БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЖУРНАЛ
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА ИНФОРМАТИКА

JOURNAL
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

MATHEMATICS and INFORMATICS

Издается с января 1969 г.
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)

Выходит три раза в год

2

2019

МИНСК
БГУ

EDITORIAL BOARD

УДК 517.9

РАЦИОНАЛЬНЫЕ МНЕМОФУНКЦИИ НА $\mathbb{R}$

Т. Г. ШАГОВА[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Рассмотрено подпространство распределений, у которых в аналитическом представлении $f = \left(f^{+}, f^{-}\right)$ функции $f^{\pm}$ являются правильными рациональными функциями. Построено вложение этого пространства в подалгебру рациональных мнемофункций на прямой посредством отображения

$$R_a(f) = f_\varepsilon(x) = f^{+}(x + i\varepsilon) - f^{-}(x - i\varepsilon).$$

Приведено полное описание данной подалгебры: выделены ее образующие, сформулировано в явном виде правило умножения распределений в ней. С позиции рациональных мнемофункций проанализированы известные случаи, когда произведение распределений является не мнемофункцией, как в общем случае, а распределением. Сформулированы условия, при которых произведение произвольных рациональных распределений ассоциировано с распределением.

Ключевые слова: мнемофункция; аналитическое представление распределения; алгебра рациональных мнемофункций.

Образец цитирования:
Шагова ТГ. Рациональные мнемофункции на $\mathbb{R}$. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;2:6–17.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-6-17

For citation:
Shahava TR. Rational mnemofunctions on $\mathbb{R}$. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019; 2:6–17. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-6-17

Автор:
Татьяна Григорьевна Шагова – аспирантка кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор А. Б. Антоневич.

Author:
Tatsiana R. Shahava, postgraduate student at the department of functional analysis and analytical economics, faculty of mechanics and mathematics.
tanya.shagova@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-2634-4699

RATIONAL MNEMOFUNCTIONS ON $\mathbb{R}$

T. R. SHAHAVA[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

The subspace of rational distributions was considered it this paper. Distribution is called rational if it has analytical representation $f = \left(f^{+}, f^{-}\right)$ where functions $f^{\pm}$ are proper rational functions. The embedding of the rational distributions subspace into the rational mnemofunctions algebra on $\mathbb{R}$ was built by the mean of mapping

$$R_a(f) = f_\varepsilon(x) = f^{+}(x + i\varepsilon) - f^{-}(x - i\varepsilon).$$

A complete description of this algebra was given. Its generators were singled out; the multiplication rule of distributions in this algebra was formulated explicitly. Known cases when product of distributions is a distribution were analyzed by the terms of rational mnemofunctions theory. The conditions under which the product of arbitrary rational distributions is associated with a distribution were formulated.

Keywords: mnemofunction; analytical representation of distribution; algebra of rational mnemofunctions.

Введение

Еще в 1954 г. Л. Шварцем было показано, что невозможно корректно определить операцию умножения в пространстве обобщенных функций. Это препятствовало применению классической теории обобщенных функций (распределений) к решению нелинейных задач и уравнений с обобщенными коэффициентами. Основной подход к преодолению указанного препятствия заключается во введении новых объектов, сохраняющих ряд свойств обобщенных функций и образующих алгебру. Такие объекты называют новыми обобщенными функциями, или мнемофункциями. При этом строятся вложения пространства распределений в алгебру новых обобщенных функций, что позволяет определить произведение распределений как элемент построенной алгебры. На основе анализа конструкций, предложенных Ж. Ф. Коломбо [1], Ю. В. Егоровым [2] и др., в работе [3] описан общий метод построения таких алгебр.

В данной статье рассмотрена подалгебра в алгебре мнемофункций на прямой, порожденная правильными рациональными функциями. Для таких мнемофункций получено явное описание правила умножения.

Алгебра мнемофункций на прямой

Пространство основных функций $D(\mathbb{R})$ состоит из бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций с компактным носителем. Пространство обобщенных функций (распределений) $D'(\mathbb{R})$ определяется как сопряженное к пространству $D(\mathbb{R})$, т. е. состоит из линейных непрерывных функционалов на $D(\mathbb{R})$ [4]. Значение функционала f на основной функции φ будем обозначать $\langle f, \varphi \rangle$.

Алгебра мнемофункций на прямой строится следующим образом. Сначала рассматривается множество $\tilde{G}(\mathbb{R})$, состоящее из всех семейств f_ε бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций, зависящих от малого положительного параметра ε, таких, что для каждого f_ε, любого отрезка $[-a, a]$ и всякого $k \in \mathbb{N}$ существуют такие $C > 0$ и $m \in \mathbb{R}$, что имеет место оценка

$$\left| f_\varepsilon^{(k)}(x) \right| \le C\varepsilon^m, \ x \in [-a, a].$$

Далее рассматривается подмножество в $\tilde{G}(\mathbb{R})$, состоящее из семейств, быстро стремящихся к нулю:

$$J(\mathbb{R}) = \left\{ g_\varepsilon : \forall [-a, a], \forall k \in \mathbb{N} \text{ и } m \in \mathbb{R} \ \exists C : \left| g_\varepsilon^{(k)}(x) \right| \le C\varepsilon^m, \ x \in [-a, a] \right\}.$$

$\tilde{G}(\mathbb{R})$ является дифференциальной алгеброй, а $J(\mathbb{R})$ есть идеал в ней, следовательно, определена фактор-алгебра $G(\mathbb{R}) = \tilde{G}(\mathbb{R})/J(\mathbb{R})$, которая называется *алгеброй мнемофункций на прямой*, а ее элементы – классы эквивалентности $[f_\varepsilon]$, содержащие семейства $f_\varepsilon \in \tilde{G}(\mathbb{R})$, – мнемофункциями.

В алгебре $G(\mathbb{R})$ содержится подалгебра мнемочисел $\mathbb{C}^*$, порожденная постоянными, т. е. семействами $w(\varepsilon)$, не зависящими от x.

Связь мнемофункций с распределениями устанавливается с помощью понятия ассоциированности. Говорят, что мнемофункция $[f_\varepsilon]$ *ассоциирована с распределением* $f \in D'(\mathbb{R})$, если семейство f_ε сходится в $D'(\mathbb{R})$ к f, т. е.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \langle f, \varphi\rangle, \ \forall\varphi \in D(\mathbb{R}).$$

В общем случае информацию о мнемофункции дает анализ асимптотического поведения величин $\langle f_\varepsilon, \varphi\rangle$, для которых в пространстве $D'(\mathbb{R})$ часто существует асимптотическое разложение вида

$$\langle f_\varepsilon, \varphi\rangle \approx \sum_{k = k_0}^{\infty} \langle u_k, \varphi\rangle \varepsilon^k, \ u_k \in D'(\mathbb{R}). \tag{1}$$

Равенство (1) означает асимптотическую сходимость, т. е. для любого N и каждого $\varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\sum_{k = k_0}^{N} \langle u_k, \varphi\rangle \varepsilon^k - \langle f_\varepsilon, \varphi\rangle = o(\varepsilon^N).$$

Методом аппроксимации называется линейное отображение $R : D'(\mathbb{R}) \to \tilde{G}(\mathbb{R})$, ставящее в соответствие распределению f семейство гладких функций f_ε, сходящееся к f в $D'(\mathbb{R})$. Метод аппроксимации порождает вложение пространства распределений в алгебру $G(\mathbb{R})$. Тогда произведением произвольных распределений называется мнемофункция

$$f \otimes_R g = R(f)R(g) \in G(\mathbb{R}). \tag{2}$$

Если произведение $R(f)R(g)$ ассоциировано с некоторым распределением h, то полагаем это распределение h произведением fg, порожденным заданным способом аппроксимации R. В общем случае информацию о поведении произведения $f_\varepsilon g_\varepsilon$ дает его асимптотическое разложение (1).

Аналитическое представление рациональных распределений

Рассмотрим часто используемый в анализе способ аппроксимации, основанный на известном аналитическом представлении распределений [5].

Аналитическим представлением распределения f будем называть пару функций (f^+, f^-), где f^+ является аналитической в верхней полуплоскости, а f^- – в нижней полуплоскости, таких, что для любых $\varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\langle f, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f^+(x + i\varepsilon) - f^-(x - i\varepsilon)\right]\varphi(x)\,dx.$$

В силу утверждения п. 1.9 [5] аналитическое представление существует для любого распределения, однако в общем случае представление распределений через аналитические функции не единственно, оно определено с точностью до целой функции. Значит, и произведение аналитических представлений будет определяться неоднозначно. Отметим для сравнения, что при рассмотрении распределений на окружности $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, проведенном в [6], проблемы неединственности произведения аналитических представлений не возникает, так как из условия, что функция $f^-(z)$, аналитическая при $|z| > 1$, стремится к нулю на бесконечности, аналитическое представление определяется однозначно.

В данной работе будем рассматривать подпространство рациональных распределений, для которых аналитическое представление определяется однозначно, что позволит определить произведение рациональных распределений единственным образом.

Распределение f будем называть *рациональным*, если при его аналитическом представлении $f^\pm$ являются правильными рациональными функциями. Нетрудно показать, что всякая пара правильных рациональных функций (f^+, f^-), где f^+ аналитическая в верхней полуплоскости, а f^- – в нижней полуплоскости, есть аналитическое представление некоторого распределения.

Обозначим $D'_R(\mathbb{R})$ подпространство пространства распределений, состоящее из рациональных распределений. На пространстве $D'_R(\mathbb{R})$ определим два оператора:

$$\left(P^+f\right)(z) := f^+(z),$$

$$\left(P^-f\right)(z) := f^-(z).$$

Таким образом, аналитическое представление задает изоморфизм $f \to \left(P^+f,\ P^-f\right) = \left(f^+,\ f^-\right)$ пространства рациональных распределений и пространства кусочно-аналитических функций, т. е. пар правильных рациональных функций $\left(f^+,\ f^-\right)$, аналитических в верхней и нижней полуплоскостях соответственно. Аналитическое представление рационального распределения f порождает его естественную аппроксимацию гладкими функциями

$$R_a(f) := f_\varepsilon(x) = f^+(x+i\varepsilon) - f^-(x-i\varepsilon) = \left(P^+f\right)(x+i\varepsilon) - \left(P^-f\right)(x-i\varepsilon). \tag{3}$$

Формула (3) задает вложение пространства $D'_R(\mathbb{R})$ в алгебру мнемофункций, и произведение распределений определяется с помощью формулы (2), где, в свою очередь, $R_a(f)R_a(g)$ можно представить в виде разности рациональной функции, аналитической в верхней полуплоскости, и рациональной функции, аналитической в нижней полуплоскости, которые зависят от ε, т. е. $R_a(f)R_a(g)$ также имеет аналитическое представление, зависящее от ε. Опишем это произведение более детально.

Рассмотрим рациональные распределения $f = \left(f^+,\ f^-\right)$ и $g = \left(g^+,\ g^-\right)$, тогда согласно (2)

$$f \otimes_{R_a} g = R_a(f)R_a(g) = \left(f^+(x+i\varepsilon) - f^-(x-i\varepsilon)\right)\left(g^+(x+i\varepsilon) - g^-(x-i\varepsilon)\right) =$$
$$= f^+(x+i\varepsilon)g^+(x+i\varepsilon) + f^-(x-i\varepsilon)g^-(x-i\varepsilon) - \left[f^+(x+i\varepsilon)g^-(x-i\varepsilon) + f^-(x-i\varepsilon)g^+(x+i\varepsilon)\right].$$

Здесь

$$f^+(x+i\varepsilon)g^+(x+i\varepsilon) = R_a\left(f^+g^+,\ 0\right),$$

$$f^-(x-i\varepsilon)g^-(x-i\varepsilon) = R_a\left(0,\ -f^-g^-\right),$$

их сумма – аппроксимирующее семейство для рационального распределения с аналитическим представлением $\left(f^+g^+,\ -f^-g^-\right)$, а $\gamma_\varepsilon(x) := -f^+(x+i\varepsilon)g^-(x-i\varepsilon) - f^-(x-i\varepsilon)g^+(x+i\varepsilon)$ есть рациональная функция, аналитическая на прямой, имеющая аналитическое представление $\left(\gamma_\varepsilon^+(z),\ \gamma_\varepsilon^-(z)\right)$, зависящее от ε, которое можно получить, применив операторы $P^\pm$ к функции $\gamma_\varepsilon(x)$.

Таким образом, справедлива следующая теорема, описывающая правило умножения рациональных распределений.

Теорема 1. *Результат умножения рациональных распределений* $f = \left(f^+,\ f^-\right)$ *и* $g = \left(g^+,\ g^-\right)$ *может быть представлен в виде*

$$R_a(f)R_a(g) = h_\varepsilon^+(x+i\varepsilon) - h_\varepsilon^-(x-i\varepsilon),$$

где

$$h_\varepsilon^\pm(z) = \pm f^\pm(z)g^\pm(z) \pm \left(P^\pm\gamma_\varepsilon\right)(z).$$

Следствие 1. *Если* $f = \left(f^+,\ 0\right)$ *и* $g = \left(g^+,\ 0\right)$, *то*

$$\left(f^+,\ 0\right)\left(g^+,\ 0\right) = \left(f^+g^+,\ 0\right). \tag{4}$$

Следствие 2. *Если* $f = \left(0,\ f^-\right)$ *и* $g = \left(0,\ g^-\right)$, *то*

$$\left(0,\ f^-\right)\left(0,\ g^-\right) = \left(0,\ -f^-g^-\right). \tag{5}$$

Основная сложность при описании свойств произведения рациональных распределений сводится к исследованию поведения семейств аналитических функций $\gamma_\varepsilon^+(z) = \left(P^+\gamma_\varepsilon\right)(z)$ и $\gamma_\varepsilon^-(z) = \left(P^-\gamma_\varepsilon\right)(z)$, которое будет проведено ниже.

Алгебра рациональных мнемофункций

Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены с комплексными коэффициентами, есть правильная рациональная функция. Если

$$Q(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(x - z_k\right)^{p_k},$$

то рациональную функцию $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить следующим образом:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}\frac{B_{kj}}{\left(x - z_k\right)^j}.$$

Тогда если аналитическое представление рационального распределения f есть пара $\left(f^+, f^-\right)$, то, исходя из условия рациональности, аналитическая при $\mathrm{Im}z > 0$ функция f^+ имеет вид

$$f^+(z) = \sum_{k=1}^{n^+}\sum_{j=1}^{p_k^+}\frac{B_{kj}^+}{\left(z - z_k\right)^j},\ \text{где } \mathrm{Im}z_k \le 0.$$

Аналогично, поскольку функция f^-, аналитическая при $\mathrm{Im}z < 0$, рациональна:

$$f^-(z) = \sum_{k=1}^{n^-}\sum_{j=1}^{p_k^-}\frac{B_{kj}^-}{\left(z - z_k\right)^j},\ \text{где } \mathrm{Im}z_k \ge 0.$$

Алгеброй рациональных мнемофункций $\Re(\mathbb{R})$ будем называть алгебру над $\mathbb{C}^*$, порожденную элементами $R_a(f)$, где $f \in D_R'(\mathbb{R})$. Опишем правило умножения в этой алгебре.

Для удобства введем следующие обозначения. Рациональное распределение, имеющее аналитическое представление $\left(\frac{1}{(z-\xi)^n}, 0\right)$, $\mathrm{Im}\xi \le 0$, будем обозначать $\frac{1}{(z-\xi)^{n+}}$, а распределение с аналитическим представлением $\left(0, -\frac{1}{(z-\eta)^n}\right)$, $\mathrm{Im}\eta \ge 0$, – через $\frac{1}{(z-\eta)^{n-}}$.

Так как для любого $f \in D_R'(\mathbb{R})$ функции $f^\pm$ представляются в виде суммы элементарных дробей, то задача умножения рациональных распределений сводится к определению произведения распределений вида $\frac{1}{(z-\xi)^{n+}}$ и $\frac{1}{(z-\eta)^{n-}}$. Отметим, что в силу следствий из теоремы 1 произведение распределений с аналитическими представлениями $\left(f^+, 0\right)$ и $\left(g^+, 0\right)$, а также с представлениями $\left(0, f^-\right)$ и $\left(0, g^-\right)$ определено. Следовательно, задача состоит в анализе произведения распределений $f = \left(f^+, 0\right)$ и $g = \left(0, g^-\right)$.

Лемма 1. *Пусть* $\mathrm{Im}\xi \le 0$ *и* $\mathrm{Im}\eta \ge 0$. *Тогда произведение распределений* $\frac{1}{(z-\xi)^+}$ *и* $\frac{1}{(z-\eta)^-}$ *находится по формуле*

$$R_a\left(\frac{1}{z-\xi}, 0\right)R_a\left(0, -\frac{1}{z-\eta}\right) = c(\xi; \eta; \varepsilon)R_a\left(\frac{1}{z-\xi}, 0\right) - c(\xi; \eta; \varepsilon)R_a\left(0, -\frac{1}{z-\eta}\right), \tag{6}$$

где $c(\xi; \eta; \varepsilon) = \frac{1}{\xi - \eta - 2i\varepsilon}$.

Доказательство. Аппроксимирующее семейство, или мнемофункция, для распределения $\frac{1}{(z-\xi)^{+}}$ имеет вид

$$R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{+}}\right)=\frac{1}{x+i\varepsilon-\xi},$$

в то время как аппроксимирующее семейство для $\frac{1}{(z-\eta)^{-}}$

$$R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{-}}\right)=\frac{1}{x-i\varepsilon-\eta}.$$

Тогда произведение мнемофункций

$$R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{+}}\right)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{-}}\right)=\frac{1}{x+i\varepsilon-\xi}\,\frac{1}{x-i\varepsilon-\eta}=\frac{1}{\xi-\eta-2i\varepsilon}\,\frac{1}{x+i\varepsilon-\xi}-$$
$$-\frac{1}{\xi-\eta-2i\varepsilon}\,\frac{1}{x-i\varepsilon-\eta}=\frac{c(\xi;\,\eta;\,\varepsilon)}{x+i\varepsilon-\xi}-\frac{c(\xi;\,\eta;\,\varepsilon)}{x-i\varepsilon-\eta},\tag{7}$$

где

$$c(\xi;\,\eta;\,\varepsilon)=\frac{1}{\xi-\eta-2i\varepsilon}.$$

Таким образом, выделив аппроксимирующие семейства распределений $\frac{1}{(z-\xi)^{+}}$ и $\frac{1}{(z-\eta)^{-}}$ в последней части равенства (7), получаем требуемое.

Замечание. Следует отметить, что на уровне аппроксимирующих семейств применение операторов $P^{\pm}$ к произведению аналитических представлений рациональных распределений свелось к разложению произведения аппроксимирующих семейств на элементарные дроби, что позволило получить явное выражение для этого произведения.

Следующая теорема дает полное описание алгебры рациональных мнемофункций.

Теорема 2. *Алгебра рациональных мнемофункций* $\Re(\mathbb{R})$ *состоит из элементов вида*

$$\sum_{k=1}^{n^{+}}\sum_{j=1}^{p_k^{+}}\frac{A_{kj}^{+}(\varepsilon)}{\left(x+i\varepsilon-\xi_k\right)^{j}}+\sum_{k=1}^{n^{-}}\sum_{j=1}^{p_k^{-}}\frac{B_{kj}^{-}(\varepsilon)}{\left(x-i\varepsilon-\eta_k\right)^{j}},$$

где $\operatorname{Im}\xi_k\le 0$; $\operatorname{Im}\eta_k\ge 0$; $A_{kj}^{+}(\varepsilon)\in\mathbb{C}^{*}$, $B_{kj}^{-}(\varepsilon)\in\mathbb{C}^{*}$.

В этой алгебре элементы $\frac{1}{x+i\varepsilon-\xi}$ *и* $\frac{1}{x-i\varepsilon-\eta}$ *являются образующими, и правило умножения однозначно определяется формулами (4)–(6).*

Доказательство. Пусть рациональное распределение f имеет аналитическое представление $f=\left(f^{+},\ f^{-}\right)$, где

$$f^{+}(z)=\sum_{k=1}^{n^{+}}\sum_{j=1}^{p_k^{+}}\frac{A_{kj}^{+}}{\left(z-z_k\right)^{j}},\ \operatorname{Im}z_k\le 0,\text{ и }f^{-}(z)=\sum_{k=1}^{n^{-}}\sum_{j=1}^{p_k^{-}}\frac{A_{kj}^{-}}{\left(z-z_k\right)^{j}},\ \operatorname{Im}z_k\ge 0.$$

И рациональное распределение $g=\left(g^{+},\ g^{-}\right)$, где

$$g^{+}(z)=\sum_{k=1}^{m^{+}}\sum_{j=1}^{q_k^{+}}\frac{B_{kj}^{+}}{\left(z-\xi_k\right)^{j}},\ \operatorname{Im}\xi_k\le 0,\text{ и }g^{-}(z)=\sum_{k=1}^{m^{-}}\sum_{j=1}^{q_k^{-}}\frac{B_{kj}^{-}}{\left(z-\xi_k\right)^{j}},\ \operatorname{Im}\xi_k\ge 0.$$

Из вида аналитических представлений функций f и g следует, что правило умножения рациональных распределений сводится к определению произведений вида $\frac{1}{(z-\xi)^{n+}}\frac{1}{(z-\eta)^{m+}}$, $\frac{1}{(z-\xi)^{n-}}\frac{1}{(z-\eta)^{m-}}$ и $\frac{1}{(z-\xi)^{n+}}\frac{1}{(z-\eta)^{m-}}$.

Согласно следствию 1 из теоремы 1 произведение распределений $\frac{1}{(z-\xi)^{n+}}$ и $\frac{1}{(z-\eta)^{m+}}$, где $\mathrm{Im}\xi \le 0$, $\mathrm{Im}\eta \le 0$, определено для любых m, n и находится следующим образом:

$$\frac{1}{(z-\xi)^{n+}}\frac{1}{(z-\eta)^{m+}} = \left(\frac{1}{(z-\xi)^{n}(z-\eta)^{m}},\ 0\right).$$

Аналогично для распределений $\frac{1}{(z-\xi)^{n-}}$ и $\frac{1}{(z-\eta)^{m-}}$, где $\mathrm{Im}\xi \ge 0$, $\mathrm{Im}\eta \ge 0$, произведение определено согласно следствию 2 из теоремы 1 и находится по правилу

$$\frac{1}{(z-\xi)^{n-}}\frac{1}{(z-\eta)^{m-}} = \left(0,\ -\frac{1}{(z-\xi)^{n}(z-\eta)^{m}}\right).$$

Покажем, что произведения рациональных распределений с аналитическими представлениями $\left(\frac{1}{(z-\xi)^{n}},0\right)$ и $\left(0,-\frac{1}{(z-\eta)^{m}}\right)$ находятся с помощью равенства (6).

Пусть $m = 1$, $n = 2$:

$$R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{2+}}\right)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{-}}\right) = R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{+}}\right)\left(c(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{+}}\right) - c(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{-}}\right)\right) =$$

$$= c(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{2+}}\right) - c^2(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{+}}\right) + c^2(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{-}}\right).$$

Пусть $m = 2$, $n = 1$:

$$R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{+}}\right)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{2-}}\right) = R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{-}}\right)\left(c(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{+}}\right) - c(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{-}}\right)\right) =$$

$$= c^2(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{+}}\right) - c^2(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{-}}\right) - c(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{2-}}\right).$$

Следовательно, произведение второй и первой степеней находится через произведение первых степеней. Таким же образом, т. е. через соотношение (6), находится произведение вторых степеней распределений.

Пусть $m = 2$, $n = 2$:

$$R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{2+}}\right)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{2-}}\right) = \left(c(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{2+}}\right) - c^2(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{+}}\right) +\right.$$

$$\left. + c^2(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{-}}\right)\right)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{-}}\right) = c^2(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{2+}}\right) -$$

$$- 2c^3(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{+}}\right) + 2c^3(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{-}}\right) + c^2(\xi;\eta;\varepsilon)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^{2-}}\right).$$

Произведения других степеней получаются аналогично с помощью рекуррентных соотношений через произведение первых степеней. Следовательно, выражение (6) задает правило умножения распределений вида $\dfrac{1}{(z-\xi)^{n+}}$ и $\dfrac{1}{(z-\eta)^{m-}}$.

Исходя из вышесказанного, произведение распределений в алгебре $\Re(\mathbb{R})$ определено, и элементы $\dfrac{1}{x+i\varepsilon-\xi}$ и $\dfrac{1}{x-i\varepsilon-\eta}$ являются в ней образующими.

Произведения рациональных распределений, ассоциированные с распределениями

Проведем детальный анализ произведения (6) из леммы 1.

Если $\xi \neq \eta$, то существует конечный предел коэффициента $c(\xi;\ \eta;\ \varepsilon)$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} c(\xi;\ \eta;\ \varepsilon) = \frac{1}{\xi-\eta}.$$

Это значит, что произведение распределений $\dfrac{1}{(z-\xi)^{+}}$ и $\dfrac{1}{(z-\eta)^{-}}$ будет ассоциировано с распределением, имеющим аналитическое представление

$$\left(\frac{1}{\xi-\eta}\frac{1}{z-\xi},\ \frac{1}{\xi-\eta}\frac{1}{z-\eta}\right).$$

Наиболее интересен случай, когда $\xi=\eta$ и $\xi \in \mathbb{R}$, т. е. когда рассматриваемые распределения имеют особенности в одной точке. Тогда произведение (6) не ассоциировано с распределением, так как коэффициент $c(\xi;\ \eta;\ \varepsilon)=c(\varepsilon)=-\dfrac{1}{2i\varepsilon}$ является бесконечно большим при $\varepsilon \to 0$. Однако в алгебре мнемофункций это произведение равно дельта-функции с бесконечно большим коэффициентом, а именно $\dfrac{\pi}{\varepsilon}R_a(\delta_\xi)$, что вытекает из равенства (7) и аналитического представления дельта-функции, сосредоточенной в точке $\xi \in \mathbb{R}$, которое получено из формул Сохоцкого [4]:

$$\delta_\xi = \left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\xi},\ -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\xi}\right).$$

Тогда мнемофункция, ассоциированная с δ_ξ, есть

$$R_a(\delta_\xi) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i\varepsilon-\xi}-\frac{1}{x-i\varepsilon-\xi}\right),$$

и

$$R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{+}}\right)R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^{-}}\right) = \frac{\pi}{\varepsilon}\left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{x+i\varepsilon-\xi}+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{x-i\varepsilon-\xi}\right) = \frac{\pi}{\varepsilon}R_a(\delta_\xi).$$

В общем случае асимптотическое разложение сингулярных распределений содержит бесконечно большие коэффициенты, но рассмотренный пример показывает, что для таких распределений возможны случаи, когда их произведение ассоциировано с распределением.

В книге [7] приведены только три примера, когда произведением распределений с особенностью в одной точке является распределение. Это произведения $\mathbf{P}\left(\dfrac{1}{x}\right)\delta$, $\left(\delta+\dfrac{1}{\pi i}\mathbf{P}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^2$, $\left(\delta-\dfrac{1}{\pi}\mathbf{P}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)\left(\delta+\dfrac{1}{\pi}\mathbf{P}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$, где

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)\,dx}{x}.$$

Рассмотрим эти примеры с позиции рациональных распределений.

Аналитическое представление дельта-функции имеет вид

$$\delta = \left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}, -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z} \right),$$

оно порождает мнемофункцию

$$R_a(\delta) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x + i\varepsilon} - \frac{1}{x - i\varepsilon} \right).$$

Аналитическое представление $\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right)$:

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{2}\frac{1}{z}, -\frac{1}{2}\frac{1}{z} \right),$$

тогда мнемофункция, соответствующая распределению $\mathbf{P}\left(x^{-1}\right)$,

$$R_a\left(\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x + i\varepsilon} + \frac{1}{x - i\varepsilon} \right).$$

Для производных справедливы следующие соотношения:

$$R_a\left(\delta^{(n)}\right) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{2\pi i}\left(\frac{1}{(x + i\varepsilon)^{n+1}} - \frac{1}{(x - i\varepsilon)^{n+1}} \right), \tag{8}$$

$$R_a\left(\mathbf{P}\left(\frac{1}{x^n}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x + i\varepsilon)^{n}} + \frac{1}{(x - i\varepsilon)^{n}} \right). \tag{9}$$

Таким образом, исследование примеров Антосика – Микусинского – Сикорского сводится к определению условия, когда произведение мнемофункций

$$\left(\frac{A}{x + i\varepsilon} + \frac{B}{x - i\varepsilon} \right)\left(\frac{C}{x + i\varepsilon} + \frac{D}{x - i\varepsilon} \right) \tag{10}$$

ассоциировано с распределением.

Лемма 2. *Произведение мнемофункций вида (10) ассоциировано с распределением тогда и только тогда, когда для коэффициентов выполнено условие*

$$AD + BC = 0. \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. После преобразования выражение (10) равносильно следующему:

$$\frac{AC}{(x + i\varepsilon)^2} + \frac{BD}{(x - i\varepsilon)^2} + \frac{AD + BC}{(x + i\varepsilon)(x - i\varepsilon)}.$$

Из соотношений (8) и (9) следует, что сумма первых двух слагаемых ассоциирована с распределением

$$(AC + BD)\mathbf{P}\left(\frac{1}{x^2}\right) + (AC - BD)i\pi\delta'.$$

Последнее слагаемое согласно (7) расписывается в виде

$$(AD + BC)\left(-\frac{1}{2i\varepsilon}\frac{1}{x + i\varepsilon} + \frac{1}{2i\varepsilon}\frac{1}{x - i\varepsilon} \right),$$

следовательно, ему соответствует распределение с бесконечно большим коэффициентом. Таким образом, чтобы (10) было ассоциировано с распределением, необходимо и достаточно, чтобы это слагаемое обращалось в нуль, т. е. выполнялось условие (11). Что и требовалось доказать.

Из леммы следует, что, для того чтобы (10) было ассоциировано с распределением, коэффициенты должны быть связаны соотношением $(A, B) = (tC, -tD)$, т. е. по коэффициентам A, B коэффициенты C, D

определяются однозначно с точностью до сомножителя t. Таким образом, получили, что решением уравнения (11) является трехпараметрическое множество, и, значит, примеры конечных произведений Антосика – Микусинского – Сикорского есть только частные случаи данного утверждения. Покажем это.

Пример 1.

$$\left(\delta + \frac{1}{\pi i}\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\pi i}\frac{1}{x - i\varepsilon}\right)^2 = -\frac{1}{\pi i}\delta' - \frac{1}{\pi^2}\mathbf{P}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Имеем коэффициенты $A = C = 0$, $B = D = \dfrac{1}{\pi i}$, и, следовательно, условие (11) выполнено.

Пример 2.

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right)\delta = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x + i\varepsilon} + \frac{1}{2}\frac{1}{x - i\varepsilon}\right)\left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{x + i\varepsilon} + \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{x - i\varepsilon}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi i}\left(\frac{1}{(x - i\varepsilon)^2} - \frac{1}{(x + i\varepsilon)^2}\right) = -\frac{1}{2}\delta'.$$

В этом примере $A = B = \dfrac{1}{2}$, $C = -D = -\dfrac{1}{2\pi i}$, очевидно, что условие (11) выполнено.

Пример 3.

$$\left(\delta - \frac{1}{\pi}\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(\delta + \frac{1}{\pi}\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{1}{\pi^2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{(x + i\varepsilon)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x - i\varepsilon)^2}\right) = -\frac{1}{\pi^2}\mathbf{P}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Для данного примера $D = -A = \dfrac{1 + i}{2\pi i}$, $C = -B = \dfrac{i - 1}{2\pi i}$.

Лемма 2 позволяет построить много других примеров конечных произведений с особенностью в одной точке. Опишем общий случай, когда произведение рациональных распределений является распределением.

Пусть рациональное распределение f имеет сингулярный носитель $S_f = \{\xi_k : \operatorname{Im}\xi_k = 0\}$, а множество $S_g = \{\eta_k : \operatorname{Im}\eta_k = 0\}$ есть сингулярный носитель рационального распределения g. Напомним, что сингулярным носителем распределения называется дополнение множества точек, в окрестности которых распределение совпадает с некоторой бесконечно дифференцируемой функцией.

Заметим, что если точка ξ принадлежит сингулярному носителю рационального распределения и имеет кратность n, то в аналитическом представлении этого распределения будет выражение $\left(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{A_k^+}{(z - \xi)^k}, \sum_{k=1}^{n}\dfrac{A_k^-}{(z - \xi)^k}\right)$. Так, например, рациональной функции $\dfrac{1}{x}$ соответствует семейство распределений, имеющих аналитические представления $\left(\dfrac{c}{z}, \dfrac{c - 1}{z}\right)$, где c – произвольная постоянная.

Обозначим $S = S_f \cap S_g = \{z_1, \ldots, z_m\}$ пересечение сингулярных носителей распределений f и g. Не ограничивая общности, считаем, что кратность n_k точек z_k, $1 \le k \le m$, одинакова для распределений f и g. Тогда $f = (f^+, f^-)$, где

$$f^+ = \sum_{z_k\in S}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{A_{kj}^+}{(z - z_k)^j} + \sum_{\xi_k\in S_f\setminus S}\sum_{j=1}^{q_k}\frac{C_{kj}^+}{(z - \xi_k)^j} + \sum_{k=1}^{n^+}\sum_{j=1}^{p_k^+}\frac{D_{kj}^+}{(z - \upsilon_k)^j},\ \operatorname{Im}\upsilon_k < 0,$$

$$f^- = \sum_{z_k\in S}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{A_{kj}^-}{(z - z_k)^j} + \sum_{\xi_k\in S_f\setminus S}\sum_{j=1}^{q_k}\frac{C_{kj}^-}{(z - \xi_k)^j} + \sum_{k=1}^{n^-}\sum_{j=1}^{p_k^-}\frac{D_{kj}^-}{(z - \tilde{\upsilon}_k)^j},\ \operatorname{Im}\tilde{\upsilon}_k > 0.$$

И распределение $g = (g^+, g^-)$, где

$$g^+ = \sum_{z_k\in S}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{B_{kj}^+}{(z - z_k)^j} + \sum_{\eta_k\in S_g\setminus S}\sum_{j=1}^{r_k}\frac{\tilde{C}_{kj}^+}{(z - \eta_k)^j} + \sum_{k=1}^{s^+}\sum_{j=1}^{l_k^+}\frac{\tilde{D}_{kj}^+}{(z - \mu_k)^j},\ \operatorname{Im}\mu_k < 0,$$

$$g^- = \sum_{z_k \in S} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{B_{kj}^-}{(z - z_k)^j} + \sum_{\eta_k \in S_g \setminus S} \sum_{j=1}^{r_k} \frac{\tilde{C}_{kj}^-}{(z - \eta_k)^j} + \sum_{k=1}^{s^-} \sum_{j=1}^{l_k^-} \frac{\tilde{D}_{kj}^-}{(z - \tilde{\mu}_k)^j}, \ \operatorname{Im}\tilde{\mu}_k > 0.$$

Для рациональных распределений f и g, описанных выше, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Произведение рациональных мнемофункций* $R_a(f)R_a(g)$ *ассоциировано с некоторым распределением тогда и только тогда, когда для каждого k,* $1 \le k \le m$, *существует число* t_k *такое, что для коэффициентов выполняются следующие соотношения:*

$$B_{kj}^+ = t_k A_{kj}^+, \ B_{kj}^- = -t_k A_{kj}^-. \tag{12}$$

Доказательство. Как было показано ранее, бесконечно большие мнемофункции возникают при произведениях вида $\frac{1}{(z-\xi)^{n+}} \frac{1}{(z-\eta)^{m-}}$, когда $\xi = \eta$. При $\xi \ne \eta$ результатом произведения является распределение. Поэтому бесконечно большие слагаемые в произведение вносят только выражения вида

$$\sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_{kj}^+}{(x + i\varepsilon - z_k)^j} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{B_{kj}^-}{(x - i\varepsilon - z_k)^j} + \sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_{kj}^-}{(x - i\varepsilon - z_k)^j} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{B_{kj}^+}{(x + i\varepsilon - z_k)^j}, \ z_k \in S. \tag{13}$$

Очевидно, что если выражение (13) тождественно равно нулю, то бесконечно больших слагаемых нет. Получим условия, когда выражение (13) обращается в нуль.

Рассмотрим многочлены $p_{n_k}^+(v) = \sum_{j=1}^{n_k} A_{kj}^+ v^j$, $p_{n_k}^-(y) = \sum_{j=1}^{n_k} A_{kj}^- y^j$, $q_{n_k}^+(v) = \sum_{j=1}^{n_k} B_{kj}^+ v^j$, $q_{n_k}^-(y) = \sum_{j=1}^{n_k} B_{kj}^- y^j$. Заметим, что умножение сумм, входящих в выражение (13), происходит по тому же правилу, что и умножение этих многочленов, причем

$$vy = w(v - y), \text{ где } w = c(\varepsilon) = -\frac{1}{2i\varepsilon}. \tag{14}$$

Поэтому обращение в нуль выражения (13) равносильно выполнению равенства

$$p_{n_k}^+(v) q_{n_k}^-(y) + p_{n_k}^-(y) q_{n_k}^+(v) = 0. \tag{15}$$

Разделив переменные в (15), получаем, что

$$\frac{q_{n_k}^+(v)}{p_{n_k}^+(v)} = -\frac{q_{n_k}^-(y)}{p_{n_k}^-(y)} = t_k.$$

Откуда следует, что

$$q_{n_k}^+(v) = t_k p_{n_k}^+(v), \ q_{n_k}^-(y) = -t_k p_{n_k}^-(y).$$

И значит, коэффициенты многочленов $p_{n_k}^+(v)$ и $q_{n_k}^+(v)$, а также $p_{n_k}^-(y)$ и $q_{n_k}^-(y)$ пропорциональны, т. е. выполняются соотношения (12).

Проверим необходимость условия, т. е. покажем, что если хотя бы одно из условий (12) не выполнено, то асимптотическое разложение произведения мнемофункций $R_a(f)R_a(g)$ будет содержать бесконечно большие члены.

Применяя условие (14), преобразуем левую часть равенства (15):

$$p_{n_k}^+(v) q_{n_k}^-(y) + p_{n_k}^-(y) q_{n_k}^+(v) = \sum_{j,\, l=1}^{n_k} \left(A_{kj}^+ B_{kl}^- + A_{kl}^- B_{kj}^+\right) v^j y^l = P_{n_k}(w, v) + Q_{n_k}(w, y), \tag{16}$$

где $P_{n_k}(w, v)$, $Q_{n_k}(w, y)$ есть многочлены от двух переменных. В силу того что все бесконечно большие слагаемые должны уничтожиться, коэффициенты при степенях w в (16) равны нулю. Соберем коэффициенты при w:

$$\sum_{j=1}^{n_k} \left(A_{kj}^+ B_{k1}^- + A_{k1}^- B_{kj}^+\right) v^j - \sum_{j=1}^{n_k} \left(A_{k1}^+ B_{kj}^- + A_{kj}^- B_{k1}^+\right) y^j.$$

Из того, что коэффициент при w равен нулю, следует, что

$$\begin{cases} A_{kj}^{+}B_{k1}^{-} + A_{k1}^{-}B_{kj}^{+} = 0,\ j = \overline{1,\ n_k}, \\ A_{k1}^{+}B_{kj}^{-} + A_{kj}^{-}B_{k1}^{+} = 0,\ j = \overline{2,\ n_k}. \end{cases} \tag{17}$$

При выполнении условия (17) некоторые слагаемые, содержащие w^2, уничтожаются, поэтому соберем оставшиеся коэффициенты при w^2:

$$\sum_{j=2}^{n_k}\left(A_{kj}^{+}B_{k2}^{-} + A_{k2}^{-}B_{kj}^{+}\right)v^j + \sum_{j=2}^{n_k}\left(A_{k2}^{+}B_{kj}^{-} + A_{kj}^{-}B_{k2}^{+}\right)y^j.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} A_{kj}^{+}B_{k2}^{-} + A_{k2}^{-}B_{kj}^{+} = 0,\ j = \overline{2,\ n_k}, \\ A_{k2}^{+}B_{kj}^{-} + A_{kj}^{-}B_{k2}^{+} = 0,\ j = \overline{3,\ n_k}. \end{cases}$$

Последовательно уничтожая члены, содержащие степени w, получим, что при w^n останется только коэффициент

$$\left(A_{kn_k}^{+}B_{kn_k}^{-} + A_{kn_k}^{-}B_{kn_k}^{+}\right)\left(v^n + (-1)^n y^n\right),$$

и, значит,

$$A_{kn_k}^{+}B_{kn_k}^{-} + A_{kn_k}^{-}B_{kn_k}^{+} = 0.$$

Следовательно, для того чтобы мнемофункция $R_a(f)R_a(g)$ была ассоциирована с некоторым распределением, необходимо и достаточно, чтобы выражение (13) тождественно равнялось нулю, а это равносильно выполнению условий (12).

Библиографические ссылки

1. Colombeau JF. *New generalized functions and multiplication of distributions*. Amsterdam: North-Holland; 1984. 374 p.
2. Егоров ЮВ. К теории обобщенных функций. *Успехи математических наук*. 1990;45(5):3–40.
3. Антоневич АБ, Радыно ЯВ. Об общем методе построения алгебр обобщенных функций. *Доклады АН СССР*. 1991; 318(2):267–270.
4. Владимиров ВС. *Обобщенные функции в математической физике*. Москва: Наука; 1979. 320 с.
5. Бремерман Г. *Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье*. Москва: Мир; 1968. 276 с.
6. Антоневич АБ, Шагова ТГ. Вложения распределений в алгебру мнемофункций на окружности. *Проблемы физики, математики и техники*. 2018;4(37):52–61.
7. Антосик П, Микусинский Я, Сикорский Р. *Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход*. Москва: Мир; 1976. 311 с.

References

1. Colombeau JF. *New generalized functions and multiplication of distributions*. Amsterdam: North-Holland; 1984. 374 p.
2. Egorov YuV. [A contribution to the theory of generalized functions]. *Uspekhi matematicheskikh nauk*. 1990;45(5):3–40. Russian.
3. Antonevich AB, Radyno YaV. [A general method for constructing algebras of generalized functions]. *Doklady AN SSSR*. 1991; 318(2):267–270. Russian.
4. Vladimirov VS. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoi fizike* [Generalized functions in mathematical physics]. Moscow: Nauka; 1979. 320 p. Russian.
5. Bremermann H. *Distributions, complex variables, and Fourier transforms.* Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company; 1965. 186 p.
Russian edition: Bremerman G. *Raspredeleniya, kompleksnye peremennye i preobrazovaniya Fur'e*. Moscow: Mir; 1968. 276 p.
6. Antonevich AB, Shahava TR. [The embeddings of distributions into the algebra of mnemofunctions on circle]. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki*. 2018;4(37):52–61. Russian.
7. Antosik P, Mikusinski Ja, Sikorski R. *Theory of distributions. The sequential approach*. Amsterdam: Elsevier; 1973.
Russian edition: Antosik P, Mikusinskii Ya, Sikorskii R. *Teoriya obobshchennykh funktsii. Sekventsial'nyi podkhod.* Moscow: Mir; 1976. 311 p.

Статья поступила в редколлегию 22.01.2019.
Received by editorial board 22.01.2019.

Математическая логика, алгебра и теория чисел

Mathematical logic, algebra and number theory

УДК 512.542

КВАЗИНОРМАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ФИТТИНГА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А. В. МАРЦИНКЕВИЧ[1)]

[1)]*Витебский государственный университет им. П. М. Машерова, пр. Московский, 33, 210038, г. Витебск, Беларусь*

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, Z_n – циклическая группа порядка n и $X \text{ wr } Z_n$ – регулярное сплетение группы X с Z_n. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется квазинормальным в классе конечных групп $\mathfrak{X}$, или $\mathfrak{X}$-квазинормальным, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и из $G \in \mathfrak{F}$, $G \text{ wr } Z_p \in \mathfrak{X}$, где $p \in \mathbb{P}$, следует $G^m \text{ wr } Z_p \in \mathfrak{F}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Если $\mathfrak{X}$ – класс всех разрешимых групп, то $\mathfrak{F}$ – нормальный класс Фиттинга. В работе получено обобщение известной в теории нормальных классов Фиттинга теоремы Блессеноля – Гашюца: доказано, что пересечение любого множества неединичных $\mathfrak{X}$-квазинормальных классов Фиттинга является неединичным $\mathfrak{X}$-квазинормальным классом Фиттинга. В частности, существует наименьший неединичный $\mathfrak{X}$-квазинормальный класс Фиттинга. Также подтвержден обобщенный вариант гипотезы Локетта о структуре класса Фиттинга для $\mathfrak{X}$-квазинормальных классов в случае, когда $\mathfrak{X}$ – локальный класс Фиттинга конечных частично разрешимых групп.

Ключевые слова: класс Фиттинга; квазинормальный класс Фиттинга; гипотеза Локетта; локальный класс Фиттинга.

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф17М-064).

Автор выражает искреннюю благодарность профессору Н. Т. Воробьеву за постановку задачи и обсуждение результатов работы.

Образец цитирования:
Марцинкевич АВ. Квазинормальные классы Фиттинга конечных групп. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;2:18–26.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-18-26

For citation:
Martsinkevich AV. Quasinormal Fitting classes of finite groups. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;2:18–26. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-18-26

Автор:
Анна Веславовна Марцинкевич – аспирантка кафедры алгебры и методики преподавания математики факультета математики и информационных технологий. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Н. Т. Воробьев.

Author:
Anna V. Martsinkevich, postgraduate student at the department of algebra and methods of teaching mathematics, faculty of mathematics and information technology.
anna.martsinkevich@tut.by
https://orcid.org/0000-0002-2930-1056

QUASINORMAL FITTING CLASSES OF FINITE GROUPS

A. V. MARTSINKEVICH [a]

[a]*P. M. Masherov Vitebsk State University, 33 Maskoŭski Avenue, Vitebsk 210038, Belarus*

Let $\mathbb{P}$ be the set of all primes, Z_n a cyclic group of order n and $X\ wr\ Z_n$ the regular wreath product of the group X with Z_n. A Fitting class $\mathfrak{F}$ is said to be $\mathfrak{X}$-quasinormal (or quasinormal in a class of groups $\mathfrak{X}$) if $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, p is a prime, groups $G \in \mathfrak{F}$ and $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{X}$, then there exists a natural number m such that $G^m\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}$. If $\mathfrak{X}$ is the class of all soluble groups, then $\mathfrak{F}$ is normal Fitting class. In this paper we generalize the well-known theorem of Blessenohl and Gaschütz in the theory of normal Fitting classes. It is proved, that the intersection of any set of nontrivial $\mathfrak{X}$-quasinormal Fitting classes is a nontrivial $\mathfrak{X}$-quasinormal Fitting class. In particular, there exists the smallest nontrivial $\mathfrak{X}$-quasinormal Fitting class. We confirm a generalized version of the Lockett conjecture about the structure of a Fitting class for the case of $\mathfrak{X}$-quasinormal classes, where $\mathfrak{X}$ is a local Fitting class of partially soluble groups.

Keywords: Fitting class; quasinormal Fitting class; the Lockett conjecture; local Fitting class.

Acknowledgements. Research is supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (grant No. Ф17М-064).

The author would like to express sincere gratitude to professor N. T. Vorob'ev for the formulation of the problem and discussion of the results of work.

Введение

В работе рассматриваются только конечные группы, если не оговорено обратное. Множество групп $\mathfrak{X}$ называют *классом групп* [1, определение II, (1.1)], если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ и всякой группы $H \cong G$ следует $H \in \mathfrak{X}$.

Классом Фиттинга [1, определение II, (2.8) (a)] называют класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то для любой группы G существует наибольшая из нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп G, ее называют *$\mathfrak{F}$-радикалом* G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

В построении и развитии структурной теории классов Фиттинга многие исследования связаны с применением так называемых нормальных классов Фиттинга (см. главы IX–XI в [1]).

Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется нормальным в $\mathfrak{X}$, или $\mathfrak{X}$-*нормальным* [2, определение 1.1], если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ ее $\mathfrak{F}$-радикал $\mathfrak{F}$-максимален в G. В случае когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп, $\mathfrak{F}$ называют нормальным классом Фиттинга.

Пусть G и H – группы. Тогда символами $G\ wr\ H$ и G^* будем обозначать *регулярное сплетение* G с H и базисную группу $G\ wr\ H$ соответственно. Если $K \leq G$, то K^* – подгруппа базисной группы $G\ wr\ H$, которая изоморфна прямому произведению $|H|$ копий группы K.

Основополагающими результатами в теории разрешимых нормальных классов Фиттинга являются теоремы Блессеноля – Гашюца [3, теорема 6.2] и Блессеноля – Гашюца – Макана [4]. В первой из них было установлено, что *пересечение любого множества неединичных нормальных классов Фиттинга есть неединичный нормальный класс Фиттинга. В частности, в $\mathfrak{S}$ существует наименьший неединичный нормальный класс Фиттинга $\mathfrak{S}_*$.* Во второй получена следующая характеризация свойства нормальности в терминах регулярных сплетений групп: *класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является нормальным тогда и только тогда, когда для любой группы $G \in \mathfrak{S}$ и каждого простого p из условия $G \in \mathfrak{F}$ следует $G^n\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}$ для некоторого натурального n.* Данная характеризация была использована П. Хауком (в универсуме $\mathfrak{S}$) для обобщения понятия нормального класса Фиттинга в смысле следующего определения [5, определение 5.1].

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется квазинормальным в классе групп $\mathfrak{X}$, или $\mathfrak{X}$-*квазинормальным*, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и из $G \in \mathfrak{F}$, $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{X}$, где $p \in \mathbb{P}$, следует $G^m\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

Очевидно, что если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$, то $\mathfrak{F}$ – нормальный класс Фиттинга.

В настоящей работе установлено, что существуют $\mathfrak{X}$-нормальные классы Фиттинга, которые не $\mathfrak{X}$-квазинормальны, и $\mathfrak{X}$-квазинормальные классы Фиттинга, которые не $\mathfrak{X}$-нормальны (см. теорему 1).

В связи с этим возникает следующий вопрос.

Вопрос 1. *Верно ли, что пересечение любого множества неединичных квазинормальных в $\mathfrak{X}$ классов Фиттинга – неединичный квазинормальный в $\mathfrak{X}$ класс Фиттинга?*

Положительный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1. *Пересечение любого множества неединичных $\mathfrak{X}$-квазинормальных классов Фиттинга является неединичным $\mathfrak{X}$-квазинормальным классом Фиттинга. В частности, существует наименьший неединичный $\mathfrak{X}$-квазинормальный класс Фиттинга $\mathfrak{X}_{\oplus}$.*

Заметим, что в случае $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ следствием теоремы 1 является теорема Блессеноля – Гашюца. Кроме того, как показано в [6, пример 0.2], аналог этой теоремы для $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга в общем случае неверен.

Ф. П. Локеттом [7] были определены операторы «*» и «$_*$». Напомним, что оператор «*» сопоставляет каждому непустому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ наименьший из классов Фиттинга $\mathfrak{F}^*$, содержащий $\mathfrak{F}$, такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $\left(G \times H\right)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$, а оператор «$_*$» сопоставляет $\mathfrak{F}$ класс групп $\mathfrak{F}_* = \bigcap \left\{\mathfrak{X} : \mathfrak{X} \text{ – класс Фиттинга}, \mathfrak{F}^* = \mathfrak{X}^*\right\}$. Если класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$, то $\mathfrak{F}$ называют *классом Локетта* [1, определение X, (1.12)].

Произведением классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \left(G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}\right)$. Хорошо известно, что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна [1, IX, (1.12) (a), (c)].

Отображение $f : \mathbb{P} \to \left\{\text{классы Фиттинга}\right\}$ называют *функцией Хартли*, или *H*-функцией [8]. Множество $Supp\left(f\right) = \left\{p \in \mathbb{P} : f\left(p\right) \neq \varnothing\right\}$ – носитель *H*-функции *f*. Пусть $LR\left(f\right)$ – класс Фиттинга такой, что $LR\left(f\right) = \mathfrak{E}_{\pi} \bigcap \left(\bigcap_{p \in \pi} f\left(p\right)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}\right)$, где $p' = \mathbb{P}\backslash\left\{p\right\}$, $\pi = Supp\left(f\right)$ и $\mathfrak{E}_{\pi}$, $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{E}_{p'}$ – классы всех π-, p- и p'-групп соответственно. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *локальным*, если $\mathfrak{F} = LR\left(f\right)$ для некоторой *H*-функции *f*.

Класс групп $\mathfrak{X}$ имеют разрешимым, если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$.

Важное место в описании структуры классов групп занимает следующая проблема Локетта (см. [7, с. 135, проблема]), известная под названием гипотезы Локетта.

Гипотеза Локетта. *Каждый разрешимый класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется равенством $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^* \bigcap \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ – некоторый нормальный класс Фиттинга.*

Гипотеза Локетта была подтверждена Р. А. Брайсом и Дж. Косси [9] для локальных классов Фиттинга, замкнутых относительно подгрупп; Дж. С. Бейдельманом и П. Хауком [10] для локальных классов Фиттинга вида $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{S}_{\pi'}$ ($\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{S}_{\pi}$ – классы всех нильпотентных групп и разрешимых π-групп соответственно); Н. Т. Воробьевым [11] для произвольных локальных классов Фиттинга. Класс Фиттинга, для которого верна гипотеза Локетта, называют $\mathfrak{L}$-классом [12].

Р. А. Брайсом и Дж. Косси было доказано [1, предложение X, (6.1)], что класс Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ является $\mathfrak{L}$-классом в классе групп $\mathfrak{X}$, т. е. $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$-классом, в точности тогда, когда $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \bigcap \mathfrak{X}_*$.

Как следует из теоремы 1, в общем случае $\mathfrak{F}_* \neq \mathfrak{F}_{\oplus}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – классы Фиттинга и $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$. Естественной является постановка следующих взаимосвязанных вопросов.

Вопрос 2. *Каковы классы $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}_{\oplus}$?*

Вопрос 3. *Для каких классов $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ справедлива $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$-гипотеза Локетта?*

Для решения вопросов 2 и 3 мы будем использовать следующие понятия, связанные со свойствами сплетений групп, которые были предложены П. Хауком [5].

Пусть $p \in \mathbb{P}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *классом с ограниченным p-свойством сплетения*, если из условия $1 \neq G \in \mathfrak{F}$ и $O^{p'}\left(G\right) = G$ следует $G^n \ wr \ Z_p \in \mathfrak{F}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем *классом с ограниченным π-свойством сплетения*, если для каждого $p \in \pi$ из условия $1 \neq G \in \mathfrak{F}$ и $O^{p'}\left(G\right) = G$ следует $G^n \ wr \ Z_p \in \mathfrak{F}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. В случае когда $\pi = \mathbb{P}$, $\mathfrak{F}$ называют *классом Фиттинга с ограниченным свойством сплетения* [5, определение 2.7].

Следующая теорема дает ответ на вопросы 2 и 3 для класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ частично разрешимых групп (в частности, разрешимых групп) в случае, когда $\mathfrak{X}^*$ – класс Фиттинга с ограниченным π-свойством сплетения, и подтверждает обобщенный вариант гипотезы Локетта для широкого семейства квазинормальных классов Фиттинга, когда $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – локальные классы Фиттинга. Доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ таковы, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}_{\pi}$ и $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) если $\mathfrak{X}^*$ является классом с ограниченным π-свойством сплетения, то $\mathfrak{X}_{\oplus} = \mathfrak{X}_*$;

(2) если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – локальные классы Фиттинга, то $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$-классом.

Следствие 1. *Если классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ таковы, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$ и $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$, тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) если $\mathfrak{X}^*$ является классом с ограниченным свойством сплетения, то $\mathfrak{X}_\oplus = \mathfrak{X}_*$;

(2) если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – локальные классы Фиттинга, то $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{L}_\mathfrak{X}$-классом.

В случае когда $\pi = \mathbb{P}$ и $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$, получаем основной результат работы [11].

Следствие 2 [11, с. 166, теорема]. *Гипотеза Локетта верна для любого локального разрешимого класса Фиттинга.*

Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют наследственным, если для любой группы $G \in \mathfrak{F}$ и $H \le G$ верно $H \in \mathfrak{F}$.

Каждый класс Фиттинга будем считать 0-кратно локальным. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют n-кратно локальным ($n \ge 1$) [8], если все непустые значения его локальной H-функции являются $(n-1)$-кратно локальными классами Фиттинга. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *тотально локальным* [8], если $\mathfrak{F}$ n-кратно локален для любого натурального n.

Как установлено в [13, теорема 1.1], каждый разрешимый наследственный класс Фиттинга является формацией. По теореме из [14] получаем, что каждый непустой разрешимый наследственный класс Фиттинга является локальным. Кроме того, непустой разрешимый класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является наследственным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ тотально локален [8] или в терминологии Брайса – Косси является примитивной насыщенной формацией. Поэтому из теоремы 2 получаем третье следствие.

Следствие 3 [9, теорема 4.1]. *Каждая разрешимая примитивная насыщенная формация Фиттинга удовлетворяет гипотезе Локетта.*

Предварительные сведения

Мы будем использовать результаты П. Хаука [15] о свойствах сплетений групп в теории классов Фиттинга, которые приведем в качестве лемм.

Лемма 1 [1, теорема X, (2.9)]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и $G \in \mathfrak{F}$; P_0 – неединичная p-группа для некоторого $p \in \mathbb{P}$ и $G \text{ wr } P_0 \in \mathfrak{F}^*$. Тогда для любой p-группы P справедливы следующие утверждения:*

(1) $G^2 \text{ wr } P \in \mathfrak{F}$;

(2) если $p \ne 2$, то $G \text{ wr } P \in \mathfrak{F}$.

Лемма 2. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) [1, лемма X, (2.3)] если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, G – группа, H – нильпотентная группа и $G \text{ wr } H \in \mathfrak{F}$, то $G^n \text{ wr } H \in \mathfrak{F}$ для любого $n \in \mathbb{N}$;

(2) [16, следствие 2.2] пусть G – группа, $N \trianglelefteq G$ и C – добавление к N в G такое, что $C/(C \cap N)$ нильпотентна и $N \cap C$ центрально в N. Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ замкнут относительно подпрямых произведений и $G \in \mathfrak{F}$, то $C \in \mathfrak{F}$.

Лемма 3. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) [1, предложение X, (2.1) (a)] если $\mathfrak{F}$ – класс Локетта, G – группа и $G \notin \mathfrak{F}$, то $(G \text{ wr } H)_\mathfrak{F} = (G_\mathfrak{F})^*$ для любой группы H;

(2) [1, лемма A, (18.2) (d)] если G и H – группы, $W = G \text{ wr } H$ и $K \trianglelefteq G$, то $W/K^* \cong (G/K) \text{ wr } H$;

(3) [1, лемма A, (18.2) (c)] если G и H – группы, $W = G \text{ wr } H$ и $K \le G$, то $K^*H \cong K \text{ wr } H \le W$.

Лемма 4 [1, лемма X, (2.4)]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, G – группа и H – нильпотентная группа. Если существует натуральное число m такое, что $G^m \text{ wr } H \in \mathfrak{F}$, то $G^n \text{ wr } H \in \mathfrak{F}^*$ для любого $n \in \mathbb{N}$.*

Характеристикой класса $\mathfrak{F}$ называют множество $Char(\mathfrak{F}) = \{p \in \mathbb{P} : Z_p \in \mathfrak{F}\}$.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F} = LR(f)$ для некоторой H-функции f с носителем π. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) [17, лемма 2.3] $\pi = Char(\mathfrak{F})$;

(2) [18, теорема 1] $LR(f) = LR(f^*)$, где f^* – такая H-функция, что $f^*(p) = (f(p))^*$ для всех $p \in \pi$;

(3) [11, лемма 5] $\mathfrak{F}$ – класс Локетта.

Лемма 6 [7, лемма 2.1 (c)]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и G – группа. Тогда $\mathrm{Aut}(G_{\mathfrak{F}^*})$ централизует факторгруппу $G_{\mathfrak{F}^*}/G_\mathfrak{F}$.*

Лемма 7 [1, теорема X, (3.7)]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимый класс Фиттинга. Класс $\mathfrak{F}$ является нормальным тогда и только тогда, когда для любой группы $G \in \mathfrak{S}$ и всех $p \in \mathbb{P}$ из условия $G \in \mathfrak{F}$ следует $G^n \text{ wr } Z_p \in \mathfrak{F}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.*

Напомним, что через $\mathrm{Soc}(G)$ обозначают цоколь группы G, т. е. произведение всех минимальных нормальных подгрупп G, $\mathrm{F}(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G, т. е. $\mathfrak{N}$-радикал G.

Лемма 8 [1, теорема IX, (2.8)]. *Пусть $\mathfrak{X} = (G : \mathrm{Soc}(G) \le Z(G))$. Тогда $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга, замкнутый относительно подпрямых произведений.*

Лемма 9 [19, лемма 3]. *Пусть A – разрешимая группа нильпотентной длины t, B – разрешимая группа подстановок нильпотентной длины v и G = A wr B – регулярное подстановочное сплетение A с B. Тогда нильпотентная длина группы G равна t + v – 1 только в случае, когда A имеет нильпотентную цепь длины t, первая секция которой – p-группа, и B имеет нильпотентную цепь длины v, последняя секция которой – p-группа, для* $p \in \mathbb{P}$.

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется гомоморфом, если каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F}$ – гомоморф, тогда $\mathfrak{F}$ называется насыщенным, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует $G \in \mathfrak{F}$, где $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G.

Свойства операторов Локетта «*» и «$_*$» представляет следующая лемма.

Лемма 10. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) [1, теоремы X, (1.15) и (1.8) (a)] $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^* = \left(\mathfrak{F}_*\right)^* = \left(\mathfrak{F}^*\right)^*$;

(2) [1, теорема X, (1.8) (b)] если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, *то* $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{H}^*$;

(3) [11, лемма 3] если $\mathfrak{H}$ *– насыщенный гомоморф, то* $\left(\mathfrak{F}\mathfrak{H}\right)^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{H}$.

Лемма 11 [20, теорема 3]. *Каждый локальный класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *является* $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$*-классом.*

$\mathfrak{X}$-нормальные и $\mathfrak{X}$-квазинормальные классы

Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. Подгруппу V группы G называют $\mathfrak{X}$*-инъектором* G, если $V \cap N$ является $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппой для любой субнормальной подгруппы N группы G.

Теорема 3. *Существуют* $\mathfrak{X}$*-квазинормальные классы Фиттинга, которые не* $\mathfrak{X}$*-нормальны, и* $\mathfrak{X}$*-нормальные классы Фиттинга, которые не* $\mathfrak{X}$*-квазинормальны.*

Доказательство. Покажем вначале, что существуют $\mathfrak{X}$-квазинормальные классы Фиттинга, которые не $\mathfrak{X}$-нормальны.

Пусть $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп и $\mathfrak{X} = \left(G : \mathrm{Soc}(G) \le Z(G)\right)$.

Докажем, что класс $\mathfrak{N}$ является $\mathfrak{X}$-квазинормальным. Для этого достаточно установить, что $\mathfrak{N}$ квазинормален в $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}^2$. Из леммы 8 следует, что $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}^2$ – разрешимый класс Фиттинга. Пусть $G \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}^2$ и $p \in \mathbb{P}$ таковы, что $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}^2$. Докажем, что G – p-группа.

Если $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{N}$, то по лемме 9 G – p-группа. Предположим, что $G\ wr\ Z_p \in \left(\mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}^2\right) \setminus \mathfrak{N}$. Тогда согласно утверждению (1) леммы 3 $\mathrm{F}\left(G\ wr\ Z_p\right) = \mathrm{F}\left(G^*\right) = \mathrm{F}(G)^*$. Ввиду леммы 9 $\left(G\ wr\ Z_p\right)/\mathrm{F}\left(G\ wr\ Z_p\right) \cong$ $\cong G/\mathrm{F}(G)\ wr\ Z_p$ – p-группа.

Пусть $O_{p'}\left(\mathrm{F}\left(G\ wr\ Z_p\right)\right) \ne 1$. Тогда $O_{p'}\left(\mathrm{F}(G)\right) \ne 1$ и для простого $q \ne p$ существует минимальная нормальная q-подгруппа N группы G. Так как $N \le Z(G)$, то $N^*Z_p/\left(G^* \cap N^*Z_p\right) = N^*Z_p/N^* \in \mathfrak{N}$ и $G^* \cap N^*Z_p =$ $= N^* \le Z\left(G^*\right)$. Таким образом, N^*Z_p – дополнение к G^* в группе $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}^2$. Исходя из леммы 8 и утверждения (2) леммы 2, получаем $N^*Z_p \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}^2$. Значит, $N^*Z_p \cong N\ wr\ Z_p$. Так как $q \ne p$, $N^* \le \mathrm{Soc}\left(N^*Z_p\right)$. Отсюда $N^* \le Z\left(N^*Z_p\right)$. Следовательно, $N^*Z_p \cong N\ wr\ Z_p$ – абелева группа, что невозможно ввиду $N \ne 1$. Данное противоречие доказывает, что $\mathrm{F}\left(G\ wr\ Z_p\right)$ – p-группа.

Так как $\left(G\ wr\ Z_p\right)/\mathrm{F}\left(G\ wr\ Z_p\right)$ – p-группа, то G – p-группа и $G \in \mathfrak{N}$. Следовательно, класс $\mathfrak{N}$ квазинормален в $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}^2$, и поэтому $\mathfrak{N}$ – $\mathfrak{X}$-квазинормальный класс Фиттинга.

Докажем, что $\mathfrak{N}$ не является $\mathfrak{X}$-нормальным классом Фиттинга. Так как $GL(2, 3) \in \mathfrak{X}$, то 2-силовская подгруппа $GL(2, 3)$ выступает $\mathfrak{N}$-инъектором $GL(2, 3)$. Но 2-силовская подгруппа группы $GL(2, 3)$ ненормальна в $GL(2, 3)$, и, следовательно, класс $\mathfrak{N}$ не является $\mathfrak{X}$-нормальным.

Докажем существование $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга, которые не $\mathfrak{X}$-квазинормальны. Пусть $\varnothing \ne \pi \subseteq \mathbb{P}$, $\mathfrak{E}_\pi$ – класс всех π-групп и $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}_\pi\mathfrak{E}_{\pi'} \cap \mathfrak{S}^\pi$, где $\mathfrak{S}^\pi$ – класс всех π-разрешимых групп.

Покажем, что $\mathfrak{E}_\pi$ является $\mathfrak{X}$-нормальным классом Фиттинга. Пусть $G \in \mathfrak{X}$ и V – $\mathfrak{E}_\pi$-инъектор группы G. Тогда V – холлова π-подгруппа G. Так как $G/G_{\mathfrak{E}_\pi} \in \mathfrak{E}_{\pi'}$, то по теореме Чунихина [21] $G_\pi \le G_{\mathfrak{E}_\pi} \le V \le G_\pi$ и $V = G_{\mathfrak{E}_\pi}$. Следовательно, $V \trianglelefteq G$ и $\mathfrak{E}_\pi$ является $\mathfrak{X}$-нормальным классом Фиттинга.

Докажем, что класс $\mathfrak{E}_\pi$ не является квазинормальным в $\mathfrak{X}$. Пусть $G \in \mathfrak{E}_\pi$ и $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{X}$ для $p \in \mathbb{P}$. Если $W = G^2\ wr\ Z_p$ и $p \in \pi'$, то $W/\left(G^2\right)^* \cong Z_p \in \mathfrak{E}_{\pi'}$. Так как $\left(G^2\right)^* \in \mathfrak{E}_\pi$, то $W \in \mathfrak{E}_\pi\mathfrak{E}_{\pi'}$. Поскольку $\mathfrak{E}_\pi \subset \mathfrak{E}_\pi\mathfrak{E}_{\pi'}$ и $\pi' \ne \varnothing$, то $W \notin \mathfrak{E}_\pi$. Значит, $\mathfrak{E}_\pi$ не является квазинормальным в $\mathfrak{X}$. Теорема доказана.

Замечание. Методы построения $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга, которые не являются $\mathfrak{X}$-квазинормальными, и $\mathfrak{X}$-квазинормальных классов Фиттинга, которые не являются $\mathfrak{X}$-нормальными, в универсуме $\mathfrak{E}$ всех групп можно описать, используя [22, замечание 3.20]. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга всех групп, неабелева компонента цоколя которых – прямой фактор. Тогда $\mathfrak{F}$ нормален в $\mathfrak{E}$ и не является $\mathfrak{E}$-квазинормальным. С другой стороны, для множества простых π такого, что $|\pi| \geq 2$, класс $\mathfrak{S}_\pi$ – $\mathfrak{E}_\pi$-квазинормальный, но при этом не $\mathfrak{E}_\pi$-нормален.

Обобщение теоремы Блессеноля – Гашюца

Доказательство теоремы 1. Пусть $\{\mathfrak{F}_i\}_{i \in I}$ – семейство неединичных классов Фиттинга таких, что $\mathfrak{F}_i$ квазинормален в $\mathfrak{X}$ для любого $i \in I$, и $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Докажем, что $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$.

Очевидно, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Пусть группа $G \in \mathfrak{F}$ и $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{X}$ для $p \in \mathbb{P}$. Покажем, что существует натуральное число m такое, что $G^m\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}$.

Ввиду выбора группы G имеем $G \in \mathfrak{F}_i$ для всех $i \in I$. Так как $\mathfrak{F}_i$ квазинормален в $\mathfrak{X}$ для любого $i \in I$, то существует натуральное число m такое, что $G^m\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}_i$ для всех $i \in I$. Таким образом, $G^m\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$.

Покажем, что класс $\mathfrak{F} \neq (1)$, где (1) – класс всех единичных групп. Для этого докажем, что $Char(\mathfrak{F}_i) = Char(\mathfrak{X})$ для любого $i \in I$. Предположим, что существует простое $p \in Char(\mathfrak{X}) \backslash Char(\mathfrak{F}_i)$ для $i \in I$. Тогда $1\ wr\ Z_p \in \mathfrak{X} \backslash \mathfrak{F}_i$. Поэтому $\mathfrak{F}_i$ не является $\mathfrak{X}$-квазинормальным для $i \in I$. Полученное противоречие показывает, что $Char(\mathfrak{X}) \subseteq Char(\mathfrak{F}_i)$ для всех $i \in I$. Включение $Char(\mathfrak{F}_i) \subseteq Char(\mathfrak{X})$ очевидно. Следовательно, $Char(\mathfrak{F}_i) = Char(\mathfrak{X})$ для любого $i \in I$.

Так как $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$, то $Char(\mathfrak{F}) = Char(\mathfrak{X}) = Char(\mathfrak{F}_i)$ для любого $i \in I$. По условию $\mathfrak{F}_i \neq (1)$ для всех $i \in I$. Значит, существует простое p такое, что $Z_p \in \mathfrak{F}_i$ для любого $i \in I$. Следовательно, $Z_p \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \neq (1)$. Это доказывает существование наименьшего нетривиального $\mathfrak{X}$-квазинормального класса $\mathfrak{X}_\oplus$. Теорема доказана.

Операторы «$_*$» и «$_\oplus$»

Предварительно установим некоторые общие свойства квазинормальных классов Фиттинга, которые мы будем использовать.

Лемма 12. *Если классы Фиттинга $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ таковы, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_1^* = \mathfrak{F}_2^*$, то $\mathfrak{F}_1$ квазинормален в $\mathfrak{F}_2$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}_1$ и $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}_2$ для $p \in \mathbb{P}$. Докажем, что существует натуральное число m такое, что $G^m\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}_1$. По условию $\mathfrak{F}_1^* = \mathfrak{F}_2^*$. Значит, $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_2^* = \mathfrak{F}_1^*$. Согласно лемме 1 имеем $G^2\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}_1$. Лемма доказана.

Лемма 13. *Отношение квазинормальности транзитивно.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_3$ – классы Фиттинга такие, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_3$. Докажем, что если $\mathfrak{F}_1$ квазинормален в $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_2$ квазинормален в $\mathfrak{F}_3$, то $\mathfrak{F}_1$ квазинормален в $\mathfrak{F}_3$.

Заметим, что ввиду [1, теорема X, (2.12)] определение $\mathfrak{X}$-квазинормального класса Фиттинга равносильно следующему: класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется квазинормальным в классе групп $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и из $G \in \mathfrak{F}$, $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{X}$, где $p \in \mathbb{P}$, следует $G^2\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}_1$ и $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}_3$ для $p \in \mathbb{P}$. Докажем, что $G^2\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}_1$.

Так как $\mathfrak{F}_2$ квазинормален в $\mathfrak{F}_3$, то из $G \in \mathfrak{F}_2$ и $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}_3$ для $p \in \mathbb{P}$ следует $G^2\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}_2$. Ввиду того что $G^2\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}_2$ и $G^* Z_p$ субнормально вложена в $(G^2)^* Z_p = (G^*)^2 Z_p$, получаем $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}_2$. Теперь из квазинормальности $\mathfrak{F}_1$ в $\mathfrak{F}_2$ имеем $G^2\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}_1$. Следовательно, $\mathfrak{F}_1$ квазинормален в $\mathfrak{F}_3$. Лемма доказана.

Лемма 14. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга. Если $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{Y}$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F}$ и $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{Y}$ для $p \in \mathbb{P}$. Докажем, что $G^m\ wr\ Z_p \in \mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. По условию $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$. Значит, из $G \in \mathfrak{F}$ и $G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$ ($p \in \mathbb{P}$) следует $G^m\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}$ для $m \in \mathbb{N}$. Ввиду утверждения (1) леммы 2 $G^m\ wr\ Z_p \in \mathfrak{Y}$. Следовательно, $G^m\ wr\ Z_p \in \mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{Y}$. Лемма доказана.

Лемма 15. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – классы Фиттинга. Если $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}^*$.*

Доказательство. По утверждению (1) леммы 10 имеем $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}^*$ и $\left(\mathfrak{X}^*\right)^* = \mathfrak{X}^*$. Значит, используя лемму 12, получаем, что $\mathfrak{X}$ квазинормален в $\mathfrak{X}^*$. Следовательно, по лемме 13 $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}^*$. Лемма доказана.

Многие свойства оператора Локетта «$_*$» (см. [1, теорема X, (1.15)]) аналогичны свойствам оператора «$_\oplus$».

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F}_\oplus \subseteq \mathfrak{X}_\oplus$;

(2) $\mathfrak{X}_\oplus = \left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_\oplus$;

(3) $\left(\mathfrak{X}_*\right)_\oplus = \left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_*$;

(4) если $\mathfrak{X}_\oplus \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F}_\oplus = \mathfrak{X}_\oplus$.

Доказательство. (1) По определению оператора «$_\oplus$» имеем, что $\mathfrak{X}_\oplus$ квазинормален в $\mathfrak{X}$. Ввиду леммы 14 $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}_\oplus$ квазинормален в $\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}_\oplus$ – наименьший из классов Фиттинга, квазинормальных в $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}_\oplus \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}_\oplus \subseteq \mathfrak{X}_\oplus$. Следовательно, $\mathfrak{F}_\oplus \subseteq \mathfrak{X}_\oplus$. Утверждение (1) доказано.

(2) Так как $\left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_\oplus$ и $\mathfrak{X}_\oplus$ квазинормальны в $\mathfrak{X}_\oplus$ и $\mathfrak{X}$ соответственно, то по лемме 13 $\left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_\oplus$ квазинормален в $\mathfrak{X}$. Поскольку $\mathfrak{X}_\oplus$ – наименьший из классов Фиттинга, квазинормальных в $\mathfrak{X}$, имеем $\mathfrak{X}_\oplus \subseteq \left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_\oplus$. Очевидно, что $\left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_\oplus \subseteq \mathfrak{X}_\oplus$. Итак, $\mathfrak{X}_\oplus = \left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_\oplus$. Утверждение (2) доказано.

(3) По утверждению (1) леммы 10 получаем $\left(\left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_*\right)^* = \left(\mathfrak{X}_\oplus\right)^*$. Применяя лемму 12, имеем, что $\left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_*$ квазинормален в $\mathfrak{X}_\oplus$. Ввиду леммы 13 $\left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_*$ квазинормален в $\mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{X}_\oplus$ – наименьший из классов Фиттинга, квазинормальных в $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{X}_\oplus \subseteq \left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_*$. По утверждению (1) леммы 10 $\left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_* \subseteq \mathfrak{X}_\oplus$. Следовательно, $\left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_* = \mathfrak{X}_\oplus$.

По лемме 12 $\mathfrak{X}_*$ квазинормален в $\mathfrak{X}$. Следовательно, $\mathfrak{X}_\oplus \subseteq \mathfrak{X}_* \subseteq \mathfrak{X}$, и, используя утверждение (1), получаем $\left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_\oplus \subseteq \left(\mathfrak{X}_*\right)_\oplus \subseteq \mathfrak{X}_\oplus$. По утверждению (2) $\mathfrak{X}_\oplus = \left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_\oplus$. Таким образом, $\mathfrak{X}_\oplus = \left(\mathfrak{X}_*\right)_\oplus = \left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_*$. Утверждение (3) доказано.

(4) Пусть $\mathfrak{X}_\oplus \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. По утверждению (1) имеем $\mathfrak{X}_\oplus = \left(\mathfrak{X}_\oplus\right)_\oplus \subseteq \mathfrak{F}_\oplus \subseteq \mathfrak{X}_\oplus$. Значит, $\mathfrak{X}_\oplus = \mathfrak{F}_\oplus$. Утверждение (4) доказано. Теорема доказана.

Гипотеза Локетта для квазинормальных классов

Доказательство теоремы 2. (1) Пусть $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$. Предположим, что $\mathfrak{X}^* \neq \mathfrak{F}^*$ и G – группа минимального порядка из класса $\mathfrak{X}^* \setminus \mathfrak{F}^*$. Так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}_\pi$, то по утверждениям (2) и (3) леммы 10 $\mathfrak{X}^* \subseteq \left(\mathfrak{F}\mathfrak{S}_\pi\right)^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\pi$. Значит, $G/G_{\mathfrak{F}^*} \in \mathfrak{S}_\pi$ и $\left|G/G_{\mathfrak{F}^*}\right| = p$ для некоторого простого $p \in \pi$.

По условию $\mathfrak{X}^*$ – класс с ограниченным π-свойством сплетения. Следовательно, для группы $1 \neq G \in \mathfrak{X}^*$ с $O^{p'}(G) = G$ для любого простого $p \in \pi$ существует натуральное n такое, что $G^n\ wr\ Z_p \in \mathfrak{X}^*$.

Ввиду леммы 6 $G_{\mathfrak{F}^*}/G_{\mathfrak{F}} \leq Z\left(G/G_{\mathfrak{F}}\right)$. Так как $G_{\mathfrak{F}^*}$ – единственная максимальная нормальная подгруппа G, то $G/G_{\mathfrak{F}}$ – циклическая p-группа. Значит, по утверждению (3) леммы 3 $G_{\mathfrak{F}}\ wr\ Z_p \cong \left(G_{\mathfrak{F}}\right)^* Z_p \trianglelefteq\trianglelefteq G^*Z_p \cong G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{X}^*$. Так как $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$, то по лемме 15 $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}^*$. Таким образом, $\left(G_{\mathfrak{F}}\right)^2\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$. Следовательно, исходя из леммы 4, имеем $G_{\mathfrak{F}}\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}^*$. Поскольку согласно утверждению (3) леммы 3 $\left(G_{\mathfrak{F}}\right)^* Z_p \in \mathfrak{F}^*$ и $\left(G_{\mathfrak{F}}\right)^* Z_p \trianglelefteq\trianglelefteq G^*Z_p \cong G\ wr\ Z_p$, $\left(G_{\mathfrak{F}}\right)^* Z_p \leq \left(G\ wr\ Z_p\right)_{\mathfrak{F}^*}$. По условию $G \notin \mathfrak{F}^*$. Следовательно, по утверждению (1) леммы 3 $\left(G\ wr\ Z_p\right)_{\mathfrak{F}^*} = \left(G_{\mathfrak{F}^*}\right)^*$. Получили противоречие.

Значит, $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{X}_* \subseteq \mathfrak{F}$. Так как по лемме 12 $\mathfrak{X}_*$ квазинормален в $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{X}_\oplus = \mathfrak{X}_*$.

Поскольку $\mathfrak{F}$ – произвольный квазинормальный класс Фиттинга в $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{X}^*$, $\mathfrak{X}_\oplus$ содержится в секции Локетта $\mathfrak{X}$. Следовательно, $\mathfrak{X}_\oplus$ содержит наименьший элемент секции Локетта $\mathfrak{X}_*$ и $\mathfrak{X}_\oplus = \mathfrak{X}_*$. Утверждение (1) доказано.

(2) Так как $\mathfrak{F}$ – локальный класс Фиттинга, то $\mathfrak{F} = LR(f)$ для некоторой H-функции f с носителем π. Покажем вначале, что $\mathfrak{F}$ обладает ограниченным π-свойством сплетения.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$ с комонолитом M индекса p $(p \in \pi)$ и $W = G\ wr\ Z_p$. Так как $\mathfrak{F}$ – локальный класс Фиттинга, то $G \in \mathfrak{E}_\pi \cap \left(\bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}\right)$.

Очевидно, что $O^{p'}(G) \neq 1$. Действительно, если $O^{p'}(G) < G$, то $O^{p'}(G) \leq M$ и $|G:M| = p'$. Получили противоречие с выбором G. Следовательно, $O^{p'}(G) = G$ для всех $p \in \pi$. Так как $G \in \mathfrak{E}_\pi$, то по утверждению (1) леммы 5 получаем $W \in \mathfrak{E}_\pi$.

Покажем, что $W \in \bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ для всех $p \in \pi$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G \in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ для любого $p \in \pi$. По утверждению (2) леммы 5 и утверждению (1) леммы 10 получаем $f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'} = f^*(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ и $f^*(p) = \left(f^*(p)\right)^*$ для всех $p \in \pi$. Следовательно, без ограничения общности мы можем предположить, что f – H-функция такая, что $f(p)$ – класс Локетта для всех $p \in \pi$.

Если $G \in f(p)$, то $G \in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. Пусть $G \in f(p)\mathfrak{N}_p \backslash f(p)$. Тогда по утверждению (1) леммы 3 $W_{f(p)} = \left(G_{f(p)}\right)^*$ и $W/W_{f(p)} = W/\left(G_{f(p)}\right)^*$. Следовательно, по утверждению (2) леммы 3 $W/W_{f(p)} \cong$ $\cong \left(G/G_{f(p)}\right) wr\ Z_p$. Значит, $W \in f(p)\mathfrak{N}_p \subseteq f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$.

Если $G \in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'} \backslash f(p)\mathfrak{N}_p$, то аналогичным образом получаем $W/W_{f(p)\mathfrak{N}_p} \cong \left(G/G_{f(p)\mathfrak{N}_p}\right) wr\ Z_p$. Так как $1 \neq O^{p'}(G) = G$, то $W \in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ и $W = G\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}$. Следовательно, по утверждению (1) леммы 2 $G^n\ wr\ Z_p \in \mathfrak{F}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Значит, $\mathfrak{F}$ обладает ограниченным π-свойством сплетения. Исходя из утверждения (3) леммы 5, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{F}^*$ обладает ограниченным π-свойством сплетения. Следовательно, по утверждению (1) теоремы получаем $\mathfrak{F}_\oplus = \mathfrak{F}_*$.

Пусть $\mathfrak{X} = LR(x)$ и $\sigma = Supp(x)$. Так как класс $\mathfrak{X}$ локален и квазинормален в $\mathfrak{X}$, то, рассуждая аналогично, получаем, что $\mathfrak{X}^*$ обладает ограниченным σ-свойством сплетения. Следовательно, по утверждению (1) теоремы имеем $\mathfrak{X}_\oplus = \mathfrak{X}_*$.

Ввиду леммы 11 локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в классе $\mathfrak{X}$, т. е. $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{X}_*$. Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. Doerk K, Hawkes T. *Finite Soluble Groups.* Berlin: Walter de Gruyter; 1992.
2. Laue H. Über nichtauflösbare normale Fittingklassen. *Journal of Algebra.* 1977;45(2):274–283. DOI: 10.1016/0021-8693(77)90327-1.
3. Blessenohl D, Gaschütz W. Über normale Schunck- und Fittingklassen. *Mathematische Zeitschrift.* 1970;118(1):1–8. DOI: 10.1007/BF01109888.
4. Makan AR. Fitting classes with the wreath product property are normal. *Journal of the London Mathematical Society.* 1974;s2-8(2):245–246. DOI: 10.1112/jlms/s2-8.2.245.
5. Hauck P. Zur Theorie der Fittingklassen endlicher auflösbarer Gruppen [dissertation]. Mainz: [s. n.]; 1977.
6. Марцинкевич АВ. О проблеме Дёрка – Хоукса для локально нормальных классов Фиттинга. *Проблемы физики, математики и техники.* 2018;4(37):90–97.
7. Lockett FP. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$. *Mathematische Zeitschrift.* 1974;137(2):131–136. DOI: 10.1007/BF01214854.
8. Воробьев НТ. О предположении Хоукса для радикальных классов. *Сибирский математический журнал.* 1996;37(6):1296–1302.
9. Bryce RA, Cossey J. A problem in the theory of normal Fitting classes. *Mathematische Zeitschrift.* 1975;141(2):99–110. DOI: 10.1007/BF01218821.
10. Beidleman JC, Hauck P. Über Fittingklassen und die Lockett-vermutung. *Mathematische Zeitschrift.* 1979;167(2):161–167. DOI: 10.1007/BF01215119.
11. Воробьев НТ. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта. *Математические заметки.* 1988;43(2):161–168.
12. Zhu L, Yang N, Vorob'ev NT. On Lockett pairs and Lockett conjecture for π-soluble Fitting classes. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society.* 2013;36(3):825–832.
13. Bryce RA, Cossey J. Subgroup closed Fitting classes are formations. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* 1982;91(2):225–258. DOI: 10.1017/S0305004100059272.
14. Воробьев НТ. Локальность разрешимых наследственных классов Фиттинга. *Математические заметки.* 1992;51(3):3–8.
15. Hauck P. Fittingklassen und Kranzprodukte. *Journal of Algebra.* 1979;59(2):313–329. DOI: 10.1016/0021-8693(79)90130-3.
16. Bryce RA, Cossey J. Subdirect product closed Fitting classes. In: Newman MF, editor. Proceedings of the Second International Conference on the Theory of Groups; 1973 August 13–24; Canberra, Australia. [S. l.]: Springer; 1974. p. 158–164.
17. Guo W, Liu X, Li B. On $\mathfrak{F}$-radicals of finite π-soluble groups. *Algebra and Discrete Mathematics.* 2006;3:49–54.
18. Воробьев НТ. О максимальных и минимальных групповых функциях локальных классов Фиттинга. *Вопросы алгебры.* 1992;7:60–69.

19. Frick M, Newman MF. Soluble linear groups. *Bulletin of the Australian Mathematical Society.* 1972;6(1):31–44. DOI: 10.1017/S0004972700044233.
20. Залесская ЕН, Воробьев НН. О решетках частично локальных классов Фиттинга. *Сибирский математический журнал.* 2009;50(6):1319–1327.
21. Чунихин СА. *Подгруппы конечных групп.* Минск: Наука и техника; 1964. 157 с.
22. Pérez-Ramos MD. On *A*-normality, strong normality and $\mathfrak{F}$-dual pronormal subgroups in Fitting classes. *Journal of Group Theory.* 2000;3(2):127–145. DOI: 10.1515/jgth.2000.011.

References

1. Doerk K, Hawkes T. *Finite Soluble Groups.* Berlin: Walter de Gruyter; 1992.
2. Laue H. Über nichtauflösbare normale Fittingklassen. *Journal of Algebra.* 1977;45(2):274–283. DOI: 10.1016/0021-8693(77)90327-1.
3. Blessenohl D, Gaschütz W. Über normale Schunck- und Fittingklassen. *Mathematische Zeitschrift.* 1970;118(1):1–8. DOI: 10.1007/BF01109888.
4. Makan AR. Fitting classes with the wreath product property are normal. *Journal of the London Mathematical Society.* 1974; s2-8(2):245–246. DOI: 10.1112/jlms/s2-8.2.245.
5. Hauck P. Zur Theorie der Fittingklassen endlicher auflösbarer Gruppen [dissertation]. Mainz: [s. n.]; 1977.
6. Martsinkevich AV. [On the problem of Doerk and Hawkes for locally normal Fitting classes]. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki.* 2018;4(37):90–97. Russian.
7. Lockett FP. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$. *Mathematische Zeitschrift.* 1974;137(2):131–136. DOI: 10.1007/BF01214854.
8. Vorob'ev NT. [On Hawkes's conjecture for radical classes]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal.* 1996;37(6):1296–1302. Russian.
9. Bryce RA, Cossey J. A problem in the theory of normal Fitting classes. *Mathematische Zeitschrift.* 1975;141(2):99–110. DOI: 10.1007/BF01218821.
10. Beidleman JC, Hauck P. Über Fittingklassen und die Lockett-vermutung. *Mathematische Zeitschrift.* 1979;167(2):161–167. DOI: 10.1007/BF01215119.
11. Vorob'ev NT. Radical classes of finite groups with the Lockett condition. *Mathematical Notes.* 1988;43(2):161–168. Russian.
12. Zhu L, Yang N, Vorob'ev NT. On Lockett pairs and Lockett conjecture for π-soluble Fitting classes. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society.* 2013;36(3):825–832.
13. Bryce RA, Cossey J. Subgroup closed Fitting classes are formations. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* 1982;91(2):225–258. DOI: 10.1017/S0305004100059272.
14. Vorob'ev NT. [Locality of solvable subgroup-closed Fitting classes]. *Matematicheskie zametki.* 1992;51(3):3–8. Russian.
15. Hauck P. Fittingklassen und Kranzprodukte. *Journal of Algebra.* 1979;59(2):313–329. DOI: 10.1016/0021-8693(79)90130-3.
16. Bryce RA, Cossey J. Subdirect product closed Fitting classes. In: Newman MF, editor. Proceedings of the Second International Conference on the Theory of Groups; 1973 August 13–24; Canberra, Australia. [S. l.]: Springer; 1974. p. 158–164.
17. Guo W, Liu X, Li B. On $\mathfrak{F}$-radicals of finite π-soluble groups. *Algebra and Discrete Mathematics.* 2006;3:49–54.
18. Vorob'ev NT. [On maximal and minimal group functions of local Fitting classes]. *Voprosy algebry.* 1992;7:60–69. Russian.
19. Frick M, Newman MF. Soluble linear groups. *Bulletin of the Australian Mathematical Society.* 1972;6(1):31–44. DOI: 10.1017/S0004972700044233.
20. Zalesskaya EN, Vorob'ev NN. [Lattices of partially local Fitting classes]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal.* 2009;50(6):1319–1327. Russian.
21. Chunikhin SA. *Podgruppy konechnykh grupp* [Subgroups of finite groups]. Minsk: Nauka i tekhnika; 1964. 157 p. Russian.
22. Pérez-Ramos MD. On *A*-normality, strong normality and $\mathfrak{F}$-dual pronormal subgroups in Fitting classes. *Journal of Group Theory.* 2000;3(2):127–145. DOI: 10.1515/jgth.2000.011.

Статья поступила в редколлегию 21.02.2019.
Received by editorial board 21.02.2019.

УДК 519.4

ПОСТРОЕНИЕ *D*-ОПТИМАЛЬНЫХ ПЛАНОВ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ С НЕРАВНОТОЧНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

В. П. КИРЛИЦА[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Исследуется проблема построения *D*-оптимальных планов экспериментов для линейной множественной регрессии в случае, когда дисперсия ошибок наблюдений зависит от точки, в которой проводится наблюдение. Определен класс функций, описывающих изменение дисперсии неравноточных наблюдений, для которых можно построить непрерывные *D*-оптимальные планы экспериментов. Для линейной множественной регрессии с тремя факторами построены пять типов непрерывных *D*-оптимальных планов экспериментов с неравноточными наблюдениями. Для каждого из этих типов выделен свой собственный класс функций, описывающих изменение дисперсии наблюдений.

Ключевые слова: точные *D*-оптимальные планы экспериментов; линейная множественная регрессия; равноточные наблюдения; неравноточные наблюдения; насыщенные оптимальные планы.

Образец цитирования:
Кирлица ВП. Построение *D*-оптимальных планов экспериментов для линейной множественной регрессии с неравноточными наблюдениями. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;2:27–33.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-27-33

For citation:
Kirlitsa VP. Construction *D*-optimal designs of experiments for linear multiple regression with heteroscedastic observations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;2:27–33. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-27-33

Автор:
Валерий Петрович Кирлица – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики.

Author:
Valery P. Kirlitsa, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of mathematical modeling and data analysis, faculty of applied mathematics and computer science.
kirlitsa@bsu.by

CONSTRUCTION *D*-OPTIMAL DESIGNS OF EXPERIMENTS FOR LINEAR MULTIPLE REGRESSION WITH HETEROSCEDASTIC OBSERVATIONS

V. P. KIRLITSA[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

In article the problem of construction exact *D*-optimal designs of experiments for linear multiple regression in a case when variance of errors of observations depend on a point in which is made is investigated. Class of functions which describe change variance of heteroscedastic observations is defined for which it is possible construct *D*-optimal continues designs of experiments. For linear multiple regression with three factors it is constructed five different types of *D*-optimal continues designs of experiments with heteroscedastic observations. For each of these types the own class of functions describing change variance of observations is defined.

Keywords: exact *D*-optimal designs of experiments; linear multiple regressions; homoscedastic observations; heteroscedastic observations; saturated optimal designs.

Рассмотрим линейную модель множественной регрессии

$$y_j = \theta_1 x_{j1} + \ldots + \theta_m x_{jm} + \varepsilon\left(x^{(j)}\right),\ j = \overline{1, n},\ n \geq m, \tag{1}$$

где y_i – наблюдаемые переменные; $x^{(j)} = \left(x_{j1}, \ldots, x_{jm}\right)$ – m-векторы контролируемых переменных, компоненты которых принадлежат единичному m-мерному кубу: $\left|x_i\right| \leq 1,\ i = \overline{1, m}$; $\theta_1, \ldots, \theta_m$ – неизвестные параметры; $\varepsilon\left(x^{(j)}\right)$ – некоррелированные случайные ошибки наблюдений с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями, зависящими от точки наблюдения $x^{(j)}$:

$$D\left\{\varepsilon\left(x^{(j)}\right)\right\} = d\left(x^{(j)}\right) > 0,\ j = \overline{1, n}, \tag{2}$$

где $d\left(x_1, \ldots, x_m\right)$ – некоторая непрерывная функция. Функция $d\left(x^{(j)}\right)$ в (2) должна быть такой, чтобы в вершинах единичного m-мерного куба неравенство (2) обращалось в равенство.

Для равноточных наблюдений ($d\left(x\right) = d = \text{const}$) проблема построения точных D-оптимальных планов экспериментов для модели наблюдений (1) довольно полно изучена [1]. В [2] построены точные D-оптимальные планы экспериментов для линейной модели парной регрессии с неравноточными наблюдениями. В [3] исследовалась проблема построения таких планов для модели (1) при линейном изменении дисперсии наблюдений:

$$d\left(x^{(j)}\right) = a_0 + a_1 x_{j1} + \ldots + a_m x_{jm} > 0,\ a_0 > 0,\ \left|a_1\right| + \ldots + \left|a_m\right| < a_0. \tag{3}$$

В статье [4] результаты построения точных D-оптимальных планов экспериментов для модели наблюдений (1), полученные в [3], были обобщены для более широкого класса дисперсий неравноточных наблюдений:

$$D\left\{\varepsilon\left(x^{(j)}\right)\right\} = d\left(x^{(j)}\right) \geq a_0 + a_1 x_{j1} + \ldots + a_m x_{jm} > 0 \tag{4}$$

для каждой точки наблюдения $x^{(j)}$. Функция $d\left(x_1, \ldots, x_m\right)$ в (4) должна быть такой, чтобы в вершинах единичного m-мерного куба ($\left|x_j\right| \leq 1,\ j = \overline{1, m}$) неравенство (4) обращалось в равенство. Как отмечалось в [4], класс функций $d\left(x_1, \ldots, x_m\right)$, описываемых неравенством (4), обширен. К нему принадлежат постоянные функции (равноточные наблюдения), функции с линейным изменением вида (3), а также вогнутые функции, удовлетворяющие (4).

В статье [4] построение точных D-оптимальных планов экспериментов для модели наблюдений (1) основывалось на теоремах 1 и 2.

Теорема 1. *Для модели наблюдений* (*1*), *(4) существует точный D-оптимальный план* ε^0 *экспериментов, все точки спектра которого лежат в вершинах единичного m-мерного куба*.

Как следствие, из теоремы 1 вытекает теорема 2.

Теорема 2. *Для модели (1) с некоррелированными ошибками наблюдений, имеющими средние значения 0 и дисперсии*

$$D\left\{\varepsilon\left(x^{(j)}\right)\right\} = d\left(x^{(j)}\right) \geq a_0,\ a_0 > 0,\ j = \overline{1,\, n}, \tag{5}$$

для функций $d(x)$ таких, что неравенство (5) обращается в равенство в вершинах единичного m-мерного куба, точные D-оптимальные планы экспериментов остаются такими же, как и для равноточных наблюдений.

В данной статье получены некоторые обобщения результатов построения D-оптимальных планов экспериментов, предложенных в работах [2–4].

Обозначим через $X = \left(x_{ij}\right),\ i = \overline{1,\, n},\ j = \overline{1,\, m}$, матрицу плана экспериментов, i-я строка этой матрицы – координаты i-й точки $x^{(i)}$, в которой планируется проводить наблюдение.

Для модели (1) с неравноточными наблюдениями непрерывные D-оптимальные планы экспериментов можно построить в случае, когда дисперсия ошибок наблюдений $d\left(x_1,\, \ldots,\, x_m\right)$ удовлетворяет неравенству

$$d\left(x_1,\, \ldots,\, x_m\right) \geq \frac{\sigma^2}{m}\left(x_1^2 + \ldots + x_m^2\right),\ \sigma \neq 0, \tag{6}$$

в котором не все $x_1,\, \ldots,\, x_m$ одновременно обращаются в нуль, и в вершинах единичного m-мерного куба неравенство (6) обращается в равенство. Неравенству (6) удовлетворяют, например, функции: $d(x) = \left(\dfrac{\sigma^2}{m}\right)\left(2m - x_1^2 - \ldots - x_m^2\right)$; $d(x) = \sigma^2$ (равноточные наблюдения) и ряд других.

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Для модели наблюдений (1), (6) матрица плана экспериментов X со взаимно ортогональными столбцами и элементами, равными ± 1, определяет непрерывный D-оптимальный план экспериментов*

$$\varepsilon^0 = \left\{x^{(i)},\ p_i = \frac{1}{n},\ i = \overline{1,\, n}\right\},$$

где p_i – веса наблюдений в точке $x^{(i)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Информационная матрица $M\left(\varepsilon^0\right)$ непрерывного плана ε^0 в силу того, что взаимно ортогональны столбцы матрицы X и все элементы равны ± 1, преобразуется к виду

$$M\left(\varepsilon^0\right) = \frac{1}{n\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{im} \end{pmatrix}\left(x_{i1},\, \ldots,\, x_{im}\right) = \frac{1}{n\sigma^2}X'X = \frac{1}{\sigma^2}E_m, \tag{7}$$

где E_m – единичная матрица размерности m. Оптимальность плана ε^0 будет доказана, если согласно теореме эквивалентности Кифера – Вольфовица [5, с. 109] будет установлено, что

$$\max \frac{1}{d\left(x_1,\, \ldots,\, x_m\right)}\left(x_1,\, \ldots,\, x_m\right)M^{-1}\left(\varepsilon^0\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = m, \tag{8}$$

где максимум вычисляется по всем точкам единичного m-мерного куба. С учетом (6) и (7) имеем

$$\frac{1}{d\left(x_1,\, \ldots,\, x_m\right)}\left(x_1,\, \ldots,\, x_m\right)M^{-1}\left(\varepsilon^0\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \frac{\sigma^2}{d\left(x_1,\, \ldots,\, x_m\right)}\left(x_1^2 + \ldots + x_m^2\right) \leq m. \tag{9}$$

В (9) верхняя граница m достигается в вершинах m-мерного единичного куба, что и обосновывает выполнимость утверждения (8). Теорема 3 доказана.

В качестве примера непрерывного D-оптимального плана ε^0 для модели наблюдений (1), (6) можно привести план, соответствующий полному факторному эксперименту, в котором точки спектра сосредоточены во всех 2^m вершинах единичного m-мерного куба с равными весами $\frac{1}{2^m}$. Недостатком таких планов при их практическом применении является то, что при больших значениях m они содержат чрезмерно большое число точек. Поэтому представляет интерес построение D-оптимальных планов с наименьшим числом точек в своем спектре. Такие планы в теории планирования экспериментов называются насыщенными. Для модели наблюдений (1) насыщенный план должен содержать m точек. Подбор матрицы X плана эксперимента, удовлетворяющей теореме 3, но с меньшим чем 2^m числом точек, тесно связан с построением матриц Адамара. Так, например, для модели наблюдений (1), (6) с четырьмя факторами D-оптимальный план может содержать четыре точки: $x^{(1)} = (1, 1, 1, 1)$, $x^{(2)} = (1, -1, 1, -1)$, $x^{(3)} = (1, 1, -1, -1)$, $x^{(4)} = (1, -1, -1, 1)$, а не 16 точек.

Для частного случая модели наблюдений (1), (2)

$$y_i = \theta_0 + \theta_1 x_{i1} + \theta_2 x_{i2} + \varepsilon\left(x^{(i)}\right),\ i = \overline{1, n},\ n \geq 3, \tag{10}$$

можно получить дополнительные результаты по построению D-оптимальных планов экспериментов с неравноточными наблюдениями. Модель наблюдений (10) следует из (1), если в ней первую компоненту в векторе переменных положить фиктивной переменной, тождественно равной 1. В модели наблюдений (10) будем считать, что ошибки наблюдений некоррелированные, имеют средние значения, равные 0, и дисперсии $d(x_1, x_2)$, удовлетворяющие неравенству

$$d(x_1, x_2) \geq \frac{\sigma^2}{3}\left(1 + x_1^2 + x_2^2\right),\ \sigma \neq 0, \tag{11}$$

причем в (11) равенство выполняется в вершинах единичного квадрата: $x^{(1)} = (1, 1)$, $x^{(2)} = (-1, 1)$, $x^{(3)} = (-1, -1)$, $x^{(4)} = (1, -1)$.

Как частный случай теоремы 3 получаем следующую теорему.

Теорема 4. *Непрерывный D-оптимальный план экспериментов для модели наблюдений (10), (11) имеет вид*

$$\varepsilon^0 = \begin{Bmatrix} x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(3)}, & x^{(4)} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \end{Bmatrix}, \tag{12}$$

где $\frac{1}{4}$ – веса наблюдений.

Матрица X плана экспериментов (12), строки которой − координаты вершин единичного квадрата, удовлетворяет условиям теоремы 3. Число точек плана (12) равно 4, что в два раза меньше числа точек полного факторного эксперимента.

На основе непрерывного плана (12) можно строить точные D-оптимальные планы для модели наблюдений (10), (11) при фиксированном числе наблюдений, кратном 4: $n = 4s$, $s = 1, 2, \ldots$.

В этом случае в каждой вершине единичного квадрата надо проводить по s наблюдений.

Для модели наблюдений (10) с неравноточными наблюдениями можно сконструировать еще четыре непрерывных D-оптимальных плана экспериментов, точки спектра которых будут лежать в трех вершинах единичного квадрата. Введем обозначения: $d\left(x^{(1)}\right) = d_1$, $d\left(x^{(2)}\right) = d_2$, $d\left(x^{(3)}\right) = d_3$, $d\left(x^{(4)}\right) = d_4$.

Теорема 5. *Для модели наблюдений (10) с некоррелированными ошибками наблюдений, имеющими средние значения* 0 *и дисперсии $d(x_1, x_2)$, непрерывными D-оптимальными планами являются следующие.*

План

$$\varepsilon_1^0 = \begin{Bmatrix} x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(3)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix} \tag{13}$$

с дисперсиями наблюдений

$$d(x_1, x_2) \geq \frac{1}{4}\left(d_1 + d_3 + 2d_1x_1 - 2d_3x_2 - 2d_2x_1x_2 + (d_1 + d_2)x_1^2 + (d_2 + d_3)x_2^2\right). \tag{14}$$

План

$$\varepsilon_2^0 = \begin{Bmatrix} x^{(2)}, & x^{(3)}, & x^{(4)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix} \tag{15}$$

с дисперсиями наблюдений

$$d(x_1, x_2) \geq \frac{1}{4}\left(d_2 + d_4 + 2d_4x_1 + 2d_2x_2 + 2d_3x_1x_2 + (d_3 + d_4)x_1^2 + (d_2 + d_3)x_2^2\right). \tag{16}$$

План

$$\varepsilon_3^0 = \begin{Bmatrix} x^{(1)}, & x^{(3)}, & x^{(4)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix} \tag{17}$$

с дисперсиями наблюдений

$$d(x_1, x_2) \geq \frac{1}{4}\left(d_1 + d_3 - 2d_3x_1 + 2d_1x_2 - 2d_4x_1x_2 + (d_3 + d_4)x_1^2 + (d_1 + d_4)x_2^2\right). \tag{18}$$

План

$$\varepsilon_4^0 = \begin{Bmatrix} x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(4)} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix} \tag{19}$$

с дисперсиями наблюдений

$$d(x_1, x_2) \geq \frac{1}{4}\left(d_2 + d_4 - 2d_2x_1 - 2d_4x_2 + 2d_1x_1x_2 + (d_1 + d_2)x_1^2 + (d_1 + d_4)x_2^2\right). \tag{20}$$

Доказательство. Опишем вначале процесс построения непрерывного D-оптимального плана ε_1^0 для модели неравноточных наблюдений (10) с точками спектра $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ и дисперсиями наблюдений в этих точках d_1, d_2, d_3. Для оптимального плана ε_1^0 по теореме эквивалентности Кифера – Вольфовица [5] выполняется неравенство

$$\frac{1}{d(x_1, x_2)}(1, x_1, x_2)M^{-1}\left(\varepsilon_1^0\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq 3, \ |x_1| \leq 1, \ |x_2| \leq 1, \tag{21}$$

где $d(x_1, x_2)$ – непрерывная функция, определяющая дисперсию ошибки наблюдения в точке (x_1, x_2); $M\left(\varepsilon_1^0\right)$ – информационная матрица плана экспериментов. В точках спектра плана ε_1^0 неравенство (21), как необходимое условие, обращается в равенство. Исходя из этого, построим класс функций $d(x_1, x_2)$, определяющих поведение дисперсии ошибок наблюдений для плана ε_1^0. Информационная матрица плана ε_1^0 равна

$$M\left(\varepsilon_1^0\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{d_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1, 1, 1) + \frac{1}{d_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}(1, -1, 1) + \frac{1}{d_3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}(1, -1, -1)\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & e \\ c & e & a \end{pmatrix},$$

где

$$a = d_1^{-1} + d_2^{-1} + d_3^{-1};\ b = d_1^{-1} - d_2^{-1} - d_3^{-1};\ c = d_1^{-1} + d_2^{-1} - d_3^{-1};\ e = d_1^{-1} - d_2^{-1} + d_3^{-1}. \tag{22}$$

Матрица, обратная к матрице $M\left(\varepsilon_1^0\right)$, имеет вид

$$M^{-1}\left(\varepsilon_1^0\right) = \frac{3}{a^3 + 2bce - a\left(b^2 + c^2 + e^2\right)}\begin{pmatrix} a^2 - e^2 & ce - ab & be - ac \\ ce - ab & a^2 - c^2 & bc - ae \\ be - ac & bc - ae & a^2 - b^2 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Разрешая неравенство (21) относительно $d(x_1, x_2)$ с учетом (23), получим класс функций $d(x_1, x_2)$, определяющих изменение дисперсии наблюдений в плане ε_1^0:

$$d(x_1, x_2) \geq f(x_1, x_2), \tag{24}$$

где

$$f(x_1, x_2) = \frac{\left(a^2 - c^2\right)x_1^2 + \left(a^2 - b^2\right)x_2^2 + 2(bc - ae)x_1x_2 + 2(ce - ab)x_1 + 2(be - ac)x_2 + a^2 - e^2}{a^3 + 2bce - a\left(b^2 + c^2 + e^2\right)}.$$

Если теперь в функции $f(x_1, x_2)$ вернуться к исходным обозначениям (22), то неравенство (24) обратится в неравенство (14). Необходимое условие оптимальности плана ε_1^0 также выполняется, так как в точках спектра плана $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ неравенство (14) обращается в равенство.

Аналогичным образом обосновывается оптимальность остальных планов (15), (17), (19). При этом каждый раз будут меняться обозначения (22). А именно для плана (15)

$$a = d_2^{-1} + d_3^{-1} + d_4^{-1},\ b = -d_2^{-1} - d_3^{-1} + d_4^{-1},\ c = d_2^{-1} - d_3^{-1} - d_4^{-1},\ e = -d_2^{-1} + d_3^{-1} - d_4^{-1}.$$

Для плана (17)

$$a = d_1^{-1} + d_3^{-1} + d_4^{-1},\ b = d_1^{-1} - d_3^{-1} + d_4^{-1},\ c = d_1^{-1} - d_3^{-1} - d_4^{-1},\ e = d_1^{-1} + d_3^{-1} - d_4^{-1}.$$

Для плана (19)

$$a = d_1^{-1} + d_2^{-1} + d_4^{-1},\ b = d_1^{-1} - d_2^{-1} + d_4^{-1},\ c = d_1^{-1} + d_2^{-1} - d_4^{-1},\ e = d_1^{-1} - d_2^{-1} - d_4^{-1}.$$

Необходимые условия оптимальности планов (15), (17), (19) выполняются, так как в точках спектров этих планов неравенства (16), (18), (20) обращаются в равенства. Доказательство теоремы 5 завершено.

На основе планов (13), (15), (17), (19) можно строить точные D-оптимальные планы экспериментов для наблюдений, кратных 3 ($n = 3s$). Например, план

$$\varepsilon^0 = \begin{Bmatrix} x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(3)} \\ s, & s, & s \end{Bmatrix}$$

определяет D-оптимальный план экспериментов для модели неравноточных наблюдений (10) с дисперсиями $d(x_1, x_2)$, удовлетворяющими неравенству

$$d(x_1, x_2) \geq 2 + 3x_1 - x_2 - 2x_1x_2 + \frac{5}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 \tag{25}$$

и условиям $d\left(x^{(1)}\right) = 6,\ d\left(x^{(2)}\right) = 4,\ d\left(x^{(3)}\right) = 2$. Неравенство (14) в данном случае обращается в неравенство (25). Примерами функций $d(x_1, x_2)$, удовлетворяющих (25), могут служить: $d(x_1, x_2) = 2{,}5x_1^2 + 1{,}5x_2^2 - 2x_1x_2 + 3x_1 - x_2 + 2$; $d(x_1, x_2) = -0{,}5x_1^2 - 1{,}5x_2^2 - 2x_1x_2 + 3x_1 - x_2 + 8$ и ряд других.

Для модели (10) с неравноточными наблюдениями можно строить насыщенные D-оптимальные планы экспериментов на основе теорем 1 и 2. Так, для модели наблюдений (10), дисперсии которых $d(x_1, x_2)$ определяются неравенством

$$d(x_1, x_2) \geq 4 - x_1 - x_2, \tag{26}$$

в котором равенство достигается во всех вершинах единичного квадрата, насыщенный D-оптимальный план имеет вид

$$\varepsilon^0 = \begin{Bmatrix} x^{(2)}, & x^{(3)}, & x^{(4)} \\ 1, & 1, & 1 \end{Bmatrix}.$$

Функциями, удовлетворяющими (26), могут быть: $d(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 - x_1 - x_2 + 6$; $d(x_1, x_2) = 4 - x_1 - x_2$ и ряд других.

Для модели неравноточных наблюдений (10), кратных трем ($n = 3s$), с дисперсиями $d(x_1, x_2)$, удовлетворяющими неравенству

$$d(x_1, x_2) \geq \sigma^2,\ \ \sigma \neq 0, \tag{27}$$

которое обращается в равенство во всех вершинах единичного квадрата, можно построить четыре насыщенных D-оптимальных плана экспериментов с точками спектра, располагающимися в трех разных вершинах единичного квадрата, по s в каждой вершине. Функциями $d(x_1, x_2)$, удовлетворяющими (27), могут быть: $d(x_1, x_2) = \sigma^2$ (равноточные наблюдения); $d(x_1, x_2) = -kx_1^2 - kx_2^2 + \sigma^2 + 2k,\ k > 0$, и ряд других. Более того, при специальном выборе функции $d(x_1, x_2)$ в неравенстве (27), как показано в [4], можно построить бесконечное, несчетное множество насыщенных планов экспериментов для модели наблюдений (10).

Для модели (10) с наблюдениями, кратными четырем ($n = 4s$), при построении D-оптимальных планов экспериментов можно использовать теоремы 1, 2 и 4. Так, для модели наблюдений (10) с дисперсиями, удовлетворяющими (11), нужно во всех вершинах единичного квадрата проводить по s наблюдений. Примеры таких функций: $d(x_1, x_2) = \sigma^2$; $d(x_1, x_2) = \frac{7 - 2x_1^2 - 2x_2^2}{3}$ и ряд других.

Если в модели (10) проводится четыре наблюдения с дисперсиями $d(x_1, x_2)$, удовлетворяющими неравенству $d(x_1, x_2) \geq 10 + 6x_1 + 3x_2$, которое обращается в равенство во всех вершинах единичного квадрата, то наблюдения надо проводить во всех вершинах единичного квадрата. Примеры таких функций: $d(x_1, x_2) = 10 + 6x_1 + 3x_2$; $d(x_1, x_2) = -x_1^2 - 9x_2^2 + 6x_1 + 3x_2 + 20$ и ряд других.

Для модели (10) с пятью неравноточными наблюдениями D-оптимальные планы можно строить на основе теорем 1 и 2. Пусть, например, дисперсии наблюдений удовлетворяют неравенству $d(x_1, x_2) \geq$ $\geq 4 + x_1 + x_2$, которое обращается в равенство в вершинах единичного квадрата. В этом случае точки спектра оптимального плана должны располагаться во всех вершинах единичного квадрата, причем в вершине $x^{(2)}$ их две. Примеры таких функций: $d(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + x_2 + 6$; $d(x_1, x_2) = 4 + x_1 + x_2$.

Для модели (10) с пятью наблюдениями, дисперсии которых удовлетворяют неравенству $d(x_1, x_2) \geq$ $\geq 4 + x_1$, которое обращается в равенство в вершинах единичного квадрата, можно построить два оптимальных плана экспериментов. Точки спектра этих планов находятся во всех вершинах единичного квадрата. Причем в первом плане вершина $x^{(2)}$, а во втором плане вершина $x^{(3)}$ содержатся дважды. Примеры функций $d(x_1, x_2)$: $d(x_1, x_2) = 4 + x_1$; $d(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_1 + 5$.

Для модели (10) с пятью наблюдениями, дисперсии которых удовлетворяют неравенству $d(x_1, x_2) \geq 4$, которое обращается в равенство в вершинах единичного квадрата, можно построить четыре оптимальных плана экспериментов. Точки спектра этих планов находятся во всех вершинах единичного квадрата, но одна из вершин повторяется дважды. Эти планы совпадают с классическими D-оптимальными планами, которые строятся для равноточных наблюдений. Примеры таких функций: $d(x_1, x_2) = -x_1^2 + 6$; $d(x_1, x_2) = -x_2^2 + 5$; $d(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 6$; $d(x_1, x_2) = 4$.

Библиографические ссылки

1. Moyssiadis C, Kounias S. Exact *D*-optimal *N* observations 2^k designs of resolution III, when $N \equiv 1$ or 2 mod 4. *Mathematische Operationsforschung und Statistik Series Statistics.* 1983;14(3):367–379. DOI: 10.1080/02331888308801711.

2. Кирлица ВП. Точные *D*-оптимальные планы экспериментов для линейной модели парной регрессии. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2016;2:116–122.

3. Kirlitsa VP. Exact *D*-optimal designs of experiments for linear multiple model with linear variance of observations. In: *Computer Data Analysis and Modeling. Robustness and Computer Intensive Methods. Proceedings of the Seventh International Conference; 2004 September 6–10; Minsk, Belarus. Volume 1.* Minsk: Belarusian State University; 2004. p. 165–167.

4. Кирлица ВП. Точные *D*-оптимальные планы экспериментов для линейной множественной регрессии с неравноточными наблюдениями. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2017;3:53–59.

5. Ермаков СМ, Жиглявский АА. *Математическая теория оптимального эксперимента.* Москва: Наука; 1987. 320 с.

References

1. Moyssiadis C, Kounias S. Exact *D*-optimal *N* observations 2^k designs of resolution III, when $N \equiv 1$ or 2 mod 4. *Mathematische Operationsforschung und Statistik Series Statistics.* 1983;14(3):367–379. DOI: 10.1080/02331888308801711.

2. Kirlitsa VP. Exact *D*-optimal designs of experiments for linear pair regression. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2016;2:116–122. Russian.

3. Kirlitsa VP. Exact *D*-optimal designs of experiments for linear multiple model with linear variance of observations. In: *Computer Data Analysis and Modeling. Robustness and Computer Intensive Methods. Proceedings of the Seventh International Conference; 2004 September 6–10; Minsk, Belarus. Volume 1.* Minsk: Belarusian State University; 2004. p. 165–167.

4. Kirlitsa VP. Exact *D*-optimal designs of experiments for lineal multiple regression with heteroscedastic observations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2017;3:53–59. Russian.

5. Ermakov SM, Zhiglyavskii AA. *Matematicheskaya teoriya optimal'nogo eksperimenta* [The mathematical theory of optimal design]. Moscow: Nauka; 1987. 320 p. Russian.

Статья поступила в редколлегию 22.02.2019.
Received by editorial board 22.02.2019.

Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2019;2:34–39
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2019;2:34–39

УДК 519.24

ПОСТРОЕНИЕ ОЦЕНОК СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ ПО ПЕРЕСЕКАЮЩИМСЯ ИНТЕРВАЛАМ НАБЛЮДЕНИЙ

Н. В. СЕМЕНЧУК[1)]

[1)]*Гродненский государственный университет им. Янки Купалы,*
ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Беларусь

Представлен новый метод определения числа интервалов разбиений и количества наблюдений в них при построении оценок спектральных плотностей стационарных случайных процессов по пересекающимся интервалам наблюдений с заданной точностью на основе асимптотических результатов, полученных для скорости сходимости первого момента в предположении, что спектральная плотность удовлетворяет условию Липшица. Изучены два случая: с единичным и произвольным окном просмотра данных. В результате предложен алгоритм построения оценок по пересекающимся интервалам наблюдений с заданной точностью. Данный алгоритм апробирован на модельных примерах для случайных процессов AR(4) посредством использования окна просмотра данных Рисса, Бохнера, Парзена. Предложенный способ будет полезен при анализе данных в виде стационарных случайных процессов с помощью непараметрических методов спектрального анализа в автоматизированном режиме.

Ключевые слова: спектральная плотность; стационарный случайный процесс; смещение оценки; оценки по пересекающимся интервалам наблюдений с заданной точностью.

CONSTRUCTION OF ESTIMATES OF SPECTRAL DENSITIES WITH A GIVEN ACCURACY OVER INTERSECTING INTERVALS OF OBSERVATIONS

N. V. SEMENCHUK[a]

[a]*Yanka Kupala State University of Grodno, 22 Ažeška Street, Hrodna 230023, Belarus*

The article proposes a new method for determining the number of splitting intervals and the number of observations in them when building estimates of the spectral densities of stationary random processes with a given accuracy over intersecting observation intervals based on asymptotic results, obtained for the first moment of convergence rate under the assumption that the spectral density satisfies the Lipschitz condition. Two cases are considered: with a single and arbitrary data taper. As a result, an algorithm is proposed for constructing estimates for intersecting intervals of observations with a given accuracy. This algorithm was tested on model examples for random AR(4) processes, using data taper of Riesz, Bochner, Parzen. The proposed method will be useful to the researcher in analyzing data in the form of stationary random processes using non-parametric methods of spectral analysis in an automated mode.

Keywords: spectral density; stationary random process; estimate bias; estimates for overlapping observation intervals with a given accuracy.

Образец цитирования:
Семенчук НВ. Построение оценок спектральных плотностей с заданной точностью по пересекающимся интервалам наблюдений. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;2:34–39.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-34-39

For citation:
Semenchuk NV. Construction of estimates of spectral densities with a given accuracy over intersecting intervals of observations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;2:34–39. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-34-39

Автор:
Наталья Владимировна Семенчук – доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики факультета математики и информатики.

Author:
Natalia V. Semenchuk, associate professor at the department of fundamental and applied mathematics, faculty of mathematics and informatics.
senata155@gmail.com

Введение

Статья посвящена решению задачи выбора числа разбиений при построении оценок спектральных плотностей по пересекающимся интервалам наблюдений с заданным смещением. Эта задача возникла из необходимости структурно анализировать данные в виде стационарных случайных процессов различной длины в автоматизированном режиме, в частности для спектрального анализа электрокардиограмм, динамики производственных показателей [1] и др. Отметим, что графики оценок спектральной плотности помогают выявить почти периодические компоненты спектра и их месторасположение, а также могут быть полезны при выборе модели. При построении оценок спектральных плотностей обычно применяются периодограммные методы [2], в основе которых лежит квадрат модуля преобразования Фурье конечной реализации исследуемого процесса. Для получения состоятельных оценок спектральных плотностей, как правило, используется метод сглаживания периодограмм спектральными окнами. Обработка случайного процесса с помощью функций окна просмотра данных и спектрального окна [3], как и при построении оценок спектральных плотностей по пересекающимся и непересекающимся интервалам наблюдений, применяется для улучшения статистических свойств оценок его спектральной плотности. При этом основное назначение окна просмотра данных – уменьшить величину смещения, а спектрального окна или процедуры усреднения периодограмм – дисперсию в спектральных оценках [4].

Материалы и методы исследования

Пусть число наблюдений T за стационарным случайным процессом $X(t),\ t \in Z$, представимо в виде [1]

$$T = S(N - M) + M,$$

где S – число пересекающихся интервалов разбиения длиной N; M принимает целочисленные значения, $S \le M < N$ (S не зависит от T).

На l-м интервале построим расширенную периодограмму

$$I_{l(N-M)}^{(h)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi H_2^{(T)}(0)} d_T(\lambda) d_T(-\lambda), \tag{1}$$

где

$$d_T(\lambda) = \sum_{t=0}^{T-1} h_T(t) X(t) e^{-i\lambda t};\ \ H_k^{(T)}(\lambda) = \sum_{t=0}^{T-1} \left(h_T(t)\right)^k e^{-i\lambda t}, \tag{2}$$

$h_T(t) = h\left(\frac{t}{T}\right)$, $h : [0, 1] \to \mathbf{R}$ – функция окна просмотра данных; $l, k, T \in \mathbf{N}$.

В качестве оценки спектральной плотности $f(\lambda),\ \lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$, рассмотрим статистику вида

$$\hat{f}_T(\lambda) = \frac{1}{S} \sum_{l=1}^{S} I_{l(N-M)}^{(h)}(\lambda), \tag{3}$$

построенную путем усреднения расширенных периодограмм по S пересекающимся интервалам наблюдений.

Исследуем скорость сходимости смещения оценки спектральной плотности, построенную по пересекающимся интервалам наблюдений.

Лемма 1 [3]. *Для любого действительного* $\alpha \in (0, 1]$, $T = 1, 2, \ldots$ *справедливо неравенство*

$$\int_{\Pi} |x|^{\alpha} \Phi_T(x)\, dx \le K(\alpha, T),$$

где $\Phi_T(x)$ *– ядро Фейера, задаваемое равенством*

$$\Phi_T(x) = \frac{1}{2\pi T} \frac{\sin \frac{Tx}{2}}{\sin \frac{x}{2}},\ x \in \Pi; \tag{4}$$

$$K(\alpha, T) = \begin{cases} \dfrac{2^{\alpha}\pi}{T^{\alpha}\left(1-\alpha^2\right)} - \dfrac{\pi}{T(1-\alpha)}, \textit{ если } 0 < \alpha < 1, \\ \dfrac{2\pi\left(\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{\pi T}{2}\right)}{T}, \textit{ если } \alpha = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Лемма 2 [4]. *Пусть окно просмотра данных – функция с вариацией ограниченной постоянной $V > 0$. Тогда для любого действительного $\alpha \in (0, 1]$, $T = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство*

$$\int_{\Pi} |x|^{\alpha} \Phi_2^{(T)}(x)\,dx \le C_1(\lambda)^2 V^2 R(\alpha, T),$$

где $\Phi_2^{(T)}(x)$ – ядро, задаваемое равенством

$$\Phi_2^{(T)}(x) = \frac{\left|H_1^{(T)}(x)\right|\left|H_1^{(T)}(-x)\right|}{2\pi H_2^{(T)}(0)}; \tag{6}$$

$$R(\alpha, T) = \begin{cases} \dfrac{4T^{1-\alpha}}{2\pi H_2^{(T)}(0)\left(1-\alpha^2\right)} - \dfrac{2\pi^{\alpha-1}}{2\pi H_2^{(T)}(0)(1-\alpha)}, \textit{ если } 0 < \alpha < 1, \\ \dfrac{2\ln(\pi T) + 1}{2\pi H_2^{(T)}(0)}, \textit{ если } \alpha = 1; \end{cases} \tag{7}$$

$$C_1(\lambda) = \begin{cases} 1, \textit{ если } |\lambda| \le \dfrac{1}{T}, \\ \pi, \textit{ если } \dfrac{1}{T} < |\lambda| \le \pi, \end{cases} \tag{8}$$

$H_1^{(T)}(x)$, $H_2^{(T)}(0)$ определены формулой (2).

Учитывая выражения для первого момента и доказательство свойства асимптотической несмещенности оценки (3), полученные для единичного окна просмотра данных в [1], в настоящей работе исследуем скорость сходимости смещения оценки (3) для единичного и произвольного окна просмотра данных.

Рассмотрим спектральные плотности $f(\lambda) \in Lip_{\alpha}(L)$, где $Lip_{\alpha}(L)$ – множество функций, удовлетворяющих условию Липшица порядка $\alpha \in (0, 1]$, $0 < L < \infty$.

В случае единичного окна просмотра данных для скорости сходимости смещения оценки (3) имеем следующий результат.

Теорема 1. *Для любого действительного $\alpha \in (0, 1]$, $f(\lambda) \in Lip_{\alpha}(L)$ и $T = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство*

$$\left|M\hat{f}_T(\lambda) - f(\lambda)\right| \le LK(\alpha, N),$$

где $K(\alpha, N)$ определяется соотношением (5).

Доказательство. Из [3] известно, что математическое ожидание статистики, заданной соотношением (3), равно

$$M\hat{f}^{(T)}(\lambda) = \int_{\Pi} f(x+\lambda)\Phi_N(x)\,dx,$$

где $\Phi_N(x)$ определяется формулой (4); $\lambda \in \Pi$. Далее, используя свойства ядра Фейера $\Phi_N(x)$ [1], для смещения оценки (3) имеем

$$\left|M\hat{f}^{(T)}(\lambda) - f(\lambda)\right| = \left|\int_{\Pi} f(x+\lambda)\Phi_N(x)\,dx - f(\lambda)\right| \le \int_{\Pi} \left|f(x+\lambda) - f(\lambda)\right|\Phi_N(x)\,dx.$$

Так как $f(\lambda) \in Lip_\alpha(L)$, $\lambda \in \Pi$, с учетом леммы 1 окончательно получим

$$\left| M\hat{f}^{(T)}(\lambda) - f(\lambda) \right| \leq \int_\Pi |x|^\alpha \Phi_N(x)dx \leq LK(\alpha, N).$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если окно просмотра данных – функция с вариацией ограниченной постоянной* $V > 0$, $f(\lambda) \in Lip_\alpha(L)$, *то для любого действительного* $\alpha \in (0, 1]$, $T = 1, 2, \ldots$ *справедливо неравенство*

$$\left| M\hat{f}_N(\lambda) - f(\lambda) \right| \leq LC_1(\lambda)^2 V^2 R(\alpha, N),$$

где $H_2^{(N)}(0)$, $R(\alpha, N)$, $C_1(\lambda)$ *задаются соотношениями (2), (7), (8) соответственно.*

Доказательство. Из [3] известно, что математическое ожидание статистики, заданной соотношением (3), имеет вид

$$M\hat{f}^{(T)}(\lambda) = \int_\Pi f(x+\lambda)\Phi_2^{(N)}(x)dx,$$

где $\Phi_2^{(N)}(x)$ – ядро, определенное формулой (6); $\lambda \in \Pi$.

Далее, используя свойства ядра $\Phi_2^{(N)}(x)$, с учетом леммы 2 имеем

$$\left| M\hat{f}^{(T)}(\lambda) - f(\lambda) \right| = \left| \int_\Pi f(x+\lambda)\Phi_2^{(N)}(x)dx - f(\lambda) \right| \leq \int_\Pi \left| f(x+\lambda) - f(\lambda) \right| \Phi_2^{(N)}(x)dx.$$

Так как $f(\lambda) \in Lip_\alpha(L)$, $\lambda \in \Pi$, окончательно получим

$$\left| M\hat{f}^{(T)}(\lambda) - f(\lambda) \right| \leq L\int_\Pi |x|^\alpha \Phi_2^{(N)}(x)dx \leq LC_1(\lambda)^2 V^2 R(\alpha, N).$$

Теорема доказана.

Отметим, что для оценки спектральной плотности (3) асимптотическая дисперсия в S раз меньше, чем асимптотическая дисперсия расширенной периодограммы, построенной по T наблюдениям [3].

Замечание. Численные исследования, проведенные в работах [4; 5], показывают, что для различных окон просмотра данных справедлива оценка

$$\int_\Pi |x|^\alpha \Phi_2^{(T)}(x)dx \leq R(\alpha, T),$$

более точная, чем доказанная в лемме 2, что дает возможность строить оценки спектральных плотностей с заданной точностью даже при небольшой длине реализации временного ряда.

Далее в статье будем рассматривать случай $\alpha = 1$ как наиболее часто встречающийся при решении практических задач. Отметим также, что, как правило, вариация для большинства упомянутых окон просмотра данных равна 1; константа Липшица $L = \max\left|f'(x)\right|$ при $\alpha = 1$. Решение задачи оценки производных спектральных плотностей по конечной реализации наблюдений за случайным процессом можно найти в работах В. Г. Алексеева и И. Г. Журбенко [6–8].

Для наглядности приведем график функции (7) с окном просмотра данных Рисса, Бохнера, Парзена (рис. 1). Ряд исследований в [5] показал, что данное окно позволяет строить расширенные периодограммы с наименьшим смещением.

Далее для построения оценок рекомендуется использовать следующий алгоритм (при фиксированном $\varepsilon > 0$ и числе наблюдений T).

Шаг 1. Выбрать окно просмотра данных (согласно исследованиям, приведенным в [5], рекомендуется использовать окно просмотра данных Рисса, Бохнера, Парзена).

Шаг 2. Подобрать число наблюдений N для каждого интервала разбиения так, чтобы $R(1, N) \leq \varepsilon$.

Шаг 3. Выбрать S так, чтобы дисперсия конечной оценки была меньше, чем дисперсия периодограммы, построенной по всему количеству наблюдений T.

Шаг 4. Определить число наблюдений в пересечении интервалов разбиения:

$$M = \frac{S \cdot N - T}{S - 1}.$$

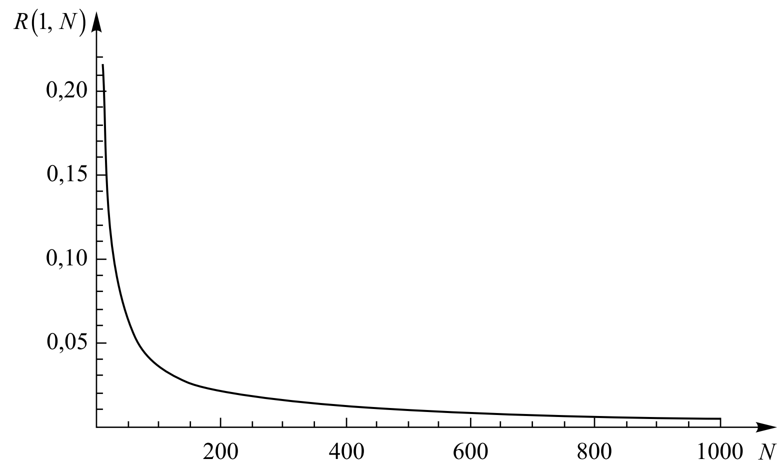

Рис. 1. График функции $R(1, N)$ с окном просмотра данных Рисса, Бохнера, Парзена
Fig. 1. Function graph with a data taper of Riesz, Bochner, Parzen

Шаг 5. На каждом разбиении построить расширенную периодограмму (1).
Шаг 6. Построить оценку спектральной плотности усреднением периодограмм по количеству интервалов по формуле (3).

Результаты и их обсуждение

Экспериментально проиллюстрируем результаты, полученные в теореме 1. Сгенерируем 20 реализаций процесса авторегрессии 4-го порядка с заданными пиками при $a_1 = 0{,}217\,37$; $a_2 = 0{,}817\,14$; $a_3 = 0{,}176\,07$; $a_4 = -0{,}656\,1$ и при $T = 128$ и $T = 1024$. Далее вычислим оценки спектральной плотности (3) при $N = 256$ и $M = 128$ с единичным окном просмотра данных, а также при $N = 32$ и $M = 16$ с окном просмотра данных Рисса, Бохнера, Парзена, используя предложенный алгоритм.

Найдем приближение математического ожидания оценки спектральной плотности методом Монте-Карло, а также вычислим значение верхней границы в неравенствах, полученных в теоремах 1 и 2 для величины смещения. На рис. 2 и 3 представлены результаты теорем 1 и 2 при $\alpha = 1$ с учетом изменения значения константы Липшица для теоретической спектральной плотности смоделированного процесса. На рис. 4 и 5 приведены построенные оценки и теоретическая спектральная плотность.

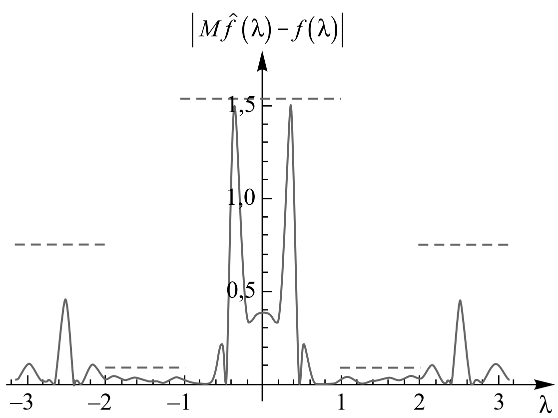

Рис. 2. Иллюстрация результата теоремы 1 при $T = 1024$, $N = 256$
Fig. 2. Illustration of the result of theorem 1 at $T = 1024$, $N = 256$

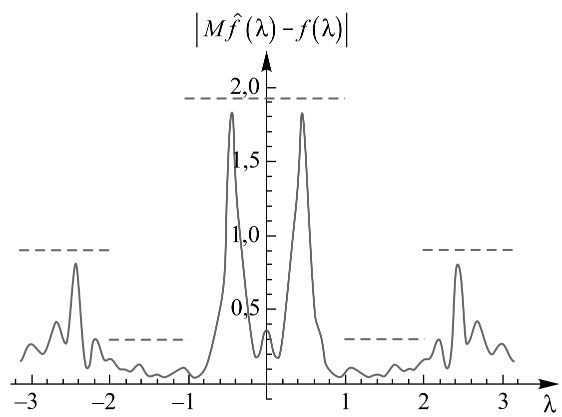

Рис. 3. Иллюстрация результата теоремы 2 при $T = 128$, $N = 32$ с окном просмотра данных Рисса, Бохнера, Парзена
Fig. 3. Illustration of the result of theorem 2 at $T = 128$, $N = 32$ with Riesz, Bochner, Parzen data taper

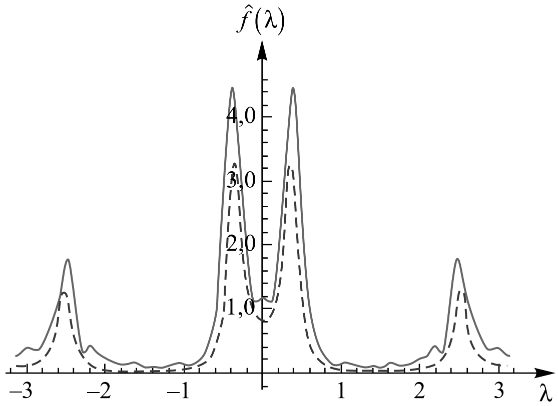

Рис. 4. Теоретическая спектральная плотность и ее оценка (3) с единичным окном просмотра данных ($T = 1024$, $N = 256$)

Fig. 4. Theoretical spectral density and its estimate (3) with a single data taper ($T = 1024$, $N = 256$)

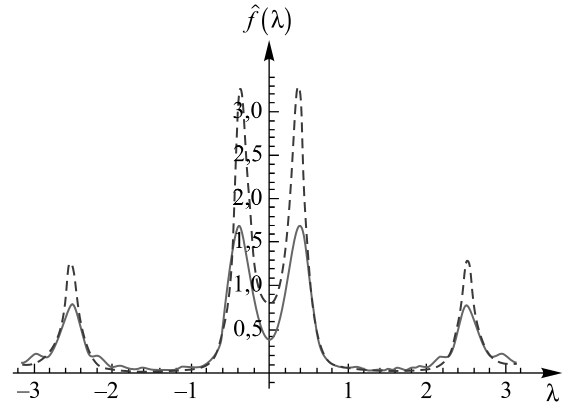

Рис. 5. Теоретическая спектральная плотность и ее оценка (3) с окном просмотра данных Рисса, Бохнера, Парзена ($T = 128$, $N = 16$)

Fig. 5. Theoretical spectral density and its estimate (3) with Riesz, Bochner, Parzen data taper ($T = 128$, $N = 16$)

Результаты, приведенные в настоящей статье, позволяют выбирать параметры оценивания (число интервалов разбиения и количество наблюдений в интервале) при построении оценок спектральных плотностей по пересекающимся интервалам наблюдений, основываясь на скорости сходимости моментов этих оценок.

Библиографические ссылки

1. Сурмач АИ, Семенчук НВ. Методы анализа данных при помощи состоятельных оценок спектральных плотностей. В: *Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения. Сборник научных статей международной конференции, посвященной 80-летию профессора, доктора физико-математических наук Г. А. Медведева; 23–26 февраля 2015 г.; Минск, Беларусь.* Минск: РИВШ; 2015. с. 305–310.
2. Бриллинджер Д. *Временные ряды. Обработка данных и теория.* Москва: Мир; 1980. 536 с.
3. Труш НН. *Асимптотические методы статистического анализа временных рядов.* Минск: БГУ; 1999. 218 с.
4. Семенчук НВ, Труш НН. Сравнительный анализ некоторых периодограммных оценок спектральных плотностей. *Труды Института математики.* 2007;15(2):90–103.
5. Семенчук НВ. О выборе оптимального окна просмотра данных. *Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне.* 2012;2(129):61–66.
6. Журбенко ИГ. *Спектральный анализ временных рядов.* Москва: МГУ; 1982. 168 с.
7. Алексеев ВГ. О вычислении спектров стационарных случайных процессов по выборкам большого объема. *Проблемы передачи информации.* 1980;16(1):42–49.
8. Алексеев ВГ. Об оценках спектральных плотностей некоторых моделей стационарных случайных процессов. *Проблемы передачи информации.* 1985;21(2):42–49.

References

1. Surmach AI, Semenchuk NV. [Methods of data analysis using consistent spectral density estimates]. In: *Teoriya veroyatnostei, sluchainye protsessy, matematicheskaya statistika i prilozheniya. Sbornik nauchnykh statei mezhdunarodnoi konferentsii, posvyashchennoi 80-letiyu professora, doktora fiziko-matematicheskikh nauk G. A. Medvedeva; 23–26 fevralya 2015 g.; Minsk, Belarus'* [Probability theory, random processes, mathematical statistics and applications. Proceedings of the International conference in honor of 80 years jubilee of professor, doctor of physical and mathematical sciences Gennady Medvedev; 2015 February 23–26; Minsk, Belarus]. Minsk: Respublikanskii institut vysshei shkoly; 2015. p. 305–310. Russian.
2. Brillindzher D. *Vremennye ryady. Obrabotka dannykh i teoriya* [Time series. Data processing and theory]. Moscow: Mir; 1980. 536 p. Russian.
3. Troush NN. *Asimptoticheskie metody statisticheskogo analiza vremennykh ryadov* [Asymptotic methods of statistical analysis of time series]. Minsk: Belarusian State University; 1999. 218 p. Russian.
4. Semenchuk NV, Troush NN. The comparative analysis of some periodogram's estimates of spectral density. *Trudy Instituta matematiki.* 2007;15(2):90–103. Russian.
5. Semenchuk NV. [About choosing the optimal data taper]. *Vesnik Grodzenskaga dzjarzhawnaga wniversiteta imja Janki Kupaly. Seryja 2. Matjematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naja tjehnika i kiravanne.* 2012;2(129):61–66. Russian.
6. Zhurbenko IG. *Spektral'nyi analiz vremennykh ryadov* [Spectral analysis of time series]. Moscow: Moscow State University; 1982. 168 p. Russian.
7. Alekseev VG. [On the calculation of the spectra of stationary random processes for samples of large volume]. *Problemy peredachi informatsii*. 1980;16(1):42–49. Russian.
8. Alekseev VG. [Estimates of the spectral densities of some models of stationary random processes]. *Problemy peredachi informatsii.* 1985;21(2):42–49. Russian.

Статья поступила в редколлегию 22.02.2019.
Received by editorial board 22.02.2019.

УДК 539.3

ПОЛЕ НАПРЯЖЕНИЙ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ АНИЗОТРОПНОГО ДИСКА ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ, НАГРУЖЕННОГО СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ ПО ВНЕШНЕМУ КОНТУРУ

В. В. КОРОЛЕВИЧ[1)]

[1)]*Международный центр современного образования, ул. Штепанска, 61, 110 00, г. Прага 1, Чехия*

Приводится решение плоской задачи теории упругости для вращающегося полярно-ортотропного диска переменной толщины. На внешнем контуре диск нагружен системой одинаковых сосредоточенных сил, приложенных равномерно по ободу и симметричных относительно диаметра. Диск посажен с натягом на гибкий вал, так что на внутреннем контуре действует постоянное контактное давление. Напряжения и деформации, возникающие в таком вращающемся анизотропном кольцевом диске, будут неосесимметричными. Выводится дифференциальное уравнение 4-го порядка в частных производных для функции усилий. Его общее решение разыскивается в виде ряда Фурье по косинусам с четными номерами. В результате получается бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов ряда. Данным дифференциальным уравнениям ставятся в соответствие линейные интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода, которые решаются с помощью резольвент. Постоянные интегрирования определяются из граничных условий. По известным формулам записываются выражения для компонент напряжений через функцию усилий. Интегрированием уравнений закона Гука для полярно-ортотропной пластины определяются компоненты вектора перемещения в диске. Зная последние, по дифференциальным соотношениям Коши легко вычислить компоненты деформаций в кольцевом анизотропном

Образец цитирования:
Королевич ВВ. Поле напряжений вращающегося анизотропного диска переменной толщины, нагруженного сосредоточенными силами по внешнему контуру. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;2:40–51.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-40-51

For citation:
Karalevich UV. The field of tensions of a rotating anisotropic disc of a variable thickness loaded with undistracted forces on the outer contour. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;2:40–51. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-40-51

Автор:
Владимир Васильевич Королевич – преподаватель.

Author:
Uladzimir V. Karalevich, lecturer.
v.korolevich@mail.ru

диске. Полученные формулы для напряжений, деформаций и перемещений полностью описывают напряженно-деформированное состояние вращающегося полярно-ортотропного диска переменной толщины с системой сосредоточенных сил по внешнему контуру.

Ключевые слова: полярно-ортотропный диск переменной толщины; сосредоточенная сила; дифференциальные уравнения; интегральные уравнения; резольвента; напряжения в диске; деформации в диске; перемещения в диске.

THE FIELD OF TENSIONS OF A ROTATING ANISOTROPIC DISC OF A VARIABLE THICKNESS LOADED WITH UNDISTRACTED FORCES ON THE OUTER CONTOUR

U. V. KARALEVICH [a]

[a] *International Center of Modern Education, 61 Štěpánská, Prague 1, PSČ 110 00, Czech*

The work gives a solution of the plane elasticity problem for rotating polar-orthotropic annular disks of a variable thickness. The disk is loaded with a system of equal focused forces on the outer contour applied evenly along the rim and symmetric concerning the diameter. The disk is seated with an interference fit on the flexible shaft so that a constant contact pressure acts on the interior contour. The stresses and deformations arising in such a rotating anisotropic annular disk will be non-axisymmetric. A conclusion of a fourth-order partial differential equation for the effort function is drawn. Its general solution is searched out in the form of a Fourier series of cosines with even numbers. As a result, an infinite system of ordinary differential equations is solved for the coefficients of the series. These differential equations correspond to the linear Volterra integral equations of the 2nd kind, which are solved using resolvents. Constants of integration are determined from the border conditions. Expressions for the stress components are written through the effort function by the well-known formulas. We find the components of the displacement vector in the disk by the integration of the Hooke's law equations for the polar-orthotropic plate. We calculate the deformation components in a ring anisotropic disk by Cauchy differential relations if we know the displacements. The solved formulas for stresses, deformations and displacements completely describe the stress-deformed state in a rotating polar-orthotropic disc of variable thickness with a system of focused forces on the outer contour. The results of the work can be used in the design of working disks of turbomachines and turbo compressors, as well as rotors of centrifugal stands.

Keywords: polar-orthotropic disk of variable thickness; focused force; differential equations; integral equations; resolvent; stresses in the disc; deformations in the disc; displacements in the disc.

Введение

В современном турбостроении [1] диски рабочих колес турбомашин и турбокомпрессоров являются наиболее ответственными деталями этих конструкций. В работах [2; 3] исследовано напряженно-деформированное состояние вращающихся облопаченных анизотропных турбинных дисков постоянной толщины степенного, конического и экспоненциального профилей. Получены точные решения плоской задачи теории упругости для вращающихся анизотропных дисков с указанными профилями, нагруженных на внешнем контуре системой сосредоточенных сил.

Сосредоточенная сила – это сила инерции i-й лопатки $F_i^{\text{л}}$, возникающая при вращении диска с угловой скоростью ω и равная: $F_i^{\text{л}} = m_{\text{л}}\omega^2 R_{\text{ц. т}}^{\text{л}}$, где $m_{\text{л}}$ – масса лопатки; $R_{\text{ц. т}}^{\text{л}}$ – расстояние от оси вращения до центра тяжести лопатки. Эти силы приложены на малых участках внешней поверхности обода.

Во всех вышеприведенных работах, как и в данной, рассматривается режим *стационарного* вращения турбинного диска с определенной рабочей частотой, не совпадающей ни с одной из собственных частот колебаний диска или других элементов конструкции турбомашины.

Для более сложных профилей диска решение задачи возможно только численными методами.

В настоящей работе для решения плоской задачи теории упругости для вращающихся облопаченных анизотропных турбинных дисков переменной толщины $h(r)$, зависящей от радиуса r, применяется метод линейных интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода. Толщина $h(r)$ должна быть непрерывной функцией, без скачков и изломов, плавно изменяющейся вдоль радиуса r. Обычно при проектировании турбинных дисков задают функцию толщины $h(r)$, а также значения толщины диска h_0 на внутреннем контуре радиусом r_0 и h_1 на внешнем контуре радиусом R. Параметры функции $h(r)$ должны выражаться через эти четыре заданные геометрические величины – h_0, h_1, r_0, R. Отрицательный знак первой производной функции толщины $h(r)$ ($h'(r) < 0$) указывает на убывание, а положительный ($h'(r) > 0$) – на ее возрастание на интервале изменения радиуса r от r_0 до R. Если толщина диска $h(r)$ задается не одной функцией, а, например, двумя, т. е. на первом участке $\left[r_0, r^*\right]$ функция $h_1(r)$, а на втором участке $\left[r^*, R\right]$ – $h_2(r)$, то в точке перехода r^* значения этих функций и их первых производных должны совпадать: $h_1(r^*) = h_2(r^*)$ и $h_1'(r^*) = h_2'(r^*)$. Аналогичные условия наблюдаются в точках переходов, если задано несколько функций толщины на более чем двух участках.

В статье рассматривается ротор турбины в виде анизотропного кольцевого диска переменной толщины $h(r)$, который на внешнем контуре радиусом R соединен с ободом. На внешней боковой поверхности обода радиусом R_1 установлено четное количество N равноотстоящих одинаковых лопаток. Диск насаживается с натягом на вал, так что на внутреннем его контуре радиусом r_0 действует контактное давление p_0.

Напряженно-деформированное состояние в таком облопаченном анизотропном кольцевом диске переменной толщины будет *плоским* и *неосесимметричным*.

Постановка задачи и основные уравнения

Пусть материал диска обладает цилиндрической анизотропией, причем ось анизотропии совпадает с геометрической осью диска, и в каждой точке диска имеются три взаимно ортогональные плоскости упругой симметрии. Облопаченный диск вращается равномерно с угловой скоростью ω вокруг оси, совпадающей с осью анизотропии и перпендикулярной к срединной плоскости диска. На внешнем контуре диск соединен с ободом, который нагружен системой N одинаковых сосредоточенных сил $F_i^{\text{л}}$ ($i = \overline{1,\ N}$), а на внутреннем контуре действует контактное давление p_0.

Требуется найти распределение напряжений, деформаций и перемещений в данном вращающемся анизотропном кольцевом диске переменной толщины $h(r)$ и в ободе.

Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z, поместив начало в точке пересечения оси анизотропии со срединной плоскостью диска. Ось z направим вертикально вверх.

Вращающийся диск с ободом нагружен сосредоточенными силами, приложенными к его внешней боковой границе параллельно плоскости диска; центробежные силы действуют в той же плоскости, а поверхности диска свободны от нагрузок. Все действующие силы постоянные по толщине диска. Тогда нормальное напряжение σ_z и касательные напряжения $\tau_{rz} = \tau_{zr}$ и $\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta}$ полагают равными нулю. Остальные компоненты напряжений σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ не зависят от координаты z и являются функциями только координат r и θ. В этом случае в диске реализовано *плоское напряженное состояние* [4].

Выделим из диска двумя меридиональными плоскостями, образующими с координатной плоскостью rz углы θ и θ + dθ, и двумя цилиндрическими поверхностями радиусами r и $r + dr$, нормальными к срединной плоскости, бесконечно малый элемент. Запишем уравнения равновесия в усилиях для этого элемента диска [5]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{N_r - N_\theta}{r} + h(r)\rho\omega^2 r = 0, \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{2T_{r\theta}}{r} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $N_r(r, \theta) = h(r)\sigma_r(r, \theta)$ – радиальное усилие; $N_\theta(r, \theta) = h(r)\sigma_\theta(r, \theta)$ – тангенциальное усилие; $T_{r\theta}(r, \theta) =$ $= h(r)\tau_{r\theta}(r, \theta)$ – касательное усилие; ρ – плотность материала диска.

Выразим усилия $N_r(r, \theta)$, $N_\theta(r, \theta)$, $T_{r\theta}(r, \theta)$ через функцию усилий $F(r, \theta)$ по формулам

$$\begin{cases} N_r(r, \theta) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F(r, \theta)}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 F(r, \theta)}{\partial \theta^2}, \\ N_\theta(r, \theta) = \dfrac{\partial^2 F(r, \theta)}{\partial r^2} + h(r)\rho\omega^2 r^2, \\ T_{r\theta}(r, \theta) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial F(r, \theta)}{\partial \theta} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 F(r, \theta)}{\partial r \partial \theta}. \end{cases} \tag{2}$$

Подстановкой выражений (2) в уравнения равновесия (1) убеждаемся, что они тождественно выполняются.

Из формул (2) получим зависимости компонент напряжений $\sigma_r(r,\theta)$, $\sigma_\theta(r,\theta)$, $\tau_{r\theta}(r,\theta)$ от функции усилий $F(r,\theta)$:

$$\begin{cases} \sigma_r(r,\theta) = \dfrac{1}{h(r)}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F(r,\theta)}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 F(r,\theta)}{\partial \theta^2}\right), \\ \sigma_\theta(r,\theta) = \dfrac{1}{h(r)}\dfrac{\partial^2 F(r,\theta)}{\partial r^2} + \rho\omega^2 r^2, \\ \tau_{r\theta}(r,\theta) = \dfrac{1}{h(r)}\left(\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial F(r,\theta)}{\partial \theta} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 F(r,\theta)}{\partial r \partial \theta}\right). \end{cases} \tag{3}$$

Закон Гука для полярно-ортотропной пластины имеет вид [7]

$$\begin{cases} \varepsilon_\theta(r,\theta) = \dfrac{1}{E_r}\sigma_r(r,\theta) - \dfrac{\nu_{\theta r}}{E_\theta}\sigma_\theta(r,\theta), \\ \varepsilon_r(r,\theta) = -\dfrac{\nu_{r\theta}}{E_r}\sigma_r(r,\theta) + \dfrac{1}{E_\theta}\sigma_\theta(r,\theta), \\ \gamma_{r\theta}(r,\theta) = \dfrac{1}{G_{r\theta}}\tau_{r\theta}(r,\theta), \end{cases} \tag{4}$$

где $\varepsilon_r(r,\theta)$, $\varepsilon_\theta(r,\theta)$ – радиальная и тангенциальная компоненты деформаций соответственно; $\gamma_{r\theta}(r,\theta)$ – деформация сдвига; E_r, E_θ – модули упругости при растяжении (сжатии) анизотропного тела в радиальном и тангенциальном направлениях соответственно; $\nu_{r\theta}$, $\nu_{\theta r}$ – коэффициенты Пуассона; $G_{r\theta}$ – модуль сдвига.

Для полярно-ортотропной пластины справедливо следующее равенство:

$$\frac{\nu_{r\theta}}{E_r} = \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta}.$$

Подставляя выражения (3) для компонент напряжений $\sigma_r(r,\theta)$, $\sigma_\theta(r,\theta)$, $\tau_{r\theta}(r,\theta)$ в уравнения закона Гука (4), получим зависимости компонент деформаций $\varepsilon_r(r,\theta)$, $\varepsilon_\theta(r,\theta)$, $\gamma_{r\theta}(r,\theta)$ от функции усилий $F(r,\theta)$:

$$\begin{cases} \varepsilon_r(r,\theta) = \dfrac{1}{E_\theta}\left[k^2\sigma_r(r,\theta) - \nu_{\theta r}\cdot\sigma_r(r,\theta)\right] = \\ = \dfrac{1}{E_\theta h(r)}\left[-\nu_{\theta r}\dfrac{\partial^2 F(r,\theta)}{\partial r^2} + \dfrac{k^2}{r^2}\dfrac{\partial^2 F(r,\theta)}{\partial \theta^2} + \dfrac{k^2}{r}\dfrac{\partial F(r,\theta)}{\partial r}\right] - \nu_{\theta r}\dfrac{\rho\omega^2 r^2}{E_\theta}, \\ \varepsilon_\theta(r,\theta) = \dfrac{1}{E_\theta}\left[-\nu_{\theta r}\sigma_r(r,\theta) + \sigma_\theta(r,\theta)\right] = \\ = \dfrac{1}{E_\theta h(r)}\left[\dfrac{\partial^2 F(r,\theta)}{\partial r^2} - \dfrac{\nu_{\theta r}}{r^2}\dfrac{\partial^2 F(r,\theta)}{\partial \theta^2} - \dfrac{\nu_{\theta r}}{r}\dfrac{\partial F(r,\theta)}{\partial r}\right] + \dfrac{\rho\omega^2 r^2}{E_\theta}, \\ \gamma_{r\theta}(r,\theta) = \dfrac{1}{G_{r\theta}h(r)}\left(\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial F(r,\theta)}{\partial \theta} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 F(r,\theta)}{\partial r \partial \theta}\right), \end{cases} \tag{5}$$

где $k^2 = \dfrac{E_\theta}{E_r}$.

Обозначим компоненты вектора перемещения $\vec{U}$ в радиальном направлении через $u(r,\theta)$, а в тангенциальном – через $v(r,\theta)$.

Связь компонент деформаций $\varepsilon_r(r,\theta)$, $\varepsilon_\theta(r,\theta)$, $\gamma_{r\theta}(r,\theta)$ с компонентами $u(r,\theta)$ и $v(r,\theta)$ вектора перемещения $\overrightarrow{U}$ задается дифференциальными соотношениями Коши [4; 6]

$$\varepsilon_r(r,\theta)=\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r},\ \ \varepsilon_\theta(r,\theta)=\frac{u(r,\theta)}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v(r,\theta)}{\partial\theta},$$

$$\gamma_{r\theta}(r,\theta)=\frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial v(r,\theta)}{\partial r}-\frac{v(r,\theta)}{r}. \tag{6}$$

Из первых двух соотношений (6) найдем радиальное $u(r,\theta)$ и тангенциальное $v(r,\theta)$ перемещения:

$$u(r,\theta)=\int\varepsilon_r(r,\theta)dr+\chi_1(\theta),$$

$$v(r,\theta)=\int\left[r\varepsilon_\theta(r,\theta)-u(r,\theta)\right]d\theta+\chi_2(r),$$

которые должны удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial v(r,\theta)}{\partial r}-\frac{v(r,\theta)}{r}=\frac{1}{G_{r\theta}}\tau_{r\theta}(r,\theta). \tag{7}$$

Неизвестные функции $\chi_1(\theta)$, $\chi_2(r)$ находятся из решения уравнения (7).

Исключая компоненты $u(r,\theta)$ и $v(r,\theta)$ вектора перемещения $\overrightarrow{U}$ из соотношений (6), получим уравнение совместности деформаций

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varepsilon_r(r,\theta)}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\left(r\varepsilon_\theta(r,\theta)\right)}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\left(r\gamma_{r\theta}(r,\theta)\right)}{\partial r\partial\theta}-\frac{\partial\varepsilon_r(r,\theta)}{\partial r}=0. \tag{8}$$

Подстановка в уравнение (8) выражений для компонент деформаций $\varepsilon_r(r,\theta)$, $\varepsilon_\theta(r,\theta)$, $\gamma_{r\theta}(r,\theta)$ из (5) приводит к неоднородному дифференциальному уравнению 4-го порядка в частных производных для функции усилий $F(r,\theta)$:

$$\frac{\partial^4F}{\partial r^4}+\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4F}{\partial r^2\partial\theta^2}+\frac{k^2}{r^4}\frac{\partial^4F}{\partial\theta^4}-2\left[\frac{h'(r)}{h(r)}-\frac{1}{r}\right]\frac{\partial^3F}{\partial r^3}-\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)\left[\frac{h'(r)}{h(r)}+\frac{1}{r}\right]\times$$

$$\times\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3F}{\partial r\partial\theta^2}-\left\{\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)'-\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2\right]+\frac{(2-\nu_{\theta r})}{r}\frac{h'(r)}{h(r)}+\frac{k^2}{r^2}\right\}\frac{\partial^2F}{\partial r^2}+\left\{\nu_{\theta r}\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)'-\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2\right]+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)\frac{1}{r}\left[\frac{h'(r)}{h(r)}+\frac{1}{r}\right]+\frac{k^2}{r}\left[\frac{h'(r)}{h(r)}+\frac{2}{r}\right]\right\}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2F}{\partial\theta^2}+\left\{\nu_{\theta r}\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)'-\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{k^2}{r}\left[\frac{h'(r)}{h(r)}+\frac{1}{r}\right]\right\}\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}=-2\left(3+\nu_{\theta r}\right)h(r)\rho\omega^2. \tag{9}$$

Поскольку на внешнем контуре диска с ободом приложено четное количество N равноотстоящих одинаковых и симметричных относительно диаметра сосредоточенных сил $F_i^{\text{л}}$ $(i=\overline{1,N})$, то разложим функцию усилий $F(r,\theta)$ в ряд Фурье по косинусам с четными номерами:

$$F(r,\theta)=\Phi_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_{Nn}(r)\cos Nn\theta. \tag{10}$$

Подставляя разложение (10) в уравнение (9), получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов ряда $\Phi_0(r)$, $\Phi_{Nn}(r)$:

$$(n=0)\ \frac{d^4\Phi_0}{dr^4} - 2\left[\frac{h'(r)}{h(r)} - \frac{1}{r}\right]\frac{d^3\Phi_0}{dr^3} - \left\{\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)' - \left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2\right] + \frac{(2-\nu_{\theta r})}{r}\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{k^2}{r^2}\right\}\frac{d^2\Phi_0}{dr^2} +$$

$$+\left\{\frac{\nu_{\theta r}}{r}\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)' - 2\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2\right] + \frac{k^2}{r^2}\left[\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r}\right]\right\}\frac{d\Phi_0}{dr} = -2(3+\nu_{\theta r})h(r)\rho\omega^2. \qquad (11)$$

$$(n\ge 1)\ \frac{d^4\Phi_{Nn}}{dr^4} - 2\left[\frac{h'(r)}{h(r)} - \frac{1}{r}\right]\frac{d^3\Phi_{Nn}}{dr^3} - \left\{\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)' - \left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2\right] + \frac{(2-\nu_{\theta r})}{r}\frac{h'(r)}{h(r)} +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}} - 2\nu_{\theta r}\right)\left((Nn)^2 + k^2\right)\frac{1}{r^2}\right\}\frac{d^2\Phi_{Nn}}{dr^2} + \left\{\frac{\nu_{\theta r}}{r}\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)' - \left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2\right] +\right.$$

$$\left.+\left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}} - 2\nu_{\theta r}\right)(Nn)^2 + k^2\right]\left[\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r}\right]\frac{1}{r^2}\right\}\frac{d\Phi_{Nn}}{dr} - (Nn)^2\left\{\nu_{\theta r}\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)' - \left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2\right] +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}} - 2\nu_{\theta r}\right)\left[\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r}\right]\frac{1}{r^3} + \frac{k^2}{r}\left[\frac{h'(r)}{h(r)} - \frac{\left((Nn)^2 - 2\right)}{r}\right]\right\}\frac{1}{r^2}\Phi_{Nn}(r) = 0. \qquad (12)$$

Пусть обод шириной $\delta_к$ и толщиной $h_к$ нагружен N равными сосредоточенными силами $F_i^л$ $(i=\overline{1,\ N})$, симметричными относительно диаметра диска. Разлагая эту нагрузку в ряд Фурье по косинусам с четными номерами, получим для распределенной нагрузки интенсивностью $q_N(R,\ \theta)$ выражение [7]:

$$q_N(R_1,\ \theta) = \frac{NF^л}{2\pi R_1 h_к}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos Nn\theta\right).$$

Рассматривая обод как соединенное с диском кольцо, которое нагружено центробежными силами, а также радиальными напряжениями $\sigma_r^н = q_N(R,\ \theta)$ на наружной и $\sigma_r^в = \sigma_r(R,\ \theta)$ на внутренней поверхности, вычислим возникающее в нем окружное напряжение $\sigma_t^к(\theta)$. Из условия равновесия половины кольца имеем

$$\sigma_t^к(\theta) = \frac{1}{S_к}\left[q_N(R_1,\ \theta)h_к R_1 - \sigma_r(R,\ \theta)h_1 R + \frac{1}{3}h_к\rho_к\omega^2\left(R_1^3 - R^3\right)\right],$$

где $S_к = h_к\delta_к$ – площадь поперечного сечения кольца; R_1 – внешний радиус обода; h_1 – толщина диска на внешнем контуре; $\sigma_r(R,\ \theta)$ – радиальное напряжение в диске на внешнем контуре; $\rho_к$ – плотность материала обода.

Зная напряжение $\sigma_t^к(\theta)$, из закона Гука сначала определяем окружную деформацию $\varepsilon_t^к(\theta)$. Затем находим радиальное перемещение $u_к(\theta)$, считая напряженное состояние в кольце одноосным:

$$u_к(\theta) = \frac{R}{E}\sigma_t^к(\theta) = \frac{R}{S_к}\left[q_N(R_1,\ \theta)h_к R_1 - \sigma_r(R,\ \theta)h_1 R + \frac{1}{3}h_к\rho_к\omega^2\left(R_1^3 - R^3\right)\right],$$

где $E_к$ – модуль упругости материала обода.

Таким образом, решение плоской задачи теории упругости для вращающегося анизотропного диска переменной толщины $h(r)$ с ободом, нагруженного на внешней боковой границе обода системой сосредоточенных сил, свелось к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений (10), (11) с граничными условиями вида

$$\sigma_r(r_0, \theta) = -p_0, \ \tau_{r\theta}(r_0, \theta) = 0, \ u(R, \theta) = u_{\text{к}}(\theta), \ v(R, \theta) = 0. \tag{13}$$

Решение плоской задачи теории упругости методом линейных интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода

Сведем решения дифференциальных уравнений (11) и (12) к решению соответствующих им линейных интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода. Полагаем

$$\frac{d^4\Phi_0}{dr^4} = \varphi_0(r), \ \frac{d^4\Phi_{Nn}}{dr^4} = \varphi_{Nn}(r). \tag{14}$$

Последовательно интегрируя выражения (14), получим

$$\frac{d^3\Phi_0}{dr^3} = \int_{r_0}^{r} \varphi_0(s)ds + \dddot{\Phi}_0(r_0), \ \frac{d^3\Phi_{Nn}}{dr^3} = \int_{r_0}^{r} \varphi_{Nn}(s)ds + \dddot{\Phi}_{Nn}(r_0),$$

$$\frac{d^2\Phi_0}{dr^2} = \int_{r_0}^{r} (r-s)\varphi_0(s)ds + \dddot{\Phi}_0(r_0)(r-r_0) + \ddot{\Phi}_0(r_0),$$

$$\frac{d^2\Phi_{Nn}}{dr^2} = \int_{r_0}^{r} (r-s)\varphi_{Nn}(s)ds + \dddot{\Phi}_{Nn}(r_0)(r-r_0) + \ddot{\Phi}_{Nn}(r_0), \tag{15}$$

$$\frac{d\Phi_0}{dr} = \frac{1}{2}\int_{r_0}^{r} (r-s)^2 \varphi_0(s)ds + \frac{1}{2}\dddot{\Phi}_0(r_0)(r-r_0)^2 + \ddot{\Phi}_0(r_0)(r-r_0) + \dot{\Phi}_0(r_0),$$

$$\frac{d\Phi_{Nn}}{dr} = \frac{1}{2}\int_{r_0}^{r} (r-s)^2 \varphi_{Nn}(s)ds + \frac{1}{2}\dddot{\Phi}_{Nn}(r_0)(r-r_0)^2 + \ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)(r-r_0) + \dot{\Phi}_{Nn}(r_0),$$

$$\Phi_0(r) = \frac{1}{6}\int_{r_0}^{r} (r-s)^3 \varphi_0(s)ds + \frac{1}{6}\dddot{\Phi}_0(r_0)(r-r_0)^3 + \frac{1}{2}\ddot{\Phi}_0(r_0)(r-r_0)^2 + \dot{\Phi}_0(r_0)(r-r_0) + \Phi_0(r_0),$$

$$\Phi_{Nn}(r) = \frac{1}{6}\int_{r_0}^{r} (r-s)^3 \varphi_{Nn}(s)ds + \frac{1}{6}\dddot{\Phi}_{Nn}(r_0)(r-r_0)^3 + \frac{1}{2}\ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)(r-r_0)^2 + \dot{\Phi}_{Nn}(r_0)(r-r_0) + \Phi_{Nn}(r_0).$$

Здесь использовалось известное тождество Дирихле

$$\int_{r_0}^{r} dr_1 \int_{r_0}^{r_1} dr_2 \ldots \int_{r_0}^{r_{n-1}} f(r_n)dr_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_{r_0}^{r} (r-s)^{n-1} f(s)ds.$$

Подставим в дифференциальные уравнения (11), (12) вместо функций $\Phi_0(r)$, $\Phi_{Nn}(r)$ и их производных правые части выражений (14), (15). В результате получим искомые линейные интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода [8]:

$$\varphi_0(r) = \lambda\int_{r_0}^{r} K_0(r, s)\varphi_0(s)ds + g_0(r), \tag{16}$$

$$\varphi_{Nn}(r) = \lambda\int_{r_0}^{r} K_{Nn}(r, s)\varphi_{Nn}(s)ds + g_{Nn}(r), \tag{17}$$

где λ – числовой параметр, $\lambda = -1$; $K_0(r, s)$, $K_{Nn}(r, s)$ – ядра интегральных уравнений, имеющие вид

$$K_0(r,s)=\left\{2\left[\frac{h'(r)}{h(r)}-\frac{1}{r}\right]+\left\{\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)'-\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2+\frac{(2-\nu_{\theta r})}{r}\frac{h'(r)}{h(r)}\right]+\frac{k^2}{r^2}\right\}(r-s)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left\{\frac{\nu_{\theta r}}{r}\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)'-2\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2\right]+\frac{k^2}{r^2}\left[\frac{h'(r)}{h(r)}+\frac{1}{r}\right]\right\}(r-s)^2\right\},$$

$$K_{Nn}(r,s)=\left\{2\left[\frac{h'(r)}{h(r)}-\frac{1}{r}\right]+\left\{\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)'-\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2+\frac{(2-\nu_{\theta r})}{r}\frac{h'(r)}{h(r)}\right]+\left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\times(Nn)^2+k^2\right]\frac{1}{r^2}\left.\right\}(r-s)-\frac{1}{2}\left\{\frac{\nu_{\theta r}}{r}\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)'-\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2\right]+\left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)(Nn)^2+k^2\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{h'(r)}{h(r)}+\frac{1}{r}\right]\frac{1}{r^2}\right\}(r-s)^2+\frac{(Nn)^2}{6}\left\{\frac{\nu_{\theta r}}{r^2}\left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)'-\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2\right]+\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)\times\right.$$

$$\left.\left.\times\left[\frac{h'(r)}{h(r)}+\frac{1}{r}\right]\frac{1}{r^3}+\frac{k^2}{r^3}\left[\frac{h'(r)}{h(r)}-\frac{(Nn)^2-2}{r}\right]\right\}(r-s)^3\right\};$$

$g_0(r)$ и $g_{Nn}(r)$ – свободные члены интегральных уравнений, явные выражения которых есть

$$g_0(r)=\frac{\partial^2 K_0(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_0(r_0)-\frac{\partial K_0(r,r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_0(r_0)+K_0(r,r_0)\dddot{\Phi}_0(r_0)-2(3+\nu_{\theta r})h(r)\rho\omega^2,$$

$$g_{Nn}(r)=-\left[\frac{\partial^3 K_{Nn}(r,r_0)}{\partial s^2}\Phi_0(r_0)-\frac{\partial^2 K_{Nn}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_0(r_0)+\frac{\partial K_{Nn}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_0(r_0)-K_{Nn}(r,r_0)\dddot{\Phi}_0(r_0)\right].$$

Здесь введены обозначения

$$\frac{\partial^i K_0(r,r_0)}{\partial s^i}=\left.\frac{\partial^i K_0(r,s)}{\partial s^i}\right|_{s=r_0}\quad (i=\overline{1,2}),\quad \frac{\partial^j K_{Nn}(r,r_0)}{\partial s^j}=\left.\frac{\partial^j K_{Nn}(r,s)}{\partial s^j}\right|_{s=r_0}\quad (j=\overline{1,3}).$$

Общие решения линейных интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода (16), (17) записываются с помощью резольвент $R_0(r,s;\lambda)$ и $R_{Nn}(r,s;\lambda)$ в виде [8]

$$\varphi_0(r)=\lambda\int_{r_0}^{r}R_0(r,s;\lambda)g_0(s)ds+g_0(r), \tag{18}$$

$$\varphi_{Nn}(r)=\lambda\int_{r_0}^{r}R_{Nn}(r,s;\lambda)g_{Nn}(s)ds+g_{Nn}(r), \tag{19}$$

где функции $R_0(r,s;\lambda)$ и $R_{Nn}(r,s;\lambda)$ определяются функциональными рядами:

$$R_0(r,s;\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m K_{m+1}^{(0)}(r,s),\;\; R_{Nn}(r,s;\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m K_{m+1}^{(Nn)}(r,s). \tag{20}$$

Для непрерывных ядер $K_0(r,s)$, $K_{Nn}(r,s)$ ряды (20) сходятся абсолютно и равномерно.

Повторяющиеся, или *итерированные*, *ядра* $K_m^{(0)}(r, s)$, $K_m^{(Nn)}(r, s)$ определяются по следующим рекуррентным формулам [9]:

$$K_1^{(0)}(r, s) = K_0(r, s), \qquad K_1^{(Nn)}(r, s) = K_{Nn}(r, s),$$

$$K_2^{(0)}(r, s) = \int_{r_0}^{r} K_0(r, t) K_1^{(0)}(t, s)\, dt, \quad K_2^{(Nn)}(r, s) = \int_{r_0}^{r} K_{Nn}(r, t) K_1^{(Nn)}(t, s)\, dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$K_m^{(0)}(r, s) = \int_{r_0}^{r} K_0(r, t) K_{m-1}^{(0)}(t, s)\, dt, \quad K_m^{(Nn)}(r, s) = \int_{r_0}^{r} K_{Nn}(r, t) K_{m-1}^{(Nn)}(t, s)\, dt.$$

Если свободные члены $g_0(r)$, $g_{Nn}(r)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ непрерывны в $[r_0, R]$ и ядра $K_0(r, s)$, $K_{Nn}(r, s)$ непрерывны при $r_0 \le r \le R$, $r_0 \le s \le r$, то линейные интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода (16), (17) имеют при любом параметре λ $(\lambda \ne 0)$ единственные непрерывные решения, определяемые формулами (18), (19).

Отметим, что линейные интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода можно решать и другими аналитическими методами, а также численными методами, указанными, например, в книге [9].

Представим компоненты напряжений $\sigma_r(r, \theta)$, $\sigma_\theta(r, \theta)$, $\tau_{r\theta}(r, \theta)$, деформаций $\varepsilon_r(r, \theta)$, $\varepsilon_\theta(r, \theta)$, $\gamma_{r\theta}(r, \theta)$ и перемещений $u(r, \theta)$, $v(r, \theta)$ в виде следующих рядов Фурье по косинусам и синусам с четными номерами:

$$\begin{gathered}
\sigma_r(r, \theta) = \sigma_r^{(0)}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_r^{(Nn)}(r) \cos Nn\theta, \ \ \sigma_\theta(r, \theta) = \sigma_\theta^{(0)}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_\theta^{(Nn)}(r) \cos Nn\theta, \\
\tau_{r\theta}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{r\theta}^{(Nn)}(r) \sin Nn\theta, \ \ \varepsilon_r(r, \theta) = \varepsilon_r^{(0)}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_r^{(Nn)}(r) \cos Nn\theta, \\
\varepsilon_\theta(r, \theta) = \varepsilon_\theta^{(0)}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_\theta^{(Nn)}(r) \cos Nn\theta, \ \ \gamma_{r\theta}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{r\theta}^{(Nn)}(r) \sin Nn\theta, \\
u(r, \theta) = u_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} u_{Nn}(r) \cos Nn\theta, \ \ v(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{Nn}(r) \sin Nn\theta.
\end{gathered} \tag{21}$$

Здесь коэффициенты разложений $\sigma_r^{(0)}(r)$, $\sigma_r^{(Nn)}(r)$, $\sigma_\theta^{(0)}(r)$, $\sigma_\theta^{(Nn)}(r)$, $\tau_{r\theta}^{(Nn)}(r)$, $\varepsilon_r^{(0)}(r)$, $\varepsilon_r^{(Nn)}(r)$, $\varepsilon_\theta^{(0)}(r)$, $\varepsilon_\theta^{(Nn)}(r)$, $\gamma_{r\theta}^{(Nn)}(r)$, $u_0(r)$, $u_{Nn}(r)$, $v_{Nn}(r)$ выражаются через разрешающие функции $\varphi_0(r)$ и $\varphi_{Nn}(r)$ по формулам

$$\sigma_r^{(0)}(r) = \frac{1}{rh(r)} \left[\frac{1}{2} \int_{r_0}^{r} (r - s)^2 \varphi_0(s)\, ds + \frac{1}{2} \ddot{\Phi}_0(r_0)(r - r_0)^2 + \ddot{\Phi}_0(r_0)(r - r_0) + \dot{\Phi}_0(r_0) \right],$$

$$\sigma_r^{(Nn)}(r) = \frac{1}{rh(r)} \left[\int_{r_0}^{r} K_{\sigma_r}^{(Nn)}(r, s) \varphi_{Nn}(s)\, ds + K_{\sigma_r}^{(Nn)}(r, r_0) \ddot{\Phi}_{Nn}(r_0) - \frac{\partial K_{\sigma_r}^{(Nn)}(r, r_0)}{\partial s} \ddot{\Phi}_{Nn}(r_0) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 K_{\sigma_r}^{(Nn)}(r, r_0)}{\partial s^2} \dot{\Phi}_{Nn}(r_0) - \frac{\partial^3 K_{\sigma_r}^{(Nn)}(r, r_0)}{\partial s^2} \Phi_{Nn}(r_0) \right],$$

$$\sigma_\theta^{(0)}(r) = \frac{1}{h(r)} \left[\int_{r_0}^{r} (r - s) \varphi_0(s)\, ds + \ddot{\Phi}_0(r_0)(r - r_0) + \ddot{\Phi}_0(r_0) \right] + \rho\omega^2 r^2,$$

$$\sigma_\theta^{(Nn)}(r) = \frac{1}{h(r)} \left[\int_{r_0}^{r} (r - s) \varphi_{Nn}(s)\, ds + \ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)(r - r_0) + \ddot{\Phi}_{Nn}(r_0) \right],$$

$$\tau_{r\theta}^{(Nn)}(r)=\frac{1}{rh(r)}\left[\int_{r_0}^{r}K_{\tau_{r\theta}}^{(Nn)}(r,\,s)\varphi_{Nn}(s)ds+K_{\tau_{r\theta}}^{(Nn)}(r,\,r_0)\ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\frac{\partial K_{\tau_{r\theta}}^{(Nn)}(r,\,r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 K_{\tau_{r\theta}}^{(Nn)}(r,\,r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\frac{\partial^3 K_{\tau_{r\theta}}^{(Nn)}(r,\,r_0)}{\partial s^2}\Phi_{Nn}(r_0)\right],$$

$$\varepsilon_r^{(0)}(r)=\frac{1}{E_\theta h(r)}\left[\int_{r_0}^{r}K_{\varepsilon_r}^{(0)}(r,\,s)\varphi_0(s)ds+K_{\varepsilon_r}^{(0)}(r,\,r_0)\ddot{\Phi}_0(r_0)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial K_{\varepsilon_r}^{(0)}(r,\,r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_0(r_0)+\frac{\partial^2 K_{\varepsilon_r}^{(0)}(r,\,r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_0(r_0)\right]-\nu_{\theta r}\frac{\rho\omega^2 r^2}{E_\theta},$$

$$\varepsilon_r^{(Nn)}(r)=\frac{1}{E_\theta h(r)}\left[\int_{r_0}^{r}K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r,\,s)\varphi_{Nn}(s)ds+K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r,\,r_0)\ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r,\,r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)+\frac{\partial^2 K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r,\,r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\frac{\partial^3 K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r,\,r_0)}{\partial s^2}\Phi_{Nn}(r_0)\right],$$

$$\varepsilon_\theta^{(0)}(r)=\frac{1}{E_\theta h(r)}\left[\int_{r_0}^{r}K_{\varepsilon_\theta}^{(0)}(r,\,s)\varphi_0(s)ds+K_{\varepsilon_\theta}^{(0)}(r,\,r_0)\ddot{\Phi}_0(r_0)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial K_{\varepsilon_\theta}^{(0)}(r,\,r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_0(r_0)+\frac{\partial^2 K_{\varepsilon_\theta}^{(0)}(r,\,r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_0(r_0)\right]-\frac{\rho\omega^2 r^2}{E_\theta}, \tag{22}$$

$$\varepsilon_\theta^{(Nn)}(r)=\frac{1}{E_\theta h(r)}\left[\int_{r_0}^{r}K_{\varepsilon_\theta}^{(Nn)}(r,\,s)\varphi_{Nn}(s)ds+K_{\varepsilon_\theta}^{(Nn)}(r,\,r_0)\ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial K_{\varepsilon_\theta}^{(Nn)}(r,\,r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)+\frac{\partial^2 K_{\varepsilon_\theta}^{(Nn)}(r,\,r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\frac{\partial^3 K_{\varepsilon_\theta}^{(Nn)}(r,\,r_0)}{\partial s^2}\Phi_{Nn}(r_0)\right],$$

$$\gamma_{r\theta}^{(Nn)}(r)=\frac{1}{G_{r\theta}rh(r)}\left[\int_{r_0}^{r}K_{\tau_{r\theta}}^{(Nn)}(r,\,s)\varphi_{Nn}(s)ds+K_{\tau_{r\theta}}^{(Nn)}(r,\,r_0)\ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial K_{\tau_{r\theta}}^{(Nn)}(r,\,r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)+\frac{\partial^2 K_{\tau_{r\theta}}^{(Nn)}(r,\,r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\frac{\partial^3 K_{\tau_{r\theta}}^{(Nn)}(r,\,r_0)}{\partial s^2}\Phi_{Nn}(r_0)\right],$$

$$u_0(r)=\frac{r}{E_\theta h(r)}\left[\int_{r_0}^{r}K_{\varepsilon_\theta}^{(0)}(r,\,s)\varphi_0(s)ds+K_{\varepsilon_\theta}^{(0)}(r,\,r_0)\ddot{\Phi}_0(r_0)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial K_{\varepsilon_\theta}^{(0)}(r,\,r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_0(r_0)+\frac{\partial^2 K_{\varepsilon_\theta}^{(0)}(r,\,r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_0(r_0)\right]-\frac{\rho\omega^2 r^3}{E_\theta},$$

$$u_{Nn}(r)=\frac{1}{E_\theta}\int_{r_0}^{r}\frac{1}{h(r_1)}\left[\int_{r_0}^{r_1}K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r_1,s)\varphi_{Nn}(s)ds+K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r_1,r_0)\dddot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\frac{\partial K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r_1,r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r_1,r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\frac{\partial^3 K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r_1,r_0)}{\partial s^2}\Phi_{Nn}(r_0)\right]dr_1+u_{Nn}(r_0),$$

$$v_{Nn}(r)=\frac{1}{Nn}\left[r\varepsilon_\theta^{(Nn)}(r)-u_{Nn}(r)\right]=\frac{1}{Nn}\left\{\frac{r}{E_\theta h(r)}\left[\int_{r_0}^{r}K_{\varepsilon_\theta}^{(Nn)}(r,s)\varphi_{Nn}(s)ds+K_{\varepsilon_\theta}^{(Nn)}(r,r_0)\dddot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\partial K_{\varepsilon_\theta}^{(Nn)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)+\frac{\partial^2 K_{\varepsilon_\theta}^{(Nn)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\frac{\partial^3 K_{\varepsilon_\theta}^{(Nn)}(r,r_0)}{\partial s^2}\Phi_{Nn}(r_0)\right]-\frac{1}{E_\theta}\int_{r_0}^{r}\frac{1}{h(r_1)}\times$$

$$\times\left[\int_{r_0}^{r_1}K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r_1,s)\varphi_{Nn}(s)ds+K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r_1,r_0)\dddot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\frac{\partial K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r_1,r_0)}{\partial s}\ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial^2 K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r_1,r_0)}{\partial s^2}\dot{\Phi}_{Nn}(r_0)-\frac{\partial^3 K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r_1,r_0)}{\partial s^2}\Phi_{Nn}(r_0)\right]dr_1+u_{Nn}(r_0)\right\},$$

где передаточные (весовые) функции имеют вид

$$K_{\sigma_r}^{(Nn)}(r,s)=\left[\frac{1}{2}(r-s)^2-\frac{1}{6}\frac{(Nn)^2}{r}(r-s)^3\right],$$

$$K_{\tau_{r\theta}}^{(Nn)}(r,s)=Nn\left[\frac{1}{2r}(r-s)^2-\frac{1}{6r^2}(r-s)^3\right],$$

$$K_{\varepsilon_r}^{(0)}(r,s)=\left[-\nu_{\theta r}(r-s)+\frac{k^2}{2r}(r-s)^2\right],$$

$$K_{\varepsilon_r}^{(Nn)}(r,s)=\left[-\nu_{\theta r}(r-s)+\frac{k^2}{2r}(r-s)^2-(Nn)^2\frac{k^2}{6r^2}(r-s)^3\right],$$

$$K_{\varepsilon_\theta}^{(0)}(r,s)=\left[(r-s)-\frac{\nu_{\theta r}}{2r}(r-s)^2\right],$$

$$K_{\varepsilon_\theta}^{(Nn)}(r,s)=\left[(r-s)-\frac{\nu_{\theta r}}{2r}(r-s)^2+(Nn)^2\frac{k^2}{6r^2}(r-s)^3\right].$$

Постоянные $\dot{\Phi}_0(r_0)$, $\ddot{\Phi}_0(r_0)$, $\dddot{\Phi}_0(r_0)$, $\Phi_{Nn}(r_0)$, $\dot{\Phi}_{Nn}(r_0)$, $\ddot{\Phi}_{Nn}(r_0)$, $\dddot{\Phi}_{Nn}(r_0)$, $u_{Nn}(r_0)$ находятся из граничных условий (13).

Заключение

Полученные формулы (21), (22) полностью описывают напряженно-деформированное состояние вращающихся анизотропных дисков произвольных профилей, нагруженных системой сосредоточенных сил на внешнем контуре. Результаты данной работы могут быть использованы при проектировании дисков турбомашин и турбокомпрессоров, а также роторов центробежных стендов.

Библиографические ссылки

1. Малинин НН. *Прочность турбомашин. 2-е издание.* Москва: Юрайт; 2018. 291 с.

2. Королевич ВВ, Медведев ДГ. Напряженно-деформированное состояние вращающегося полярно-ортотропного диска постоянной толщины, нагруженного сосредоточенными силами по внешнему контуру. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;3:46–58.

3. Королевич ВВ, Медведев ДГ. Влияние дискретного расположения лопаток на напряженное состояние анизотропного турбинного диска степенного профиля. В: *Динамика, прочность и моделирование в машиностроении. Тезисы докладов I Международной научно-технической конференции; 10–14 сентября 2018 г.; Харьков, Украина.* Харьков: Институт проблем машиностроения имени А. Н. Подгорного НАН Украины; 2018. с. 36–37.

4. Тимошенко СП, Гудьер Дж. *Теория упругости.* Москва: Наука; 1979. 560 с.

5. Коваленко АД. *Круглые пластины переменной толщины.* Москва: Физматгиз; 1959. 294 с.

6. Лехницкий СГ. *Анизотропные пластинки.* Москва: ОГИЗ; 1947. 355 с. Совместное издание с Гостехиздатом.

7. Бояршинов СВ. *Основы строительной механики машин.* Москва: Машиностроение; 1973. 456 с.

8. Краснов МЛ, Киселев АИ, Макаренко ГИ. *Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями.* Москва: КомКнига; 2007. 192 с.

9. Верлань АФ, Сизиков ВС. *Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы.* Киев: Наукова думка; 1986. 543 с.

References

1. Malinin NN. *Prochnost’ turbomashin. 2-e izdanie* [The strength of turbomachinery. 2nd edition]. Moscow: Yurait; 2018. 291 p. Russian.

2. Karalevich UV, Medvedev DG. Stressed-deformed state of a rotating polar-orthotropic disk of constant thickness loaded with undistracted forces on the outer contour. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;3:46–58. Russian.

3. Korolevich VV, Medvedev DG. [The influence of the discrete arrangement of the blades on the stress state of the anisotropic turbine disk of an exponent profile]. In: *Dinamika, prochnost’ i modelirovanie v mashinostroenii. Tezisy dokladov I Mezhdunarodnoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii; 10–14 sentyabrya 2018 g.; Khar’kov, Ukraina* [Dynamics, strength and modeling in mechanical engineering. Collection of abstracts of the I International, scientific and technical conference; 2018 September 10–14; Kharkov, Ukraine]. Kharkov: A. N. Pidgorny Institute of Mechanical Engineering Problems, National Academy of Sciences of Ukraine; 2018. p. 36–37. Russian.

4. Timoshenko SP, Goodyer J. *Teoriya uprugosti* [The theory of elasticity]. Moscow: Nauka; 1979. 560 p. Russian.

5. Kovalenko AD. *Kruglye plastiny peremennoi tolshchiny* [Round plates of variable thickness]. Moscow: Fizmatgiz; 1959. 294 p. Russian.

6. Lehnitsky SG. *Anizotropnye plastinki* [Anisotropic plates]. Moscow: OGIZ; 1947. 355 p. Co-published by the Gostekhizdat. Russian.

7. Boyarshinov SV. *Osnovy stroitel’noi mekhaniki mashin* [Basics of building mechanics machines]. Moscow: Mashinostroenie; 1973. 456 p. Russian.

8. Krasnov ML, Kiselev AI, Makarenko GI. *Integral’nye uravneniya: zadachi i primery s podrobnymi resheniyami* [Integral equations: problems and examples with detailed solutions]. Moscow: KomKniga; 2007. 192 p. Russian.

9. Verlan AF, Sizikov VS. *Integral’nye uravneniya: metody, algoritmy, programmy* [Integral equations: methods, algorithms, programs]. Kiev: Naukova dumka; 1986. 543 p. Russian.

Статья поступила в редколлегию 04.12.2018.
Received by editorial board 04.12.2018.

УДК 004.942

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ОБЪЕКТНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

Р. Е. ШАРЫКИН [1], ***А. Н. КУРБАЦКИЙ*** [1]

[1] *Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Представлена математическая модель для распределенных объектно ориентированных стохастических гибридных систем (РООСГС) и доказано, что данная модель обладает марковским свойством. РООСГС являются композиционными объектами, которые общаются с другими объектами посредством обмена сообщениями через асинхронную среду, такую как сеть. Важной составляющей модели выступает вероятностная природа РООСГС, в которой состояние системы описывается стохастическими дифференциальными уравнениями с мгновенными вероятностными изменениями его при выполнении определенных условий. Вероятностная природа и у среды обмена сообщениями, в модели которой время доставки сообщения является случайной величиной. Такие задачи часто встречаются на практике в различных сферах, поэтому вопросы формального моделирования и верификации их свойств представляются весьма важными.

Ключевые слова: математическое моделирование; гибридные системы; стохастические системы; марковское свойство; спецификация моделей.

Образец цитирования:
Шарыкин РЕ, Курбацкий АН. Модель распределенных объектно ориентированных стохастических гибридных систем. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;2:52–61.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-52-61

For citation:
Sharykin RE, Kourbatski AN. A model of distributed object-based stochastic hybrid systems. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;2:52–61. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-52-61

Авторы:
Роман Евгеньевич Шарыкин – соискатель кафедры технологий программирования факультета прикладной математики и информатики.
Александр Николаевич Курбацкий – доктор технических наук, профессор; заведующий кафедрой технологий программирования факультета прикладной математики и информатики.

Authors:
Raman E. Sharykin, competitor at the department of software engineering, faculty of applied mathematics and computer science.
sharykin@bsu.edu
Alexander N. Kourbatski, doctor of science (engineering), full professor; head of the department of software engineering, faculty of applied mathematics and computer science.
kurb@unibel.by

A MODEL OF DISTRIBUTED OBJECT-BASED STOCHASTIC HYBRID SYSTEMS

R. E. SHARYKIN [a], ***A. N. KOURBATSKI*** [a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: R. E. Sharykin (sharykin@bsu.edu)

This article offers a mathematical model for distributed object-oriented stochastic hybrid systems (DOBSHS). DOBSHS are composite objects communicating with other objects through the exchange of messages through an asynchronous medium such as a network. An important component of the model is the probabilistic nature of the DOBSHS, in which the state of the system is described by stochastic differential equations with instantaneous probabilistic state changes when certain conditions are met. Also probabilistic is the nature of the messaging environment, in which the model of message delivery time is a random variable. Such problems are often encountered in practice in various areas and issues of formal modeling and verification of their properties are very important. The article presents a mathematical model of DOBSHS and proved that it has a Markov property.

Keywords: mathematical modeling; hybrid systems; stochastic systems; Markov property; model specification.

Введение

Стохастические гибридные системы [1] обобщают обычные гибридные системы [2–5], допуская непрерывную эволюцию, управляемую стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ), и (или) мгновенные вероятностные изменения состояния системы. Это хорошо согласуется с внутренней неопределенностью сред, в которых должны функционировать многие гибридные системы, а также удобно в случаях, когда некоторые алгоритмы системы являются вероятностными. Существует широкий спектр сфер, включая коммуникационные сети [6], авиационный трафик [7; 8], экономику [9], отказоустойчивое управление [10], подходящих для применения стохастических гибридных систем. Биоинформатика, в которой используются символические, гибридные и вероятностные модели клеток [11–13], также является полем приложения для подобных систем.

В то время как существует надежное обоснование математических свойств стохастических гибридных моделей (таких как марковское свойство процесса), вопрос, как *специфицировать* такие модели композиционным путем, чтобы более крупные системы могли пониматься в терминах меньших подсистем, остается открытым. Так же как и вопрос о том, как *формально анализировать* эти модели способами, которые существенно расширяют аналитические возможности современных симуляционных методов. Поскольку некоторые области приложения (к примеру, контроль авиационного трафика) требуют очень высокой степени надежности, спецификация и верификация выступают важными задачами, требующими рассмотрения.

Основная цель статьи – представление конкретной математической модели, позволяющей формально специфицировать стохастические гибридные системы, которые являются *распределенными*, состоят из различного вида стохастических гибридных *объектов* и взаимодействуют друг с другом посредством асинхронной передачи сообщений. Стиль распределенного объектно ориентированного описания представляется естественным для спецификации многих гибридных систем: например, сетевых встроенных или систем воздушных судов и других (возможно, автоматических) транспортных средств. Однако на текущий момент мы не имеем информации о формальных моделях, поддерживающих такой стиль спецификации для стохастических гибридных систем. Наш вклад в этом отношении – математическая модель распределенных объектно ориентированных стохастических гибридных систем (РООСГС), которая обладает строгим марковским свойством и может быть отображена в модель generalized stochastic hybrid systems (GSHS), представленную в [14].

Вероятностное переписывание и распределенные объекты

Рассмотрим базовые концепции переписывания термов, вероятностного переписывания и распределенных объектов. Более детальное и строгое изложение переписывания термов может быть найдено в [15], а вероятностного переписывания – в [16].

Положим, сигнатура Σ является функцией символов (скажем, $f, g, h, a, b, \ldots \in \Sigma$) и имеет функцию арности $ar : \Sigma \to \mathbb{N}$, определяющую количество аргументов каждого функционального символа. Далее обозначим через $T_\Sigma(X)$ алгебру Σ-термов на множестве X переменных. Например, $f\left(x, g(b, y)\right) \in T_\Sigma(X)$

является Σ-термом с $ar(f) = ar(g) = 2,\ ar(b) = 0$ и $x \in X$. Проиллюстрируем этим примером понятия *подтерма*, *позиции подтерма* и *замены подтерма*. Так, x, $g(b, y)$ и b – подтермы $f(x, g(b, y))$. Если представим терм как помеченное дерево, то его подтермы являются его поддеревьями. Мы можем обозначить позиции подтермов конечными столбцами натуральных чисел, обозначающими пути от корня дерева. К примеру, вышеприведенные три подтерма находятся в позициях 1, 2 и 2, 1 соответственно. Для данной позиции p в терме t, t/p – подтерм в позиции p. Для термов t, u и позиции p в t обозначим через $t[u]_p$ новый терм, полученный заменой подтерма t/p на u в позиции p. Для терма t в нашем примере и $u = h(a)$ имеем $t[u]_2 = f(x, h(a))$. Заметим, что каждый терм t имеет множество $vars(t)$ своих переменных, фигурирующих в нем. *Подстановка* θ является функцией $\Theta : Y \to T_\Sigma(X)$, где Y – множество переменных. Она расширяется многими путями на Σ-гомоморфизм $\Theta : T_\Sigma(Y) \to T_\Sigma(X)$. В нашем примере, для терма t, если $\theta(x) = h(z)$ и $\theta(y) = c$, то $\theta(t) = f(h(z), g(b, c))$. *Правилом перезаписи* служит секвенция $l \to r$, где $l, r \in T_\Sigma(X)$. Мы называем l *левой стороной* правила, а r – его *правой стороной*. Пусть R – множество правил перезаписи. Мы говорим, что терм t *перезаписан за один шаг* с помощью R в t', обозначая $t \to_R t'$, если существуют позиция p в t и подстановка θ такие, что $t/p = \theta(l)$ и $t' = t[\theta(r)]_p$. Обозначим через $\to_R^*$ рефлексивное и транзитивное замыкание R. Интуитивно мы будем представлять термы как *состояния* системы. Далее множество R правил перезаписи может пониматься как множество параметрических *переходов* между состояниями, а $\to_R^*$ – как отношение достижимости системы. Назовем правило перезаписи $l \to r$ *недетерминистическим*, если $vars(r) \not\subseteq vars(l)$.

Мы можем обобщить вышесказанное посредством переписывания не просто термов, а классов эквивалентности термов *по модулю* эквациональной теории E. Это достигается с помощью *переписывающей теории* (Σ, E, R) [17], где Σ – сигнатура, E – множество Σ-уравнений, а R – множество правил перезаписи. Идея состоит в том, чтобы рассматривать состояния нашей системы как элементы *алгебраического типа данных* $T_\Sigma(X)$, определенных уравнениями E, его так называемой начальной алгеброй. Элементы $T_\Sigma(X)$ являются E-эквивалентными классами $[t]$ Σ-термов t без переменных по модулю уравнений E. Теперь R переписывает такие классы эквивалентности вместо просто переписывания термов. Это особенно полезно для моделирования систем распределенных объектов, которые общаются друг с другом посредством передачи сообщений. Мы можем рассматривать объект некоторого класса объектов C как терм в виде записи $\langle o : C | a_1 : v_1, \ldots, a_n : v_n \rangle$, где o – имя, или идентификатор, объекта, C – имя его класса, a_i – переменные состояния (каждая определенного типа) с соответствующими значениями v_i. Подобным образом мы можем рассматривать сообщение, адресованное o, как другой терм формы $\langle o \leftarrow c \rangle$, в котором c является содержанием сообщения, а o – его адресатом. Далее мы можем моделировать распределенное состояние системы объектов как мультимножество, или «суп», объектов и сообщений. Обозначим объединение мультимножеств параллельным композиционным оператором $\_ \parallel \_$, где два подчеркивания – это позиции аргументов. К примеру, распределенное состояние

$$\langle o : C | a_1 : v_1, \ldots, a_n : v_n \rangle \parallel \langle o \leftarrow c \rangle \parallel \langle o' : C' | b_1 : v_1', \ldots, b_k : v_k' \rangle \parallel \langle o' \leftarrow c' \rangle$$

содержит два объекта – o и o' – классов C и C', каждый с сообщением, ему адресованным и еще не полученным. Так как объединение мультимножеств *ассоциативно* и *коммутативно*, порядок объектов и сообщений значения не имеет. В случае объектов РООСГС отметим единственный дополнительный факт: некоторые переменные a_i объекта $\langle o : C | a_1 : v_1, \ldots, a_n : v_n \rangle$ являются *непрерывными*, т. е. принимают вещественные значения, в то время как другие переменные могут быть *дискретными*. Так как в РООСГС непрерывность времени играет важную роль, помимо обычных сообщений, готовых к немедленному получению, также имеются *запланированные* сообщения в форме $[d, \langle o \leftarrow c \rangle]$, в которых d – время, называемое *дедлайном*, которое равномерно уменьшается. Это позволяет моделировать тот факт, что *асинхронная коммуникация в распределенной системе занимает время*, т. е. посланное сообщение не сразу становится доступным для получения. В РООСГС в любой момент времени имеется *не более одного* сообщения, доступного для получения и называемого *активным*: все остальные сообщения являются запланированными.

Дискретные переходы распределенной системы объектов обычно происходят в ответ на сообщения: при их получении объект может изменить свое состояние, послать другие сообщения, исчезнуть и (или) породить новые объекты. Такие дискретные параллельные переходы могут быть естественным образом специфицированы правилами перезаписи, что мы вскоре проиллюстрируем. Главное, однако, что в таких системах перезапись должна быть *перезаписью мультимножеств*, в которой порядок объектов и сообщений в «супе» не имеет значения. Это может быть достигнуто с помощью переписывающей теории $(\Sigma, AC \cup E, R)$, где Σ включает все операторы, используемые для построения объектов и сообщений, и оператор параллельной композиции $\_ \parallel \_$, AC является всеми уравнениями, определяющими ассоциативность и коммутативность $\_ \parallel \_$, а E содержит остальные уравнения, выражающие дополнительные функции.

В РООСГС переписывающие правила R, определяющие мгновенные переходы объектов, обычно являются *вероятностными*. *Вероятностное переписывающее правило* [16; 18] имеет вид

$$l(x) \to r(x, y) \textit{ with probability } y := p(x).$$

В первую очередь необходимо отметить, что такое правило *недетерминистическое*, так как терм r содержит новые переменные y, отличные от переменных x, содержащихся в l. Таким образом, подстановка θ для переменных x в l, которая совпадает с подтермом терма t в позиции p, не определяет единственным образом следующее состояние после перезаписи: для него может иметься много вариантов в зависимости от того, как будут инициализированы дополнительные переменные y в r. Мы можем обозначить различные следующие состояния выражениями $t\left[r(\theta), \rho(y)\right]_p$, где θ фиксировано как данная совпадающая подстановка, а ρ варьируется по всем возможным подстановкам для новых переменных y. Вероятностная природа правила выражается обозначением *with probability* $y := p(x)$, где $p(x)$ является вероятностной мерой на множестве подстановок ρ (по модулю уравнений E в данной переписывающей теории). Однако вероятностная мера $p(x)$ *может зависеть от совпадающей подстановки* θ. Мы выбираем значение y, т. е. подстановку ρ, вероятностно в соответствии с вероятностной мерой $\rho(\theta(x))$.

Простой пример может проиллюстрировать многие из уже изложенных идей. Возможным объектом в РООСГС может быть *участник аукциона*. Это объект в форме $\langle o : Bidder | motivation : M \rangle$ с *мотивацией*, являющейся непрерывной переменной, определяющей степень заинтересованности участника в аукционе. Участник аукциона посылает ставки на аукцион в случайные моменты времени, но участник с более высокой мотивацией будет посылать ставки чаще. Это может быть смоделировано посредством вероятностного переписывающего правила

$$\begin{gathered}\langle X : Bidder | motivation : M \rangle \parallel \langle X \leftarrow schedule.bid \rangle \to \\ \to \langle X : Bidder | motivation : M \rangle \parallel \left[T, \langle X \leftarrow place.bid \rangle\right] \\ \textit{with probability } T := Exp\left(0.1^{*} duration / (0.1 + M)\right),\end{gathered}$$

где при получении сообщения $\langle X \leftarrow schedule.bid \rangle$ участник X планирует следующую ставку в соответствии с экспоненциальным распределением, чей темп включает как его собственную мотивацию, так и продолжительность аукциона. Вероятностная мера в решающей степени зависит от мотивации участника, которая определяется в каждом экземпляре правила посредством подстановки θ, конкретизирующей левостороннюю переменную M.

Объектно ориентированные стохастические гибридные системы

Теперь представим нашу модель РООСГС и покажем, как она соотносится с моделью GSHS. Для упрощения математических деталей мы используем обозначения состояний объектов в виде записей $\langle o, q, v \rangle$, где o – имя объекта, q – дискретный элемент, объединяющий имя класса и дискретные переменные, v – вектор значений непрерывных переменных. Для топологического пространства $(X, \mathcal{O})$ связанное с ним измеримое пространство обозначается $(X, \mathfrak{B}(X))$.

Определение 1. Для измеримых пространств $(X, \mathfrak{F}_X)$, $(Y, \mathfrak{F}_Y)$ мы называем функцию $K : X \times \mathfrak{F}_Y \to$ $\to [0, 1]$ марковским ядром (из $(X, \mathfrak{F}_X)$ в $(Y, \mathfrak{F}_Y)$) тогда и только тогда, когда K удовлетворяет условиям:

(I) $\forall x \in X,\ K(x, \cdot)$ является вероятностной мерой и (II) $B \in \mathfrak{F}_Y,\ K(\cdot, B)$ измерима. Интуитивно мы рассматриваем K как «вероятностное отношение перехода» из X в Y.

Определение 2. Классом стохастического гибридного объекта (классом РООСГС) является запись $C = (Q_C, O_{id}, \mu, \sigma, Jump_C)$, где отображены:

• *дискретные состояния.* Q_C – счетное множество дискретных состояний;

• *идентификаторы объектов.* O_{id} – счетное множество имен объектов;

• *инварианты.* Для фиксированного измерения l инвариант является функцией $Inv_C : Q_C \to \mathcal{O}(\mathbb{R}^l)$, где $\mathcal{O}(\mathbb{R}^l)$ – множество всех открытых множеств евклидова пространства $\mathbb{R}^l$;

• *состояния объектов.* Состояние объекта $o \in O_{id}$ выражается записью $s = (o, q, v), q \in Q_C$ и $v \in Inv_C(q)$. Множество всех таких состояний для всех объектов в классе C имеет вид

$$S_C = \bigcup_{o \in O_{id},\, q \in Q_C} \{o\} \times \{q\} \times Inv_C(q),$$

обозначим его замыкание $\overline{S}_C$ как множество

$$\overline{S}_C = \bigcup_{o \in O_{id},\, q \in Q_C} \{o\} \times \{q\} \times \overline{Inv_C(q)},$$

где $\overline{Inv_C(q)}$ – топологическое замыкание открытого множества $Inv_C(q)$ и его границы $\partial S_C = \overline{S}_C \setminus S_C$. Отметим, что S_C является дизъюнктивным объединением метрических пространств и, таким образом, имеет соответствующее измеримое пространство $(S_C, \mathfrak{B}(S_C))$;

• *динамика СДУ.* Определяется парой функций $\mu : D_C \to \mathbb{R}^l$ и $\sigma : D_C \to \mathbb{R}^{l \times m}$, $D_C = \bigcup_{q \in Q} \{q\} \times Inv_C(q)$, $\mu(q, x)$ и $\sigma(q, x)$ ограниченные и липшицевые по x;

• *ядро прыжков.* Марковское ядро $Jump_C : \partial S_C \times \mathfrak{B}(S_C) \to [0, 1]$.

Сообщение содержит объект o некоторого класса C как адресат, а также может содержать дискретные и непрерывные параметры.

Определение 3. Сообщением типа M для объектов данного класса C РООСГС является запись $M = (O_{id_C}, Q', d)$, где O_{id_C} – множество имен объектов класса C; Q' – исчислимое множество дискретных параметров и $d \in \mathbb{N}$ – размерность множества непрерывных параметров $\mathbb{R}^d$. Множество S_M сообщений типа M, таким образом, имеет вид $S_M = O_{id_C} \times Q' \times \mathbb{R}^d$. Аналогично множеством S_{SM} запланированных сообщений типа M выступает запись $S_{SM} = S_M \times \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Определение 4. РООСГС A характеризуется:

1) множеством $C_1, \ldots, C_n$ классов;

2) множеством $M_1, \ldots, M_m$ типов сообщений, каждый из которых включает некоторые C_i из $C_1, \ldots, C_n$;

3) марковским ядром $Msg : \hat{S}_A \times \mathfrak{B}(S_A) \to [0, 1]$, которое называют ядром немедленного получения сообщений с $\hat{S}_A \subset S_A$, измеримым подмножеством состояний, содержащих точно одно активное сообщение;

4) начальной вероятностной мерой $Init : \mathfrak{B}(S_A) \to [0, 1]$.

Состояниями РООСГС являются мультимножества, содержащие объекты в $C_1, \ldots, C_n$, запланированные сообщения в $M_1, \ldots, M_m$ и не более одного активного сообщения в одном из M_j:

$$s = \{(o_1, q_1, v_1), \ldots, (o_k, q_k, v_k),\ [(o', q', v')],\ ((o'_1, q'_1, v'_1), t_1), \ldots, ((o'_s, q'_s, v'_s), t_s)\},$$

где все идентификаторы объектов $o_1, \ldots, o_k$ различны; имеется множество вложений $\{o', o'_1, \ldots, o'_s\} \subseteq \{o_1, \ldots, o_k\}$ и $[(o', q', v')]$ означает, что наличие единственного активного сообщения (o', q', v') необязательно. Дискретная компонента вышеприведенного состояния является мультимножеством

$$q = disc(s) = \{(o_1, q_1), \ldots, (o_k, q_k), \langle (o', q') \rangle, (o'_1, q'_1), \ldots, (o'_s, q'_s)\},$$

где оператор $\langle (o', q') \rangle$, обозначенный угловыми скобками, действует как маркер, выделяющий дискретную часть уникального активного сообщения (o', q', v'), если таковое присутствует. Множество Q_A всех дискретных компонент $disc(s)$ состояний s РООСГС A – по построению счетное множество. Непрерывная компонента состояния s является разрозненной по различным объектам и сообщениям, но мы можем ее легко консолидировать в единую компоненту следующим образом. Без потери общности положим, что множества $O_{id_{C_1}}, \ldots, O_{id_{C_n}}$ и $Q'_{M_1}, \ldots, Q'_{M_m}$ непересекающиеся и что дискретные части сообщений $q', q'_1, \ldots, q'_s$ различны. Тогда, упорядочив $C_1, \ldots, C_n, M_1, \ldots, M_m$ линейно и используя линейный порядок $O_{id_{C_i}}$ и Q'_{M_j}, можно лексикографически отсортировать элементы произвольного дискретного состояния $disc(s)$ единственным образом. Положим, что отсортированная форма вышеприведенного состояния s – форма, в которой элементы записаны. Тогда непрерывная компонента s является вектором

$$v = cont(s) = (v_1, \ldots, v_k, v', v'_1, t_1, \ldots, v'_s, t_s).$$

Это означает, что мы можем представить множество всех состояний РООСГС A как дизъюнктивное объединение

$$S_A = \bigcup_{q \in Q_A} \{q\} \times Inv(q),$$

если $(o_1, q_1), \ldots, (o_k, q_k)$ (классов $C_{i_1}, \ldots, C_{i_k}$) являются дискретными частями объектов состояния q, то

$$Inv(q) = Inv_{C_{i_1}}(q_1) \times \ldots \times Inv_{C_{i_k}}(q_k) \times \mathbb{R}^{md(q)},$$

где $md(q)$, размерность сообщений q, получается суммированием всех размерностей непрерывных компонент в необязательно присутствующем активном сообщении и в запланированных сообщениях.

Предположение 1. (I) Msg, рассматриваемая как «вероятностное отношение перехода», оставляет нетронутыми все запланированные сообщения, и для всех новых запланированных сообщений, создаваемых переходом, дедлайн принадлежит $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

(II) В состоянии из $\hat{S}_A$ состояние из $S_A \setminus \hat{S}_A$ (без активных сообщений) достижимо за конечное число Msg переходов с вероятностью 1. Таким образом, все последовательности Msg переходов заканчиваются почти наверняка.

Так как S_A – дизъюнктивное объединение метрических пространств, оно является измеримым пространством со структурой $(S_A, \mathfrak{B}(S_A))$. Ядра $Jump_{C_i}$, найденные для каждого класса $C_1, \ldots, C_n$ РООСГС A, могут быть «склеены вместе», определяя ядро прыжка $Jump_A : \partial S_A \times \mathfrak{B}(S_A) \to [0, 1]$, где по определению $\overline{S}_A = \bigcup_{q \in Q_A} \{q\} \times \overline{Inv_C(q)}$ и $\partial S_A = \overline{S}_A \setminus S_A$.

Предложение 1. *Для РООСГС A с классами $C_1, \ldots, C_n$ ядра прыжков $Jump_{C_1}, \ldots, Jump_{C_n}$ могут быть расширены до ядра прыжков $Jump_A : \partial S_A \times \mathfrak{B}(S_A) \to [0, 1]$ таким образом, что для всех состояний из S_A, содержащих единственный объект (o, q, v) класса S_i, $Jump_{C_i}((o, q, v), \cdot)$ и $Jump_A(\{o, q, v\}, \cdot)$ согласуются, когда ∂S_{C_i} гомеоморфически вложено как подпространство ∂S_A.*

В первую очередь отметим, что, поскольку S_A является дизъюнктивным объединением пространств и дизъюнктивные объединения топологических пространств отображаются борелевской конструкцией в дизъюнктивные объединения измеримых пространств (см. теорему 2.1.5 в [19]), борелевское множество U в $\mathfrak{B}(S_A)$ имеет вид

$$U = \bigcup_{q \in Q_A} \{q\} \times U_q,$$

где $U_q \in \mathfrak{B}(Inv(q))$. Таким образом, так как U является дизъюнктивным объединением, для каждого $(q_0, v) \in \partial S_A$ имеем

$$Jump_A((q_0, v), U) = Jump_A\left((q_0, v), \bigcup_{q \in Q} \{q\} \times U_q\right) =$$

$$= \sum_{q \in Q} Jump_A((q_0, v), \{q\} \times U_q).$$

Этого достаточно, чтобы определить $Jump_A\big((q_0, v), \{q\} \times U_q\big)$. Но, так как

$$Inv(q) = Inv_{C_{i_1}}(q_1) \times \ldots \times Inv_{C_{i_k}}(q_k) \times \mathbb{R}^{md(q)}$$

и каждая $Inv_{C_i}(q_i)$ имеет счетный базис для открытых множеств, по теореме 2.1.3 в [20] борелевская конструкция сохраняет произведения в этом случае, и мы имеем

$$\mathfrak{B}\big(Inv(q)\big) = \bigotimes_{i=1}^{k} \mathfrak{B}\big(Inv(q_i)\big) \times \mathfrak{B}\big(\mathbb{R}^{md(q)}\big).$$

Таким образом, $\mathfrak{B}\big(Inv(q)\big)$ обобщается борелевскими множествами формы $U_1 \times \ldots \times U_k \times W$, $U_i \in \mathfrak{B}\big(Inv(q_i)\big)$, $W \in \mathfrak{B}\big(\mathbb{R}^{md(q)}\big)$. Для того чтобы закончить определение $Jump_A$, нам необходимы некоторые вспомогательные функции на дискретных состояниях и на состояниях, а именно:

• $\pi_{O_{id}}(q) = \{o_1, \ldots, o_k\}$ – множество идентификаторов объектов;

• $\pi_{m+sm}(q) = \{\langle(o', q')\rangle, (o_1', q_1'), \ldots, (o_s', q_s')\}$ – дискретная часть активного и запланированных сообщений;

• для каждого подмножества $J = \{j_1, \ldots, j_l\} \subseteq \{1, \ldots, j_k\}$:

(I) $\pi_J^o(q) = \{(o_{j_1}, q_{j_1}), \ldots, (o_{j_l}, q_{j_l})\}$ – функция, извлекающая дискретную часть объекта в отсортированном состоянии q;

(II) $cont_J(s) = \{(v_{j_1}, \ldots, v_{j_l})\}$ – функция, извлекающая непрерывную часть объекта в отсортированном состоянии s;

• $cont_{m+sm}(s) \in \mathbb{R}^{md(s)}$ – функция, извлекающая непрерывную часть активного и запланированных сообщений в отсортированном состоянии s.

Теперь рассмотрим состояние $s = (q_0, v) \in \partial S_A$, включающее, скажем, k объектов. Положим, $I_\partial = \{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$ является непустым множеством целых чисел таких, что объекты $(o_{i_1}, q_{i_1}, v_{i_1}), \ldots, (o_{i_r}, q_{i_r}, v_{i_r})$ – именно те, у которых $v_{i_j} \notin Inv(q_{i_j})$, и положим $\overline{I_\partial} = \{1, \ldots, k\} \setminus \{i_1, \ldots, i_r\} = \{j_1, \ldots, j_{k-r}\}$.

Определение $Jump_A\big((q_0, v), \{q\} \times U_1 \times \ldots \times U_k \times W\big)$ теперь будет следующим:

1) если

$$\pi_{O_{id}}(q_0) = \pi_{O_{id}}(q) \wedge \pi_{m+sm}(q_0) =$$
$$= \pi_{s+sm}(q) \wedge cont_{m+sm}(q_0, v) \in W \wedge cont_{\overline{I_\partial}}(q_0, v) \in U_{j_1} \times \ldots \times U_{j_{k-r}} \times \pi^o_{\overline{I_\partial}}(q),$$

то

$$Jump_A\big((q_0, v), \{q\} \times U_1 \times \ldots \times U_k \times W\big) = \prod_{l=1}^{r} Jump_{C_{i_l}}\big(U_{i_l}\big);$$

2) в противном случае 0.

Это означает, что объекты, у которых непрерывное состояние находится на границе, прыгают независимо друг от друга в соответствии со своими ядрами прыжков и что в таких прыжках все остальные объекты и все сообщения остаются неизменными. Таким образом, легко проверить, что $Jump_A$ на самом деле является марковским ядром и что по построению, когда состояние $s = \{(q_0, v)\}$ содержит только один объект класса C_i без сообщений, $Jump_{C_i}\big((q_0, v)\big)$ и $Jump_A\big(\{q_0, v\}\big)$ согласуются при подходящем гомеоморфическом вложении S_C в S_A.

Выполнением РООСГС является траектория стохастического процесса P. Пространством состояний P выступает S_A. Начальное состояние выбирается в соответствии с начальным распределением *Init*. Система развивается двумя путями: *непрерывное развитие* и *дискретное развитие*.

Система следует *непрерывному развитию*, если в ее состоянии все объекты имеют свои непрерывные состояния внутри их границ, есть одно активное сообщение и нет запланированных сообщений со временем истечения, равным нулю. Обозначим множество всех таких состояний как S_A^{CE}. Непрерывное развитие системы происходит таким образом, что развитие каждого объекта определяется СДУ его класса. Время истечения каждого запланированного сообщения равномерно уменьшается.

Когда некоторый объект достигает границы или время истечения некоторых запланированных сообщений достигает нуля, система начинает *дискретное развитие*. Обозначим $S_A!$ множество состояний в S_A, в которых как минимум одно запланированное сообщение достигло своего времени истечения. Таким образом, дискретное развитие начинается, когда процесс достигает $\partial S_A \cup S_A!$. Дискретное развитие системы происходит следующим образом.

(I) Если имеются объекты, у которых состояние находится на границе их инвариантов, используется ядро $Jump_A$ для выполнения перехода в новое состояние.

(II) Если объектов на границе нет, но в состоянии имеется активное сообщение, то применяется ядро Msg для выполнения перехода в новое состояние.

(III) Если объекты на границе отсутствуют и нет активного сообщения, но некоторые запланированные сообщения имеют время истечения, равное нулю, то запланированное сообщение, выбранное равномерно среди запланированных сообщений со временем истечения, равным нулю, становится активным сообщением.

Так как $Jump_A$ выводит состояния из ∂S_A вкупе с предположением 1 и тем, что переход типа (III) уменьшает количество сообщений с нулевым временем истечения, мы знаем, что после конечного количества переходов (I)–(III) состояние в S_A^{CE} (которое является поглощающим состоянием для переходов (I)–(III)) достигается с вероятностью 1. Таким образом, все эти последовательности переходов завершаются почти наверняка.

После достижения состояния в S_A^{CE} через конечное число мгновенных переходов (I)–(III) система продолжает развиваться во времени в соответствии с ее непрерывной динамикой, пока не достигнет нового момента времени T_{i+1}, в котором P достигнет $\partial S_A \cup S_A!$. Таким образом, мгновенные переходы происходят в дискретные моменты времени $T_1 < T_2 < T_3 < \dots$.

Предположение 2 (ненулевая динамика). Математическое ожидание N_t количества моментов времени мгновенных переходов на $[0, 1)$ конечно для всех t.

Мы готовы соотнести модель РООСГС с общей моделью, предложенной М. Л. Бужориану и Ж. Лижеро, а именно GSHS [14]. Интуитивно ключевым наблюдением является то, что последовательность мгновенных переходов (I)–(III) после того, как процесс достигает состояния в $\partial S_A \cup S_A!$, может быть «упакована» в единое марковское ядро.

Предложение 2. *При выполнении предположений 1 и 2 РООСГС A может рассматриваться как GSHS.*

Заметим, что $\overline{S}_A$ раскладывается как дизъюнктивное объединение:

$$\overline{S}_A = \partial S_A \cup \hat{S}_A \cup \left(S_A! - \hat{S}_A\right) \cup S_A^{CE}.$$

Также отметим, что переходы типа (III), которые равномерно выбирают сообщение среди сообщений со временем истечения 0, определяются марковским ядром

$$MsgSel : \left(S_A! - \hat{S}_A\right) \times \mathfrak{B}\left(S_A\right) \to [0, 1].$$

Это позволяет нам объединить марковские ядра для $\partial S_A\left(Jump_A\right)$, $\hat{S}_A(Msg)$, $\left(S_A! - \hat{S}_A\right)\left(MsgSel\right)$ и «тождественное марковское ядро» на S_A^{CE} в единое марковское ядро $Inst : \hat{S}_A \times \mathfrak{B}\left(\hat{S}_A\right) \to [0, 1]$ следующим образом:

$$Inst(s, B) = \begin{cases} Jump_A\left(s, B^o\right), \text{ если } s \in \partial S_A, \\ Msg\left(s, B^o\right), \text{ если } s \in \hat{S}_A, \\ MsgSel\left(s, B^o\right), \text{ если } s \in \left(S_A! \setminus \hat{S}_A\right), \\ \delta\left(s, B^o\right), \text{ если } s \in S_A^{CE}, \end{cases}$$

где по определению $B^o = B \setminus \partial S_A \to [0, 1]$ и $\delta(s, B) = 1$, если $s \in B$, в противном случае $\delta(s, B) = 0$. Отметим, что согласно предположению 1 и определению $Jump_A$, Msg, $MsgSel$ множеством поглощающих состояний $Inst$ в точности является S_A^{CE} и что все последовательности переходов $Inst$ почти наверняка заканчиваются достижением S_A^{CE}.

Ключевым наблюдением сейчас является то, что, как показано в [20; 21], марковские ядра выступают морфизмами в категории $SRel$ стохастических отношений, имеющих измеримые пространства как объекты. Если $K : X \times \mathfrak{F}_Y \to [0, 1]$ и $R : Y \times \mathfrak{F}_Z \to [0, 1]$ – марковские ядра, то объединенной стрелкой $K; R : (X, \mathfrak{F}_X) \to (Z, \mathfrak{F}_Z)$ в *SRel* является ядро, получаемое по формуле

$$(K; R)(x, U) = \int_Y R(y, U) K(x, dy).$$

Таким образом, мы можем рассматривать *Inst* как стохастическое отношение $Inst : (\bar{S}_A, \mathfrak{B}(\bar{S}_A)) \to:$ $\to: (\bar{S}_A, \mathfrak{B}(\bar{S}_A))$ и, объединяя морфизмы в *SRel*, можем получить для каждого $n \in \mathbb{N}$ итерации $Inst^n : (\bar{S}_A, \mathfrak{B}(\bar{S}_A)) \to: (\bar{S}_A, \mathfrak{B}(\bar{S}_A))$, также являющиеся марковскими ядрами. Более того, немного расширяя *SRel* для того, чтобы позволить подвероятностные меры, имеем бесконечную итерацию $Inst^\omega : (\bar{S}_A, \mathfrak{B}(\bar{S}_A)) \to: (\bar{S}_A, \mathfrak{B}(\bar{S}_A))$, которая, как показано в [21], также марковское ядро. Так как S_A^{CE} – множество поглощающих состояний, которые, как мы знаем, достигаются $Inst^\omega$ с вероятностью 1, мы можем ограничить $Inst^\omega$ на марковское ядро

$$Inst^\omega : \hat{S}_A \times \mathfrak{B}(S_A^{CE}) \to [0, 1].$$

Теперь легко получить связь модели РООСГС с моделью GSHS. РООСГС – специальный случай слегка обобщенной версии GSHS. При этом необходимо отметить:

- состояния $Q = Q_A$;
- размерности $d : Q \to \mathbb{N}$ являются размерностями $Inv(q)$;
- $\chi(q) = Inv(q)$;
- для каждого состояния *s*, содержащего объекты $(o_1, q_1, v_1), \ldots, (o_k, q_k, v_k)$:

– μ получается объединением μ_C, компонент динамики СДУ классов $C_{i_1}, \ldots, C_{i_k}$, которым объекты принадлежат, как динамики компонент $Inv_{C_{i_1}}(q_1) \times \ldots \times Inv_{C_{i_k}}(q_k)$. К тому же для компоненты $\mathbb{R}^{md(q)}$ каждая координата *x*, соответствующая времени истечения, удовлетворяет дифференциальному уравнению времени истечения $dx = -1 \cdot dt$ и каждая другая координата, соответствующая непрерывному значению, удовлетворяет дифференциальному уравнению $dy = 0 \cdot dt$;

– σ получается как произведение Кронекера матриц σ_{C_i} динамик СДУ классов $C_{i_1}, \ldots, C_{i_k}$, которым принадлежат присутствующие объекты, дополненное нулевыми значениями для непрерывных размерностей возможного активного сообщения и запланированных сообщений. Заметим, что $\sigma(q, v) \in$ $\in \mathbb{R}^{d(q) \times m(q)}$, если в теореме 1 в [14] *m* положено фиксированным для всех состояний. Однако позволять винеровским измерениям зависеть от состояния вполне допустимо, так как построение общей марковской строки в теореме 5 в [14] также остается справедливым для этого, немного обобщенного, случая;

- компонента λ опущена;
- *R* – марковское ядро $R : \mathfrak{B}(\hat{S}_A) \to [0, 1]$, определяемое

$$R(s, B) = Inst^\omega\left(s, \left(B \cap S_A^{CE}\right)\right) \to [0, 1].$$

Как следствие, из вышеизложенного предложения, используя результаты, доказанные для GSHS в [14], получаем следующую теорему.

Теорема. *При выполнении предположений 1 и 2 РООСГС A является правым борелевским процессом.*

Выводы и дальнейшие направления исследования

Мы можем подытожить представленную работу как предложение формальной модели для распределенных объектно ориентированных стохастических систем, которые взаимодействуют посредством асинхронной передачи сообщений. Мы рассматриваем непосредственное моделирование асинхронной коммуникации как необходимость для многих классов приложений, где объекты физически распределены на дистанциях, которыми нельзя пренебречь. Более того, передача сообщений по сети делает задержки неизбежными. Композициональность поддерживается в РООСГС на двух уровнях: на уровне объектов оператором параллельной композиции _ || _ и на уровне классов посредством множественного наследования.

Данная работа является первым шагом. Следующим будет использование метода Монте-Карло и статистического анализа для исследования моделей конкретных систем на ранних этапах их разработки. Предложенная модель позволяет как использование аналитических методов для доказательства свойств систем, так и прямую симуляцию в PMaude [16], что делает возможным применение статистического анализа. Использование численных методов на ранних этапах проектирования системы позволяет уже на этих этапах находить и исправлять недочеты рассматриваемых моделей. Аналитический метод, в свою очередь, может быть подключен на более поздних этапах исследования модели, когда статистический анализ показал, что система ведет себя удовлетворительно в рассматриваемых ситуациях.

Библиографические ссылки / References

1. Pola G, Bujorianu ML, Lygeros J, Di Benedetto MD. Stochastic hybrid models: an overview. In: *Proceedings of the IFAC conference on analysis and design of hybrid systems; 2003 June 16–18; St. Malo, France.* Oxford: Elsevier; 2003. p. 45–50.

2. Maler O, Manna Z, Pnueli A. From timed to hybrid systems. In: de Bakker JW, Huizing C, de Roever WP, Rozenberg G, editors. *Real-Time: Theory in practice. Proceedings of the REX workshop; 1991 June 3–7; Mook, Netherlands.* Berlin: Springer-Verlag; 1992. p. 447–484.

3. Alur R, Courcoubetis C, Halbwachs N, Henzinger T, Ho P, Nicollin X, et. al. The Algorithmic Analysis of Hybrid Systems. *Theoretical Computer Science.* 1995;138(1):3–34.

4. Lynch NA, Segala R, Vaandrager FW. Hybrid I/O automata. *Information and Computation.* 2003;185(1):105–157. DOI: 10.1016/S0890-5401(03)00067-1.

5. Alur R, Dang T, Esposito JM, Hur Y, Ivančić F, Kumar V, et al. Hierarchical modeling and analysis of embedded systems. *Proceedings of the IEEE.* 2003;91(1):11–28.

6. Hespanha JP. Stochastic hybrid systems: application to communication networks. In: Alur R, Pappas GJ, editors. *Hybrid systems: Computation and control. 7th International workshop; 2004 March 25–27; Philadelphia, USA.* Berlin: Springer-Verlag; 2004. p. 387–401. DOI: 10.1007/978-3-540-24743-2_26.

7. Hwang I, Hwang J, Tomlin CJ. Flight-model-based aircraft conflict detection using a residual-mean interacting multiple model algorithm. In: *AIAA guidance, navigation, and control conference and exhibit; 2003 August 11–14; Austin, USA.* Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics; 2003. DOI: 10.2514/6.2003-5340.

8. Hwang I, Hwang J, Tomlin CJ. HYBRIDGE. Final project report [Internet]. 2005 [cited 2019 February 1]. Available from: https://hybridge.nlr.nl/documents.html.

9. Davis MHA, Vellekoop MH. Permanent health insurance: a case study in piecewise-deterministic Markov modeling. *Mitteilungen der Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker.* 1995;2:177–212.

10. Ghosh MK, Arapostathis A, Marcus SI. Optimal control of switching diffusions with application to flexible manufacturing systems. *SIAM Journal on Control Optimization.* 1993;31(5):1183–1204. DOI: 10.1137/0331056.

11. Eker S, Knapp M, Laderoute K, Lincoln P, Meseguer J, Sonmez K. Pathway logic: symbolic analysis of biological signaling. In: Altman RB, Dunker AK, Hunter L, Klein TE, editors. *Proceedings of the 7th pacific symposium on biocomputing; 2002 January 3–7; Lihue, USA.* [S. l.]: [s. n.]; 2002. p. 400–412. DOI: 10.1142/9789812799623_0038.

12. Lincoln P, Tiwari A. Symbolic systems biology: hybrid modeling and analysis of biological networks. In: Alur R, Pappas GJ, editors. *Hybrid systems: Computation and control. 7th International workshop; 2004 March 25–27; Philadelphia, USA.* [S. l.]: Springer; 2004. p. 660–672.

13. Goss PJE, Peccoud J. Quantitative modeling of stochastic systems in molecular biology by using stochastic Petri nets. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America.* 1998;95(12):6750–6755. DOI: 10.1073/pnas.95.12.6750.

14. Bujorianu ML, Lygeros J. Toward a general theory of stochastic hybrid systems. In: Blom HAP, Lygeros J, editors. *Stochastic Hybrid Systems. Lecture Notes in Control and Information Science. Volume 337.* Berlin: Springer; 2006. p. 3–30. DOI: 10.1007/11587392_1.

15. Dershowitz N, Jouannaud JP. Rewrite Systems. In: van Leeuwen J, editor. *Handbook of Theoretical Computer Science. Volume B: Formal Models and Semantics (B).* Cambridge: MIT Press; 1990. p. 243–320.

16. Agha GA, Meseguer J, Sen K. PMaude: Rewrite-based specification language for probabilistic object systems. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science.* 2006;153(2):213–239. DOI: 10.1016/j.entcs.2005.10.040.

17. Meseguer J. Conditional Rewriting Logic: Deduction, Models and Concurrency. In: Kaplan S, Okada M, editors. *Conditional and typed rewriting systems. 2nd International CTRS workshop; 1990 June 11–14; Montreal, Canada.* Berlin: Springer; 1990. p. 64–91. DOI: 10.1007/3-540-54317-1_81.

18. Kumar N, Sen K, Meseguer J, Agha G. A rewriting based model for probabilistic distributed object systems. In: Najm E, Nestmann U, Stevens P, editors. *Formal methods for open object-based distributed systems. 6th IFIP WG 6.1 International conference; 2003 November 19–21; Paris, France.* Berlin: Springer; 2003. p. 32–46. DOI: 10.1007/978-3-540-39958-2_3.

19. Berberian SK. *Borel Spaces.* Austin: University of Texas at Austin; 1998.

20. Giry M. A categorical approach to probability theory. In: Banaschewski B, editor. *Categorical Aspects of Topology and Analysis. Lecture Notes in Mathematics. Volume 915.* Berlin: Springer; 1982. p. 68–85. DOI: 10.1007/BFb0092872.

21. Panangaden P. The category of Markov kernels. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science.* 1999;22:171–187. DOI: 10.1016/S1571-0661(05)80602-4.

Статья поступила в редколлегию 12.02.2019.
Received by editorial board 12.02.2019.

УДК 534.11

КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО НЕЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ

В. П. САВЧУК[1]***, П. А. САВЕНКОВ***[1]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Получено решение дифференциального уравнения, описывающего колебания упругой натянутой направляющей, состоящей из пакета струн, который заключен в упругий цилиндрический корпус. При этом движущаяся по направляющей сосредоточенная нагрузка моделируется материальной точкой. Колебательная система рассматривается с учетом того, что направляющая свободно лежит на опорах. Также учитываются действующие внешние и внутренние силы сопротивления движению направляющей. Начальные условия нулевые. В статье В. П. Савчука и О. В. Титюры «Прогиб струны под движущейся нагрузкой», опубликованной в журнале «Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика» (2004, № 1), прогиб направляющей под нагрузкой определялся путем решения уравнения с отклоняющимся аргументом и последующего применения численных методов для построения части профиля струны. В данной статье разрабатывается алгоритм нахождения прогиба упругой натянутой направляющей в виде набора кубических сплайнов. Все полученные результаты вычислений представлены в безразмерном виде.

Ключевые слова: уравнение колебаний; кубический сплайн; движущаяся нагрузка.

Образец цитирования:
Савчук ВП, Савенков ПА. Колебания упругой направляющей при движении по ней сосредоточенной нагрузки. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;2:62–66.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-62-66

For citation:
Savchuk VP, Savenkov PA. Elastic guide rail oscillation due to moving concentrated load. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;2:62–66. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-62-66

Авторы:
Владимир Петрович Савчук – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры теоретической и прикладной механики механико-математического факультета.
Павел Андреевич Савенков – магистрант кафедры теоретической и прикладной механики механико-математического факультета. Научный руководитель – В. П. Савчук.

Authors:
Vladimir P. Savchuk, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of theoretical and applied mechanics, faculty of mechanics and mathematics.
savchuk@bsu.by
Pavel A. Savenkov, master’s degree student at the department of theoretical and applied mechanics, faculty of mechanics and mathematics.
savenkov.pa@mail.ru

ELASTIC GUIDE RAIL OSCILLATION DUE TO MOVING CONCENTRATED LOAD

V. P. SAVCHUK[a], *P. A. SAVENKOV*[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: P. A. Savenkov (savenkov.pa@mail.ru)

This article illustrates the solution of a differential equation describing oscillations of an elastic tensioned guide rail, which consist of string bundle enclosed in an elastic cylindrical shell, while concentrated load, simulated by a material point, moves along it. The oscillatory system is considered in such way that the guide rail supports freely. The existing external and internal forces of resistance to movement of the guide rail are also taken into account. Initial and boundary conditions are zero. In article «A string bend under a moving load», published in the journal «Vestnik BGU. Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika» (2004, No. 1), the deflection of a flexible guide rail under load was obtained by solving an equation with deviating argument. In this article, an algorithm is constructed for finding deflection of an elastic tensioned guide rail in the form of a cubic splines. All the results of calculations are presented in a dimensionless form.

Keywords: wave equation; cubic spline; moving load.

Будем считать, что упругая направляющая длиной l состоит из гибкого пролета, который заключен в упругий цилиндрический корпус, свободно лежащий на опорах. Пролет натянут с усилием T и представлен не одной струной, как в [1], а собран из отдельных гибких элементов, которые помещены в тонкостенную оболочку, объединяющую их в единый пакет. Элементы пакета считаем плотно прижатыми друг к другу и разделенными смазкой, а их оболочку – скрепленной с корпусом направляющей. Полагаем также, что пролет внутри корпуса имеет статический прогиб, позволяющий поддерживать корпус направляющей горизонтальным при отсутствии нагрузки.

Уравнение вертикальных колебаний направляющей при движении сосредоточенной нагрузки $p(t)$ запишем в виде [2–4]

$$EI\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \mu_1 \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4}\right) + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}\right) + \mu_3 \frac{\partial u}{\partial t} = p(t)\delta(x - vt), \tag{1}$$

$$p(t) = -mg - my''(t),\ 0 \le t \le \frac{l}{v}.$$

Здесь $u(x, t)$ – прогиб; EI – жесткость (приближенно считается постоянной); ρ – линейная плотность направляющей; μ_1, μ_2, μ_3 – постоянные, характеризующие внутреннее и внешнее сопротивление движению направляющей; v, m – постоянная горизонтальная скорость и масса нагрузки соответственно; $y(t) = u(vt, t)$ – отклонение нагрузки от оси x; g – ускорение свободного падения. Штрих означает производную по t. Ось x горизонтальна и сориентирована по направляющей, ось u направлена вертикально вверх, опоры находятся в точках $x = 0$, $x = l$. Система Oxu принадлежит вертикальной плоскости и симметрична относительно направляющей.

Слагаемое, содержащее μ_2, в уравнении (1) моделирует плотность сил сопротивления изменению кривизны направляющей. Эти силы возникают вследствие относительного скольжения элементов пролета при его изгибе [4].

После перехода к безразмерным величинам по формулам

$$x = l\bar{x},\ u = l\bar{u},\ t = \frac{l}{v}\bar{t},\ \ p = \rho v^2 \bar{p},\ \delta(x - vt) = \frac{1}{l}\bar{\delta}(\bar{x} - \bar{t}),$$

$$\mu_1 = \frac{l}{v}\bar{\mu}_1,\ \mu_2 = \frac{l}{v}\bar{\mu}_2,\ \mu_3 = \frac{\rho v}{l}\bar{\mu}_3,\ y = l\bar{y}$$

получим задачу

$$G\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \mu_1 \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}\right) + \mu_3 \frac{\partial u}{\partial t} = p(t)\delta(x - t), \tag{2}$$

$$0 \le t \le 1,\ a^2 = \frac{T}{\rho v^2},\ G = \frac{EI}{\rho l^2 v^2},\ p(t) = -\frac{m}{M}\big(g_0 + y''(t)\big),\ g_0 = \frac{gl}{v^2},\ M = \rho l,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0,\ \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(1, t)}{\partial x^2} = 0, \tag{3}$$

$$u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

Для простоты записи черточки над безразмерными величинами опущены.

В целях удовлетворения граничных условий (3) решение уравнения (2) достаточно искать в виде [5]

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t)\sin(j\pi x).$$

После представления функции $\delta(x - t)$ рядом Фурье

$$\delta(x - t) = 2\sum_{j=1}^{\infty} \sin(j\pi t)\sin(j\pi x)$$

для функции $u_j(t)$ получим уравнение

$$u_j''(t) + \left(G\mu_1(j\pi)^4 + \mu_2(aj\pi)^2 + \mu_3\right)u_j'(t) + \left(G(j\pi)^4 + (aj\pi)^2\right)u_j(t) = 2p(t)\sin(j\pi t).$$

Решение этого уравнения при нулевых начальных условиях, которые получаются из условий (4), запишется следующим образом:

$$u_j(t) = \frac{2}{\beta_j}\int_0^t p(\tau)f_j(t, \tau)d\tau,\ 0 \le t \le 1,$$

$$f_j(t, \tau) = \sin(j\pi\tau)\operatorname{sh}\big(\beta_j(t - \tau)\big)e^{-\alpha_j(t-\tau)},$$

$$\alpha_j = \frac{1}{2}\left(G\mu_1(j\pi)^4 + \mu_2(aj\pi)^2 + \mu_3\right),\ \beta_j = \sqrt{\alpha_j^2 - G(j\pi)^4 - (aj\pi)^2}.$$

Теперь функция $u(x, t)$ примет вид

$$u(x, t) = 2\int_0^t p(\tau)F(x, t, \tau)d\tau,\ 0 \le t \le 1, \tag{5}$$

$$F(x, t, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j(t, \tau)}{\beta_j}\sin(j\pi x). \tag{6}$$

Заметим, что если хотя бы один из коэффициентов μ_1, μ_2 отличен от нуля, то при $a > 1$ ряд (6) содержит лишь конечное число затухающих гармоник по t.

Поскольку $x = t$ – это закон движения нагрузки вдоль горизонтальной оси в безразмерном виде, то при подстановке в формулы (5) и (6) t вместо x прогиб $y(t) = u(t, t)$ под нагрузкой найдется из интегро-дифференциального уравнения

$$y(t) + \frac{2m}{M}\int_0^t \big(g_0 + y''(\tau)\big)F(t, t, \tau)d\tau = 0,\ 0 \le t \le 1, \tag{7}$$

после решения которого прогиб направляющей в любой точке будет определяться формулой (5).

Приближенное решение уравнения (7) будем строить в виде кубического сплайна [6]. Для этого разобьем интервал $[0, 1]$ на отрезки длиной $h = \frac{1}{n}$ и на каждом из отрезков $\left[t_k, t_{k+1}\right]$, $k = \overline{0, n-1}$, функцию $y(t)$ приблизим полиномом [4]

$$y(t) = y(t_k) + (t - t_k)y'(t_k) + \frac{(t - t_k)^2}{2} y''(t_k) + (t - t_k)^3 C_k, \ \ t_k \le t \le t_{k+1}. \tag{8}$$

Во внутренних точках $t_k,\ k = \overline{1,\ n-2}$, используются условия непрерывного сопряжения значений соседних полиномов и их первых двух производных. Константы $C_k,\ k = \overline{0,\ n-1}$, находятся из условия выполнимости уравнения (7) в точке $t = t_{k+1}$, т. е. из уравнения

$$y(t_{k+1}) + \frac{2m}{M} \int_0^{t_{k+1}} (g_0 + y''(\tau)) F(t_{k+1},\ t_{k+1},\ \tau) d\tau = 0. \tag{9}$$

В частности, поскольку $y(1) = 0$ по условию задачи, то

$$C_{n-1} = -\frac{1}{h^3} D_{n-1},\ \ D_{n-1} = y(t_{n-1}) + hy'(t_{n-1}) + \frac{h^2}{2} y''(t_{n-1}).$$

Этот же результат следует и из уравнения (9), так как $F(1,\ 1,\ \tau) = 0$.

В начальный момент времени $t = 0$ значения $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ задаются как начальные условия. Значение $y''(0)$ получим из уравнения движения нагрузки, которое в безразмерном виде выглядит следующим образом:

$$y''(t) = -g_0 + \frac{R(t) l}{mv^2},$$

где $R(t)$ – реакция направляющей на нагрузку, зависящая от прогиба.

Это уравнение справедливо при любом $t \in [0,\ 1]$. Поэтому $R(0) = 0$, так как движение направляющей начинается из состояния покоя. Следовательно,

$$y''(0) = -g_0.$$

Получим теперь значения $C_k,\ k = \overline{0,\ n-2}.$ Уравнение (9) запишем в виде

$$D_k + h^3 C_k + \frac{2m}{M} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (g_0 + y''(t_k) + 6(\tau - t_k) C_k) F(t_{k+1},\ t_{k+1},\ \tau) d\tau +$$

$$+ \frac{2m}{M} \int_0^{t_k} (g_0 + y''(\tau)) F(t_{k+1},\ t_{k+1},\ \tau) d\tau = 0 \tag{10}$$

и введем функции

$$J(x,\ t,\ \tau) = \int F(x,\ t,\ \tau) d\tau,\ \ J_1(x,\ t,\ \tau) = \int J(x,\ t,\ \tau) d\tau.$$

$$\int \tau F(x,\ t,\ \tau) d\tau = \tau J(x,\ t,\ \tau) - J_1(x,\ t,\ \tau).$$

Тогда из уравнения (10), опуская промежуточные выкладки, имеем

$$C_k = \frac{W_{1k}}{W_{2k}},$$

$$W_{1k} = -\left(\frac{M}{2m} D_k + (g_0 + y''(t_k)) \left(J(t_{k+1},\ t_{k+1},\ t_{k+1}) - J(t_{k+1},\ t_{k+1},\ t_k) \right) + I_k \right),$$

$$W_{2k} = h^3 \frac{M}{2m} + 6hJ(t_{k+1},\ t_{k+1},\ t_{k+1}) - J_1(t_{k+1},\ t_{k+1},\ t_{k+1}) + J_1(t_{k+1},\ t_{k+1},\ t_k),$$

$$I_k = \int_0^{t_k} (g_0 + y''(\tau)) F(t_{k+1},\ t_{k+1},\ \tau) d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(g_0 + y''\left(t_{i-1}\right) + 6\left(\tau - t_{i-1}\right)C_{i-1}\right) F\left(t_{k+1}, t_{k+1}, \tau\right) d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \Big[\left(g_0 + y''\left(t_{i-1}\right) + 6hC_{i-1}\right) J\left(t_{k+1}, t_{k+1}, t_i\right) - \left(g_0 + y''\left(t_{i-1}\right)\right) J\left(t_{k+1}, t_{k+1}, t_{i-1}\right) -$$

$$- 6C_{i-1}\left(J_1\left(t_{k+1}, t_{k+1}, t_i\right) - J_1\left(t_{k+1}, t_{k+1}, t_{i-1}\right)\right)\Big], \; k = \overline{0, n-2}, \; I_0 = 0.$$

Таким образом, рекуррентными формулами

$$C_k = \frac{W_{1k}}{W_{2k}},$$

$$y\left(t_{k+1}\right) = y\left(t_k\right) + hy'\left(t_k\right) + \frac{h^2}{2} y''\left(t_k\right) + h^3 C_k,$$

$$y'\left(t_{k+1}\right) = y'\left(t_k\right) + hy''\left(t_k\right) + 3h^2 C_k,$$

$$y''\left(t_{k+1}\right) = y''\left(t_k\right) + 6hC_k,$$

$$k = \overline{0, n-1}, \; y(0) = y'(0) = 0, \; y''(0) = -g_0,$$

полностью определяются коэффициенты сплайна (8), что в итоге дает решение задачи. Заметим, что фигурирующие в решении интегралы $J(x, t, \tau)$, $J_1(x, t, \tau)$ легко вычисляются аналитически, однако их выражения здесь не приводятся ввиду громоздкости.

Библиографические ссылки

1. Савчук ВП, Титюра ОВ. Прогиб струны под движущейся нагрузкой. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2004;1:75–78.
2. Весницкий АИ. *Волны в системах с движущимися границами и нагрузками.* Москва: Физматлит; 2001. 320 с.
3. Филиппов АП. *Колебания деформируемых систем. 2-е издание.* Москва: Машиностроение; 1970. 734 с.
4. Савчук ВП. *Математическое моделирование задач динамики упругих систем.* Минск: БГУ; 2018. 111 с.
5. Alevy I. Solutions to the heat and wave equations and the connection to the Fourier series [Internet]. 2010 [cited 2019 January 21]. Available from: http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2010/REUPapers/Alevy.pdf.
6. Kaya E. Spline interpolation techniques. *Journal of Technical Science and Technologies.* 2013;2(1):47–52.

References

1. Savchuk VP, Titioura OV. A string bend under a moving load. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2004; 1:75–78. Russian.
2. Vesnitskii AI. *Volny v sistemakh s dvizhushchimisya granitsami i nagruzkami* [Waves in systems with moving boundaries and loads]. Moscow: Fizmatlit; 2001. 320 p. Russian.
3. Filippov AP. *Kolebaniya deformiruemykh sistem. 2-e izdanie* [Vibrations of elastic systems. 2nd editions]. Moscow: Mashinostroenie; 1970. 734 p. Russian.
4. Savchuk VP. *Matematicheskoe modelirovanie zadach dinamiki uprugikh sistem* [Mathematical modeling of dynamics problems for elastic systems]. Minsk: Belarusian State University; 2018. 111 p. Russian.
5. Alevy I. Solutions to the heat and wave equations and the connection to the Fourier series [Internet]. 2010 [cited 2019 January 21]. Available from: http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2010/REUPapers/Alevy.pdf.
6. Kaya E. Spline interpolation techniques. *Journal of Technical Science and Technologies.* 2013;2(1):47–52.

Статья поступила в редколлегию 22.02.2019.
Received by editorial board 22.02.2019.

УДК 517.948.32:517.544

ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. П. ШИЛИН [1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Изучено линейное уравнение на кривой, расположенной на комплексной плоскости. Уравнение содержит искомую функцию, ее производные 1-го и 2-го порядков, а также гиперсингулярные интегралы с искомой функцией. Коэффициенты уравнения имеют специальную структуру. Уравнение сведено к краевой задаче Римана для аналитических функций и двум линейным дифференциальным уравнениям 2-го порядка. Краевая задача решена с помощью формул Ф. Д. Гахова, а дифференциальные уравнения – методом вариации произвольных постоянных. Решение исходного уравнения построено в квадратурах. Результат сформулирован в виде теоремы. Приведен пример.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение; гиперсингулярный интеграл; краевая задача Римана; линейное дифференциальное уравнение.

EXPLICIT SOLUTION OF ONE HYPERSINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER

A. P. SHILIN [a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

The linear equation on the curve located on the complex plane is studied. The equation contains the desired function, its derivatives of the first and second orders, as well as hypersingular integrals with the desired function. The coefficients of the equation have a special structure. The equation is reduced to the Riemann boundary value problem for analytic functions and two second order linear differential equations. The boundary value problem is solved by Gakhov formulas, and the differential equations are solved by the method of variation of arbitrary constants. The solution of the original equation is constructed in quadratures. The result is formulated as a theorem. An example is given.

Keywords: integro-differential equation; hypersingular integral; Riemann boundary value problem; linear differential equation.

Гиперсингулярные интегральные уравнения, интегралы в которых понимаются в смысле конечной части по Адамару, возникают, например, в задачах аэро- и гидродинамики, квантовой физики, трещиноустойчивости. Основным способом решения таких уравнений являются численные методы [1; 2], точное аналитическое решение возможно в редких случаях.

Образец цитирования:
Шилин АП. Явное решение одного гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;2:67–72.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-67-72

For citation:
Shilin AP. Explicit solution of one hypersingular integro-differential equation of the second order. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;2:67–72. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-67-72

Автор:
Андрей Петрович Шилин – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики и математической физики физического факультета.

Author:
Andrei P. Shilin, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higner mathematics and mathematical physics, faculty of physics.
a.p.shilin@gmail.com

Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами рассмотрено и решено явно в работе Э. И. Зверовича [3]. Некоторые случаи переменных коэффициентов в подобных уравнениях изучены в [4] и продолжают исследоваться в настоящей работе.

Пусть L – простая замкнутая гладкая кривая на расширенной комплексной плоскости. Обозначим $D_\pm$ области, для которых кривая L является границей, $0 \in D_+$, $\infty \in D_-$. Ориентируем кривую L так, чтобы область D_+ оставалась слева.

Зададим H-непрерывные функции $a(t) \neq 0,\ b(t) \neq 0,\ f(t),\ t \in L$. Зададим функции $p_1(z),\ p_2(z)$, аналитические в области D_+ и H-непрерывные вместе со своими производными 1-го и 2-го порядков вплоть до кривой L. Зададим еще функции $q_1(z),\ q_2(z)$, аналитические в области D_- и также H-непрерывные вместе со своими производными 1-го и 2-го порядков вплоть до кривой L. Предположим, что $W\left(p_1(z),\ p_2(z)\right) \neq 0,\ z \in D_+ \cup L$, где (и везде далее) буквой W обозначен вронскиан соответствующих функций. Пусть $W\left(q_1(z),\ q_2(z)\right) \neq 0,\ z \in D_- \cup L,\ z \neq \infty$. Заметим, что для аналитических функций $q_1(z),\ q_2(z)$ всегда $W\left(q_1(\infty),\ q_2(\infty)\right) = 0$.

Рассмотрим уравнение с искомой функцией $\varphi(t)$, H-непрерывной вместе со своими производными 1-го и 2-го порядков:

$$\left[a(t)W\left(p_1'(t),\ p_2'(t)\right) + b(t)W\left(q_1'(t),\ q_2'(t)\right)\right]\varphi(t) -$$

$$-\left[a(t)W'\left(p_1(t),\ p_2(t)\right) + b(t)W'\left(q_1(t),\ q_2(t)\right)\right]\varphi'(t) +$$

$$+\left[a(t)W\left(p_1(t),\ p_2(t)\right) + b(t)W\left(q_1(t),\ q_2(t)\right)\right]\varphi''(t) +$$

$$+\left[a(t)W\left(p_1'(t),\ p_2'(t)\right) - b(t)W\left(q_1'(t),\ q_2'(t)\right)\right]\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} -$$

$$-\left[a(t)W'\left(p_1(t),\ p_2(t)\right) - b(t)W'\left(q_1(t),\ q_2(t)\right)\right]\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^2} +$$

$$+\left[a(t)W\left(p_1(t),\ p_2(t)\right) - b(t)W\left(q_1(t),\ q_2(t)\right)\right]\frac{2}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^3} = f(t),\ \ t \in L. \tag{1}$$

Введем кусочно-аналитическую функцию

$$\Phi_\pm(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - z},\ \ z \in D_\pm. \tag{2}$$

Используя для предельных значений на кривой L этой функции и ее производных обобщенные формулы Сохоцкого [5]

$$\Phi_+^{(k)}(t) - \Phi_-^{(k)}(t) = \varphi^{(k)}(t),\ \ \Phi_+^{(k)}(t) + \Phi_-^{(k)}(t) = \frac{k!}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^{k+1}},\ \ k = 0, 1, 2,$$

сведем уравнение (1) к краевой задаче линейного сопряжения:

$$2a(t)\left[W\left(p_1(t),\ p_2(t)\right)\Phi_+''(t) - W'\left(p_1(t),\ p_2(t)\right)\Phi_+'(t) + W\left(p_1'(t),\ p_2'(t)\right)\Phi_+(t)\right] =$$

$$= 2b(t)\left[W\left(q_1(t),\ q_2(t)\right)\Phi_-''(t) - W'\left(q_1(t),\ q_2(t)\right)\Phi_-'(t) + W\left(q_1'(t),\ q_2'(t)\right)\Phi_-(t)\right] + f(t),\ t \in L. \tag{3}$$

Введем новые неизвестные функции

$$\Psi_+(z) = W\left(p_1(z),\ p_2(z)\right)\Phi_+''(z) - W'\left(p_1(z),\ p_2(z)\right)\Phi_+'(z) +$$

$$+ W\left(p_1'(z),\ p_2'(z)\right)\Phi_+(z),\ \ z \in D_+, \tag{4}$$

$$\Psi_-(z) = W\left(q_1(z),\, q_2(z)\right)\Phi_-''(z) - W'\left(q_1(z),\, q_2(z)\right)\Phi_-'(z) +$$
$$+ W\left(q_1'(z),\, q_2'(z)\right)\Phi_-(z),\ z \in D_-. \tag{5}$$

При исходных предположениях это будут, очевидно, аналитические функции в соответствующих областях, имеющие H-непрерывные предельные значения $\Psi_\pm(t)$, $t \in L$. Следовательно, краевое условие (3) есть краевое условие задачи Римана

$$\Psi_+(t) = \frac{b(t)}{a(t)}\Psi_-(t) + \frac{f(t)}{2a(t)},\ t \in L. \tag{6}$$

Для решения этой задачи следует уточнить поведение функции $\Psi_-(z)$ на бесконечности.

Предположим, что разложение функций $q_j(z)$ в ряд Тейлора в окрестности бесконечности имеет вид $q_j(z) = k_j + \frac{l_j}{z} + \ldots,\ j = 1, 2$. Будем считать в дальнейшем, что коэффициенты этого разложения удовлетворяют неравенству

$$k_2 l_1 - k_1 l_2 \neq 0. \tag{7}$$

В этом случае легко установить, что $W\left(q_1(z),\, q_2(z)\right) \sim \frac{k}{z^2}$ при $z \to \infty$, где $k = k_2 l_1 - k_1 l_2$.

Функция $\Phi_-(z)$, введенная посредством интеграла типа Коши (2), должна иметь на бесконечности нуль по меньшей мере 1-го порядка. Тогда из равенства (5) вытекает, что $\Psi_-(\infty) = 0$, причем наименьший порядок нуля на бесконечности у функции $\Psi_-(z)$ будет при наименьшем порядке нуля у функции $\Phi_-(z)$. Пусть $\Phi_-(z) \sim \frac{l}{z}$ при $z \to \infty$ для некоторой ненулевой постоянной l. При $z \to \infty$ получим

$$W\left(q_1(z),\, q_2(z)\right)\Phi_-''(z) \sim \frac{2kl}{z^5},\ W'\left(q_1(z),\, q_2(z)\right)\Phi_-'(z) \sim \frac{2kl}{z^5},$$
$$W\left(q_1'(z),\, q_2'(z)\right)\Phi_-(z) = O\left(\frac{1}{z^6}\right),$$

тогда из равенства (5) вытекает, что $\Psi_-(z) = O\left(\frac{1}{z^6}\right)$.

Итак, краевую задачу Римана (6) следует решать в классе функций, имеющих на бесконечности нуль по меньшей мере 6-го порядка.

Предположим, что краевая задача (6) разрешима и функции $\Psi_\pm(z)$ найдены. Тогда соотношения (4), (5) станут линейными дифференциальными уравнениями 2-го порядка. Начнем с решения уравнения (4). Ему можно придать вид

$$\begin{vmatrix} p_1(z) & p_2(z) & \Phi_+(z) \\ p_1'(z) & p_2'(z) & \Phi_+'(z) \\ p_1''(z) & p_2''(z) & \Phi_+''(z) \end{vmatrix} = \Psi_+(z), \tag{8}$$

откуда понятно, что исходные функции $p_1(z)$, $p_2(z)$ будут играть роль фундаментальной системы решений соответствующего однородного уравнения. Далее можно применить метод вариации произвольных постоянных, он даст решение

$$\Phi_+(z) = C_1 p_1(z) + C_2 p_2(z) - p_1(z)\int_0^z \frac{p_2(\zeta)\Psi_+(\zeta)d\zeta}{W^2\left(p_1(\zeta),\, p_2(\zeta)\right)} + p_2(z)\int_0^z \frac{p_1(\zeta)\Psi_+(\zeta)d\zeta}{W^2\left(p_1(\zeta),\, p_2(\zeta)\right)},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, а путь интегрирования лежит в D_+.

Теперь приступим к решению уравнения (5). Записывая его аналогично уравнению (4) через определитель

$$\begin{vmatrix} q_1(z) & q_2(z) & \Phi_-(z) \\ q_1'(z) & q_2'(z) & \Phi_-'(z) \\ q_1''(z) & q_2''(z) & \Phi_-''(z) \end{vmatrix} = \Psi_-(z), \tag{9}$$

делаем вывод, что функции $q_1(z)$, $q_2(z)$ представляют собой фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения. Метод вариации произвольных постоянных приводит к решению

$$\Phi_-(z) = C_3 q_1(z) + C_4 q_2(z) - q_1(z)\int_\infty^z \frac{q_2(\zeta)\Psi_-(\zeta)d\zeta}{W^2(q_1(\zeta), q_2(\zeta))} + q_2(z)\int_\infty^z \frac{q_1(\zeta)\Psi_-(\zeta)d\zeta}{W^2(q_1(\zeta), q_2(\zeta))} \quad (10)$$

с произвольными постоянными C_3, C_4, путь интегрирования лежит в D_-.

Важно заметить, что при $z \to \infty$

$$q_j(\zeta) = O(1),\ \Psi_-(\zeta) = O\left(\frac{1}{\zeta^6}\right),\ W^2(q_1(\zeta), q_2(\zeta)) \sim \frac{k^2}{\zeta^4},$$

поэтому $\dfrac{q_j(\zeta)\Psi_-(\zeta)}{W^2(q_1(\zeta), q_2(\zeta))} = O\left(\dfrac{1}{\zeta^2}\right)$, $j = 1, 2$, так что интегралы в формуле (10) будут сходиться и давать те первообразные подынтегральных функций, которые равны нулю на бесконечности.

Добиваясь выполнения условия $\Phi_-(\infty) = 0$, мы должны потребовать, чтобы в формуле (10) постоянные C_3, C_4 были связаны равенством

$$C_3 q_1(\infty) + C_4 q_2(\infty) = 0, \quad (11)$$

или с использованием прежних обозначений $C_3 k_1 + C_4 k_2 = 0$. Из предположения (7) получаем, что обе постоянные k_1, k_2 одновременно в нуль не обращаются. Для определенности будем считать $k_2 = q_2(\infty) \neq 0$, тогда из равенства (11) получим $C_4 = -\dfrac{C_3 q_1(\infty)}{q_2(\infty)}$, а постоянная C_3 останется произвольной.

Таким образом, необходимыми и достаточными условиями разрешимости исходного уравнения (1) будут необходимые и достаточные условия разрешимости краевой задачи Римана (6). В случае разрешимости этой задачи мы всегда сумеем решить дифференциальные уравнения (4), (5) и затем записать искомую функцию по формуле $\varphi(t) = \Phi_+(t) - \Phi_-(t)$. Отразим это в виде теоремы, использующей формулы Ф. Д. Гахова [6] для решения краевой задачи Римана; при этом $\alpha = \operatorname{Ind}_L \dfrac{b(t)}{a(t)}$, $X_\pm(z)$ – канонические функции данной задачи.

Теорема. *При* $\alpha \geq 5$ *уравнение (1) безусловно разрешимо. При* $\alpha < 5$ *для его разрешимости необходимо и достаточно выполнение* $5 - \alpha$ *условий разрешимости*

$$\int_L \frac{f(\tau)\tau^j d\tau}{a(\tau)X_+(\tau)} = 0,\ \ j = 0, 1, \ldots, 4 - \alpha.$$

Решение уравнения (1) в случае его разрешимости содержит $3 + \max(0, \alpha - 5)$ *произвольных постоянных и находится по формуле*

$$\varphi(t) = C_1 p_1(t) + C_2 p_2(t) - p_1(t)\int_0^t \frac{p_2(z)\Psi_+(z)dz}{W^2(p_1(z), p_2(z))} + p_2(t)\int_0^t \frac{p_1(z)\Psi_+(z)dz}{W^2(p_1(z), p_2(z))} +$$

$$+ C_3\left(\frac{q_1(\infty)}{q_2(\infty)} q_2(t) - q_1(t)\right) + q_1(t)\int_\infty^t \frac{q_2(z)\Psi_-(z)dz}{W^2(q_1(z), q_2(z))} - q_2(t)\int_\infty^t \frac{q_1(z)\Psi_-(z)dz}{W^2(q_1(z), q_2(z))},$$

где C_1, C_2, C_3 *– произвольные постоянные,*

$$\Psi_\pm(z) = X_\pm(z)\left(\frac{1}{4\pi i}\int_L \frac{f(\tau)d\tau}{a(\tau)X_+(\tau)(\tau - z)} + P(z)\right),$$

где $P(z)$ *– многочлен степени* $\alpha - 6$ *с произвольными коэффициентами при* $\alpha \geq 6$, $P(z) \equiv 0$ *при* $\alpha < 6$.

Пример. Рассмотрим пример уравнения (1) на единичной окружности. Пусть $p_1(z) = \ln(z + 2)$, $p_2(z) = 2\sqrt{z + 2}$ (берем в замкнутой области $|z| \leq 1$ однозначные непрерывные ветви), $q_1(z) = e^{1/z}$,

$q_2(z)=e^{2/z},\ a(t)=b(t)=1,\ f(t)=2\left(\ln(t+2)-2\right)^2-\frac{2}{t^6}$. Легко проверить, что все указанные ранее требования для таких функций выполняются, а само уравнение приобретает вид

$$\left(\frac{1}{2(t+2)^2\sqrt{t+2}}-\frac{2e^{3/t}}{t^6}\right)\varphi(t)-\left(\frac{2-\ln(t+2)}{2(t+2)\sqrt{t+2}}+\frac{e^{3/t}(3+2t)}{t^4}\right)\varphi'(t)+$$

$$+\left(\frac{\ln(t+2)-2}{\sqrt{t+2}}-\frac{e^{3/t}}{t^2}\right)\varphi''(t)+\left(\frac{1}{2(t+2)^2\sqrt{t+2}}+\frac{2e^{3/t}}{t^6}\right)\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}-$$

$$-\left(\frac{2-\ln(t+2)}{2(t+2)\sqrt{t+2}}-\frac{e^{3/t}(3+2t)}{t^4}\right)\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}+$$

$$+\left(\frac{\ln(t+2)-2}{\sqrt{t+2}}+\frac{e^{3/t}}{t^2}\right)\frac{2}{\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^3}=2\left(\ln(t+2)-2\right)^2-\frac{2}{t^6},\ |t|=1.$$

Краевая задача Римана (6) станет для указанного примера задачей о скачке. Представляется интересным привести краевое условие этой задачи с помощью определителей такого вида, как в соотношениях (8), (9):

$$\frac{\sqrt{t+2}}{2(t+2)^3}\begin{vmatrix}\ln(t+2) & 2 & \Phi_+(t)\\ 1 & 1 & (t+2)\Phi_+'(t)\\ -2 & -1 & 2(t+2)^2\Phi_+''(t)\end{vmatrix}=\frac{e^{3/t}}{t^6}\begin{vmatrix}1 & 1 & \Phi_-(t)\\ -1 & -2 & t^2\Phi_-'(t)\\ 1+2t & 4(1+t) & t^4\Phi_-''(t)\end{vmatrix}+$$

$$+\left(\ln(t+2)-2\right)^2-\frac{1}{t^6},\ |t|=1.$$

Укажем также, в каком виде могут быть записаны соответствующие дифференциальные уравнения (4), (5):

$$\Phi_+''(z)+\frac{\ln(z+2)-4}{2(z+2)\left(\ln(z+2)-2\right)}\Phi_+'(z)+\frac{1}{2(z+2)^2\left(\ln(z+2)-2\right)}\Phi_+(z)=$$

$$=\left(\ln(z+2)-2\right)\sqrt{z+2},\ |z|<1,$$

$$\Phi_-''(z)+\left(\frac{3}{z^2}+\frac{2}{z}\right)\Phi_-'(z)+\frac{2}{z^4}\Phi_-(z)=-\frac{e^{-3/z}}{z^4},\ |z|>1.$$

На основании доказанной теоремы устанавливается безусловная разрешимость уравнения в примере, а вычисления приводят к следующему его общему решению:

$$\varphi(t)=\left(C_1-\frac{4}{5}\sqrt{t+2}(t+2)^2\right)\ln(t+2)+\left((t+2)^2\left(\ln(t+2)-\frac{1}{2}\right)+C_2\right)\sqrt{t+2}+$$

$$+C_3e^{2/t}-\left(C_3+\frac{1}{20}\right)e^{1/t}+\frac{1}{20}e^{3/t}.$$

Библиографические ссылки

1. Boykov IV, Ventsel ES, Boykova AI. An approximate solution of hypersingular integral equations. *Applied Numerical Mathematics*. 2010;60(6):607–628. DOI: 10.1016/j.apnum.2010.03.003.

2. Chan Y-S, Fannjiang AC, Paulino GH. Integral equations with hypersingular kernels – theory and applications to fracture mechanics. *International Journal of Engineering Science*. 2003;41(7):683–720. DOI: 10.1016/S0020-7225(02)00134-9.

3. Зверович ЭИ. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. *Доклады Национальной академии наук Беларуси*. 2010;54(6):5–8.

4. Зверович ЭИ, Шилин АП. Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2018; 54(4):404–407. DOI: 10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407.

5. Зверович ЭИ. Обобщение формул Сохоцкого. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2012;2:24–28.

6. Гахов ФД. *Краевые задачи*. Москва: Наука; 1977. 640 с.

References

1. Boykov IV, Ventsel ES, Boykova AI. An approximate solution of hypersingular integral equations. *Applied Numerical Mathematics*. 2010;60(6):607–628. DOI: 10.1016/j.apnum.2010.03.003.

2. Chan Y-S, Fannjiang AC, Paulino GH. Integral equations with hypersingular kernels – theory and applications to fracture mechanics. *International Journal of Engineering Science*. 2003;41(7):683–720. DOI: 10.1016/S0020-7225(02)00134-9.

3. Zverovich EI. [Solution of the hypersingular integro-differential equation with constant coefficients]. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 2010;54(6):5–8. Russian.

4. Zverovich EI, Shilin AP. [Solution of the integro-differential equations with a singular and hypersingular integrals]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2018;54(4):404–407. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407.

5. Zverovich EI. Generalization of Sohotsky formulas. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2012;2:24–28. Russian.

6. Gakhov FD. *Kraevye zadachi* [Boundary value problems]. Moscow: Nauka; 1977. 640 p. Russian.

Статья поступила в редколлегию 15.01.2019.
Received by editorial board 15.01.2019.

Юбилеи

Jubilees

Вениамин Григорьевич КРОТОВ

Veniamin Grigor'evich KROTOV

Исполнилось 70 лет доктору физико-математических наук, профессору заведующему кафедрой теории функций механико-математического факультета БГУ Вениамину Григорьевичу Кротову.

В. Г. Кротов родился 7 мая 1949 г. в Москве. В 1966 г., после окончания средней школы, поступил на механико-математический факультет Одесского государственного университета имени И. И. Мечникова, который окончил в 1971 г. Затем год работал учителем Ясcковской средней школы Беляевского района Одесской области.

С 1972 г. обучался в аспирантуре при кафедре математического анализа Одесского государственного университета под руководством В. А. Андриенко. В 1974 г. досрочно окончил аспирантуру и защитил кандидатскую диссертацию «Коэффициенты разложений по базисам функциональных пространств и представление измеримых функций рядами» по специальности «математический анализ». После защиты диссертации стал работать на этой же кафедре, сначала в должности ассистента (1974–1975), а затем – старшего преподавателя (1975–1978) и доцента (1978–1990). В 1979–1987 гг. был заместителем декана механико-математического факультета по научной работе. В 1984–1990 гг. являлся ученым секретарем специализированного совета по защите кандидатских диссертаций. В 1990 г. в Институте математики АН УССР защитил диссертацию «Граничное поведение и дифференциальные свойства гладких функций многих переменных» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности «математический анализ». С 1990 г. работал на кафедре математического анализа в должности профессора, а также был заместителем председателя специализированного совета по защите докторских диссертаций в Одесском государственном университете.

В 1993 г. В. Г. Кротов переехал из Одессы в Минск. В 1993–1996 гг. он был профессором кафедры современных технологий образования Белорусской государственной политехнической академии. В 1996 г. перешел на работу в Академию управления при Президенте Республики Беларусь, где занимал должности ведущего научного сотрудника и профессора кафедры информационных технологий управления.

С 1998 г. стал работать на механико-математическом факультете Белорусского государственного университета в должности профессора кафедры теории функций. С 2002 по 2010 г. был заведующим кафедрой математических методов теории управления. С 2010 г. по настоящее время заведует кафедрой теории функций.

Научные интересы В. Г. Кротова связаны с различными областями математического анализа. Первые его работы были посвящены поведению коэффициентов по классическим (системы Хаара и Фабера – Шаудера) и общим базисам в функциональных пространствах. Затем его научные интересы переместились в теорию представления измеримых функций рядами, где ему, в частности, удалось построить первые конкретные примеры универсальных рядов и доказать существование универсальных базисных разложений.

В 1975 г. была опубликована работа, в которой В. Г. Кротов, П. Освальд и Э. А. Стороженко перенесли на случай несуммируемых функций знаменитое неравенство Джексона для наилучших приближений тригонометрическими полиномами. Этот результат теперь входит почти во все монографии по теории приближения функций и очень часто цитируется.

После защиты кандидатской диссертации Вениамин Григорьевич был направлен на годичную стажировку в Математический институт Яноша Бойяи Сегедского университета имени Аттилы Йожефа (Венгрия). Руководитель стажировки академик Л. Лейндлер предложил В. Г. Кротову исследовать вопросы сильной суммируемости рядов Фурье. Полученные в этом направлении результаты вошли в монографию Л. Лейндлера по сильной суммируемости.

Основные достижения В. Г. Кротова в теории представления функций тригонометрическими рядами связаны с исследованиями Н. Н. Лузина, Д. Е. Меньшова и Н. К. Бари: им найдена оптимальная гладкость функций из теоремы Лузина – Меньшова – Бари, ряды Фурье – Стилтьеса которых представляют произвольные измеримые функции в смысле сходимости почти всюду. Методы, разработанные для этого, были использованы затем для построения универсальных функций Марцинкевича с максимально возможной гладкостью и следующим дополнительным свойством: ряд Фурье – Стилтьеса этой функции является универсальным в смысле сходимости почти всюду подпоследовательностей его частичных сумм.

С конца 1970-х гг. В. Г. Кротов под влиянием лидера одесской школы теории функций профессора Э. А. Стороженко приобщается к исследованиям по комплексному анализу, связанным с пространствами Харди. Сперва он изучает, какими дифференциальными свойствами обладают граничные значения функций из классов Харди – Соболева (гармонических или аналитических функций в многомерном комплексном шаре, гармонических функций или температур в полупространстве). Исчерпывающее решение этой задачи было дано в терминах дифференциалов Кальдерона – Зигмунда.

Затем его внимание привлекла новая тематика, связанная с касательным граничным поведением функций из пространств Харди. Хорошо известно, что подобные функции имеют пределы почти всюду на границе области определения вдоль подходящего семейства областей (например, некасательные области для функций в единичном круге). Этот эффект называют обычно свойством Фату. Дж. И. Литлвуд показал, что форма областей в свойстве Фату является точной и по более широким областям пределы уже не обязаны существовать. Задача состояла в следующем: дать точное количественное описание свойства Фату для функций, имеющих дополнительную гладкость. Исследования в этом направлении тогда только начинались в работах И. Стейна, А. Нагеля, У. Рудина. С помощью нового метода, значительно отличавшегося от методов предшественников, В. Г. Кротову удалось существенно продвинуться в ряде сложных задач о характере граничного поведения функций различной природы. Полученные результаты носят общий характер и имеют многочисленные приложения к гармоническим и голоморфным функциям из классов Харди – Соболева для многих переменных, а также к граничному поведению решений краевых задач для эллиптических и параболических уравнений в евклидовых пространствах. В конкретных приложениях эти результаты носят точный характер и не допускают улучшения.

В последние годы В. Г. Кротов вместе со своими учениками занимается анализом на метрических пространствах с мерой, удовлетворяющих условию удвоения (пространства однородного типа по устоявшейся терминологии). На такие пространства удалось перенести многое из классического анализа на евклидовых пространствах. Это относится к теории сингулярных интегральных операторов, теории пространств Харди и другим важным разделам современного анализа. В частности, удалось перенести теорию классов Соболева первого порядка. Конечно, подобные пространства не могут определяться как обычно – с помощью обобщенных производных. Подходящую функцию выполняют неравенства локальной гладкости и максимальные операторы, контролирующие такую гладкость (эти объекты и возможности их использования восходят к А. Кальдерону). Исследованию в такой общей ситуации поддаются не все факты о классах Соболева, а лишь те, которые не связаны с гармоническим анализом. В работах В. Г. Кротова и его учеников изучены следующие задачи о классах Соболева на пространствах однородного типа: различные описания этих пространств, теоремы вложения Харди – Литлвуда – Соболева, а также тонкие свойства функций (так называются свойства, которые могут меняться при изменении значений функции на множествах меры нуль). Основные решенные в этом направлении задачи – оценки для исключительного множества в теоремах о точках Лебега (в которых интегральные средние сходятся) и об аппроксимации Лузина для функций из пространств Соболева. Решение дано в терминах соответствующих емкостей, а также мер и размерностей Хаусдорфа. Принципиальным здесь является то, что изучены также случаи, когда функции из классов Соболева не обязаны быть суммируемыми. При этом показано, что в классическом случае пространств Соболева на евклидовых пространствах эти результаты точны и не допускают усиления.

В. Г. Кротов – автор 180 научных работ. Долгое время (1974–1992) был постоянным сотрудником реферативного журнала «Математика». В. Г. Кротова регулярно приглашают для чтения лекций на международных конференциях. Он является членом оргкомитета ряда регулярных математических форумов:

• Международной саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Россия, проводится с 1982 г.);

• Международной казанской летней школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Россия, проводится с 1993 г.);

• Международного симпозиума «Ряды Фурье и их приложения» (Абрау-Дюрсо, Россия, проводится с 1999 г.).

Научная деятельность В. Г. Кротова тесно связана с педагогической работой, его учениками являются восемь кандидатов и один доктор физико-математических наук.

На протяжении педагогической деятельности читал для студентов механико-математических факультетов различные курсы лекций («Математический анализ», «Функциональный анализ», «Теория функций комплексного переменного», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Введение в математику», «Стохастический анализ финансовых рынков»), а также ряд специальных курсов, связанных с разными разделами математического анализа («Теория приближения функций», «Базисы в пространствах Банаха», «Функциональные пространства», «Гармонический анализ на евклидовых пространствах», «Теория пространств Харди», «Интегральные операторы», «Ортогональные ряды» и др.).

Он – автор нескольких учебных пособий с грифами Министерства образования Республики Беларусь:

• «LATEX. Компьютерная система подготовки математических текстов» – в соавторстве с А. С. Ляликовым (Минск : БГУ, 2010. 250 с.);

• «Математический анализ» (Минск : БГУ, 2017. 375 с.);

• «Теория функций комплексного переменного» – в соавторстве с Е. А. Ровбой, А. П. Старовойтовым, Е. А. Сетько, К. А. Смотрицким (Минск : Выш. школа, 2019. 430 с.).

Ведет активную научную, методическую и общественную деятельность. Был членом экспертного совета по математике ВАК Республики Беларусь (2005–2011), является председателем совета по физико-математическим наукам (Д 02.01.07), секретарем совета по педагогическим наукам (Д 02.01.23), председателем секции математики учебно-методического объединения Министерства образования Республики Беларусь, с 1999 г. – председателем научно-методической комиссии механико-математического факультета БГУ.

Сердечно поздравляем Вениамина Григорьевича с 70-летием, желаем ему крепкого здоровья, большого счастья и новых творческих успехов.

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ В БГУ РАБОТ
INDICATIVE ABSTRACTS OF THE PAPERS DEPOSITED IN THE BSU

УДК 004(075.8)
Мартон М. В. **Основы информационных технологий** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-21 02 01 «Философия» / М. В. Мартон, О. А. Велько ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2019. 121 с. : ил. Библиогр.: с. 120–121. Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/216078. Загл. с экрана. Деп. 05.03.2019, № 002805032019.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Основы информационных технологий» предназначен для студентов специальности 1-21 02 01 «Философия». ЭУМК включает лекционный материал, планы лабораторных работ, примерные тестовые задания, примерные промежуточные контрольные работы, вопросы для подготовки к зачету, примерный тематический план, содержание учебного материала, список литературы.

УДК 004(075.8)
Велько О. А. **Информационные технологии** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-86 01 01 «Социальная работа (по направлениям)», направления специальности: 1-86 01 01-02 «Социальная работа (социально-психологическая деятельность)», 1-86 01 01-03 «Социальная работа (социально-реабилитационная деятельность)», 1-86 01 01-04 «Социальная работа (социально-экономическая деятельность)» / О. А. Велько, Н. А. Моисеева ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2019. 153 с. : ил. Библиогр.: с. 152–153. Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/216079. Загл. с экрана. Деп. 05.03.2019, № 002905032019.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Информационные технологии» предназначен для студентов специальности 1-86 01 01 «Социальная работа (по направлениям)». ЭУМК включает лекционный материал, планы лабораторных работ, примерные тестовые задания, примерные промежуточные контрольные работы, вопросы для подготовки к экзамену, примерный тематический план, содержание учебного материала, список литературы.

УДК 004(075.8)
Велько О. А. **Основы информационных технологий** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-23 01 05 «Социология» / О. А. Велько, М. В. Мартон ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2019. 145 с. : ил. Библиогр.: с. 144–145. Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/216305. Загл. с экрана. Деп. 06.03.2019, № 003006032019.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Основы информационных технологий» предназначен для студентов специальности 1-23 01 05 «Социология». ЭУМК включает лекционный материал, планы лабораторных работ, примерные тестовые задания, примерные промежуточные контрольные работы, вопросы для подготовки к зачету, примерный тематический план, содержание учебного материала, список литературы.

УДК 004(075.8)
Велько О. А. **Основы информационных технологий** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-23 01 06 «Политология (по направлениям)», направление специальности 1-23 01 06-01 «Политология (политико-юридическая деятельность)» / О. А. Велько [и др.] ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2019. 152 с. : ил. Библиогр.: с. 151–152. Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/216313. Загл. с экрана. Деп. 06.03.2019, № 003106032019.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Основы информационных технологий» предназначен для студентов специальности 1-23 01 06 «Политология (по направлениям)». ЭУМК включает лекционный материал, планы лабораторных работ, примерные тестовые задания, примерные промежуточные контрольные работы, вопросы для подготовки к экзамену, примерный тематический план, содержание учебного материала, список рефератов, список литературы.

УДК 514.12(075.8)
Аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 07 «Прикладная информатика (по направлениям)» / сост.: Г. П. Размыслович, А. В. Филипцов ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2019. 961 с. : ил. Библиогр.: с. 960–961. Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/219719. Загл. с экрана. Деп. 23.05.2019, № 006323052019.

Настоящий электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) разработан в соответствии с образовательным стандартом первой ступени высшего образования для специальности 1-31 03 07 «Прикладная информатика (по направлениям)» и предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Аналитическая геометрия» для студентов данной специальности.

УДК 512(075.8)+511(075.8)
Алгебра и теория чисел [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 07 «Прикладная информатика (по направлениям)» / сост.: Г. П. Размыслович, А. В. Филипцов ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2019. 1809 с. : ил. Библиогр.: с. 1807–1809. Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/219726. Загл. с экрана. Деп. 23.05.2019, № 006423052019.

Настоящий электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) разработан в соответствии с образовательным стандартом первой ступени высшего образования для специальности 1-31 03 07 «Прикладная информатика (по направлениям)» и предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Алгебра и теория чисел» для студентов данной специальности.

УДК 514.12(075.8)+512(075.8)
Абрашина-Жадаева Н. Г. **Приведение уравнений второй степени к каноническому виду** [Электронный ресурс] : учеб.-метод. разработка для студентов физ. фак. и фак. радиофизики и комп. технологий / Н. Г. Абрашина-Жадаева [и др.] ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2019. 21 с. : ил. Библиогр.: с. 21. Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/220590. Загл. с экрана. Деп. 28.05.2019, № 006528052019.

Приводятся краткие теоретические сведения из теории уравнений второй степени (подробные сведения можно найти в пособии [1]). Рассматривается алгоритм приведения линий и поверхностей второго порядка к каноническому виду. В качестве приложения проиллюстрированы этапы практического применения алгоритма. Разбирается большое количество примеров. Предлагаются задачи для самостоятельного решения с ответами.

СОДЕРЖАНИЕ

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ЮБИЛЕИ

CONTENTS

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

MATHEMATICAL LOGIC, ALGEBRA AND NUMBER THEORY

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

SHORT COMMUNICATIONS

JUBILEES

Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области математики и информатики).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ).

Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. № 2. 2019

Учредитель:
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск.
Почтовый адрес: пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск.
Тел. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.
E-mail: jmathinf@bsu.by
URL: https://journals.bsu.by/index.php/mathematics

«Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика» издается с января 1969 г.
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика» (ISSN 1561-834X).

Редактор *О. А. Семенец*
Технический редактор *В. В. Пишкова*
Корректор *Л. А. Меркуль*

Подписано в печать 12.07.2019.
Тираж 100 экз. Заказ 251.

Республиканское унитарное предприятие «Информационно-вычислительный центр Министерства финансов Республики Беларусь».
ЛП № 02330/89 от 03.03.2014.
Ул. Кальварийская, 17, 220004, г. Минск.

Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. No. 2. 2019

Founder:
Belarusian State University

Registered address: 4 Niezaliežnasci Ave., Minsk 220030.
Correspondence address: 4 Niezaliežnasci Ave., Minsk 220030.
Tel. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.
E-mail: jmathinf@bsu.by
URL: https://journals.bsu.by/index.php/mathematics

«Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics» published since January, 1969.
Until 2017 named «Vestnik BGU. Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika» (ISSN 1561-834X).

Editor *O. A. Semenets*
Technical editor *V. V. Pishkova*
Proofreader *L. A. Merkul'*

Signed print 12.07.2019.
Edition 100 copies. Order number 251.

Republican Unitary Enterprise «Informatsionno-vychislitel'nyi tsentr Ministerstva finansov Respubliki Belarus'».
License for publishing No. 02330/89, 3 March, 2014.
17 Kal'varyjskaja Str., Minsk 220004.