
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

УДК 539.3

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Э. И. СТАРОВОЙТОВ¹⁾, Ю. В. ШАФИЕВА¹⁾, Г. В. МОСКВИТИН²⁾

¹⁾Белорусский государственный университет транспорта, ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель, Беларусь

²⁾Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН,
пер. Малый Харитоньевский, 4, 101000, г. Москва, Россия

Аннотация. Исследован упругий осесимметричный изгиб круговой трехслойной пластины в нестационарном температурном поле. Использовано приближенное решение задачи теплопроводности, полученное с помощью усреднения теплофизических характеристик материалов слоев по толщине пластины. Принято, что деформирование пластины подчиняется гипотезе ломаной линии. Для тонких несущих слоев, воспринимающих основную нагрузку, справедливы гипотезы Кирхгофа. Относительно толстый легкий наполнитель сжимаем по толщине, в нем

Образец цитирования:

Старовойтов ЭИ, Шафиева ЮВ, Москвитин ГВ. Деформирование трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем в температурном поле. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025;1: 58–67.

EDN: XXLFSW

For citation:

Starovoitov EI, Shafiyeva YuV, Moskvitin GV. Deformation of a three-layer plate with a compressible filler in the temperature field. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;1:58–67. Russian.

EDN: XXLFSW

Авторы:

Эдуард Иванович Старовойтов – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры строительной механики, геотехники и строительных конструкций факультета промышленного и гражданского строительства.

Юлия Викторовна Шафиева – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры строительных технологий факультета промышленного и гражданского строительства.

Геннадий Викторович Москвитин – доктор технических наук, профессор; заведующий лабораторией надежности и долговечности при термомеханических циклических воздействиях.

Authors:

Eduard I. Starovoitov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of structural mechanics, geotechnics and building structures, faculty of industrial and civil engineering.

edstar0@yandex.by

Yuliya V. Shafiyeva, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of construction technologies, faculty of industrial and civil engineering.

zakharchuk.julia2@mail.ru

Gennady V. Moskvitin, doctor of science (engineering), full professor; head of the laboratory of reliability and durability under thermomechanical cyclic effect.

gvmoskvitin@yandex.ru

выполняется гипотеза Тимошенко. Для вывода системы уравнений равновесия применен принцип возможных перемещений Лагранжа. Получено общее аналитическое решение соответствующей краевой задачи. Численно исследовано изменение перемещений в пластине при различных температурах.

Ключевые слова: упругая трехслойная пластина; сжимаемый наполнитель; осесимметричное нагружение; температурное поле.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025».

DEFORMATION OF A THREE-LAYER PLATE WITH A COMPRESSIBLE FILLER IN THE TEMPERATURE FIELD

E. I. STAROVOITOV^a, Yu. V. SHAFIYEVA^a, G. V. MOSKVITIN^b

^a*Belarusian State University of Transport, 34 Kirava Street, Gomel 246653, Belarus*

^b*A. A. Blagonravov Institute of Mechanical Engineering,
Russian Academy of Sciences, 4 Malyj Haritonjevskij Lane, Moscow 101000, Russia*

Corresponding author: E. I. Starovoitov (edstar0@yandex.by)

Abstract. The elastic axisymmetric bending of a circular three-layer plate in a nonstationary temperature field is herein investigated. An approximate solution to the problem of thermal conductivity is used, obtained by averaging the thermo-physical characteristics of the materials of the layers over the thickness of the plate. It is accepted that the deformation of the plate obeys the polyline hypothesis. Kirchhoff's hypotheses are valid for thin load-bearing layers that take on the main load. A relatively thick lightweight filler is compressible in thickness, and the Timoshenko hypothesis is fulfilled in it. To derive a system of equilibrium equations, the principle of possible Lagrange displacements is applied. A general analytical solution of the corresponding boundary value problem is obtained. The change of displacements in the plate at different temperatures is numerically investigated.

Keywords: elastic three-layer plate; compressible filler; axisymmetric loading; temperature field.

Acknowledgements. This work was carried out within the framework of the state programme of scientific research «Convergence-2025».

Введение

Актуальность разработки новых математических моделей для исследования упругого деформирования композитных стержней, пластин и оболочек при термосиловых нагрузках определяется их широким применением в машиностроении, строительстве и при транспортировке энергоносителей. Монографии [1–3] посвящены разработке расчетных математических моделей деформирования неоднородных, в том числе трехслойных, элементов конструкций.

Исследование свободных и вынужденных колебаний, резонансных и нестационарных нагружений неоднородных цилиндрических оболочек проведено в работах [4–9]. Статьи [10; 11] посвящены описанию резонансных, а также линейно изменяющихся во времени воздействий на круговые трехслойные пластины. Колебания трехслойных пластин, связанных с упругим основанием Винклера, рассмотрены в публикациях [12; 13]. В работах [14; 15] проанализировано акустическое и динамическое деформирование неоднородных пластин с учетом внутреннего трения в материале и внешнего аэродинамического демпфирования. В статьях [16; 17] рассмотрены рассеяние упругих волн в сильно неоднородной трехслойной пластине и внутренний сдвиг асимметричной многослойной пластины.

Квазистатический изгиб трехслойных балок исследован в публикациях [18–22], при этом были учтены реакция упругого основания, жесткость межслойных соединений и упругопластические свойства материалов слоев. Ряд задач о деформировании неоднородных круговых пластин решен в статьях [23–28], в частности исследованы несущая способность, изгиб при распределенной нагрузке, влияние граничных условий на формы равновесия, неосесимметричное растяжение-сжатие в своей плоскости. Сжимаемость наполнителя при изгибе трехслойных пластин без учета теплового воздействия ранее была описана в работах [29–31].

В предлагаемой работе исследуется влияние нестационарного температурного поля на деформирование упругой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем.

Постановка краевой задачи термоупругости

Пусть на внешнюю поверхность несимметричной по толщине круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем падает тепловой поток с интенсивностью q_t (рис. 1). Нижняя поверхность ($z = -c - h_2$) и контур ($r = 1$) теплоизолированы.

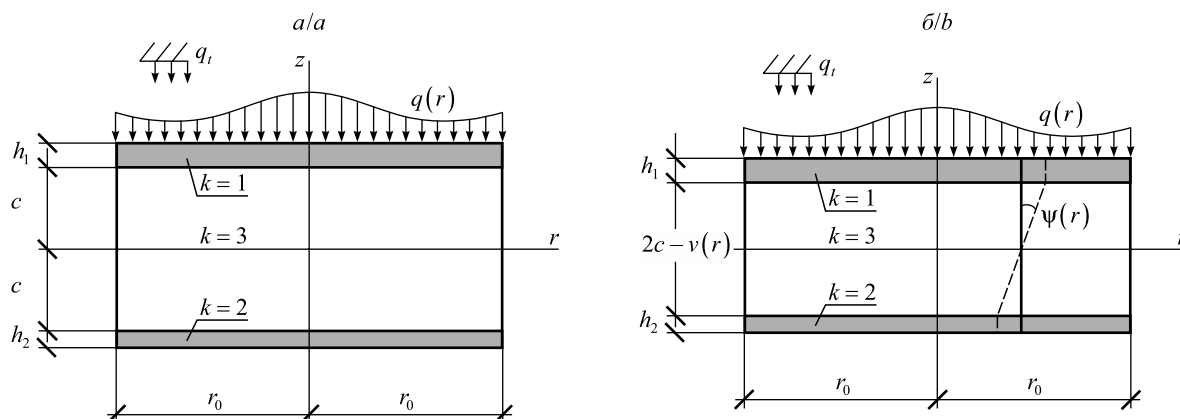


Рис. 1. Расчетная схема круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем

Fig. 1. Calculation scheme of a circular three-layer plate with a compressible filler

Приращение температуры $T(z)$ по толщине пластины во времени t описывается приближенной формулой, приведенной в статье [27]:

$$T = \frac{q_t H}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left(s + \frac{c + h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[\pi n \left(s + \frac{c + h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\}, \quad (1)$$

где $\tau = \frac{at}{H^2}$; $s = \frac{z}{H}$; $\lambda = \sum_{k=1}^3 \frac{\lambda_k h_k}{H}$; $a = \frac{\lambda}{C}$; $C = \sum_{k=1}^3 \frac{C_k h_k \rho_k}{H}$; $H = h_1 + h_2 + h_3$; $h_1 \neq h_2$ – толщины несущих слоев; $h_3 = 2c$ – толщина заполнителя; λ_k – коэффициент теплопроводности; C_k – коэффициент теплоемкости;

ρ_k – плотность материала. Здесь и далее $k = 1, 2, 3$ – номер слоя.

Формула (1) была получена в результате решения задачи теплопроводности с помощью усреднения теплофизических характеристик материалов трехслойной пластины по толщине слоев (вывод представлен, например, в работе [32]). В частном случае при $h_2 = h_3 = 0$ из нее следует точная формула для однослойной пластины, приведенная в монографии [33].

Постановка и решение задачи проводятся в цилиндрической системе координат, привязанной к срединной плоскости заполнителя. Кинематические гипотезы предполагают, что в тонких внешних несущих слоях нормаль не изменяет своей длины, остается прямолинейной и перпендикулярной срединной плоскости слоя (гипотезы Кирхгофа). Обжатие относительно толстого легкого заполнителя принимается линейным по толщине. Нормаль заполнителя остается прямолинейной, но при этом изменяет длину и поворачивается на дополнительный угол $\psi(r, t)$. На контуре пластины обжатие заполнителя и относительный сдвиг отсутствуют, что соответствует наличию на нем жесткой диафрагмы. Кроме относительного сдвига $\psi(r, t)$, искомыми функциями будут $u(r, t)$ и $w(r, t)$ – радиальные перемещения и прогибы точек координатной плоскости, $v(r, t)$ – линейная функция обжатия заполнителя. Зависимость указанных перемещений от времени определяется нестационарным температурным полем (1).

В силу осесимметричности распределенной нагрузки $q = q(r)$ окружные перемещения отсутствуют ($u_\phi^{(k)} = 0$), а искомые величины – $\psi(r, t)$, $u(r, t)$, $w(r, t)$, $v(r, t)$ – не зависят от координаты ϕ . Радиальные перемещения $u^{(k)}(r, z)$ и прогибы $w^{(k)}(r, z)$ точек k -го слоя выражаются через указанные четыре функции.

В верхнем ($k = 1$) и нижнем ($k = 2$) несущих слоях

$$\begin{aligned} u_r^{(1)}(r, z) &= u + c\psi - z(w_r + v_r), \quad w^{(1)}(r, z) = w + v \quad (c \leq z \leq c + h_1), \\ u_r^{(2)}(r, z) &= u - c\psi - zw_r, \quad w^{(2)}(r, z) = w \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c). \end{aligned} \quad (2)$$

В заполнителе ($k = 3$)

$$\begin{aligned} u_r^{(3)}(r, z) &= u + z\psi - z \left[w_{r,r} + \frac{v_{r,r}}{2c}(z + c) \right], \\ w^{(3)}(r, z) &= w + \frac{v}{2c}(z + c) \quad (-c \leq z \leq c). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь z – вертикальная координата точек слоя; штрих в нижнем индексе обозначает производную по радиальной координате.

Подставив в соотношения Коши [1] перемещения (2) и (3), получим следующие деформации в слоях:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(1)} &= u_{r,r} + c\psi_{r,r} - z(w_{r,rr} + v_{r,rr}), \quad \varepsilon_\phi^{(1)} = \frac{1}{r}(u + c\psi - z(w_{r,r} + v_{r,r})), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0 \quad (c \leq z \leq c + h_1), \\ \varepsilon_r^{(2)} &= u_{r,r} - c\psi_{r,r} - zw_{r,rr}, \quad \varepsilon_\phi^{(2)} = \frac{1}{r}(u - c\psi - zw_{r,r}), \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0 \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \\ \varepsilon_r^{(3)} &= u_{r,r} + z\psi_{r,r} - z \left[w_{r,rr} + \frac{v_{r,r}}{2c}(z + c) \right], \quad \varepsilon_\phi^{(3)} = \frac{1}{r} \left\{ u + z\psi - z \left[w_{r,r} + \frac{v_{r,r}}{2c}(z + c) \right] \right\}, \\ \varepsilon_{rz}^{(3)} &= \frac{1}{2} \left(\psi - \frac{z}{2c} v_{r,r} \right), \quad \varepsilon_z^{(3)} = \frac{v}{2c} \quad (-c \leq z \leq c). \end{aligned} \quad (4)$$

Напряжения в слоях пластины можно вычислить через деформации (4), воспользовавшись законом Гука, учитывающим температуру:

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)} &= 2G_k \varepsilon_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T_k) \quad (\alpha = r, \phi), \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(3)}, \quad s_z^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_z^{(3)}, \quad \sigma^{(3)} = 3K_3 (\varepsilon^{(3)} - \alpha_{03} T_3), \end{aligned} \quad (5)$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\varepsilon_\alpha^{(k)}$ – девиаторы тензоров напряжений и деформаций; $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – шаровые составляющие тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – модули сдвига и объемного деформирования материалов слоев, зависящие от температуры T_k в k -м слое; α_{0k} – коэффициент линейного температурного удлинения.

Используя тензоры напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$, введем обобщенные внутренние усилия

$$\begin{aligned} T_\alpha &= \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha = \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \quad S_\alpha^{(3)} = \int_{-c}^c \sigma_\alpha^{(3)} z^2 dz, \\ H_\alpha &= M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}), \quad D_\alpha = M_\alpha^{(1)} + \frac{1}{2} M_\alpha^{(3)} + \frac{1}{2c} S_\alpha^{(3)} \quad (\alpha = r, \phi), \end{aligned} \quad (6)$$

где $T_\alpha^{(k)}$, $M_\alpha^{(k)}$ – внутренние усилия в слоях пластины.

Система уравнений равновесия в обобщенных внутренних усилиях (6) получена с помощью вариационного метода Лагранжа, при этом работа касательных ($\sigma_{rz}^{(3)}$) и нормальных ($\sigma_z^{(3)}$) напряжений в заполнителе в силу принятых гипотез не учитывалась [29]:

$$\begin{aligned} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\phi) &= 0, \quad M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\phi,r}) = -q, \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\phi) &= 0, \quad D_{r,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r,r} - D_{\phi,r}) = -q. \end{aligned} \quad (7)$$

На контуре пластины ($r = r_0$) должны выполняться силовые условия

$$\begin{aligned} T_r &= T_r^0, \quad H_r = H_r^0, \quad M_r = M_r^0, \quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\phi) = 0, \\ D_r &= D_r^0, \quad D_{r,r} + \frac{1}{r}(D_r - D_\phi) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где T_r^0 , H_r^0 , M_r^0 , D_r^0 – заданные усилия на границе.

Чтобы из системы (7) получить уравнения равновесия в перемещениях, нужно с помощью соотношений (2)–(6) выразить внутренние усилия через искомые функции. Например, для обобщенного момента M_r получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} M_r = & \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] u_{,r} + \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{u}{r} + \\ & + \left[K_1^+ c h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^+ c h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^3 \right] \psi_{,r} + \\ & + \left[K_1^- c h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^- c h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} K_3^- c^3 \right] \frac{\psi}{r} - \\ & - \left[K_1^+ h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^3 \right] w_{,rr} - \\ & - \left[K_1^- h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^- h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} K_3^- c^3 \right] \frac{w_{,r}}{r} - \\ & - \left[K_1^+ h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_3^+ \frac{c^3}{3} \right] v_{,rr} - \\ & - \left[K_1^- h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_3^- \frac{c^3}{3} \right] \frac{v_{,r}}{r} - 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} K_k \int_{h_k} T_k z dz, \end{aligned} \quad (9)$$

где введены обозначения

$$K_k^+ = K_k(T_k) + \frac{4}{3} G_k(T_k), \quad K_k^- = K_k(T_k) - \frac{2}{3} G_k(T_k).$$

Эта формула отличается от приведенных ранее в работах [29; 30] формул наличием в конце температурного слагаемого и зависимостью модулей упругости от температуры. Выражение для момента M_φ следует из выражения (9), если поменять местами величины K_k^+ и K_k^- . В результате после подстановки в уравнения (7) обобщенных внутренних усилий, выраженных через искомые функции, получим систему дифференциальных уравнений, описывающую деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем в температурном поле:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r} - a_4 v_{,r}) + K_3^- v_{,r} &= 0, \\ L_2(a_2 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r} - a_7 v_{,r}) &= 0, \\ L_3(a_3 u + a_6 \psi - a_8 w_{,r} - a_9 v_{,r}) &= -q, \\ L_3(a_4 u + a_7 \psi - a_9 w_{,r} - a_{10} v_{,r}) + \frac{c}{6} K_3^- \left(v_{,rr} + \frac{v_{,r}}{r} \right) &= -q, \end{aligned} \quad (10)$$

где a_i – коэффициенты, выражаемые через упругие и геометрические параметры слоев,

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 K_{k0}, \quad a_2 = c(K_{10} - K_{20}), \quad a_3 = \sum_{k=1}^3 K_{k1}, \quad a_4 = K_{11} + \frac{1}{2c} K_{32}, \\ a_5 &= K_{32} + c^2(K_{10} + K_{20}), \quad a_6 = K_{32} + c(K_{11} + K_{21}), \quad a_7 = c a_4, \quad a_8 = \sum_{k=1}^3 K_{k2}, \\ a_9 &= K_{12} + \frac{1}{2} K_{32}, \quad a_{10} = K_{12} + \frac{2}{5} c^3 K_{32}, \quad K_{km} = \int_{h_k} \left[K_k(T_k) + \frac{4}{3} G_k(T_k) \right] z^m dz \quad (m = 0, 1, 2); \end{aligned}$$

L_2, L_3 – линейные дифференциальные операторы вида

$$L_2(g) \equiv g_{rr} + \frac{g_r}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv g_{rrr} + \frac{2g_{rr}}{r} - \frac{g_r}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Краевая задача о деформировании трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем замыкается добавлением к системе дифференциальных уравнений (10) силовых условий (8) или кинематических граничных условий на контуре ($r = r_0$). Кроме того, должны быть ограничены перемещения в центре пластины ($r = 0$).

При жесткой заделке контура пластины должны выполняться требования

$$u = \psi = w = v = w_r = v_r = 0 \text{ при } r = r_0. \quad (11)$$

В случае шарнирного опирания контура предъявляются следующие требования:

$$u = \psi = w = v = v_{rr} = 0, \quad M_r = 0 \text{ при } r = r_0. \quad (12)$$

Общее аналитическое решение краевой задачи

В результате аналитического исследования системы дифференциальных уравнений (10) получено следующее решение:

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{1}{a_6} L_3^{-1}(q) - \frac{1}{a_6} (a_3 u - a_8 w_r - a_9 v_r) + \frac{C_1 r}{4a_6} (2 \ln r - 1) + C_3 \frac{r}{2} + C_4 \frac{1}{r}, \\ w &= \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \int u dr - \frac{a_6 a_7 - a_5 a_9}{a_6^2 - a_5 a_8} v - \frac{a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \int L_3^{-1}(q) dr + \\ &\quad + \frac{C_1 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \frac{r^2}{4} (\ln r - 1) + C_{10} \frac{r^2}{4} + C_{11} \ln r + C_{12}, \\ u &= b_1 v_r + (b_2 + b_3) L_3^{-1}(q) - \frac{r}{4} (2 \ln r - 1) (b_2 C_1 + b_3 C_2) + C_5 \frac{r}{2} + C_6 \frac{1}{r}, \\ v &= -\frac{C_7}{\beta} J_0(\beta r) - \frac{C_8}{\beta} Y_0(\beta r) + \frac{\pi}{2} \left(\int Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1(r) r dr dr - \right. \\ &\quad \left. - \int J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1(r) r dr dr \right) + C_9, \end{aligned} \quad (13)$$

где $J_0(\beta r)$, $J_1(\beta r)$ – функции Бесселя; $Y_0(\beta r)$, $Y_1(\beta r)$ – функции Неймана; C_i – константы интегрирования; $q_1 = \frac{A}{r} \int q r dr$ – функция нагрузки; β , A – параметры, выражаемые через коэффициенты a_i , введенные в системе уравнений (10).

Искомое решение должно быть ограничено в начале координат, поэтому, учитывая особенности логарифма и функций Неймана в нуле, необходимо положить равными нулю следующие константы интегрирования: $C_1 = C_2 = C_4 = C_6 = C_8 = C_{11} = 0$.

В результате решение (13) при равномерно распределенной поверхностной нагрузке $q = q_0 = \text{const}$ принимает вид

$$\begin{aligned} v &= -\frac{C_7}{\beta} J_0(\beta r) + \frac{q_0 r}{2\beta^2} (p_1 + p_2) + C_9, \\ \psi &= -\frac{q_0 r^3}{16a_6} - \frac{1}{a_6} (a_3 u - a_8 w_r - a_9 v_r) + C_3 \frac{r}{2}, \quad u = b_1 v_r + (b_2 + b_3) \frac{q_0 r^3}{16} + C_5 \frac{r}{2}, \\ w &= \left(b_1 \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} - \frac{a_6 a_7 - a_5 a_9}{a_6^2 - a_5 a_8} \right) v + \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} C_5 \frac{r^2}{4} + \\ &\quad + \frac{q_0 r^4}{64(a_6^2 - a_5 a_8)} ((a_2 a_6 - a_3 a_5)(b_2 + b_3) - a_5) + C_{10} \frac{r^2}{4} + C_{12}, \end{aligned} \quad (14)$$

где b_i , p_i – коэффициенты, выражаемые через величины a_i , введенные в системе уравнений (10).

При жесткой заделке контура пластины из граничных условий (11) следует, что

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{q_0 r_0^2}{8a_6}, \quad C_5 = -(b_2 + b_3) \frac{q_0 r_0^2}{8}, \quad C_7 = -\frac{q_0}{2\beta^2 J_1(\beta r_0)} (p_1 + p_2), \\ C_9 &= \frac{C_7}{\beta} J_0(\beta r_0) - \frac{q_0 r_0}{2\beta^2} (p_1 + p_2), \quad C_{10} = \frac{a_5}{8(a_6^2 - a_5 a_8)} q_0 r_0^2, \\ C_{12} &= -\frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \left(\frac{(b_2 + b_3) q_0 r_0^4}{64} + C_5 \frac{r_0^2}{4} \right) + \frac{a_5}{64(a_6^2 - a_5 a_8)} q_0 r_0^4 - C_{10} \frac{r_0^2}{4}. \end{aligned} \quad (15)$$

В случае шарнирного опирания контура константы интегрирования определяются из граничных условий (12) и включают температуру в явном виде из-за зависимости момента M_r (9) от температуры. Следует отметить, что в решении (14), (15) зависимость модулей упругости от температуры рассчитывается по формуле Белла [34].

Численные результаты

На рис. 2–6 показано изменение перемещений в пластине с несущими слоями, выполненными из дюралюминия марки Д16-Т, и заполнителем, изготовленным из фторопласта-4. Механические характеристики материалов приведены в монографии [1]. Толщины слоев, отнесенные к радиусу пластины, составляли $c = 0,23$, $h_1 = 0,03$, $h_2 = 0,03$. Контур жестко заделан. Результаты получены для пластины единичного радиуса.

Необходимость учета сжимаемости заполнителя иллюстрирует рис. 2, на котором показаны прогибы слоев пластины при изотермической нагрузке $q_0 = -0,5$ МПа. Решение краевой задачи при изгибе подобной пластины с несжимаемым заполнителем приведено в работе [32]. В этом случае прогиб рассчитывается по формуле

$$w = -b_1 \frac{q_0}{64} (r^4 - 2r_0^2 r^2 + r_0^4) \quad (b_1 = \text{const})$$

и практически совпадает с кривой 3, что указывает на преимущество представленной математической модели деформирования трехслойных пластин со сжимаемым заполнителем с известной моделью, в которой заполнитель не сжимаем.

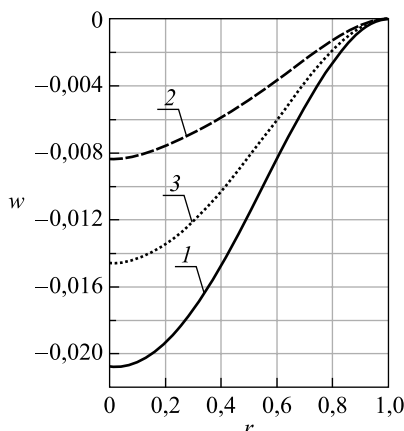


Рис. 2. Прогибы несущих слоев и заполнителя пластины:
1 – прогиб верхнего слоя; 2 – прогиб нижнего слоя;
3 – прогиб срединной плоскости заполнителя

Fig. 2. Deflections of bearing layers and filler of the plate:
1 – deflection of the upper layer; 2 – deflection of the lower layer;
3 – deflection of the median plane of the filler

Максимальное различие прогибов при учете сжимаемости заполнителя достигает 42 %. Это вносит существенную поправку в напряженно-деформированное состояние пластины.

На рис. 3–6 представлены графики изменения искомых перемещений – прогиба $w(r)$ нижнего слоя пластины, функции обжатия заполнителя $v(r)$, относительного сдвига $\psi(r)$ и радиального перемеще-

ния $u(r)$ срединной плоскости заполнителя под воздействием температурного поля при интенсивности равномерно распределенной нагрузки $q = 1$ МПа. Температура в пластине проинтегрирована по вертикальной координате в соответствии с обобщенными внутренними усилиями (6) и не зависит от z . Ее увеличение на каждом шаге принималось равным 60 К. Рост температуры на 60 К приводит к увеличению функций $w(r)$ и $\psi(r)$ на 5,0 %, а функций $v(r)$ и $u(r)$ на 7,5 %.

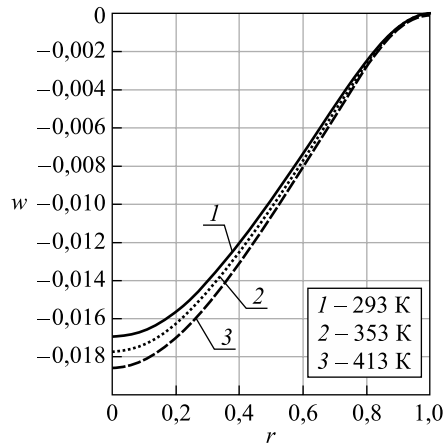


Рис. 3. Прогиб нижнего слоя пластины при различных температурах

Fig. 3. Deflection of the lower layer of the plate at various temperatures

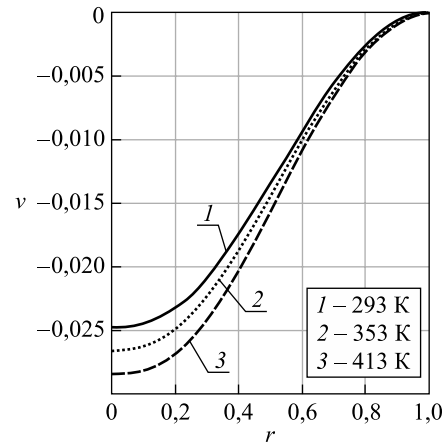


Рис. 4. Функция обжатия заполнителя при различных температурах

Fig. 4. Filler compression function at various temperatures

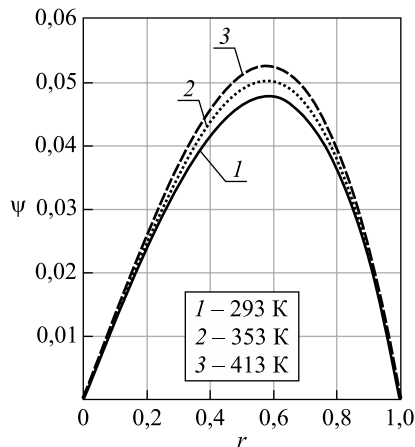


Рис. 5. Относительный сдвиг в заполнителе при различных температурах

Fig. 5. Relative shift in the filler at various temperatures

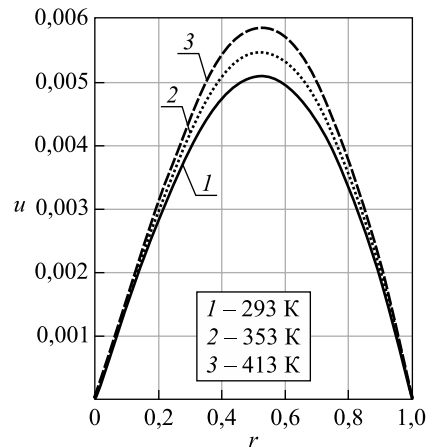


Рис. 6. Радиальное перемещение срединной плоскости заполнителя при различных температурах

Fig. 6. Radial displacement of the median plane of the filler at various temperatures

Для верификации расчетной модели деформирования трехслойных элементов конструкций, учитывающей относительный сдвиг в заполнителе, в лаборатории кафедры строительной механики, геотехники и строительных конструкций факультета промышленного и гражданского строительства Белорусского государственного университета транспорта были проведены экспериментальные исследования изгиба трехслойной балки прямоугольного поперечного сечения с жесткими диафрагмами на торцах. Несущие слои были выполнены из семислойной березовой фанеры с модулями упругости $E_1 = 6000$ МПа, $G_1 = 750$ МПа, а заполнитель изготовлен из пенополистирола с модулями упругости $E_2 = 15$ МПа, $G_2 = 5,14$ МПа.

Наибольший расчетный прогиб $w_{\max}$ составил 2,0 мм с учетом относительного сдвига в заполнителе и 1,4 мм без учета относительного сдвига. Эксперимент, проведенный в лаборатории, дал значение

2,1 мм [35]. Следовательно, учет относительного сдвига в заполнителе делает расчетную модель менее жесткой и приближает численные результаты к экспериментальным значениям.

Заключение

Приведенные постановка и аналитическое решение краевой задачи подтверждают необходимость учета сжимаемости материала заполнителя в круговой трехслойной пластине при деформировании в температурном поле. Численные результаты показали увеличение расчетного прогиба верхнего несущего слоя на 42 % при учете сжимаемости заполнителя. С ростом температуры все перемещения увеличиваются однотипно в соответствии с уменьшением характеристик упругости материалов слоев, рассчитываемых по формуле Белла.

Библиографические ссылки

1. Zhuravkov M, Lyu Yongtao, Starovoitov E. *Mechanics of solid deformable body*. Singapore: Springer; 2023. XV, 308 p. DOI: 10.1007/978-981-19-8410-5.
2. Aghalovyan L. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. Prikazchikov D, translator. Singapore: World Scientific; 2015. XV, 360 p. DOI: 10.1142/9048.
3. Carrera E, Fazzolari FA, Cinefra M. *Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells: computational modelling and applications*. Amsterdam: Academic Press; 2016. XXXI, 408 p.
4. Gorshkov AG, Starovoitov EI, Yarovaya AV. Harmonic vibrations of a viscoelastoplastic sandwich cylindrical shell. *International Applied Mechanics*. 2001;37(9):1196–1203. DOI: 10.1023/A:1013290600951.
5. Mikhasev GI, Eremeyev VA, Wilde K, Maevskaya SS. Assessment of dynamic characteristics of thin cylindrical sandwich panels with magnetorheological core. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2019;30(18–19):2748–2769. DOI: 10.1177/1045389X19873423.
6. Mikhasev GI, Altenbach H. *Thin-walled laminated structures: buckling, vibrations and their suppression*. Cham: Springer; 2019. Chapter 4, Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells; p. 157–198 (Advanced structured materials; volume 106). DOI: 10.1007/978-3-030-12761-9_4.
7. Bakulin VN, Boitsova DA, Nedbai AY. Parametric resonance of a three-layered cylindrical composite rib-stiffened shell. *Mechanics of Composite Materials*. 2021;57(5):623–634. DOI: 10.1007/s11029-021-09984-9.
8. Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2014;43(2):145–152. DOI: 10.3103/S1052618814010178.
9. Suvorov YeM, Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012;76(5):511–518. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015.
10. Starovoitov EI, Leonenko DV, Tarlakovsky DV. Resonance vibrations of a circular composite plates on an elastic foundation. *Mechanics of Composite Materials*. 2015;51(5):561–570. DOI: 10.1007/s11029-015-9527-2.
11. Kondratov DV, Mogilevich LI, Popov VS, Popova AA. Hydroelastic oscillations of a circular plate, resting on Winkler foundation. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018;944:012057. DOI: 10.1088/1742-6596/944/1/012057.
12. Старовойтов ЭИ, Леоненко ДВ. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2015;21(2):162–169. EDN: UEBAFJ.
13. Леоненко ДВ, Маркова МВ. Колебания круговой трехслойной пластины под действием линейной во времени внешней нагрузки. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2023;1:49–63. EDN: WFKRZG.
14. Paimushin VN, Gazizullin RK. Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate. *Mechanics of Composite Materials*. 2017;53(3):283–304. DOI: 10.1007/s11029-017-9662-z.
15. Paimushin VN, Firsov VA, Shishkin VM. Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonant vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping. *Mechanics of Composite Materials*. 2017;53(4):425–440. DOI: 10.1007/s11029-017-9673-9.
16. Kaplunov J, Prikazchikov DA, Prikazchikova LA. Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate. *International Journal of Solids and Structures*. 2017;113–114:169–179. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.01.042.
17. Kaplunov J, Prikazchikova L, Alkinidri M. Antiplane shear of an asymmetric sandwich plate. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2021;33(4):1247–1262. DOI: 10.1007/s00161-021-00969-6.
18. Starovoitov EI, Leonenko DV. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation. *Mechanics of Solids*. 2011;46(2):291–298. DOI: 10.3103/S002565441102018X.
19. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation. *International Applied Mechanics*. 2007;43(4):451–459. DOI: 10.1007/s10778-007-0042-6.
20. Xie Z. An approximate solution to the plastic indentation of circular sandwich panels. *Mechanics of Composite Materials*. 2018;54(2):243–250. DOI: 10.1007/s11029-018-9735-7.
21. Škec L, Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection. *Acta Mechanica*. 2014;225(2):523–541. DOI: 10.1007/s00707-013-0972-5.
22. Pradhan M, Dash PR, Pradhan PK. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient. *Meccanica*. 2016;51(3):725–739. DOI: 10.1007/s11012-015-0229-6.
23. Wang Z, Lu G, Zhu F, Zhao L. Load-carrying capacity of circular sandwich plates at large deflection. *Journal of Engineering Mechanics*. 2017;143(9):04017057. DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001243.
24. Zadeh HV, Tahani M. Analytical bending analysis of a circular sandwich plate under distributed load. *International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering*. 2017;6(1):1–10. DOI: 10.14810/ijmech.2017.6101.

25. Yang L, Harrysson O, West H, Cormier D. A comparison of bending properties for cellular core sandwich panels. *Materials Sciences and Applications*. 2013;4(8):471–477. DOI: 10.4236/msa.2013.48057.
26. Бауэр СМ, Воронкова ЕБ. Влияние условий закрепления на появление несимметричных форм равновесия у круглых пластин под действием нормального давления. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2020;1:38–46. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-1-38-46.
27. Старовойтов ЭИ, Журавков МА, Нестерович АВ. Термосиловое нагружение упругопластической трехслойной пластины. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2023;3:42–52. EDN: EJWCME.
28. Roshchin MN, Moskvitin GV, Balashova AV. On the issue of investigating the strength of the IVV.10M reactor vessel and internals. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2010;39(4):343–350. DOI: 10.3103/S1052618810040072.
29. Захарчук ЮВ. Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины со сжимаемым заполнителем. *Механика. Исследования и инновации*. 2018;11:80–87. EDN: ZGWWQP.
30. Захарчук ЮВ. Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем. *Механика. Исследования и инновации*. 2019;12:66–75. EDN: FPJQZA.
31. Starovoitov EI, Zakharchuk YV, Kuznetsova EL. Elastic circular sandwich plate with compressible filler under axially symmetrical thermal force load. *Journal of the Balkan Tribological Association*. 2021;27(2):175–188. EDN: PWNFMU.
32. Горшков АГ, Старовойтов ЭИ, Яровая АВ. *Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций*. Москва: Физматлит; 2005. 576 с.
33. Коваленко АД. *Термоупругость*. Киев: Вища школа; 1975. 216 с.
34. Белл ДжФ. *Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Часть I, Малые деформации*. Филин АП, редактор; Иофин ЛЕ, Кан ВЛ, Канаун СК, Левин ВМ, Мордвинцев АГ, Филина ЛИ, переводчики. Москва: Наука; 1984. 596 с.
35. Яровая АВ, Поддубный АА. Теоретическое и экспериментальное исследование прогибов упругой шарнирно опертой трехслойной балки. *Вестник Белорусского государственного университета транспорта: наука и транспорт*. 2012;2:93–98. EDN: KCVHHG.

Получена 27.08.2024 / исправлена 25.02.2025 / принята 25.02.2025.
Received 27.08.2024 / revised 25.02.2025 / accepted 25.02.2025.