

УДК 514.765

О ПОТОКЕ РИЧЧИ НА ТРЕХМЕРНЫХ НЕУНИМОДУЛЯРНЫХ ГРУППАХ ЛИ С ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКОЙ ЭКВИАФФИННОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

Д. С. ГРИГОРЬЕВ¹⁾, Д. Н. ОСКОРБИН²⁾, Е. Д. РОДИОНОВ¹⁾

¹⁾Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, 656049, г. Барнаул, Россия

²⁾Московский физико-технический институт, пер. Институтский, 9, 141701, г. Долгопрудный, Россия

Аннотация. Изучается поток Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с полусимметрической эквиваффинной связностью. Уравнение потока Риччи в системе координат, предложенной Дж. Милнором, приводится к системам алгебраических и дифференциальных уравнений. Находится решение уравнения потока Риччи в классе левоинвариантных метрик Милнора. Обобщаются результаты работ К. Онды, Д. Кнопфа и К. Мак-Леода, касающихся потока Риччи на трехмерных группах Ли в случае связности Леви-Чивиты.

Ключевые слова: поток Риччи; трехмерные неунимодулярные группы Ли; полусимметрические эквиваффинные связности.

Образец цитирования:

Григорьев ДС, Оскорбин ДН, Родионов ЕД. О потоке Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с полусимметрической эквиваффинной связностью. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2025;2:30–41.
EDN: MYOKEN

For citation:

Grigoryev DS, Oskorbin DN, Rodionov ED. About the Ricci flow on three-dimensional non-unimodular Lie groups with semisymmetric equiaffine connection. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2025;2:30–41. Russian.
EDN: MYOKEN

Авторы:

Данила Сергеевич Григорьев – магистрант кафедры математического анализа Института математики и информационных технологий. Научный руководитель – Е. Д. Родионов.
Дмитрий Николаевич Оскорбин – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры высшей математики.
Евгений Дмитриевич Родионов – доктор физико-математических наук; профессор кафедры математического анализа Института математики и информационных технологий.

Authors:

Danila S. Grigoryev, master's degree student at the department of mathematical analysis, Institute of Mathematics and Information Technologies.
danila.grigoryev.2019@mail.ru
<https://orcid.org/0009-0006-6875-840X>
Dmitrii N. Oskorbin, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of higher mathematics.
oskorbin@yandex.ru
<https://orcid.org/0009-0002-6385-3214>
Eugene D. Rodionov, doctor of science (physics and mathematics); professor at the department of mathematical analysis, Institute of Mathematics and Information Technologies.
edr2002@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0003-3624-1749>

ABOUT THE RICCI FLOW ON THREE-DIMENSIONAL NON-UNIMODULAR LIE GROUPS WITH SEMISYMMETRIC EQUIAFFINE CONNECTION

D. S. GRIGORYEV^a, D. N. OSKORBIN^b, E. D. RODIONOV^a

^a*Altai State University, 61 Lenina Avenue, Barnaul 656049, Russia*

^b*Moscow Institute of Physics and Technology, 9 Institutskij Lane, Dolgoprudnyj 141701, Russia*

Corresponding author: D. S. Grigoryev (danila.grigoryev.2019@mail.ru)

Abstract. The Ricci flow on three-dimensional non-unimodular Lie groups with semisymmetric equiaffine connection is studied. The Ricci flow equation in the coordinate system proposed by J. Milnor is reduced to systems of algebraic and differential equations. A solution to the Ricci flow equation in the class of left-invariant Milnor metrics is found. The results of works by K. Onda, D. Knopf and K. McLeod concerning the Ricci flow on three-dimensional Lie groups in the case of Levi-Civita connectivity are generalised.

Keywords: Ricci flow; three-dimensional non-unimodular Lie groups; semisymmetric equiaffine connections.

Введение

Р. С. Гамильтон и другие математики исследовали уравнение потока Риччи для связности Леви-Чивиты, которое играет важную роль в римановой геометрии [1]. Класс полусимметрических связностей, содержащий связность Леви-Чивиты, был открыт Э. Картаном [2]. Естественным является изучение потока Риччи на римановых многообразиях с полусимметрической связностью. Известно, что тензор Риччи полусимметрической связности не является симметричным, поэтому необходимо рассматривать полусимметрические эквивалентные связности, т. е. связности с симметричным тензором Риччи.

В данной работе изучается поток Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с полусимметрической эквивалентной связностью. Уравнение потока Риччи в системе координат, предложенной Дж. Милнором, приводится к системам алгебраических и дифференциальных уравнений. Посредством решения сначала подсистемы алгебраических уравнений, а затем системы дифференциальных уравнений находится решение уравнения потока Риччи на трехмерной неунимодулярной группе Ли с метрикой Милнора относительно полусимметрической эквивалентной связности.

В настоящей статье обобщены результаты исследований К. Онды, Д. Кнофа и К. Мак-Леода, касающихся потока Риччи на трехмерных группах Ли с левоинвариантной метрикой Милнора в случае связности Леви-Чивиты [3; 4], а также отражено продолжение работы в этом направлении. Другие результаты содержатся в публикациях [5–9]. Так, их авторы изучали метрики Эйнштейна и солитоны Риччи на группах Ли с полусимметрической связностью.

Предварительные сведения

Пусть M – риманово многообразие размерности n . Определим на многообразии M полусимметрическую связность ∇ формулой

$$\nabla_X Y = \nabla_X^g Y + g(X, Y)V - g(V, Y)X,$$

где X и Y – произвольные векторные поля; ∇^g – связность Леви-Чивиты; $g(X, Y)$ – метрический тензор; V – некоторое фиксированное левоинвариантное векторное поле. Связность ∇ является метрической. Впервые она была описана Э. Картаном в работе [2]. При $V = 0$ связность ∇ совпадает со связностью ∇^g .

Тензор кривизны R и тензор Риччи Ric связности ∇ определяются равенствами

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

$$\text{Ric}(X, Y) = \text{tr}(Z \rightarrow R(X, Z)Y)$$

соответственно.

Рассмотрим на полном многообразии M однопараметрическое семейство римановых метрик $g(t)$ и запишем уравнение потока Риччи

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -\text{Ric}(g(t)). \quad (1)$$

Начало исследованию потока Риччи было положено Р. С. Гамильтоном для связности ∇^g [1]. Известно, что тензор Риччи Ric связности ∇ не является симметричным. По этой причине рассмотрим ситуацию, когда связность ∇ является эквивариантной, т. е. тензор Риччи Ric симметричен. Согласно источнику [7] в случае групп Ли эквивариантность эквивалентна равенству

$$V^i g_{ij} c_{kt}^j = 0, \quad (2)$$

где V^i – координаты вектора; g_{ij} – компоненты метрического тензора; c_{kt}^j – структурные константы алгебры Ли, определяемые разложением $[E_k, E_t] = c_{kt}^j E_j$ для некоторого ортобазиса E_i . В инвариантной форме эквивариантность имеет вид

$$g(V, [X, Y]) = 0.$$

Нетрудно заметить, что наличие нетривиальной эквивариантной связности ∇ зависит от алгебраического строения группы Ли. Так, в случае с простой группой Ли единственной такой связностью является связность ∇^g , а в случае с коммутативной группой – любая инвариантная связность ∇ .

Пусть $M = G$ – группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, g – ее алгебра Ли. Зафиксируем базис $\{E_1, \dots, E_n\}$ в алгебре g и положим, что

$$[E_i, E_j] = c_{ij}^k E_k, \quad g(E_i, E_j) = g_{ij}, \quad c_{ijs} = c_{ij}^k g_{ks}.$$

Также зафиксируем некоторое левоинвариантное векторное поле V , с помощью которого определим на группе G связность ∇ . Тогда символы Кристоффеля связности ∇ задаются формулами

$$\Gamma_{ij}^k = (\Gamma^g)_{ij}^k + g_{ij} V^k - g_{sj} V^s \delta_i^k,$$

где $(\Gamma^g)_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ls} (c_{ijl} - c_{jli} + c_{lij})$ – компоненты связности ∇^g ; $\|g^{ks}\|$ – матрица, обратная к матрице $\|g_{ks}\|$; δ_i^k – символы Кронекера.

Аналогично общему случаю определим тензор кривизны R и тензор Риччи Ric. В базисе $\{E_1, \dots, E_n\}$ их компоненты есть

$$R_{ijks} = (\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p + c_{ij}^l \Gamma_{lk}^p) g_{ps},$$

$$\text{Ric}_{ik} = R_{ijks} g^{js}$$

соответственно.

Исследуем поведение потоков Риччи для некоторых классических левоинвариантных римановых метрик на группах Ли малых размерностей.

Полусимметрические эквивариантные связности на трехмерных неунимодулярных группах Ли

Пусть G – трехмерная неунимодулярная группа Ли. Тогда в алгебре g существует ортобазис $\{E_1, E_2, E_3\}$, называемый базисом Милнора [10], такой, что

$$[E_1, E_2] = \alpha E_1 + \beta E_2, \quad [E_1, E_3] = \nu E_2 + (2 - \alpha) E_3.$$

Рассмотрим на группе G однопараметрическое семейство левоинвариантных римановых метрик

$$g(t) = A(t) (\theta^1)^2 + B(t) (\theta^2)^2 + C(t) (\theta^3)^2,$$

где $\{\theta^i\}$ – кобазис к базису Милнора $\{E_i\}$. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма. Для полусимметрических эквивариантных связностей на трехмерных неунимодулярных группах Ли имеет место один из следующих возможных случаев.

1. $V = (0, 0, 0) \quad \forall \alpha, \beta, \nu \in \mathbb{R}$.
2. $V = (v_1, 0, 0), \quad v_1 \neq 0, \quad \alpha = 0 \quad \forall \beta, \nu \in \mathbb{R}$.
3. $V = (0, v_2, 0), \quad v_2 \neq 0, \quad \beta = \nu = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
4. $V = (0, 0, v_3), \quad v_3 \neq 0, \quad \alpha = 2 \quad \forall \beta, \nu \in \mathbb{R}$.
5. $V = (v_1, v_2, 0), \quad v_1 \neq 0, \quad v_2 \neq 0, \quad \alpha = \beta = \nu = 0$.
6. $V = (0, v_2, v_3), \quad v_2 \neq 0, \quad v_3 \neq 0, \quad \alpha = 2, \quad \beta = \nu = 0$.

7. $V = (v_1, 0, v_3)$, $v_1 \neq 0$, $v_3 \neq 0$ (в этом случае решений нет).

8. $V = (v_1, v_2, v_3)$, $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$, $\alpha = 2$, $v = 0$, $A(t) = -\frac{\beta v_2}{2v_1} B(t)$, $\frac{\beta v_2}{2v_1} < 0$.

Доказательство. Учитывая условие эквивалентности (2), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A(t)\alpha v_1 + B(t)\beta v_2 = 0, \\ B(t)v v_2 + C(t)(2 - \alpha)v_3 = 0, \\ B(t)v v_2 - C(t)(2 - \alpha)v_3 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

При $V = (0, 0, 0)$ система (3) имеет решение для всех $\alpha, \beta, v \in \mathbb{R}$.

При $V = (v_1, 0, 0)$ система (3) принимает вид $A(t)\alpha v_1 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

При $V = (0, v_2, 0)$ система (3) сводится к виду

$$\begin{cases} B(t)\beta v_2 = 0, \\ B(t)v v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = v = 0.$$

При $V = (0, 0, v_3)$ система (3) имеет вид $C(t)(2 - \alpha)v_3 = 0 \Rightarrow \alpha = 2$.

При $V = (v_1, v_2, 0)$ система (3) принимает вид

$$\begin{cases} A(t)\alpha v_1 + B(t)\beta v_2 = 0, \\ B(t)v v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = v = 0.$$

При $V = (0, v_2, v_3)$ система (3) сводится к виду

$$\begin{cases} B(t)\beta v_2 = 0, \\ B(t)v v_2 + C(t)(2 - \alpha)v_3 = 0, \\ B(t)v v_2 - C(t)(2 - \alpha)v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2, \beta = v = 0.$$

При $V = (v_1, 0, v_3)$ система (3) имеет вид

$$\begin{cases} A(t)\alpha v_1 = 0, \\ C(t)(2 - \alpha)v_3 = 0. \end{cases}$$

Так как $v_1 \neq 0$, $v_3 \neq 0$, система относительно α решений не имеет.

При $V = (v_1, v_2, v_3)$ система (3) принимает вид

$$\begin{cases} A(t)\alpha v_1 + B(t)\beta v_2 = 0, \\ B(t)v v_2 + C(t)(2 - \alpha)v_3 = 0, \\ B(t)v v_2 - C(t)(2 - \alpha)v_3 = 0. \end{cases}$$

Из второго и третьего уравнений системы получаем $\alpha = 2$, $v = 0$. Подставляя в первое уравнение найденные значения, получаем $A(t) = -\frac{\beta v_2}{2v_1} B(t)$, $\frac{\beta v_2}{2v_1} < 0$.

Решения уравнения потока Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с полусимметрической эквивалентной связностью

Применяя основную лемму, запишем и решим уравнение потока Риччи для каждого возможного случая.

Теорема. Пусть G – трехмерная неунимодулярная группа Ли с полусимметрической эквивалентной связностью. Тогда решения уравнения потока Риччи (1) имеют следующий вид.

1. В случае если $V = (0, 0, 0) \forall \beta \in \mathbb{R}$:

1.1. При $\alpha = \nu = 0$ получаем

$$\begin{cases} A(t) = A_0 - (\beta^2 + 4)t, \\ B(t) = B_0 \left| \frac{\beta^2 + 4}{A_0} t - 1 \right|^{\frac{\beta(\beta^2 + 2)}{\beta^2 + 4}}, \\ C(t) = C_0 \left| \frac{\beta^2 + 4}{A_0} t - 1 \right|^{\frac{2(\beta^2 + 2)}{\beta^2 + 4}}. \end{cases}$$

1.2. При $\alpha = 2, \nu = 0$ получаем

$$\begin{cases} A(t) = A_0 - \left(\beta^2 + \frac{4A}{B_0} \right) t, \\ B(t) = B_0 - \left(\frac{B_0}{A_0} \beta^2 + 4 \right) t, \\ C(t) = C_0. \end{cases}$$

2. В случае если $V = (\nu_1, 0, 0), \nu_1 \neq 0, \alpha = 0$:

2.1. При $\nu = 0, \nu_1(\beta + 2) > 0$ имеем

$$\begin{cases} A(t) = (A_0 + A_1)e^{-\lambda t} - A_1, \\ B(t) = B_0 \left| 1 + \frac{A_1}{A_0}(1 - e^{\lambda t}) \right|^{\frac{\beta}{A_1 \nu_1} e^{\frac{A_0 + A_1}{\beta + 2} \nu_1 (e^{-\lambda t} - 1) - \nu_1 \beta \left(1 + \frac{4}{\beta + 2} \right) t}}, \\ C(t) = C_0 \left| 1 + \frac{A_1}{A_0}(1 - e^{\lambda t}) \right|^{\frac{2}{A_1 \nu_1} e^{\frac{A_0 + A_1}{\beta + 2} \nu_1 (e^{-\lambda t} - 1) - \nu_1 \beta \left(3 - \frac{4}{\beta + 2} \right) t}}, \end{cases}$$

где $A_1 = \frac{\beta^2 + 4}{\nu_1(\beta + 2)} > 0; \lambda = \nu_1(\beta + 2) > 0$.

2.2. При $\nu = 0, \nu_1(\beta + 2) > 0$ имеем

$$\begin{cases} A(t) = \pm |A_0 - \tilde{A}_1| e^{\tilde{\lambda} t} + \tilde{A}_1, \\ B(t) = B_0 \left| \frac{\pm |A_0 - \tilde{A}_1| + \tilde{A}_1 e^{-\tilde{\lambda} t}}{\pm |A_0 - \tilde{A}_1| + \tilde{A}_1} \right|^{\frac{\beta}{\tilde{A}_1 \nu_1} e^{\pm |A_0 - \tilde{A}_1| \frac{\nu_1}{\beta + 2} (e^{\tilde{\lambda} t} - 1) - \nu_1 \beta \left(1 + \frac{4}{\beta + 2} \right) t}}, \\ C(t) = C_0 \left| \frac{\pm |A_0 - \tilde{A}_1| + \tilde{A}_1 e^{-\tilde{\lambda} t}}{\pm |A_0 - \tilde{A}_1| + \tilde{A}_1} \right|^{\frac{2}{\tilde{A}_1 \nu_1} e^{\pm |A_0 - \tilde{A}_1| \frac{\nu_1}{\beta + 2} (e^{\tilde{\lambda} t} - 1) - \nu_1 \beta \left(3 - \frac{4}{\beta + 2} \right) t}}, \end{cases}$$

где $\tilde{A}_1 = -\frac{\beta^2 + 4}{\nu_1(\beta + 2)} > 0; \tilde{\lambda} = -\nu_1(\beta + 2) > 0$.

3. В случае если $V = (0, v_2, 0)$, $\beta = v = 0$:

3.1. При $\alpha = 0$ получаем

$$\begin{cases} A(t) = \left(A_0 + \frac{4}{v_2^2 B_0} \right) e^{-v_2^2 B_0 t} - \frac{4}{v_2^2 B_0}, \\ B(t) = B_0, \\ C(t) = \frac{C_0}{A_0} \left[\left(A_0 + \frac{4}{v_2^2 B_0} \right) e^{-v_2^2 B_0 t} - \frac{4}{v_2^2 B_0} \right]. \end{cases}$$

3.2. При $\alpha = 2$, $v_2 < 0$ получаем

$$\begin{cases} A(t) = A_0 \left| 1 - \frac{2}{v_2 B_0} + \frac{2}{v_2 B_0} e^{-2v_2 t} \right| e^{\frac{1}{2}(2 - v_2 B_0)(e^{2v_2 t} - 1) + 2v_2 t}, \\ B(t) = \frac{2}{v_2} + \left(B_0 - \frac{2}{v_2} \right) e^{2v_2 t}, \\ C(t) = C_0 e^{\frac{1}{2}(2 - v_2 B_0)(e^{2v_2 t} - 1)}. \end{cases}$$

3.3. При $\alpha = 2$, $v_2 > 0$ получаем

$$\begin{cases} A(t) = A_0 \left| \frac{\frac{2}{v_2} e^{-2v_2 t} \pm \left| B_0 - \frac{2}{v_2} \right|}{\frac{2}{v_2} \pm \left| B_0 - \frac{2}{v_2} \right|} \right| e^{\pm \frac{v_2}{2} \left| B_0 - \frac{2}{v_2} \right| (1 - e^{2v_2 t}) + 2v_2 t}, \\ B(t) = \frac{2}{v_2} \pm \left| B_0 - \frac{2}{v_2} \right| e^{2v_2 t}, \\ C(t) = C_0 e^{\pm \frac{v_2}{2} \left| B_0 - \frac{2}{v_2} \right| (1 - e^{2v_2 t})}. \end{cases}$$

4. В случае если $V = (0, 0, v_3)$, $\alpha = 2$, при $v = 0 \ \forall \beta \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{cases} A(t) = \left(A_0 + \frac{4A_0 + B_0\beta^2}{v_3^2 B_0 C_0} \right) e^{-v_3^2 C_0 t} - \frac{4A_0 + B_0\beta^2}{v_3^2 B_0 C_0}, \\ B(t) = \left(B_0 + \frac{4A_0 + B_0\beta^2}{v_3^2 A_0 C_0} \right) e^{-v_3^2 C_0 t} - \frac{4A_0 + B_0\beta^2}{v_3^2 A_0 C_0}, \\ C(t) = C_0. \end{cases}$$

5. В случае если $V = (v_1, v_2, 0)$, $\alpha = \beta = v = 0$, решений нет.

6. В случае если $V = (0, v_2, v_3)$, $\alpha = 2$, $\beta = v = 0$, решений нет.

7. В случае если $V = (v_1, v_2, v_3)$, $\alpha = 2$, $v = 0$, $A(t) = -\frac{\beta v_2}{2v_1} B(t)$, $\frac{\beta v_2}{2v_1} < 0$, $\beta \neq 0$, решений нет.

Доказательство. Докажем теорему для каждого возможного случая.

1. Пусть $V = (0, 0, 0)$. Тогда уравнение потока Риччи имеет вид

$$\begin{cases} \alpha(\alpha - 2) = 0, \\ \alpha v = 0, \\ \frac{B(t)}{A(t)} v(\alpha - 2) = 0, \\ \frac{dA}{dt} = -\frac{2A(t)C(t)\alpha^2 + B(t)^2 v^2 + 2B(t)C(t)\alpha^2 - 8B(t)C(t)\alpha + 2B(t)C(t)\beta^2 + 8B(t)C(t)}{2B(t)C(t)}, \\ \frac{dB}{dt} = -\frac{2A(t)C(t)\alpha^2 - B(t)^2 v^2 - 2B(t)C(t)\alpha\beta + 2B(t)C(t)\beta^2 + 4B(t)C(t)\beta}{2A(t)C(t)}, \\ \frac{dC}{dt} = -\frac{B(t)^2 v^2 + 2C(t)\alpha^2 - 2C(t)\alpha\beta - 8C(t)\alpha + 4C(t)\beta + 8C(t)}{2A(t)}. \end{cases}$$

С учетом системы алгебраических уравнений достаточно рассмотреть следующие случаи.

1.1. Пусть $\alpha = v = 0$. Тогда система дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -\beta^2 - 4, \\ \frac{dB}{dt} = -\frac{B(t)\beta(\beta + 2)}{A(t)}, \\ \frac{dC}{dt} = -\frac{2C(t)(\beta + 2)}{A(t)}. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} A(t) = A_0 - (\beta^2 + 4)t, \\ B(t) = B_0 \left| \frac{\beta^2 + 4}{A_0} t - 1 \right|^{\frac{\beta(\beta^2 + 2)}{\beta^2 + 4}}, \\ C(t) = C_0 \left| \frac{\beta^2 + 4}{A_0} t - 1 \right|^{\frac{2(\beta^2 + 2)}{\beta^2 + 4}}. \end{cases}$$

1.2. Пусть $\alpha = 2, v = 0$. Тогда система дифференциальных уравнений сводится к виду

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -\frac{4A(t) + B(t)\beta^2}{B(t)}, \\ \frac{dB}{dt} = -\frac{4A(t) + B(t)\beta^2}{A(t)}, \\ \frac{dC}{dt} = 0. \end{cases}$$

Отсюда, разделяя переменные, имеем

$$\begin{cases} A(t) = A_0 - \left(\beta^2 + \frac{4A}{B_0} \right) t, \\ B(t) = B_0 - \left(\frac{B_0}{A_0} \beta^2 + 4 \right) t, \\ C(t) = C_0. \end{cases}$$

2. Пусть $V = (v_1, 0, 0)$, $v_1 \neq 0$, $\alpha = 0$. Тогда уравнение потока Риччи имеет вид

$$\begin{cases} \frac{B(t)(A(t)v_1 + 4)v}{2A(t)} = 0, \\ \frac{dA}{dt} = -\frac{2A(t)C(t)\beta v_1 + 4A(t)C(t)v_1 + B(t)v^2 + 2C(t)\beta^2 + 8C(t)}{2C(t)}, \\ \frac{dB}{dt} = -B(t) \frac{2A(t)^2 C(t)v_1^2 + 4A(t)C(t)\beta v_1 + 8A(t)C(t)v_1 - B(t)v^2 + 2C(t)\beta^2 + 4C(t)\beta}{2A(t)C(t)}, \\ \frac{dC}{dt} = -\frac{2A(t)^2 C(t)v_1^2 + 4A(t)C(t)\beta v_1 + 8A(t)C(t)v_1 + B(t)v^2 + 4C(t)\beta + 8C(t)}{2A(t)}. \end{cases}$$

С учетом системы алгебраических уравнений получаем систему дифференциальных уравнений при $v = 0$

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -A(t)(\beta + 2)v_1 - \beta^2 - 4, \\ \frac{dB}{dt} = -\frac{B(t)(A(t)v_1 + \beta)(A(t)v_1 + \beta + 2)}{A(t)}, \\ \frac{dC}{dt} = -\frac{C(t)(A(t)v_1 + 2)(A(t)v_1 + \beta + 2)}{A(t)}. \end{cases}$$

Отсюда имеем $\left| A(t) + \frac{\beta^2 + 4}{v_1(\beta + 2)} \right| = \left| A_0 + \frac{\beta^2 + 4}{v_1(\beta + 2)} \right| e^{-v_1(\beta + 2)t}$.

2.1. Если $v_1(\beta + 2) > 0$, то решение системы дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} A(t) = (A_0 + A_1)e^{-\lambda t} - A_1, \\ B(t) = B_0 \left| 1 + \frac{A_1}{A_0} (1 - e^{\lambda t}) \right|^{\frac{\beta}{A_1 v_1}} e^{\frac{A_0 + A_1}{\beta + 2} v_1 (e^{-\lambda t} - 1) - v_1 \beta \left(1 + \frac{4}{\beta + 2} \right) t}, \\ C(t) = C_0 \left| 1 + \frac{A_1}{A_0} (1 - e^{\lambda t}) \right|^{\frac{2}{A_1 v_1}} e^{\frac{A_0 + A_1}{\beta + 2} v_1 (e^{-\lambda t} - 1) - v_1 \beta \left(3 - \frac{4}{\beta + 2} \right) t}, \end{cases}$$

где $A_1 = \frac{\beta^2 + 4}{v_1(\beta + 2)} > 0$; $\lambda = v_1(\beta + 2) > 0$.

2.2. Если $v_1(\beta + 2) < 0$, то получаем следующее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} A(t) = \pm |A_0 - \tilde{A}_1| e^{\tilde{\lambda}t} + \tilde{A}_1, \\ B(t) = B_0 \left| \frac{\pm |A_0 - \tilde{A}_1| + \tilde{A}_1 e^{-\tilde{\lambda}t}}{\pm |A_0 - \tilde{A}_1| + \tilde{A}_1} \right|^{\frac{\beta}{\tilde{A}_1 v_1}} e^{\pm |A_0 - \tilde{A}_1| \frac{v_1}{\beta + 2} (e^{\tilde{\lambda}t} - 1) - v_1 \beta \left(1 + \frac{4}{\beta + 2}\right)t}, \\ C(t) = C_0 \left| \frac{\pm |A_0 - \tilde{A}_1| + \tilde{A}_1 e^{-\tilde{\lambda}t}}{\pm |A_0 - \tilde{A}_1| + \tilde{A}_1} \right|^{\frac{2}{\tilde{A}_1 v_1}} e^{\pm |A_0 - \tilde{A}_1| \frac{v_1}{\beta + 2} (e^{\tilde{\lambda}t} - 1) - v_1 \beta \left(3 - \frac{4}{\beta + 2}\right)t}, \end{cases}$$

где $\tilde{A}_1 = -\frac{\beta^2 + 4}{v_1(\beta + 2)} > 0$; $\tilde{\lambda} = -v_1(\beta + 2) > 0$.

3. Пусть $V = (0, v_2, 0)$, $v_2 \neq 0$, $\beta = v = 0$. Тогда уравнение потока Риччи сводится к виду

$$\begin{cases} \alpha(\alpha - 2) = 0, \\ \frac{dA}{dt} = -\frac{A(t)B(t)^2 v_2^2 - 2A(t)B(t)\alpha v_2 + A(t)\alpha^2 + B(t)\alpha^2 - 4B(t)\alpha^2 + B(t)}{B(t)}, \\ \frac{dB}{dt} = -\alpha(B(t)v_2 - \alpha), \\ \frac{dC}{dt} = -C(t) \frac{A(t)B(t)v_2^2 - A(t)\alpha v_2 + \alpha^2 - 4\alpha + 4}{A(t)}. \end{cases}$$

С учетом системы алгебраических уравнений достаточно рассмотреть следующие случаи.

3.1. Пусть $\alpha = 0$. Тогда система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -A(t)B(t)v_2^2 - 4, \\ \frac{dB}{dt} = 0, \\ \frac{dC}{dt} = -\frac{C(t)(A(t)B(t)v_2^2 + 4)}{A(t)}. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} A(t) = \left(A_0 + \frac{4}{v_2^2 B_0} \right) e^{-v_2^2 B_0 t} - \frac{4}{v_2^2 B_0}, \\ B(t) = B_0, \\ C(t) = \frac{C_0}{A_0} \left[\left(A_0 + \frac{4}{v_2^2 B_0} \right) e^{-v_2^2 B_0 t} - \frac{4}{v_2^2 B_0} \right]. \end{cases}$$

Пусть $\alpha = 2$. Тогда система дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -\frac{A(t)(B(t)v_2 - 2)^2}{B(t)}, \\ \frac{dB}{dt} = 2(B(t)v_2 - 2), \\ \frac{dC}{dt} = -v_2 C(t)(B(t)v_2 - 2). \end{cases}$$

Отсюда имеем $\left| B(t) - \frac{2}{v_2} \right| = \left| B_0 - \frac{2}{v_2} \right| e^{2v_2 t}$.

3.2. Если $v_2 < 0$, то решение системы дифференциальных уравнений сводится к виду

$$\begin{cases} A(t) = A_0 \left| 1 - \frac{2}{B_0 v_2} + \frac{2}{B_0 v_2} e^{-2v_2 t} \right| e^{\frac{1}{2}(2 - v_2 B_0)(e^{2v_2 t} - 1) + 2v_2 t}, \\ B(t) = \frac{2}{v_2} + \left(B_0 - \frac{2}{v_2} \right) e^{2v_2 t}, \\ C(t) = C_0 e^{\frac{1}{2}(2 - v_2 B_0)(e^{2v_2 t} - 1)}. \end{cases}$$

3.3. Если $v_2 > 0$, то получаем следующее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} A(t) = A_0 \left| \frac{\frac{2}{v_2} e^{-2v_2 t} \pm \left| B_0 - \frac{2}{v_2} \right|}{\frac{2}{v_2} \pm \left| B_0 - \frac{2}{v_2} \right|} \right| e^{\pm \frac{v_2}{2} \left| B_0 - \frac{2}{v_2} \right| (1 - e^{2v_2 t}) + 2v_2 t}, \\ B(t) = \frac{2}{v_2} \pm \left| B_0 - \frac{2}{v_2} \right| e^{2v_2 t}, \\ C(t) = C_0 e^{\pm \frac{v_2}{2} \left| B_0 - \frac{2}{v_2} \right| (1 - e^{2v_2 t})}. \end{cases}$$

4. Пусть $V = (0, 0, v_3)$, $v_3 \neq 0$, $\alpha = 2$, тогда уравнение потока Риччи имеет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{2} B(t) v v_3 = 0, \\ 2v = 0, \\ \frac{dA}{dt} = - \frac{2A(t)B(t)C(t)^2 v_3^2 + 8A(t)C(t) + B(t)^2 v^2 + 2B(t)C(t)\beta^2}{2B(t)C(t)}, \\ \frac{dB}{dt} = - \frac{2A(t)B(t)C(t)^2 v_3^2 + 8A(t)C(t) - B(t)^2 v^2 + 2B(t)C(t)\beta^2}{2A(t)C(t)}, \\ \frac{dC}{dt} = - \frac{B(t)v^2}{2A(t)}. \end{cases}$$

С учетом системы алгебраических уравнений получаем систему дифференциальных уравнений при $v = 0$

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = - \frac{A(t)B(t)C(t)v_3^2 + 4A(t) + B(t)\beta^2}{B(t)}, \\ \frac{dB}{dt} = - \frac{A(t)B(t)C(t)v_3^2 + 4A(t) + B(t)\beta^2}{A(t)}, \\ \frac{dC}{dt} = 0. \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} A(t) = \left(A_0 + \frac{4A_0 + B_0\beta^2}{v_3^2 B_0 C_0} \right) e^{-v_3^2 c_0 t} - \frac{4A_0 + B_0\beta^2}{v_3^2 B_0 C_0}, \\ B(t) = \left(B_0 + \frac{4A_0 + B_0\beta^2}{v_3^2 A_0 C_0} \right) e^{-v_3^2 c_0 t} - \frac{4A_0 + B_0\beta^2}{v_3^2 A_0 C_0}, \\ C(t) = C_0. \end{cases}$$

5. Пусть $V = (v_1, v_2, 0)$, $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, $\alpha = \beta = v = 0$. Тогда уравнение потока Риччи принимает вид

$$\begin{cases} A(t)B(t)v_1v_2 = 0, \\ \frac{dA}{dt} = -A(t)B(t)v_2^2 - 2A(t) - 4, \\ \frac{dB}{dt} = -B(t)v_1(A(t)v_1 + 2), \\ \frac{dC}{dt} = -C(t) \frac{A(t)^2v_1^2 + A(t)B(t)v_2^2 + 4A(t)v_2^2 + 4}{B(t)}. \end{cases}$$

Так как $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, система решений не имеет.

6. Пусть $V = (0, v_2, v_3)$, $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$, $\alpha = 2$, $\beta = v = 0$. Тогда уравнение потока Риччи сводится к виду

$$\begin{cases} B(t)C(t)v_2v_3 = 0, \\ \frac{dA}{dt} = - \frac{A(t)B(t)^2v_2^2 + B(t)C(t)v_3^2 - 4B(t)v_2 + 4}{B(t)}, \\ \frac{dB}{dt} = -B(t)C(t)v_3^2 + 2B(t)v_2 - 4. \end{cases}$$

Так как $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$, система решений не имеет.

7. Пусть $V = (v_1, v_2, v_3)$, $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$, $\alpha = 2$, $v = 0$, $A(t) = -\frac{\beta v_2}{2v_1} B(t)$, $\frac{\beta v_2}{2v_1} < 0$. Тогда уравнение потока Риччи принимает вид

$$\begin{cases} B(t)C(t)\beta v_2v_3 = 0, \\ B(t)C(t)v_2v_3 = 0, \\ B(t)\beta v_2(B(t)v_2 - 1) = 0, \\ B(t)\beta v_2(B(t)v_2 - 2) = 0, \\ \frac{dA}{dt} = B(t)^2 \frac{\beta v_3^3}{v_1} + B(t)C(t) \frac{\beta v_2v_3^2}{v_1} + B(t)\beta^2v_2 - 4B(t) \frac{\beta v_2^2}{v_1} + \beta^2 - \frac{4v_2}{v_1}, \\ \frac{dB}{dt} = B(t)^2 \frac{\beta v_1v_3^2}{v_2} - B(t)C(t)v_3^2 - 2B(t)\beta v_1 + 2B(t)v_2 + \frac{\beta v_1}{v_2} - 4, \\ \frac{dC}{dt} = C(t)(B(t)\beta v_1v_2 - B(t)v_2^2 - \beta v_1 + v_2). \end{cases}$$

С учетом алгебраических и дифференциальных уравнений получаем $\beta = 0$, $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$. Отсюда имеем $A(t) = 0$, что является противоречием. Значит, система несовместна.

Заключение

Проведено исследование потока Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с полусимметрической эквивариантной связностью. Получено явное представление потока Риччи в системе координат, предложенной Дж. Милнором. Найдено точное решение уравнения потока Риччи для трехмерных неунимодулярных групп Ли с полусимметрической эквивариантной связностью.

Библиографические ссылки

1. Hamilton RS. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *Journal of Differential Geometry*. 1982;17(2):255–306. DOI: 10.4310/JDG/1214436922.
2. Cartan E. Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie). *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*. 1925;42:17–88.
3. Onda K. Ricci flow on 3-dimensional Lie groups and 4-dimensional Ricci-flat manifolds. arXiv:0906.1035 [Preprint]. 2010 [cited 2010 March 24]: [25 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/0906.1035>.
4. Knopf D, McLeod K. Quasi-convergence of model geometries under the Ricci flow. *Communications in Analysis and Geometry*. 2001;9(4):879–919. DOI: 10.4310/CAG.2001.v9.n4.a7.
5. Klepikov PN, Rodionov ED, Khromova OP. Einstein's equation on three-dimensional metric Lie groups with vector torsion. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023;276(6):733–745. DOI: 10.1007/s10958-023-06796-1.
6. Павлова АА, Хромова ОП. О симметрических потоках Риччи полусимметрических связностей на трехмерных метрических группах Ли. В: Казанский (Приволжский) федеральный университет. *Материалы международной конференции «Лобачевские чтения»; 30 июня – 4 июля 2022 г.; Казань, Россия*. Казань: Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета; 2022. с. 96–97 (Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского; том 62).
7. Клепиков ПН, Родионов ЕД, Хромова ОП. Инвариантные солитоны Риччи на метрических группах Ли с полусимметрической связностью. *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры*. 2023;222: 19–29. DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-19-29.
8. Клепиков ПН, Родионов ЕД, Хромова ОП. Инвариантные солитоны Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и полусимметрической связностью. *Сибирские электронные математические известия*. 2023;20(1):48–61. DOI: 10.33048/semi.2023.20.005.
9. Клепиков ПН, Родионов ЕД, Хромова ОП. Трехмерные неунимодулярные группы Ли с римановой метрикой инвариантного солитона Риччи и полусимметрической метрической связностью. *Известия вузов. Математика*. 2022;5:80–85. DOI: 10.26907/0021-3446-2022-5-80-85.
10. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups. *Advances in Mathematics*. 1976;21:293–329.

Получена 25.03.2025 / исправлена 20.06.2025 / принята 20.06.2025.
Received 25.03.2025 / revised 20.06.2025 / accepted 20.06.2025.