

УДК 515.12

ОБ ИНФИМУМЕ ПРОКСИМАЛЬНЫХ ТОПОЛОГИЙ ГИПЕРПРОСТРАНСТВА

А. С. БЕДРИЦКИЙ¹⁾, В. Л. ТИМОХОВИЧ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Изучаются свойства топологии $\tau_{\delta(\text{inf})}$, являющейся инфимумом семейства $\mathcal{T}_{\delta}$ всех ρ -проксимальных топологий $\tau_{\delta(\rho)}$ на гиперпространстве метризуемого топологического пространства. Как основной результат находится необходимое и достаточное условие совпадения $\inf \mathcal{T}_{\delta} = \tau_{\delta(\rho)}$ (т. е. условие достижения инфимума). Кроме того, исследуется связь топологии $\tau_{\delta(\text{inf})}$ с инфимумом семейства $\mathcal{T}_W$ всех топологий Вайсмана, с инфимумом семейства $\mathcal{T}_H$ всех топологий, порожденных метриками Хаусдорфа, а также с топологией Фелла. Во второй части статьи рассматриваются непрерывное отображение $X \xrightarrow{f} Y$ и его продолжение $\exp_{\delta(\text{inf})} X \xrightarrow{\bar{f}} \exp_{\delta(\text{inf})} Y$ на гиперпространства $\exp X$, $\exp Y$, снабженные топологией $\tau_{\delta(\text{inf})}$, где $\bar{f}(F) = [f(F)]_Y$ ($[\cdot]_Y$ – оператор замыкания в пространстве Y). Для отображения $\bar{f}$ получено достаточное условие непрерывности, которое является также и необходимым условием, если Y – локально компактное пространство со счетной базой.

Ключевые слова: гиперпространство; ρ -проксимальная топология; топология Вайсмана; метрика Хаусдорфа; инфимальная топология.

Образец цитирования:

Бедрицкий АС, Тимохович ВЛ. Об инфимуме проксимальных топологий гиперпространства. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2026;2:39–48.
EDN: DULTGW

For citation:

Bedritskiy AS, Timokhovich VL. On the infimum of proximal topologies of the hyperspace. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2026;2:39–48. Russian.
EDN: DULTGW

Авторы:

Александр Сергеевич Бедрицкий – аспирант кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета. Научный руководитель – В. Л. Тимохович.

Владимир Леонидович Тимохович – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета.

Authors:

Alexander S. Bedritskiy, postgraduate student at the department of geometry, topology and mathematics teaching methodology, faculty of mechanics and mathematics.

bedrickias@bsu.by

Vladimir L. Timokhovich, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of geometry, topology and mathematics teaching methodology, faculty of mechanics and mathematics.

timvlaleo@gmail.com

ON THE INFIMUM OF PROXIMAL TOPOLOGIES OF THE HYPERSPACE

A. S. BEDRITSKIY^a, V. L. TIMOKHOVICH^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: A. S. Bedritskiy (bedrickias@bsu.by)

Abstract. We investigate properties of a topology $\tau_{\delta(\text{inf})}$, which is the infimum of a family $\mathcal{T}_{\delta}$ of all ρ -proximal topologies $\tau_{\delta(\rho)}$ on the hyperspace of a metrisable topological space. As a main result a necessary and sufficient condition of a coincidence $\inf \mathcal{T}_{\delta} = \tau_{\delta(\rho)}$ (i. e. the condition of existing the minimum) is found. Besides the relations between the topology $\tau_{\delta(\text{inf})}$ and the infimum of a family $\mathcal{T}_W$ of all Wijsman topologies, the infimum of a family $\mathcal{T}_H$ of all Hausdorff metric topologies, and the Fell topology are studied. In the second part of the article we consider a continuous map $X \xrightarrow{f} Y$ and its extension $\exp_{\delta(\text{inf})} X \xrightarrow{\bar{f}} \exp_{\delta(\text{inf})} Y$ on the hyperspaces $\exp X, \exp Y$, endowed with the topology $\tau_{\delta(\text{inf})}$, where $\bar{f}(F) = [f(F)]_Y$ ($[\cdot]_Y$ is a closure operator in the space Y). For the map $\bar{f}$ we've got a sufficient condition of its continuity. This condition is also necessary, if Y is a locally compact space with countable base.

Keywords: hyperspace; ρ -proximal topology; Wijsman topology; Hausdorff metric; infimum topology.

Введение

Всякое многозначное отображение $X \xrightarrow{\Phi} Y$ (образ $\Phi(x)$ точки $x \in X$ – непустое замкнутое множество в пространстве Y) можно рассматривать как однозначное отображение из пространства X в экспоненту (гиперпространство) $\exp Y$ пространства Y . Это обстоятельство и потребности современного анализа, где многозначное отображение является одним из основных понятий [1; 2], мотивируют проведение исследований топологических свойств экспоненты, в частности таких топологических структур на $\exp X$, отличных от классических топологий Вьеториса τ_V [3; 4] и топологии $\tau_{\hat{\rho}}$ метрики Хаусдорфа $\hat{\rho}$ [4; 5], как сходимость по Вайсману и топология Вайсмана $\tau_{W(\rho)}$ [6–8], топология Фелла τ_F [8–10], ρ -проксимальная топология $\tau_{\delta(\rho)}$ [7; 8] и др. В предлагаемой работе рассматривается ρ -проксимальная топология $\tau_{\delta(\rho)}$ на $\exp X$ и устанавливаются ее некоторые, в частности функториальные, свойства.

Кратко рассмотрим используемые понятия и обозначения. Под пространством будем понимать топологическое T_1 -пространство. Пусть X – пространство с топологией τ , $A \subseteq X$, $x \in X$, ρ – некоторая метрика на X . Будем писать $A \subseteq_{\text{op}} X$ ($A \subseteq_{\text{cl}} X$), если множество A открыто (замкнуто соответственно) в пространстве X . Введем следующие обозначения: $[A]_X$ ($[A]_{\tau}$, $[A]_{\rho}$) – замыкание множества A в пространстве X (относительно топологии τ , относительно метрики ρ соответственно); $B_{\rho}(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$, $D_{\rho}(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid \rho(x, y) \leq \varepsilon\}$ и $B_{\rho}(A, \varepsilon) = \bigcup_{a \in A} B_{\rho}(a, \varepsilon)$ – открытый и замкнутый шары и ε -раздутие множества A относительно метрики ρ соответственно ($\varepsilon > 0$); $\exp X = \{F \subseteq X \mid \emptyset \neq F \subseteq_{\text{cl}} X\}$ – экспонента (гиперпространство) пространства X (как правило, с некоторой топологией); $\hat{X} = \{\{x\} \in \exp X \mid x \in X\}$ – канонический образ пространства X в экспоненте $\exp X$; $A^- = \{F \in \exp X \mid F \cap A \neq \emptyset\}$, $A^+ = \{F \in \exp X \mid F \subset A\}$, $A^{++} = \{F \in \exp X \mid B_{\rho}(F, \varepsilon) \subset A \text{ для некоторого } \varepsilon > 0\}$ ($A^{++(\rho)}$ при необходимости уточнения), $\langle A_1, \dots, A_n \rangle = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^+ \cap \left(\bigcap_{i=1}^n A_i^- \right)$, $W_{\rho}(x, \varepsilon) = \{F \in \exp X \mid F \cap D_{\rho}(x, \varepsilon') = \emptyset \text{ для некоторого } \varepsilon' > \varepsilon\}$ ($\varepsilon > 0$); Ω_X – множество всех допустимых (т. е. согласованных с топологией) метрик на X .

Последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ в пространстве X назовем Δ -последовательностью, если $a_n \neq a_k$ при $n \neq k$ и множество $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ замкнуто и дискретно (как подпространство). Будем говорить, что последовательности $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ дизъюнкты, если $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$. Через $a_n \xrightarrow{\tau} x$ ($a_n \xrightarrow{\rho} x$) будем обозначать сходимость относительно топологии τ (метрики ρ соответственно).

Для $\rho \in \Omega_X$, $F, P \in \exp X$ введем следующие обозначения: $e_\rho(F, P) = \sup\{\rho(x, P) \mid x \in F\}$ – отклонение (*excess*) множества F от множества P относительно метрики ρ ; $\hat{\rho}(F, P) = \max\{e_\rho(F, P), e_\rho(P, F)\} = \inf\{\varepsilon > 0 \mid B_\rho(F, \varepsilon) \supset P \text{ и } B_\rho(P, \varepsilon) \supset F\}$ – метрика Хаусдорфа на $\exp X$, соответствующая метрике ρ (возможно, $\hat{\rho}(F, P) = \infty$ для некоторых $F, P \in \exp X$, что не влияет на определение топологии $\tau_{\hat{\rho}}$).

Напомним, что топология Вьеториса τ_V , топология Фелла τ_F , топология Вайсмана $\tau_{W(\rho)}$ и ρ -проксимальная топология $\tau_{\delta(\rho)}$, где $\rho \in \Omega_X$, задаются предбазами, состоящими из множеств вида U^- и U^+ , где $U \subseteq_{\text{ор}} X$, для τ_V ; U^- и V^+ , где $U \subseteq_{\text{ор}} X$, $V \subseteq_{\text{ор}} X$ и $X \setminus V$ компактно, для τ_F ; U^- и $W_\rho(x, \varepsilon)$, где $U \subseteq_{\text{ор}} X$, $x \in X$ и $\varepsilon > 0$, для $\tau_{W(\rho)}$; U^- и U^{++} , где $U \subseteq_{\text{ор}} X$, для $\tau_{\delta(\rho)}$. Базы топологий τ_V и τ_F составляют множества вида $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$, где все U_i открыты в X , для τ_V ; $\langle V_1, \dots, V_n \rangle$, где все V_i открыты в X и $X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n V_i\right)$ компактно, для τ_F . Локальная база для $F \in \exp X$ в топологии $\tau_{W(\rho)}$ представлена множествами вида $\left(\bigcap_{i=1}^n B_\rho(x_i, \varepsilon)^-\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^m W_\rho(y_j, \delta_j)\right)$, а в топологии $\tau_{\delta(\rho)}$ – множествами вида $B_\rho(F, \varepsilon)^{++} \cap \left(\bigcap_{i=1}^n B_\rho(x_i, \varepsilon)^-\right)$, где $\varepsilon > 0$, $\{y_1, \dots, y_m\} \subset X \setminus F$, $0 < \delta_j < \rho(y_j, F)$ и $\{x_1, \dots, x_n\} \subset F$ в обоих случаях.

Пространства $(\exp X, \tau_V)$, $(\exp X, \tau_{\hat{\rho}})$, ... кратко будем обозначать через $\exp_V X$, $\exp_{\hat{\rho}} X$ и т. п. Также будем использовать сокращенные записи, например $[\mathcal{H}]_V$ вместо $[\mathcal{H}]_{\tau_V}$, $[\mathcal{H}]_F$ вместо $[\mathcal{H}]_{\tau_F}$ ($\mathcal{H} \subset \exp X$), $F_n \xrightarrow[\delta(\rho)]{} F$ вместо $F_n \xrightarrow[\tau_{\delta(\rho)}]{} F$ и т. п.

Пусть далее пространство X метризуемо и $\rho \in \Omega_X$. Основные соотношения между топологиями τ_V , $\tau_{\hat{\rho}}$, $\tau_{\delta(\rho)}$, $\tau_{W(\rho)}$ и τ_F хорошо известны [7; 8]: $\tau_V \geq \tau_{\delta(\rho)}$ (т. е. $\tau_V \supset \tau_{\delta(\rho)}$), $\tau_{\hat{\rho}} \geq \tau_{\delta(\rho)}$ и $\tau_{\delta(\rho)} \geq \tau_{W(\rho)} \geq \tau_F$; каждое из совпадений $\tau_{\hat{\rho}} = \tau_{\delta(\rho)}$ и $\tau_{\delta(\rho)} = \tau_{W(\rho)}$ равносильно полной ограниченности метрики ρ , совпадение $\tau_{\delta(\rho)} = \tau_F$ равносильно компактности пространства X , совпадение $\tau_V = \tau_{\delta(\rho)}$ возможно тогда и только тогда, когда ρ – метрика Ацуши (т. е. $\rho(F, P) > 0$ для любых дизъюнктных $F, P \in \exp X$ [8; 11]), а совпадение $\tau_{W(\rho)} = \tau_F$ равносильно выполнению для метрики ρ условия (NCB) (*nice closed balls*), согласно которому любой замкнутый шар $D_\rho(x, \varepsilon)$ в пространстве X , отличный от всего пространства, компактен.

Тот факт, что для всякого непустого подсемейства $\mathcal{T}$ в частично упорядоченном по включению семействе всех топологий на $\exp X$ определены $\inf \mathcal{T}$ ($\inf \mathcal{T} = \bigcap\{t \mid t \in \mathcal{T}\}$) и $\sup \mathcal{T}$ (топология $\sup \mathcal{T}$ задается предбазой $\bigcup\{t \mid t \in \mathcal{T}\}$), вызвал интерес к исследованиям инфимальных и супремальных топологий, возникающих на $\exp X$ соответственно семействам $\mathcal{T}_H = \{\tau_{\hat{\rho}} \mid \rho \in \Omega_X\}$, $\mathcal{T}_W = \{\tau_{W(\rho)} \mid \rho \in \Omega_X\}$, $\mathcal{T}_\delta = \{\tau_{\delta(\rho)} \mid \rho \in \Omega_X\}$ и др. Как оказалось, обе топологии $\tau_{\delta(\sup)} = \sup \mathcal{T}_\delta$ и $\tau_{W(\sup)} = \sup \mathcal{T}_W$ совпадают с топологией Вьеториса τ_V [7], а топология $\tau_{H(\sup)} = \sup \mathcal{T}_H$ совпадает с локально конечной топологией τ_{LF} , предбазу которой составляют множества вида U^+ и $\langle \alpha \rangle^- = \{F \in \exp X \mid F \cap V \neq \emptyset \text{ для любого } V \in \alpha\}$, где $U \subseteq_{\text{ор}} X$; α – локально конечное семейство открытых в пространстве X множеств [12]. Свойства инфимальных топологий $\tau_{H(\inf)} = \inf \mathcal{T}_H$ и $\tau_{W(\inf)} = \inf \mathcal{T}_W$ исследовались в работах [13–16]. В частности, были найдены необходимые и достаточные условия достижения инфимума (т. е. совпадений $\tau_{H(\inf)} = \tau_{\hat{\rho}}$ [13; 14] и $\tau_{W(\inf)} = \tau_{W(\rho)}$ [16], где $\rho \in \Omega_X$). В настоящей работе в качестве основного объекта изучения рассматривается инфимальная топология $\tau_{\delta(\inf)} = \inf \mathcal{T}_\delta = \bigcap\{\tau_{\delta(\rho)} \mid \rho \in \Omega_X\}$, устанавливаются ее некоторые, в частности функториальные, свойства и соотношения с другими экспоненциальными топологиями.

Достижение инфимума. Случай совпадения

Рассмотрим метризуемое пространство X . Прежде всего отметим, что каноническая биекция $X \ni x \rightarrow \{x\} \in \hat{X} \subset \exp_{\delta(\inf)} X$ является вложением пространства X в $\exp_{\delta(\inf)} X$ (экспоненциальные топологии с таким свойством называют допустимыми [4]) и $\hat{X} \subseteq_{\text{cl}} \exp_{\delta(\inf)} X$.

Далее нам понадобятся следующие определение и предложения.

Определение 1 [17]. Допустимая метрика ρ на не компактном пространстве X называется уплотняющей, если соответствующее пополнение $\tilde{X}$ – компакт с одноточечным наростом $\tilde{X} \setminus X$.

Предложение 1 [17]. Метризуемое не компактное пространство X допускает уплотняющую метрику тогда и только тогда, когда X является локально компактным и имеет счетную базу.

Предложение 2 [14]. Допустимая метрика ρ на не компактном пространстве X является уплотняющей тогда и только тогда, когда для любых двух последовательностей $(a_n)_{n=1}^\infty$ и $(b_n)_{n=1}^\infty$, не имеющих в X предельных точек (точка называется предельной для последовательности, если любая ее окрестность содержит бесконечно много членов этой последовательности), $\rho(a_n, b_n) \rightarrow 0$.

Предложение 3 [18]. Если пространство X метризуемо, $\emptyset \neq F \subseteq_{cl} X$ и ρ_0 – метрика на F , согласованная с индуцированной топологией, то существует метрика $\rho \in \Omega_X$, совпадающая на F с метрикой ρ_0 .

При рассмотрении последовательностей, не имеющих предельных точек, оказывается полезной следующая лемма.

Лемма 1. Пусть последовательности $(a_n)_{n=1}^\infty$ и $(b_n)_{n=1}^\infty$ в пространстве X не имеют предельных точек, $\rho \in \Omega_X$ и $\rho(a_n, b_n) \geq \varepsilon$ ($\varepsilon = \text{const}$, $\varepsilon > 0$) для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда можно выбрать последовательность номеров $n_1 < n_2 < \dots$ так, чтобы $a_{n_i} \neq a_{n_j}$, $b_{n_i} \neq b_{n_j}$ и $\rho(a_{n_i}, b_{n_j}) \geq \frac{\varepsilon}{3}$ при $i \neq j$.

Доказательство. Сначала выберем последовательности $(a_{n_i})_{i=1}^\infty$ и $(b_{n_i})_{i=1}^\infty$ ($n_1 < n_2 < \dots$) так, чтобы $a_{n_i} \neq a_{n_j}$, $b_{n_i} \neq b_{n_j}$ и $a_{n_i} \neq b_{n_j}$ при $i \neq j$. Полагаем, что $n_1 = 1$. Пусть выбраны $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ и $a_{n_i} \neq a_{n_j}$, $b_{n_i} \neq b_{n_j}$ и $a_{n_i} \neq b_{n_j}$ при $1 \leq i < j \leq k$. Поскольку последовательности $(a_n)_{n=1}^\infty$ и $(b_n)_{n=1}^\infty$ не содержат стационарных подпоследовательностей (последовательность называется стационарной, если все ее члены – одна и та же точка), то найдется номер $m > n_k$ такой, что $a_p \notin \{a_{n_1}, \dots, a_{n_k}\} \cup \{b_{n_1}, \dots, b_{n_k}\}$ и $b_p \notin \{a_{n_1}, \dots, a_{n_k}\} \cup \{b_{n_1}, \dots, b_{n_k}\}$ для всех $p \geq m$. Полагаем, что $n_{k+1} = m$.

Далее, не нарушая общности, можем считать, что $a_n \neq a_k$, $b_n \neq b_k$ и $a_n \neq b_k$ при $n \neq k$. Рассмотрим следующие случаи.

1. Найдется точка $z \in X$ такая, что шар $B_\rho\left(z, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ содержит бесконечно много членов (т. е. подпоследовательность) хотя бы одной из последовательностей. Пусть, например, $B_\rho\left(z, \frac{\varepsilon}{3}\right) \supset (a_{n_i})_{i=1}^\infty$ ($n_1 < n_2 < \dots$). Допустим, что $\rho(a_{n_i}, b_{n_j}) < \frac{\varepsilon}{3}$ для некоторых a_{n_i} и b_{n_j} . Тогда $\rho(a_{n_j}, b_{n_j}) \leq \rho(a_{n_j}, a_{n_i}) + \rho(a_{n_i}, b_{n_j}) < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, что противоречит неравенству $\rho(a_{n_j}, b_{n_j}) \geq \varepsilon$.

2. Для любой точки $z \in X$ шар $B_\rho\left(z, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ содержит не более конечного числа членов обеих последовательностей. Полагаем, что $n_1 = 1$. Пусть выбраны $n_1 < n_2 < \dots < n_k$. По условию найдется номер $m > n_k$ такой, что $a_p \notin \left(\bigcup_{i=1}^k B_\rho\left(a_{n_i}, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^k B_\rho\left(b_{n_i}, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right)$ и $b_p \notin \left(\bigcup_{i=1}^k B_\rho\left(a_{n_i}, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^k B_\rho\left(b_{n_i}, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right)$ для всех $p \geq m$. Полагаем, что $n_{k+1} = m$.

Очевидно, что выбранные таким образом подпоследовательности $(a_{n_i})_{i=1}^\infty$ и $(b_{n_i})_{i=1}^\infty$ удовлетворяют исходному требованию. Лемма доказана.

При рассмотрении для инфимальных топологий $\tau_{H(\text{inf})}$, $\tau_{\delta(\text{inf})}$ и $\tau_{W(\text{inf})}$ вопроса о достижении инфимума ($\text{inf} = \min$) стоит обратить отдельное внимание на тривиальный в данной ситуации случай, когда все топологии вида τ_ρ ($\tau_{\delta(\rho)}$, $\tau_{W(\rho)}$) совпадают (т. е. семейства $\mathcal{T}_H$, $\mathcal{T}_\delta$ и $\mathcal{T}_W$ одноэлементны).

Предложение 4. Для метризуемого пространства X эквивалентны следующие условия: (1) все топологии вида τ_ρ , $\rho \in \Omega_X$, совпадают; (2) все топологии вида $\tau_{\delta(\rho)}$, $\rho \in \Omega_X$, совпадают; (3) все топологии вида $\tau_{W(\rho)}$, $\rho \in \Omega_X$, совпадают; (4) пространство X компактно.

Доказательство. Доказательство импликаций $(4) \Rightarrow (1)$, $(4) \Rightarrow (2)$ и $(4) \Rightarrow (3)$ очевидным образом следует из соотношений $\tau_{\hat{\rho}} \geq \tau_{\delta(\rho)} \geq \tau_{W(\rho)} \geq \tau_F$ и совпадений $\tau_{\hat{\rho}} = \tau_V$ [4] и $\tau_V = \tau_F$, возникающих при компактности пространства X .

Допустим далее, что пространство X не компактно и, следовательно, оно содержит дизъюнктные замкнутые и дискретные (как подпространства) множества $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ($a_n \neq a_k$ и $b_n \neq b_k$ при $n \neq k$). Предложение 3 позволяет выбрать допустимые метрики ρ , σ и υ такие, что $\rho(a_n, a_k) = \rho(b_n, b_k) = |n - k|$, $\rho(a_n, b_n) = 1$ и $\rho(a_n, b_k) \geq 1$ для любых $n, k \in \mathbb{N}$; $\sigma(a_n, a_k) = |n - k|$ и $\sigma(a_n, b_n) = \frac{1}{n}$; $\upsilon(a_n, a_k) = |n - k|$, $\upsilon(b_1, a_n) = n$, $\upsilon(b_1, b_n) = \frac{1}{2}$ при $n > 1$. Далее будем использовать обозначение $A_n = A \cup \{b_n\}$. Несложно проверить, что $\hat{\sigma}(A, A_n) \leq \frac{1}{n}$ и, следовательно, $A_n \xrightarrow{\hat{\sigma}} A$, но $\hat{\rho}(A, A_n) \geq 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$; $A_n \xrightarrow{\delta(\sigma)} A$, но $A_n \notin B_{\rho}(A, 1)^{++}$ для любого $n \in \mathbb{N}$; $A_n \xrightarrow{W(\sigma)} A$, но $A_n \notin W_{\upsilon}\left(b_1, \frac{1}{2}\right)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Полученные противоречия с условиями (1), (2) и (3) доказывают импликации $(1) \Rightarrow (4)$, $(2) \Rightarrow (4)$ и $(3) \Rightarrow (4)$ (эквивалентность $(3) \Leftrightarrow (4)$ доказана также в работе [7]). Предложение доказано.

Теорема 1. Пусть ρ – допустимая метрика на не компактном пространстве X . Совпадение $\tau_{\delta(\inf)} = \tau_{\delta(\rho)}$ имеет место тогда и только тогда, когда метрика ρ уплотняющая.

Доказательство. Достаточность. Для доказательства достаточности покажем, что если метрика ρ уплотняющая, то $\tau_{\delta(\sigma)} \geq \tau_{\delta(\rho)}$ для любой метрики $\sigma \in \Omega_X$. Для этого достаточно проверить, что для любого множества вида $B_{\rho}(F, \varepsilon)^{++}$, где $F \in \exp X$ и $\varepsilon > 0$, можно подобрать $\delta > 0$ так, чтобы $B_{\sigma}(F, \delta)^{++} \subset B_{\rho}(F, \varepsilon)^{++}$.

Допустим от противного, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдутся $P_n \in \exp X$ такие, что $P_n \in B_{\sigma}\left(F, \frac{1}{n}\right)^{++}$ (и, следовательно, $P_n \subset B_{\sigma}\left(F, \frac{1}{n}\right)$), но $P_n \notin B_{\rho}(F, \varepsilon)^{++}$ (и, следовательно, $B_{\rho}\left(P_n, \frac{1}{n}\right) \not\subset B_{\rho}(F, \varepsilon)$). Это обстоятельство позволяет выбрать точки $x_n \in F$, $y_n \in P_n$ и $z_n \notin B_{\rho}(F, \varepsilon)$ так, чтобы

$$\sigma(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \quad (1)$$

$$\rho(y_n, z_n) < \frac{1}{n}, \quad (2)$$

$$\rho(x_n, z_n) \geq \varepsilon \quad (3)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что если хотя бы одна из последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ имеет предельную точку, то в силу неравенств (1) и (2) можно выбрать подпоследовательности $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$, $(y_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ и $(z_{n_i})_{i=1}^{\infty}$, сходящиеся к этой точке, что противоречит неравенствам (3). Итак, последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ не имеют предельных точек. Но поскольку метрика ρ уплотняющая, то в силу предложения 2 $\rho(x_n, z_n) \rightarrow 0$, что опять же противоречит неравенствам (3). Достаточность доказана.

Необходимость. Допустим от противного, что метрика ρ не уплотняющая. Тогда в силу предложения 2 и леммы 1 в пространстве X существуют дизъюнктные замкнутые и дискретные множества $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ такие, что $a_n \neq a_k$ и $b_n \neq b_k$ при $n \neq k$ и $\rho(a_n, b_k) \geq \varepsilon$ при любых $n, k \in \mathbb{N}$, где $\varepsilon = \text{const}$, $\varepsilon > 0$. Предложение 3 позволяет выбрать метрику $\sigma \in \Omega_X$, для которой $\sigma(a_n, b_n) = \frac{1}{n}$. Введем обозначение $A_n = A \cup \{b_n\}$. Легко проверить (рассматривая элементы предбазы вида U^- и $B_{\sigma}(A, \varepsilon)^{++}$), что $A_n \xrightarrow{\delta(\sigma)} A$. Однако последовательность $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ не сходится к A в топологии $\tau_{\delta(\rho)}$, поскольку $A_n \notin B_{\rho}(A, \varepsilon)^{++}$ при любом $n \in \mathbb{N}$, что противоречит соотношению $\tau_{\delta(\sigma)} \geq \tau_{\delta(\rho)}$. Теорема доказана.

Теорема 1 и предложение 1 влекут нижеприведенное следствие.

Следствие 1. Топология $\tau_{\delta(\text{inf})}$ на экспоненте метризуемого не компактного пространства X совпадает с топологией вида $\tau_{\delta(\rho)}$, где $\rho \in \Omega_X$ (инфимум достигается), тогда и только тогда, когда X является локально компактным и имеет счетную базу.

Теорему 1 и следствие 1 можно дополнить следующими аналогичными утверждениями.

Теорема 2. Для допустимой метрики ρ на не компактном пространстве X совпадение $\tau_{H(\text{inf})} = \tau_{\hat{\rho}}$ имеет место тогда и только тогда, когда метрика ρ уплотняющая.

Доказательство. Достаточность доказана в работах [13; 14]. Докажем необходимость. Пусть $\tau_{H(\text{inf})} = \tau_{\hat{\rho}}$. Допустим от противного, что метрика ρ не уплотняющая. Тогда согласно предложению 2 и лемме 1, как и при доказательстве необходимости в теореме 1 (ситуация та же), в пространстве X можно выбрать те же множества $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $A_n = A \cup \{b_n\}$ и метрику $\sigma \in \Omega_X$, для которых $\rho(a_n, b_k) \geq \varepsilon$ ($\varepsilon = \text{const}$, $\varepsilon > 0$) и $\sigma(a_n, b_n) < \frac{1}{n}$ при любых $n, k \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $\hat{\sigma}(A, A_n) \leq \frac{1}{n}$, откуда $A_n \xrightarrow{\hat{\sigma}} A$, но $\hat{\rho}(A, A_n) \geq \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$, что противоречит соотношению $\tau_{\hat{\sigma}} \geq \tau_{\hat{\rho}}$. Теорема доказана.

Следствие 2 [13; 14]. Топология $\tau_{H(\text{inf})}$ на экспоненте метризуемого не компактного пространства X совпадает с топологией вида $\tau_{\hat{\rho}}$, где $\rho \in \Omega_X$ (инфимум достигается), тогда и только тогда, когда X является локально компактным и имеет счетную базу.

Поскольку любая уплотняющая метрика вполне ограничена, а для вполне ограниченной метрики $\rho \in \Omega_X$ топологии $\tau_{\delta(\rho)}$ и $\tau_{\hat{\rho}}$ совпадают [7], то теоремы 1 и 2 позволяют сформулировать нижеприведенное следствие.

Следствие 3. Если метризуемое не компактное пространство X является локально компактным и имеет счетную базу, то топологии $\tau_{\delta(\text{inf})}$ и $\tau_{H(\text{inf})}$ на $\text{exp } X$ совпадают и метризуемы метрикой Хаусдорфа $\hat{\rho}$, где $\rho \in \Omega_X$ и метрика ρ уплотняющая.

Необходимое условие совпадения топологий $\tau_{\delta(\text{inf})}$ и $\tau_{H(\text{inf})}$ дает следующее предложение.

Предложение 5. Если топологии $\tau_{\delta(\text{inf})}$ и $\tau_{H(\text{inf})}$ на экспоненте $\text{exp } X$ метризуемого пространства X совпадают, то пространство X имеет счетную базу.

Доказательство. Допустим от противного, что вес пространства X несчетен. Тогда X содержит замкнутое дискретное множество $A = \{a_\lambda \mid \lambda < \omega_1\}$ ($a_\alpha \neq a_\beta$ при $\alpha < \beta < \omega_1$), где ω_1 – первый несчетный ординал. Введем обозначение $A_\lambda = \{a_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$, $\mathcal{H} = \{A_\lambda \mid \lambda < \omega_1\}$. Фиксируем произвольную метрику $\rho \in \Omega_X$. Несложно проверить, что $A \in [\mathcal{H}]_{\delta(\rho)}$ и, как следствие, $A \in [\mathcal{H}]_{\delta(\text{inf})}$. Пусть $F \in [\mathcal{H}]_{\delta(\rho)}$. Исследуем устройство множества F .

1. Допустим, что $F \not\subset A$. Выберем точку $x \in F \setminus A$ и ее окрестность U так, чтобы $U \cap A = \emptyset$. Очевидно, что $F \in U^-$, но $U^- \cap \mathcal{H} = \emptyset$, что противоречит соотношению $F \in [\mathcal{H}]_{\delta(\rho)}$. Итак, $F \subset A$.

2. Допустим, что $F \ni a_\beta$, $F \not\ni a_\alpha$ и $\alpha < \beta < \omega_1$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $B_\rho(a_\alpha, \varepsilon) \cap A = \{a_\alpha\}$, $B_\rho(a_\beta, \varepsilon) \cap A = \{a_\beta\}$, и положим, что $\mathcal{G} = B_\rho(F, \varepsilon)^{++} \cap B_\rho(a_\beta, \varepsilon)^-$. Ясно, что $F \in \mathcal{G}$, но $\mathcal{G} \cap \mathcal{H} = \emptyset$. Вновь получаем противоречие. Таким образом, если $F \ni a_\beta$, то $F \supset \{a_\alpha \mid \alpha \leq \beta\}$ и, следовательно, либо $F = A$, либо $F = A_\lambda$ для некоторого $\lambda < \omega_1$. Итак, $[\mathcal{H}]_{\delta(\rho)} = \mathcal{H} \cup \{A\}$. В силу произвольности выбора метрики $\rho \in \Omega_X$ множество $\mathcal{H} \cup \{A\}$ замкнуто относительно любой топологии вида $\tau_{\delta(\rho)}$, а значит, и относительно топологии $\tau_{\delta(\text{inf})}$. Учитывая соотношение $A \in [\mathcal{H}]_{\delta(\text{inf})}$ (см. выше), получаем равенство $[\mathcal{H}]_{\delta(\text{inf})} = \mathcal{H} \cup \{A\}$, а поскольку $\tau_{\delta(\text{inf})} = \tau_{H(\text{inf})}$, то и равенство $[\mathcal{H}]_{H(\text{inf})} = \mathcal{H} \cup \{A\}$. Свойства топологии $\tau_{H(\text{inf})}$, в частности ее секвенциальность (см. [14]), позволяют выбрать последовательность $(A_{\lambda_n})_{n=1}^\infty$, сходящуюся к A относительно $\tau_{H(\text{inf})}$, затем подпоследовательность $(A_{\lambda_{n_i}})_{i=1}^\infty$ и метрику $\rho \in \Omega_X$, для которой $A_{\lambda_{n_i}} \xrightarrow{\hat{\rho}} A$. Далее фиксируем ординал $\gamma < \omega_1$, $\gamma > \lambda_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и выбираем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $B_\rho(a_\gamma, \varepsilon) \cap A = \{a_\gamma\}$. Ясно, что $B_\rho(A_{\lambda_n}, \varepsilon) \not\supset A$, откуда $A_{\lambda_n} \notin B_{\hat{\rho}}(A, \varepsilon)$ для любого $n \in \mathbb{N}$, что противоречит сходимости $A_{\lambda_{n_i}} \xrightarrow{\hat{\rho}} A$. Предложение доказано.

Замечание. Указанные выше условия совпадения топологий $\tau_{\delta(\text{inf})}$ и $\tau_{H(\text{inf})}$ (достаточное условие в следствии 3 и необходимое условие в предложении 5), вероятно, могут быть уточнены (в направлении ослабления достаточного и усиления необходимого условий).

Далее рассмотрим вопрос о возможности совпадений $\tau_{\delta(\text{inf})} = \tau_{W(\text{inf})}$ и $\tau_{\delta(\text{inf})} = \tau_F$.

Теорема 3. Для метризуемого пространства X эквивалентны следующие условия: (1) $\tau_{\delta(\text{inf})} = \tau_{W(\text{inf})}$; (2) $\tau_{\delta(\text{inf})} = \tau_F$; (3) пространство X компактно.

Доказательство. Доказательство импликаций (3) $\Rightarrow$ (1) и (3) $\Rightarrow$ (2) следует из соотношений $\tau_V \geq \tau_{\delta(\text{inf})} \geq \tau_{W(\text{inf})} \geq \tau_F$ и совпадения топологий τ_V и τ_F при компактности пространства X .

Предположим далее, что пространство X не компактно, и рассмотрим замкнутое дискретное множество $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\} \subset X$ ($a_n \neq a_k$ при $0 \leq n < k$), множества $A_n = \{a_0, a_n, a_{n+1}, \dots\}$ и множество $\mathcal{H} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \text{exp } X$. Ясно, что $A_n \xrightarrow{F} \{a_0\}$ (т. е. относительно топологии τ_F), откуда $\{a_0\} \in [\mathcal{H}]_F$. Пусть $B \in \text{exp } X$ и $B \in [\mathcal{H}]_F$. Рассмотрим возможные варианты расположения множества B .

1. $B \not\subset A$. Тогда найдутся $b \in B \setminus A$ и окрестность U точки b такая, что $U \cap A = \emptyset$. Поскольку $B \in U^-$, но $U \cap A_n = \emptyset$ для любого $n \in \mathbb{N}$, а следовательно, $U^- \cap \mathcal{H} = \emptyset$, то получаем противоречие с соотношением $B \in [\mathcal{H}]_F$. Итак, $B \subset A$.

2. $a_0 \notin B$. Введем обозначение $\mathcal{G} = (X \setminus \{a_0\})^+$. Очевидно, что $B \in \mathcal{G} \in \tau_F$, но $A_n \notin \mathcal{G}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, а следовательно, $\mathcal{G} \cap \mathcal{H} = \emptyset$. Опять получаем противоречие с соотношением $B \in [\mathcal{H}]_F$. Итак, $a_0 \in B$.

3. $B \ni a_n$ ($n \geq 1$), но $B \not\ni a_k$ для некоторого $k > n$. Выберем окрестность U точки a_n , для которой $U \cap A = \{a_n\}$, и положим, что $\mathcal{G} = U^- \cap (X \setminus \{a_k\})^+$. Ясно, что $B \in \mathcal{G}$, но $\mathcal{G} \cap \mathcal{H} = \emptyset$. Снова получаем противоречие. Итак, если $B \ni a_n$ ($n \geq 1$), то $B \ni a_k$ для всех $k \geq n$.

Таким образом, $B = \{a_0\}$ или $B \in \mathcal{H}$, откуда $[\mathcal{H}]_F = \mathcal{H} \cup \{\{a_0\}\}$.

Поскольку $\tau_{\delta(\rho)} \geq \tau_{\delta(\text{inf})} \geq \tau_{W(\text{inf})} \geq \tau_F$, где $\rho \in \Omega_X$, то множество $\mathcal{H} \cup \{\{a_0\}\}$ замкнуто в топологиях $\tau_{W(\text{inf})}$, $\tau_{\delta(\text{inf})}$ и $\tau_{\delta(\rho)}$. Заметим также, что $A_n \xrightarrow{W(\text{inf})} \{a_0\}$, откуда $[\mathcal{H}]_{W(\text{inf})} = \mathcal{H} \cup \{\{a_0\}\}$. Действительно, выбрав, пользуясь предложением 3, метрику $\rho \in \Omega_X$, для которой $\rho(a_n, a_k) = |n - k|$ ($0 \leq n < k$), получаем сходимость $A_n \xrightarrow{W(\rho)} \{a_0\}$, а следовательно, и сходимость $A_n \xrightarrow{W(\text{inf})} \{a_0\}$.

Рассмотрим далее окрестность U_0 точки a_0 , для которой $U_0 \cap A = \{a_0\}$, и множество $\mathcal{G} = U_0^{++(\rho)}$ в $\text{exp}_{\delta(\rho)} X$, где $\rho \in \Omega_X$. Очевидно, что $\{a_0\} \in \mathcal{G}$, но $\mathcal{G} \cap \mathcal{H} = \emptyset$. Таким образом, множество $\mathcal{H}$ замкнуто во всех топологиях вида $\tau_{\delta(\rho)}$, а следовательно, и в топологии $\tau_{\delta(\text{inf})}$, т. е. $[\mathcal{H}]_{\delta(\text{inf})} = \mathcal{H}$. Итак, при нашем допущении (пространство X не компактно) ни одно из соотношений $\tau_{\delta(\text{inf})} = \tau_{W(\text{inf})}$ и $\tau_{\delta(\text{inf})} = \tau_F$ невозможно. Полученные противоречия с неравенствами (1) и (2) доказывают импликации (1) $\Rightarrow$ (3) и (2) $\Rightarrow$ (3). Теорема доказана.

Топология $\tau_{\delta(\text{inf})}$ и отображения

Напомним, что отображение $\text{exp } X \xrightarrow{g} \text{exp } Y$ называют продолжением (на экспоненты $\text{exp } X$ и $\text{exp } Y$) отображения $X \xrightarrow{f} Y$, если $g(\{x\}) = \{f(x)\}$ для любой точки $x \in X$. Продолжение g называют каноническим и обозначают через $\bar{f}$, если $g(F) = [f(F)]_Y$ для каждого $F \in \text{exp } X$. Вопрос о непрерывности продолжения $\bar{f}$ рассматривался в работах [15; 19; 20]. В частности, в статье [15] определено условие (TUC) (*topologically uniformly continuous*), при выполнении которого для отображения $X \xrightarrow{f} Y$ (пространства X и Y метризуемы) соответствующее каноническое продолжение $\text{exp}_{H(\text{inf})} X \xrightarrow{\bar{f}} \text{exp}_{H(\text{inf})} Y$ непрерывно.

Определение 2 [15]. Непрерывное отображение $X \xrightarrow{f} Y$ называют TUC-отображением, или отображением, удовлетворяющим условию (TUC), если для любой метрики $\rho \in \Omega_X$ существует метрика $\sigma \in \Omega_Y$, при которой отображение $(X, \rho) \xrightarrow{f} (Y, \sigma)$ равномерно непрерывно.

Приведем полученные в работе [15] результаты.

Теорема 4 [15]. Если отображение $X \xrightarrow{f} Y$ удовлетворяет условию (TUC), то продолжение $\text{exp}_{H(\text{inf})} X \xrightarrow{\bar{f}} \text{exp}_{H(\text{inf})} Y$ непрерывно.

Теорема 5 [15]. Если пространство Y является локально компактным и имеет счетную базу, а отображение $\text{exp}_{H(\text{inf})} X \xrightarrow{\bar{f}} \text{exp}_{H(\text{inf})} Y$ непрерывно, то отображение $X \xrightarrow{f} Y$ удовлетворяет условию (TUC).

Кроме того, в работе [15] отмечено, что метризуемые пространства и TUC-отображения образуют категорию (обозначена через (M, TUC)), и с учетом вышеуказанных теорем сформулировано нижеприведенное следствие.

Следствие 4 [15]. *Отображение $\exp_{\text{H}(\text{inf})}$ из категории (M, TUC) в категорию Top_1 (категория T_1 -пространств и непрерывных отображений), ставящее в соответствие каждому морфизму $X \xrightarrow{f} Y$ из категории (M, TUC) его непрерывное продолжение $\exp_{\text{H}(\text{inf})} X \xrightarrow{\bar{f}} \exp_{\text{H}(\text{inf})} Y$, является ковариантным функтором.*

Проведем аналогичные рассуждения относительно топологии $\tau_{\delta(\text{inf})}$. По-прежнему пространства X и Y метризуемы, отображение $X \xrightarrow{f} Y$ непрерывно. Нам понадобится доказанная ранее вспомогательная лемма.

Лемма 2 [15]. *Пусть $\rho \in \Omega_X$, $\sigma \in \Omega_Y$, $(a_n)_{n=1}^\infty$ и $(b_n)_{n=1}^\infty$ – последовательности в пространстве X и $\rho(a_n, b_n) \rightarrow 0$, но $\sigma(f(a_n), f(b_n)) \geq \varepsilon$ для любого $n \in \mathbb{N}$, где $\varepsilon = \text{const}$, $\varepsilon > 0$. Тогда существует такая последовательность номеров $n_1 < n_2 < \dots$, что последовательности $(a_{n_i})_{i=1}^\infty$ и $(b_{n_i})_{i=1}^\infty$ являются дизъюнктными Δ -последовательностями, а для пары соответствующих последовательностей $(f(a_{n_i}))_{i=1}^\infty$ и $(f(b_{n_i}))_{i=1}^\infty$ выполняется одно из следующих условий: (1) хотя бы одна из последовательностей $(f(a_{n_i}))_{i=1}^\infty$ и $(f(b_{n_i}))_{i=1}^\infty$ сходится в пространстве Y , и найдется $\delta > 0$ такое, что $\sigma(f(a_{n_i}), f(b_{n_j})) \geq \delta$ для любых $i, j \in \mathbb{N}$; (2) $(f(a_{n_i}))_{i=1}^\infty$ и $(f(b_{n_i}))_{i=1}^\infty$ – дизъюнктные Δ -последовательности, и найдется $\delta > 0$ такое, что $\sigma(f(a_{n_i}), f(b_{n_j})) \geq \delta$ для любых $i, j \in \mathbb{N}$.*

Теорема 6. *Пусть $\rho \in \Omega_X$, $\sigma \in \Omega_Y$. Отображение $\exp_{\delta(\rho)} X \xrightarrow{\bar{f}} \exp_{\delta(\sigma)} Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда отображение $(X, \rho) \xrightarrow{f} (Y, \sigma)$ равномерно непрерывно.*

Доказательство. Достаточность. Фиксируем произвольные $F \in \exp X$ и окрестности V^- и $B_\sigma(\bar{f}(F), \varepsilon)^{++}$ (в $\exp_{\delta(\sigma)} Y$) множества $\bar{f}(F)$, где $V \subset Y$, $\varepsilon > 0$. Поскольку $V \cap f(F) \neq \emptyset$, то можно выбрать $y \in V \cap f(F)$ и $x \in F$ такие, что $y = f(x)$, затем окрестность U точки x , для которой $f(U) \subset V$. Ясно, что $F \in U^-$, и если $P \in U^-$, то $\bar{f}(P) \in V^-$, откуда $\bar{f}(U^-) \subset V^-$.

Допустим далее, что $\bar{f}\left(B_\rho\left(F, \frac{1}{n}\right)^{++}\right) \not\subset B_\sigma(\bar{f}(F), \varepsilon)^{++}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда, учитывая соотношение $B_\sigma([A]_Y, \varepsilon) = B_\sigma(A, \varepsilon)$, справедливое при любом $\emptyset \neq A \subset Y$, для каждого $n \in \mathbb{N}$ можно выбрать $P_n \in \exp X$ так, чтобы $P_n \in B_\rho\left(F, \frac{1}{n}\right)$, но $B_\sigma\left(f(P_n), \frac{1}{n}\right) \not\subset B_\sigma(f(F), \varepsilon)$. Выберем точки $z_n \in B_\sigma\left(f(P_n), \frac{1}{n}\right) \setminus B_\sigma(f(F), \varepsilon)$, затем $y_n \in f(P_n)$, $x_n \in P_n$ и $a_n \in F$, для которых $f(x_n) = y_n$,

$$\sigma(y_n, z_n) < \frac{1}{n}, \quad (4)$$

$$\rho(a_n, x_n) < \frac{1}{n}, \quad (5)$$

и введем обозначение $b_n = f(a_n)$. Поскольку $b_n \in f(F)$, то

$$\sigma(b_n, z_n) \geq \varepsilon. \quad (6)$$

Неравенства (5) и равномерная непрерывность отображения f влекут сходимость $\sigma(b_n, y_n) \rightarrow 0$. Однако из неравенств (4) и (6) следует, что $\sigma(b_n, y_n) > \frac{\varepsilon}{2}$ для всех n , начиная с некоторого номера. Получили противоречие. Достаточность доказана.

Необходимость. Допустим от противного, что отображение $(X, \rho) \xrightarrow{f} (Y, \sigma)$ не является равномерно непрерывным. Тогда, используя лемму 2, в пространстве X можно выбрать дизъюнктные Δ -последовательности $(a_n)_{n=1}^\infty$ и $(b_n)_{n=1}^\infty$ так, чтобы $\rho(a_n, b_n) \rightarrow 0$, но $\sigma(f(a_n), f(b_k)) \geq \delta$ для любых $n, k \in \mathbb{N}$, где $\delta = \text{const}$, $\delta > 0$. Введем обозначения $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $A_n = A \cup \{b_n\}$. Легко проверить, что $A_n \xrightarrow{\delta(\rho)} A$, но $f(b_n) \notin B_\sigma(f(A), \delta) = B_\sigma(\overline{[f(A)]_Y}, \delta)$, откуда $\overline{f}(A_n) \notin B_\sigma(\overline{f}(A), \delta)^{++}$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Следующие теоремы аналогичны доказанным ранее теоремам 4 и 5.

Теорема 7. Если отображение $X \xrightarrow{f} Y$ удовлетворяет условию (TUC), то продолжение $\exp_{\delta(\text{inf})} X \xrightarrow{\overline{f}} \exp_{\delta(\text{inf})} Y$ непрерывно.

Доказательство. Пусть $\mathcal{G} \subset \exp_{\delta(\text{inf})} Y$, $\mathcal{H} = \overline{f}^{-1}(\mathcal{G})$. Покажем, что $\mathcal{H} \subset \exp_{\delta(\text{inf})} X$. Фиксируем произвольные $F \in \mathcal{H}$ и $\rho \in \Omega_X$. Условие (TUC) позволяет выбрать метрику $\sigma \in \Omega_Y$ так, чтобы отображение $(X, \rho) \xrightarrow{f} (Y, \sigma)$ было равномерно непрерывным. Затем выберем окрестность $\mathcal{V}$ (в $\exp Y$) множества $\overline{f}(F)$, открытую в топологии $\tau_{\delta(\sigma)}$ и содержащуюся в множестве $\mathcal{G}$. По теореме 6 отображение $\overline{f}$ непрерывно и, следовательно, существует окрестность $\mathcal{O}$ (в $\exp X$) множества F , открытая в топологии $\tau_{\delta(\rho)}$, для которой $\overline{f}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{V}$. Но поскольку $\mathcal{V} \subset \mathcal{G}$, то $\mathcal{O} \subset \mathcal{H}$. Итак, показано, что множество $\mathcal{H}$ открыто в любой топологии $\tau_{\delta(\rho)}$, где $\rho \in \Omega_X$, а следовательно, множество $\mathcal{H}$ открыто и в топологии $\tau_{\delta(\text{inf})}$. Теорема доказана.

Утверждение, обратное теореме 7, справедливо при дополнительном условии на пространство Y .

Теорема 8. Если пространство Y является локально компактным и имеет счетную базу, а отображение $\exp_{\delta(\text{inf})} X \xrightarrow{\overline{f}} \exp_{\delta(\text{inf})} Y$ непрерывно, то отображение $X \xrightarrow{f} Y$ удовлетворяет условию (TUC).

Доказательство. Допустим от противного, что существует метрика $\rho \in \Omega_X$ такая, что при любой метрике $\sigma \in \Omega_Y$ отображение $(X, \rho) \xrightarrow{f} (Y, \sigma)$ не является равномерно непрерывным. Фиксируем указанную метрику ρ , затем метрику $\sigma \in \Omega_Y$ произвольным образом, если пространство Y компактно, и как уплотняющую метрику, если пространство Y не компактно (см. предложение 1). В обоих случаях топология $\tau_{\delta(\text{inf})}$ на $\exp Y$ совпадает с топологией $\tau_{\delta(\sigma)}$ (см. предложение 4 и теорему 1). Наше допущение и лемма 2 позволяют выделить в пространстве X дизъюнктные Δ -последовательности $(a_n)_{n=1}^\infty$ и $(b_n)_{n=1}^\infty$ так, чтобы $\rho(a_n, b_n) \rightarrow 0$, но $\sigma(f(a_n), f(b_k)) \geq \delta$ для любых $n, k \in \mathbb{N}$, где $\delta = \text{const}$, $\delta > 0$, причем либо обе последовательности $(f(a_n))_{n=1}^\infty$ и $(f(b_n))_{n=1}^\infty$ являются Δ -последовательностями, либо одна из них, например $(f(a_n))_{n=1}^\infty$, сходится. Первый случай невозможен, так как в силу предложения 2 $\sigma(f(a_n), f(b_n)) \rightarrow 0$, что противоречит неравенствам $\sigma(f(a_n), f(b_k)) \geq \delta$. Во втором случае введем обозначения $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $A_n = A \cup \{b_n\}$. Поскольку $A_n \xrightarrow{\delta(\rho)} A$, то и $A_n \xrightarrow{\delta(\text{inf})} A$, следовательно, в силу непрерывности $\overline{f}$ имеем $\overline{f}(A_n) \xrightarrow{\delta(\text{inf})} \overline{f}(A)$, а в силу совпадения $\tau_{\delta(\text{inf})} = \tau_{\delta(\sigma)}$ (на $\exp Y$) получаем $\overline{f}(A_n) \xrightarrow{\delta(\sigma)} \overline{f}(A)$. Но $B_\sigma(\overline{f}(A), \delta) = B_\sigma(f(A), \delta) \not\ni f(b_n)$, откуда $\overline{f}(A_n) \notin B_\sigma(\overline{f}(A), \delta)^{++}$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Теорема 7 влечет следствие, аналогичное следствию 4.

Следствие 5. Отображение $\exp_{\delta(\text{inf})}$ из категории (M, TUC) в категорию Top_1 , ставящее в соответствие каждому морфизму $X \xrightarrow{f} Y$ из категории (M, TUC) его непрерывное продолжение $\exp_{\delta(\text{inf})} X \xrightarrow{\overline{f}} \exp_{\delta(\text{inf})} Y$, является ковариантным функтором.

В завершение рассмотрим вопрос об условии каноничности непрерывного продолжения $\exp_{\delta(\text{inf})} X \xrightarrow{g} \exp_{\delta(\text{inf})} Y$ отображения $X \xrightarrow{f} Y$, при выполнении которого $g = \overline{f}$.

Теорема 9. Непрерывное продолжение $\exp_{\delta(\text{inf})} X \xrightarrow{g} \exp_{\delta(\text{inf})} Y$ отображения $X \xrightarrow{f} Y$ совпадает с каноническим продолжением $\overline{f}$ тогда и только тогда, когда $g(A) = f(A)$ для любого конечного множества $A \subset X$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Используем соотношения $\tau_V \geq \tau_{\delta(\text{inf})} \geq \tau_F$. Если отображение $\exp_{\delta(\text{inf})} X \xrightarrow{g} \exp_{\delta(\text{inf})} Y$ непрерывно, то непрерывно и отображение $\exp_V X \xrightarrow{g} \exp_F Y$, и для любых $F \in \exp X$ и окрестности $\mathcal{G}$ (в $\exp_F Y$) множества $g(F)$ найдется окрестность вида $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ (в $\exp_V X$) множества F , для которой $g(\langle U_1, \dots, U_n \rangle) \subset \mathcal{G}$. Рассмотрим следующие случаи.

1. $\bar{f}(F) \not\subset g(F)$, т. е. $[f(F)]_Y \not\subset g(F)$. Поскольку $g(F) \subset_{\text{cl}} Y$, то $f(F) \not\subset g(F)$ и, следовательно, можно выбрать точки $y \in f(F) \setminus g(F)$ и $x \in F$, где $y = f(x)$. Положим, что $\mathcal{G} = (Y \setminus \{y\})^+$, затем выберем точки $a_i \in U_i \cap F$ и введем обозначение $A = \{x, a_1, \dots, a_n\}$. Очевидно, что $A \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle$, но $g(A) = f(A) \notin \mathcal{G}$. Получили противоречие.

2. $g(F) \not\subset \bar{f}(F)$, т. е. $g(F) \setminus [f(F)]_Y \neq \emptyset$. Положим, что $V = Y \setminus [f(F)]_Y$ и $\mathcal{G} = V^-$, затем введем обозначение $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, где $a_i \in U_i \cap F$. Как и выше, $A \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle$, но $g(A) = f(A) \notin \mathcal{G}$. Снова получили противоречие. Итак, $g(F) = [f(F)]_Y$. Теорема доказана.

Замечание к предложению 5. В работе авторов «О совпадении некоторых инфимальных топологий экспоненты метризуемого пространства» (Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Т. 34, № 1. С. 125–130) доказывается (см. теорему 3.9), что наличие счетной базы в пространстве X является не только необходимым, но и достаточным условием совпадения топологий $\tau_{\delta(\text{inf})}$ и $\tau_{\text{H}(\text{inf})}$. Появление уточнения предложения 5 раньше самого предложения 5 обусловлено более поздней публикацией настоящей статьи.

Библиографические ссылки

1. Пшеничный БН. *Выпуклый анализ и экстремальные задачи*. Москва: Наука; 1980. 320 с.
2. Борисович ЮГ, Гельман БД, Мышкис АД, Обуховский ВВ. Многозначные отображения. *Итоги науки и техники. Математический анализ*. 1982;19:127–230. EDN: WQCDZV.
3. Vietoris L. Bereiche zweiter Ordnung. *Monatshefte für Mathematik und Physik*. 1922;32:258–280. DOI: 10.1007/BF01696886.
4. Michael E. Topologies on spaces of subsets. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1951;71(1):152–182. DOI: 10.1090/S0002-9947-1951-0042109-4.
5. Hausdorff F. *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig: Verlag von Veit & Company; 1914. VIII, 476 S.
6. Wijsman RA. Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. II. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1966;123(1):32–45. DOI: 10.1090/S0002-9947-1966-0196599-8.
7. Beer G, Lechicki A, Levi S, Naimpally S. Distance functionals and suprema of hyperspace topologies. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 1992;162:367–381. DOI: 10.1007/BF01760016.
8. Beer G. *Topologies on closed and closed convex sets*. Dordrecht: Springer Science + Business Media; 1993. XII, 340 p. (Mathematics and its applications; volume 268). DOI: 10.1007/978-94-015-8149-3.
9. Fell JMG. A Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact non-Hausdorff space. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1962;13(3):472–476. DOI: 10.1090/S0002-9939-1962-0139135-6.
10. Beer G, Tamaki R. The infimal value functional and the uniformization of hit-and-miss hyperspace topologies. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1994;122(2):601–612. DOI: 10.1090/S0002-9939-1994-1264804-5.
11. Atsugi M. Uniform continuity of continuous functions of metric spaces. *Pacific Journal of Mathematics*. 1958;8(1):11–16. DOI: 10.2140/pjm.1958.8.11.
12. Beer GA, Himmelberg CJ, Prikry K, Van Vleck FS. The locally finite topology on 2^X . *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1987;101(1):168–172. DOI: 10.1090/S0002-9939-1987-0897090-2.
13. Costantini C, Vitolo P. On the infimum of the Hausdorff metric topologies. *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1995;70(2):441–480. DOI: 10.1112/plms/s3-70.2.441.
14. Бедрицкий АС, Тимохович ВЛ. О топологиях экспоненты метризуемого топологического пространства. *Труды Института математики*. 2023;31(2):15–27. EDN: CWGXEI.
15. Бедрицкий АС, Тимохович ВЛ. О функториальных свойствах некоторых топологий гиперпространства. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2025;2:15–28. DOI: 10.26907/0021-3446-2025-2-15-28.
16. Costantini C, Levi S, Zieminska J. Metrics that generate the same hyperspace convergence. *Set-Valued Analysis*. 1993;1(2):141–157. DOI: 10.1007/BF01027689.
17. Тимохович ВЛ, Фролова ДС. О свойствах инфимальной топологии пространства отображений. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2016;4:87–99. EDN: VHTENL.
18. Hausdorff F. Erweiterung einer Homöomorphie. *Fundamenta Mathematicae*. 1930;16:353–360.
19. Бедрицкий АС, Тимохович ВЛ. Модификация условия (WO) Харриса и функториальные свойства экспоненты и расширения Волмэна. *Труды Института математики*. 2022;30(1–2):4–11. EDN: EPPBTL.
20. Бедрицкий АС. О некоторых свойствах одной топологии очановского типа. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2024;3:31–39. EDN: EATFLI.