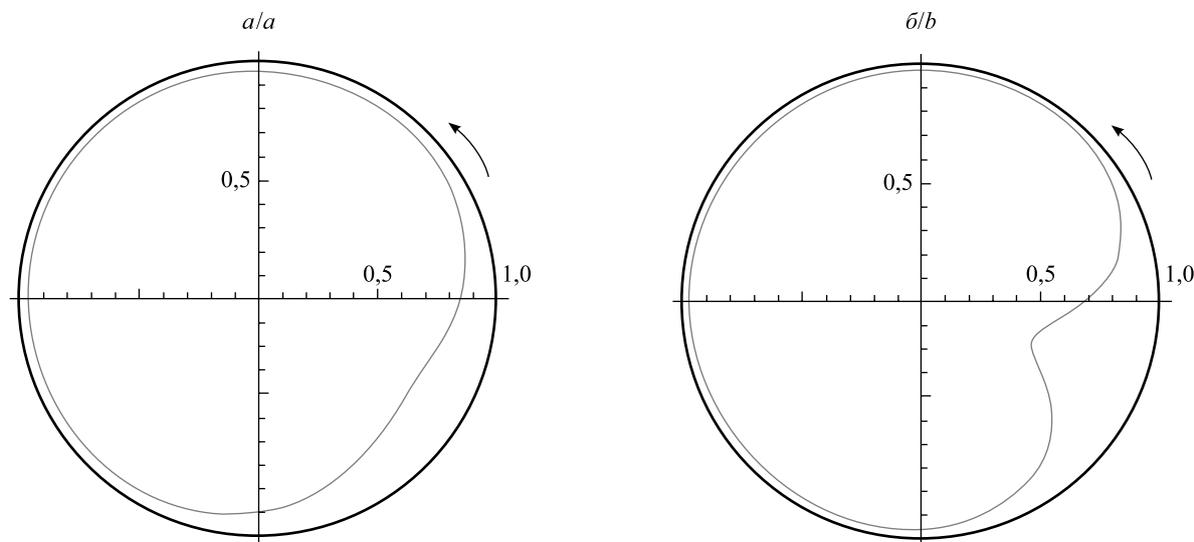


Рис. 3. Пример одного из расчетов:
поднятие (а) и провисание (б) слоя глицерина в различные моменты времени
при заполнении жидкостью в 16,5 % объема цилиндра

Fig. 3. An example of one of the calculations:
raising (a) and sagging (b) of the glycerin layer at different points
in time when filling with a liquid in 16.5 % of the cylinder volume

А. И. Ермоленко¹⁸, П. Н. Конон¹⁸ «Движение двух несмешивающихся слоев вязких жидкостей на цилиндрической поверхности в поле центробежных и массовых сил». Исследовано плоское движение тонких несмешивающихся слоев вязких жидкостей на внешней поверхности горизонтально расположенного, вращающегося с постоянной угловой скоростью цилиндра в поле сил тяжести и инерции. Подобного рода течения можно использовать при нанесении двухслойных покрытий на цилиндрические поверхности.

С помощью условия постоянства потока в окружном направлении¹⁹ решена задача определения вида поверхностей двух слоев в случае установившегося движения жидкостей как на внутренней, так и на внешней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки²⁰. В данном исследовании также сформулирована общая трехмерная постановка задачи движения двух несмешивающихся слоев вязких жидкостей в поле центробежных, поверхностных и гравитационных сил.

С использованием основных постулатов теории тонкого слоя²¹ система уравнений, представляющая собой постановку двумерной нестационарной

плоской задачи, была упрощена. В случае умеренного движения, пренебрегая инерционными членами уравнений Навье – Стокса, найдены окружные и радиальные компоненты скорости, а также взаимосвязанная система уравнений эволюции наружного и внешнего слоев в гравитационном и поверхностном поле. Разработан и реализован численный способ ее исследования, основанный на методе прямых с последующим интегрированием по формулам Рунге – Кутты четвертого порядка точности. Получены и проанализированы формы раздела слоев и свободной поверхности (рис. 4) от длительного устойчивого состояния при медленном вращении до развития возмущений со временем и распада слоя при увеличении влияния центробежных сил.

В ходе семинара подведены итоги совместной работы групп МГУ имени М. В. Ломоносова и БГУ. Определены направления дальнейших исследований, обсуждены возможности применения численных методов, представленных в сообщении А. И. Алексюка, В. Я. Шкадова, к решению задач, рассмотренных в докладах П. Н. Конона (с соавторами) и А. И. Ермоленко, П. Н. Конона.

¹⁸ БГУ.

¹⁹Hansen E. B., Kelmanson M. A. Steady, viscous free-surface flow on a rotating cylinder // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 272. P. 91–107. DOI: 10.1017/S0022112094004398.

²⁰Конон П. Н., Ермоленко А. И. Исследование двухслойного течения пленок вязких жидкостей на внутренней поверхности вращающегося цилиндра // Вестн. Белорус. гос. ун-та транспорта: Наука и транспорт. 2016. № 1 (32). С. 334–337; Конон П. Н., Ермоленко А. И. Установившееся движение двух тонких плоских слоев вязких жидкостей на внешней поверхности вращающегося цилиндра // Теорет. и прикл. механика : междунар. науч.-техн. сб. 2017. Вып. 32. С. 46–51.

²¹Пухначев В. В. Движение жидкой пленки на поверхности вращающегося цилиндра в поле тяжести // Прикл. механика и техн. физика. 1977. № 3. С. 78–88.

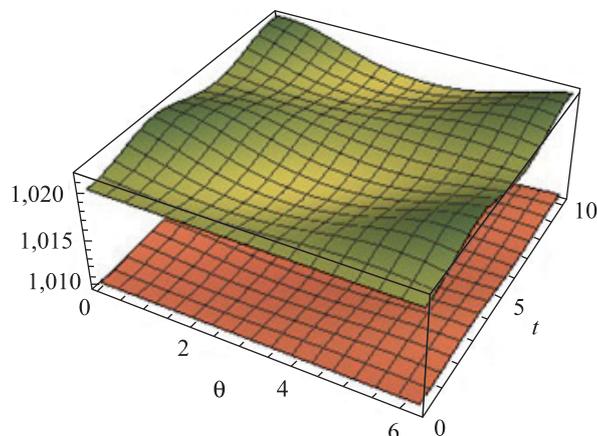


Рис. 4. Пример численного расчета формы раздела двух слоев и свободной поверхности для случая, когда внешний слой меньшей плотности и вязкости

Fig. 4. An example of one of the numerical calculations of the shape of the section of two layers and the free surface when the outer layer is of lower density and viscosity

Результаты, полученные А. Н. Белоглазким (с соавторами), могут использоваться при изучении устойчивости и нелинейных волн, возникающих при движении жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра. Предполагается совместное экспериментальное исследование устойчивости капли на вращающемся диске в развитие работы Е. И. Могилевского (с соавторами).

Принято решение продолжить работу в течение года в форме видеосеминара, а также провести аналогичный семинар в конце 2019 г.

Семинары и описанные исследования проводились при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 18-01-00762, 18-51-00006), Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф18Р-225) и государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Энергетические системы, процессы и технологии 2.48» (№ 20161423).

П. Н. Конон²², Е. И. Могилевский²³

²² Павел Николаевич Конон – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры теоретической и прикладной механики механико-математического факультета БГУ.

Pavel N. Konon, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of theoretical and applied mechanics, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University.

kononp@tut.by

²³ Евгений Ильич Могилевский – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры аэромеханики и газовой динамики механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Evgeny I. Mogilevsky, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of aeromechanics and gas dynamics, faculty of mechanics and mathematics, Lomonosov Moscow State University.

mogilevskiy@mech.math.msu.su

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ В БГУ РАБОТ INDICATIVE ABSTRACTS OF THE PAPERS DEPOSITED IN BSU

УДК 517.926.4(075.8)

Кононова О. А. Линейные однородные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и нахождение решения при помощи степенных и обобщенных степенных рядов [Электронный ресурс] : учеб.-метод. разработка / О. А. Кононова [и др.] ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2018. 18 с. Библиогр.: с. 18. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/207921>. Загл. с экрана. Деп. 29.10.2018, № 008329102018.

В работе представлены обзор методов нахождения фундаментальных решений линейных однородных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, а также теоретические сведения для построения таких решений при помощи степенных и обобщенных степенных рядов. Содержится достаточно большое количество примеров с подробным описанием их решения.

УДК 517.272(075.8)

Березкина Л. Л. Экстремумы функций нескольких переменных [Электронный ресурс] : учеб.-метод. разработка для студентов физ. фак. и фак. радиофизики и комп. технологий / Л. Л. Березкина, А. П. Шилин ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2018. 17 с. Библиогр.: с. 16. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/213198>. Загл. с экрана. Деп. 23.01.2019, № 000823012019.

Разработка включает многовариантные задания для студентов физических специальностей по теме «Экстремумы функций нескольких переменных». Предварительно приведены необходимые факты из теории и решения типичных примеров. Сделаны также важные для решения уточнения свойств квадратичных форм при невыполнении условий критерия Сильвестра.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

<i>Берник В. И., Гётце Ф., Калоша Н. И.</i> О количестве алгебраических чисел в коротких интервалах, содержащих рациональные точки	4
<i>Зубей Е. В.</i> О перестановочности силовских подгрупп с коммутантами B -подгрупп	12

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

<i>Калитин Б. С.</i> Устойчивость некоторых дифференциальных уравнений четвертого и пятого порядков	18
<i>Войделевич А. С.</i> О спектрах верхних частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений	28
<i>Гладков А. Л., Кавитова Т. В.</i> Письмо в редакцию	33

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

<i>Ту Т. Т., Харин А. Ю.</i> Последовательный критерий отношения вероятностей для проверки многих простых гипотез о параметрах временных рядов с трендом	35
--	----

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

<i>Босяков С. М., Михасев Г. И.</i> Свободные колебания среднего уха, подвергнутого тотальной тимпанопластике и оссиклопластике, при функциональной подвижности подножной пластины стремени	46
---	----

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

<i>Расолько Г. А.</i> К численному решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов	58
<i>Волков В. М., Проконина Е. В.</i> Итерационная реализация разностных схем в методе фиктивных областей для эллиптических задач со смешанными производными	69

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

<i>Волков А. В., Яцков Н. Н., Гринев В. В.</i> Отбор информативных признаков экзонов генов человека	77
---	----

ЮБИЛЕИ

Петр Петрович Забрейко	90
Валентин Викентьевич Гороховик	93

ВЫДАЮЩИЕСЯ УЧЕНЫЕ

Василий Иванович Ведерников (1919–1991)	96
---	----

ХРОНИКА, ИНФОРМАЦИЯ

<i>Конон П. Н., Могилевский Е. И.</i> Международный семинар по динамике вязких жидкостей....	99
Аннотации депонированных в БГУ работ	105

CONTENTS

MATHEMATICAL LOGIC, ALGEBRA AND NUMBER THEORY

<i>Bernik V. I., Götze F., Kalosha N. I.</i> Counting algebraic numbers in short intervals with rational points.....	4
<i>Zubei E. V.</i> On the permutability of Sylow subgroups with derived subgroups of B -subgroups	12

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

<i>Kalitine B. S.</i> Stability of some differential equations of the fourth-order and fifth-order	18
<i>Vaidzelevich A. S.</i> On spectra of upper Sergeev frequencies of linear differential equations.....	28
<i>Gladkov A. L., Kavıtova T. V.</i> Letter to the editors.....	33

THEORY OF PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

<i>Tu T. T., Kharin A. Yu.</i> Sequential probability ratio test for many simple hypotheses on parameters of time series with trend.....	35
--	----

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

<i>Bosiakov S. M., Mikhasev G. I.</i> Free oscillations of the middle ear after total tympanoplasty and ossiculoplasty with functional mobility of the foot plate of stapes	46
---	----

COMPUTATIONAL MATHEMATICS

<i>Rasolko G. A.</i> To the numerical solution of singular integro-differential Prandtl equation by the method of orthogonal polynomials	58
<i>Volkov V. M., Prakonina A. U.</i> Iterative realization of finite difference schemes in the fictitious domain method for elliptic problems with mixed derivatives	69

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

<i>Volkau A. U., Yatskou M. M., Grinev V. V.</i> Selecting informative features of human gene exons	77
--	----

JUBILEES

Petr Petrovich Zabreiko	90
Valentin Vikent'evich Gorokhovik	93

OUTSTANDING SCIENTISTS

Vasily Ivanovich Vedernikov (1919–1991).....	96
--	----

CHRONICLE, INFORMATION

<i>Konon P. N., Mogilevsky E. I.</i> International seminar on viscous fluid dynamics	99
Indicative abstracts of the papers deposited in BSU.....	105

Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области математики и информатики).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ).

**Журнал Белорусского
государственного университета.
Математика. Информатика.
№ 1. 2019**

Учредитель:
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск.

Почтовый адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск.

Тел. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: jmathinf@bsu.by

URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Журнал Белорусского государственного
университета. Математика. Информатика»
издается с января 1969 г.
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»
(ISSN 1561-834X).

Редактор *Т. Р. Джум*
Технический редактор *В. В. Пижкова*
Корректор *Л. А. Меркуль*

Подписано в печать 20.03.2019.
Тираж 155 экз. Заказ 109.

Республиканское унитарное предприятие
«Информационно-вычислительный центр
Министерства финансов Республики Беларусь».
ЛП № 02330/89 от 03.03.2014.
Ул. Кальварийская, 17, 220004, г. Минск.

© БГУ, 2019

**Journal
of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics.
No. 1. 2019**

Founder:
Belarusian State University

Registered address: 4 Niezaliežnasci Ave.,
Minsk 220030.

Correspondence address: 4 Niezaliežnasci Ave.,
Minsk 220030.

Tel. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: jmathinf@bsu.by

URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Journal of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics»
published since January, 1969.
Until 2017 named «Vestnik BGU.
Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika»
(ISSN 1561-834X).

Editor *T. R. Dzhum*
Technical editor *V. V. Pishkova*
Proofreader *L. A. Merkul'*

Signed print 20.03.2019.
Edition 155 copies. Order number 109.

Republican Unitary Enterprise
«Informatsionno-vychislitel'nyi tsentr
Ministerstva finansov Respubliki Belarus'».
License for publishing No. 02330/89, 3 March, 2014.
17 Kal'varyjskaja Str., Minsk 220004.

© BSU, 2019